

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ**

**JOÃO VITOR MORASKI LUNKES**

**APLICAÇÃO DO QUANTUM APPROXIMATE OPTIMIZATION ALGORITHM  
(QAOA) EM FUNDOS IMOBILIÁRIOS: UMA ABORDAGEM PRÁTICA DE  
QUANTUM FINANCE**

**CAMPO MOURÃO**

**2025**

**JOÃO VITOR MORASKI LUNKES**

**APLICAÇÃO DO QUANTUM APPROXIMATE OPTIMIZATION ALGORITHM  
(QAOA) EM FUNDOS IMOBILIÁRIOS: UMA ABORDAGEM PRÁTICA DE  
QUANTUM FINANCE**

**Application of the Quantum Approximate Optimization Algorithm (QAOA) to  
Real Estate Investment Funds: A Practical Approach in Quantum Finance**

Proposta de Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação como requisito para obtenção do título de Bacharel em Ciência da Computação do Curso de Bacharelado em Ciência da Computação da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.  
Orientador(a): Prof. Dr. João Fabrício Filho.

**CAMPO MOURÃO**

**2025**



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

Esta licença permite compartilhamento, remixe, adaptação e criação a partir do trabalho, mesmo para fins comerciais, desde que sejam atribuídos créditos ao(s) autor(es). Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.

**JOÃO VITOR MORASKI LUNKES**

**APLICAÇÃO DO QUANTUM APPROXIMATE OPTIMIZATION ALGORITHM  
(QAOA) EM FUNDOS IMOBILIÁRIOS: UMA ABORDAGEM PRÁTICA DE  
QUANTUM FINANCE**

Este é um modelo de folha de aprovação destinado para os TCCs e TCCes. Para dissertações e teses, a folha de aprovação deverá ser gerada pelo Sistema Acadêmico e inserida na versão final como texto (não inserir como imagem)

Proposta de Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação como requisito para obtenção do título de Bacharel em Ciência da Computação do Curso de Bacharelado em Ciência da Computação da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Data de aprovação: 08 / dezembro / 2025

---

João Fabrício Filho  
Doutorado  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

---

Rodrigo Campiolo  
Doutorado  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

---

Juliano Henrique Foleis  
Doutorado  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

**CAMPO MOURÃO  
2025**

Dedico este trabalho às pessoas que estiveram  
ao meu lado com paciência, apoio e incentivo,  
sendo esses minha família, meu orientador e  
meus amigos.

## **AGRADECIMENTOS**

Certamente estas palavras não contemplam todas as pessoas que fizeram parte desta etapa importante da minha vida. Ainda assim, deixo registrada minha gratidão a todos que contribuíram direta ou indiretamente.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. João Fabrício Filho, pela orientação precisa e sempre atenta. Sua clareza, paciência e disposição em explicar conceitos complexos de forma simples foram fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho. Este projeto só alcançou sua forma atual graças ao acompanhamento próximo e ao compromisso que demonstrou em cada etapa.

Agradeço também à minha família, pelo apoio constante durante todo o processo. Estiveram sempre presentes, ajudando nas tarefas do dia a dia e criando um ambiente mais leve para que eu pudesse me dedicar ao estudo. Incluo aqui o cuidado que tiveram ao brincar com minha gata nos momentos em que eu precisava de tranquilidade, algo que contribuiu mais para minha rotina do que eles imaginam.

Meus agradecimentos vão igualmente aos amigos que dedicaram tempo para ouvir explicações, revisar ideias e até acompanhar simulações de apresentação para que eu pudesse treinar. Cada conversa e cada chamada ajudaram a fortalecer meu entendimento ao longo do caminho.

Por fim, agradeço a todos que, de alguma forma, contribuíram para a realização desta pesquisa.

“I think I can safely say that nobody understand quantum mechanics.” (Feynman, 1982).

## RESUMO

Este trabalho propõe uma aplicação do algoritmo *Quantum Approximate Optimization Algorithm* (QAOA) para o problema de otimização de portfólios de Fundos de Investimento Imobiliários (FIIs), utilizando dados reais do mercado brasileiro. O modelo utiliza uma heurística prática baseada em três indicadores financeiros: *Dividend Yield* (retorno distribuído), P/VP (relação entre preço de mercado e valor patrimonial) e volatilidade anual (medida de instabilidade do ativo), incorporando penalidades de cardinalidade e de orçamento global e unitário na função de custo. Os dados foram coletados dos informes mensais da Comissão de Valores Mobiliários (CVM) e complementados com preços históricos obtidos pela API do *Yahoo Finance*. O problema será formulado no formato *Quadratic unconstrained binary optimization* (QUBO) e implementado com a biblioteca Qiskit, permitindo simulações do comportamento do QAOA em dispositivos da era *Noisy Intermediate-Scale Quantum* (NISQ). Nos testes preliminares da heurística clássica, os dois ativos selecionados permaneceram dentro do orçamento (R\$ 306,80 de R\$ 400), indicando que a função de custo e as penalidades atuaram de forma coerente. A proposta demonstra o potencial de algoritmos quânticos em aplicações financeiras e contribui para a adaptação prática de métodos quânticos a problemas de otimização realistas.

Palavras-chave: computação quântica; ; otimização de portfólios; nisq; .

## ABSTRACT

This work proposes an application of the *Quantum Approximate Optimization Algorithm* (QAOA) to the portfolio optimization problem focused on Brazilian Real Estate Investment Funds (FIs), using real market data. The model employs a practical heuristic based on three financial indicators: *Dividend Yield* (distributed return), P/BV (ratio between market price and book value), and annual volatility (measure of price instability), incorporating cardinality and both global and per-asset budget penalties into the cost function. The data were collected from the monthly reports of the *Comissão de Valores Mobiliários* (CVM), the Brazilian Securities and Exchange Commission, and supplemented with historical prices obtained through the *Yahoo Finance* API. The problem will be formulated in the *Quadratic Unconstrained Binary Optimization* (QUBO) format and implemented using the Qiskit library, enabling simulations of QAOA behavior on *Noisy Intermediate-Scale Quantum* (NISQ) devices. In preliminary tests of the classical heuristic, the two selected assets remained within the budget (R\$ 306,80 out of R\$ 400), indicating that the cost function and penalties operated coherently. The proposal demonstrates the potential of quantum algorithms in financial applications and contributes to the practical adaptation of quantum methods to realistic optimization problems.

Keywords: quantum computing; qaoa; portfolio optimization; nisq; real estate investment funds.



## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 1 – Esfera de Bloch para superposição 70/30 .....</b>	<b>16</b>
---	-----------

## LISTA DE TABELAS

<b>Tabela 1 – Cronograma .....</b>	<b>27</b>
<b>Tabela 2 – Resultados preliminares da heurística determinística com penalidade de orçamento.....</b>	<b>28</b>

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO .....	11
1.1	Motivação .....	12
1.2	Objetivos .....	12
1.3	Resumo dos resultados preliminares .....	13
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA .....	14
2.1	Computação Quântica .....	14
2.1.1	Eras da computação quântica .....	14
2.2	Qubit .....	15
2.3	Propriedades quânticas .....	16
2.3.1	Esfera de Bloch .....	16
2.4	Portas quânticas .....	17
2.4.1	Portas reversíveis .....	18
2.4.2	Portas de 1 Qubit .....	18
2.4.2.1	Portas X, Z, H e $R_x$ e $R_z$ .....	18
2.4.3	Portas de múltiplos <i>qubits</i> e CNOT(CX) .....	19
2.4.4	Mercado financeiro e o problema de otimização .....	19
2.4.5	O problema de otimização de portfólio .....	20
2.4.6	Indicadores financeiros utilizados .....	21
2.5	Quantum Approximation Optimization Algorithm e Qiskit .....	22
3	TRABALHOS RELACIONADOS .....	23
4	PROPOSTA .....	24
4.1	Método de pesquisa .....	24
4.2	Cronograma .....	27
4.3	Resultados preliminares .....	27
5	CONCLUSÃO .....	29
	REFERÊNCIAS .....	30

## 1 INTRODUÇÃO

O mercado financeiro busca maximizar lucros reduzindo riscos (Canabarro *et al.*, 2022; Zaman *et al.*, 2024). Com o surgimento das bolsas de valores, emergiram estudos a respeito da otimização de portfólios, especialmente voltados a grandes instituições financeiras, que precisam decidir em quais ativos investir seu capital (Canabarro *et al.*, 2022).

Um ativo é um elemento de investimento que pode incluir bens fungíveis, como ouro e dinheiro, ou títulos de posse de frações de uma determinada empresa, conhecidos como ações (Canabarro *et al.*, 2022). As empresas geralmente oferecem ações aos investidores no mercado financeiro para arrecadar recursos para expandir seus negócios (Canabarro *et al.*, 2022). A carteira ou portfólio de um investidor é o seu investimento em diferentes tipos de ativos (Canabarro *et al.*, 2022). Assim, a Otimização de Portfólios (PO) é a tarefa fundamental que visa encontrar negociações ótimas para um conjunto de ativos, buscando minimizar o risco (volatilidade) e, ao mesmo tempo, maximizar o retorno esperado (Zaman *et al.*, 2024; Canabarro *et al.*, 2022).

O modelo clássico de otimização foi proposto por Markowitz (1952), marco fundamental da teoria moderna de portfólios. No entanto, sua aplicação prática apresenta limitações, pois o problema é computacionalmente custoso e pertence à classe *NP-Hard*, tornando inviável a resolução exata em portfólios muito grandes (Huot *et al.*, 2024; Uotila; Ripatti; Zhao, 2025).

Diante da complexidade computacional imposta por esses problemas para a computação clássica, o avanço da computação, aliado à física quântica, levou ao surgimento da computação quântica, capaz de lidar com problemas combinatórios complexos de forma potencialmente mais eficiente de que a computação clássica. Nesse contexto, o setor financeiro destaca-se como uma das primeiras a se beneficiar dessas tecnologias (Herman *et al.*, 2022; Ménard *et al.*, 2020), já que seus desafios servem como um campo de testes natural para algoritmos quânticos.

Apesar do progresso, os dispositivos quânticos atuais ainda operam na chamada era *Noisy Intermediate-Scale Quantum (NISQ)* (Pan *et al.*, 2023; Preskill, 2018), caracterizada por alto nível de ruído e número limitado de *qubits*, o que impõe restrições práticas à execução de algoritmos quânticos. Um *qubit* (*bit* quântico) é a unidade fundamental da informação quântica, que, ao contrário do *bit* clássico (0 ou 1), pode existir em uma superposição de 0 e 1 (Kashapogu; Hasib; Rasool, 2024; Jesus *et al.*, 2021).

No caso da otimização de portfólios, o desafio se torna ainda mais evidente: em uma formulação binária, um portfólio com  $n$  ativos possui  $2^n$  combinações possíveis, o que torna inviável a busca exata conforme  $n$  cresce. Essa limitação reforça a busca por abordagens híbridas e algoritmos aproximados, como o QAOA, capazes de explorar o espaço de soluções de maneira mais eficiente mesmo sob as restrições da era NISQ (Pan *et al.*, 2023; Preskill, 2018).

## 1.1 Motivação

A otimização de portfólios rapidamente se torna difícil de resolver de forma exata quando o número de ativos aumenta ou quando são adicionadas restrições práticas, como limites de orçamento ou quantidade máxima de ativos. Métodos clássicos conseguem lidar com casos menores, mas não escalam bem devido ao crescimento exponencial das combinações possíveis.

Com o avanço recente da computação quântica, surgiram algoritmos voltados justamente para problemas combinatórios, mesmo que os dispositivos atuais ainda enfrentem limitações da era NISQ. Isso abre espaço para testar abordagens híbridas que unam métodos clássicos e algoritmos quânticos variacionais.

Nesse contexto, este trabalho propõe o uso do *Quantum Approximate Optimization Algorithm (QAOA)* (Farhi; Goldstone; Gutmann, 2014), amplamente estudado em otimização combinatória (Herman *et al.*, 2022; Kashapogu; Hasib; Rasool, 2024), combinado com uma heurística prática baseada em indicadores financeiros simples. O objetivo é avaliar se essa combinação consegue produzir resultados coerentes ao selecionar portfólios de Fundos de Investimento Imobiliários (FIIs) usando dados reais do mercado brasileiro.

## 1.2 Objetivos

Este trabalho tem como objetivo geral validar uma heurística prática baseada em indicadores financeiros (Dividend Yield, P/VP e volatilidade anual) aplicada ao algoritmo *Quantum Approximate Optimization Algorithm (QAOA)* para o problema de otimização de portfólios de Fundos de Investimento Imobiliários (FIIs), utilizando dados reais do mercado brasileiro.

O indicador *Dividend Yield* (DY) representa o retorno distribuído pelo fundo em relação ao preço de sua cota, servindo como indicador de renda recorrente (Greenhalgh; Campani, 2023). Já o índice P/VP (Preço sobre Valor Patrimonial por cota) sinaliza se o ativo está negociado acima ou abaixo de seu valor patrimonial (B3, 2024b). Por fim, a volatilidade anual mede a variabilidade dos retornos ao longo do tempo, funcionando para análise de risco do ativo (Naldis, 2024).

Esses três indicadores compõem a base da heurística empregada neste estudo, orientando a seleção de ativos antes de sua formulação no modelo quântico.

Os objetivos específicos são:

- Coletar e preparar dados reais de FIIs a partir dos informes mensais da Comissão de Valores Mobiliários (CVM), órgão responsável por regular e supervisionar o mercado de capitais no Brasil, complementando informações de preço e histórico com a API do Yahoo Finance.
- Normalizar e transformar os indicadores (DY, P/VP e volatilidade) em valores comparáveis, adequados à formulação da função de custo.

- Desenvolver a função de custo combinando esses indicadores, incorporando penalizações de cardinalidade (número de ativos escolhidos), orçamento global e orçamento unitário.
- Executar simulações do QAOA com diferentes configurações de parâmetros, analisando seu comportamento e estabilidade no contexto da era NISQ.
- Comparar os resultados obtidos com um *baseline* clássico determinístico, definido como uma heurística tradicional baseada nos mesmo indicadores financeiros, utilizando como referência para avaliar a coerência da solução do QAOA.

### 1.3 Resumo dos resultados preliminares

Foram realizados testes preliminares da heurística determinística usando os indicadores normalizados e as penalidades de orçamento e limite por ativo. Os valores utilizados eram apenas ilustrativos, mas mesmo assim os resultados foram coerentes: os ativos selecionados ficaram dentro do orçamento e as penalidades foram aplicadas corretamente, mostrando que a função de custo está funcionando como esperado. A Seção 4.3 apresenta esses resultados em detalhes.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nesta parte exploramos os aspectos que fundamentam este trabalho, apresentando conceitos da área da computação quântica e setor financeiro.

### 2.1 Computação Quântica

A computação quântica utiliza as propriedades da mecânica quântica para resolver problemas. Feynman (1982) foi um dos primeiros a propor a simulação de sistemas físicos por meio de modelos quânticos, argumentando que apenas um computador quântico poderia reproduzir de forma eficiente o comportamento da natureza. Posteriormente, Deutsch (1985) expandiu essa visão ao introduzir o conceito de máquina universal quântica.

A partir dos anos 2000, a computação quântica ganhou destaque experimental, após a primeira demonstração prática do algoritmo de Shor (1994) em um hardware quântico. Os sistemas quânticos processam e armazenam informações, utilizando princípios como superposição e emaranhamento, que são fenômenos que se manifestam de forma controlada em escalas muito pequenas e condições de isolamento extremo, tornando sua implementação um grande desafio tecnológico (Nielsen; Chuang, 2010).

Mesmo com essas dificuldades, há um interesse crescente em aplicações práticas. Segundo Ménard *et al.* (2020), o setor financeiro pode se beneficiar de tais avanços pois muitos problemas financeiros (otimização, precificação e risco) podem ser formulados como problemas compatíveis para algoritmos quânticos, fazendo do setor, um campo de testes natural para estas tecnologias.

Esse interesse, somado ao progresso experimental da área, levou à transição dos modelos teóricos de Feynman e Deutsch e as primeiras demonstrações experimentais de algoritmos quânticos, a área passou das ideias para implementações reais. Isso levou ao surgimento da era *Noisy Intermediate-Scale Quantum* (NISQ), marcada por dispositivos pequenos e ainda bastante ruidosos (Pan *et al.*, 2023).

#### 2.1.1 Eras da computação quântica

A computação e mecânica quântica possuem descobertas que começam nos meados de 1930, e de forma simplificada, podemos dividir todas as grandes descobertas em três diferentes eras (Miah; Islam; Bhowmik, 2025).

A primeira era da computação quântica começa por meados de 1930 e vai até 1990, sendo a era dos fundamentos teóricos e mecânica quântica, na qual ocorreu o surgimento de alguns conceitos da mecânica quântica, por exemplo, superposição (Schrödinger, 1935) e emaranhamento (Einstein; Podolsky; Rosen, 1935). Tais fenômenos que rompem a mecânica clássica, junto a isso também foi investigado o primeiro vislumbre da ideia de computação quântica (Feynman, 1982).

Em sequência, temos a segunda era, que pode ser chamada de era dos algoritmos e implementações iniciais, que vai aproximadamente de 1990 a 2018, quando houve grandes avanços ao desenvolvimento de algoritmos quânticos considerados pioneiros, como: algoritmo de Shor (1994) e o algoritmo de Grover (1996), também tivemos os primeiros experimentos físicos com *qubits*, como manipulação e emaranhamento.

Com o avanço das pesquisas e o surgimento de hardwares intermediários, iniciou-se a era NISQ em 2018. Esses dispositivos possuem chips entre 50 e 5000 *qubits*, ainda sujeitos a ruído, ou seja, erros de leitura e de porta. Esses erros podem surgir por variações ambientais como temperatura, pressão ou até a própria medição, o que afeta diretamente a estabilidade dos estados quânticos. A era NISQ representa, portanto, a passagem dos modelos teóricos para equipamentos reais, permitindo executar circuitos maiores do que os disponíveis anteriormente, embora ainda com fortes limitações de qualidade e profundidade (Preskill, 2018).

## 2.2 Qubit

O *Bit* ou *Binary Digit* é a menor unidade de informação que encontramos na área da computação clássica. O *bit* clássico pode carregar um estado lógico assumindo, individualmente, dois valores lógicos 0 ou 1. Podemos representar isso de outra forma, como: sim e não; ligado e desligado. Dessa forma, os computadores atuais são criados com capacidade para manipular e armazenar múltiplos *bits* (Jesus *et al.*, 2021).

A computação quântica também parte do conceito de uma unidade mínima de informação, sendo análoga ao *bit* clássico, os *bits* quânticos, ou simplesmente *qubits*. Enquanto os *bits* clássicos podem assumir um dos valores lógicos, o *qubit* pode existir em uma combinação coerente de ambos os estados base, um conceito chamado de superposição. Os vetores da base de um *qubit* são:  $|0\rangle, |1\rangle$

A grande vantagem dos *qubits* sobre os *bits*, é a capacidade de *superposição* e *emaranhamento*, que possibilita combinações lineares entre os vetores da base computacional. A representação mais geral para um *qubit* é um vetor definido no espaço de Hilbert.

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \quad (1)$$

Simplificando a base computacional, temos duas amplitudes  $\alpha$  e  $\beta$ , pertencentes aos números complexos, que representam as amplitudes associadas a cada estado  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$ .

A base computacional é representada matricialmente como:

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$



## 2.3 Propriedades quânticas

A superposição quântica permite que um sistema esteja em múltiplos estados ao mesmo tempo. Isso ocorre devido à linearidade das equações que descrevem sistemas quânticos, permitindo combinar estados de forma coerente. Porém, ao medir esse estado, ele colapsa para um único valor, pois a medição converte o estado quântico em um valor clássico (0 ou 1), revelando apenas um dos resultados possíveis.

Uma das representações usadas para o estado de um *qubit* é um ponto em uma esfera de raio unitário, que seria a Esfera de Bloch (Nielsen; Chuang, 2010), na qual  $\alpha$  e  $\beta$  obedecem à condição de normalização:  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ . Essa condição garante que as probabilidades totais de medição somem 1.

### 2.3.1 Esfera de Bloch

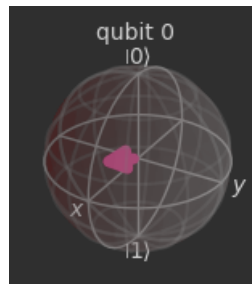
Todo estado puro de um *qubit* pode ser escrito como:

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{i\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle \quad (3)$$

Sendo assim, cada par  $(\theta, \phi)$  é um ponto na superfície da Esfera de Bloch. Com essa representação podemos visualizar o efeito das portas e superposição de forma didática.

A Figura 1 representa um *qubit* em superposição.

**Figura 1 – Esfera de Bloch para superposição 70/30**



**Fonte: Autoria Própria.**

Durante a execução de um circuito quântico, os *qubits* passam por uma sequência de portas unitárias, que são operações matemáticas equivalentes às portas lógicas da computação clássica, mas aplicadas a estados quânticos. Essas portas modificam as amplitudes ( $\alpha$  e  $\beta$ ), ajustando as probabilidades dos possíveis resultados. Após essa etapa de manipulação, é necessário extrair um resultado observável do sistema quântico, e é neste ponto que entra o processo conhecido como **medição**.

A medição dos algoritmos quânticos trata de traduzir o resultado de *qubits* para *bits* clássicos. Quando um *qubit* é medido  $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ , as chances de observar 0 ou 1 não são diretamente  $\alpha$  e  $\beta$ , mas sim seus módulos ao quadrado  $|\alpha|^2$  e  $|\beta|^2$ , como descrito pela

Regra de Born (1926). Contudo, o ruído pode afetar esse processo, e a medição é ruidosa, o que faz com que leituras consecutivas não retornem exatamente o mesmo valor.

Esta regra é o elo entre a teoria quântica e os resultados clássicos observáveis, transformando informação quântica (*qubit*, com amplitude complexa) em informação clássica (0 ou 1). Embora a Regra de Born (1926) descreva o comportamento teórico da medição, na prática os experimentos precisam repetir a execução diversas vezes para estimar as probabilidades, utilizando o conceito de *shots*. A prática de aumentar os *shots* de uma medição é utilizada para obter um resultado final com menor ruído (Jesus *et al.*, 2021).

Dessa forma, é possível fazer a ligação dos resultados quânticos com a lógica clássica, tornando possível a sua utilização em modelos híbridos. Enquanto o processo de medição representa a transformação do estado quântico para informação clássica, o emaranhamento representa o outro extremo do comportamento quântico, no qual se explora a capacidade de interligação de *qubits*, permanecendo correlacionados mesmo quando separados fisicamente.

A diferença fundamental entre o mundo quântico e o clássico é que antes da medição, o sistema guarda informações de fase complexa; ao medir, essas fases desaparecem e o resultado se torna probabilístico e clássico.

O conceito de **emaranhamento** surgiu da interação entre múltiplos *qubits*. (Einstein; Podolsky; Rosen, 1935) introduziram a ideia que os estados quânticos de um sistema podem ter correlações não locais. Assim, em alguns estados emaranhados, como os estados de Bell (1964), medir um *qubit* determina instantaneamente o estado de outro, sem importar a distância entre eles.

Essas correlações surgem quando dois ou mais *qubits* interagem de forma que o estado completo do sistema não pode mais ser descrito com a soma dos estados individuais, significando que, mesmo um *qubit* estando isolado, seu comportamento ainda depende do estado de outro (Jesus *et al.*, 2021).

O emaranhamento é um recurso essencial para o processamento de informações quânticas, desempenhando um papel fundamental em algoritmos variacionais como o QAOA (Farhi; Goldstone; Gutmann, 2014). Tanto o emaranhamento quanto o processo de medição dependem diretamente das portas quânticas, responsáveis por manipular os estados dos *qubits*.

## 2.4 Portas quânticas

Na computação clássica, temos as portas lógicas tradicionais, operações que seguem a álgebra Booleana, implementadas a partir de circuitos eletrônicos.

Na computação quântica, existem Portas Quânticas, sendo o equivalente das portas lógicas clássicas. Ao contrário das clássicas, as portas quânticas são sempre reversíveis.

### 2.4.1 Portas reversíveis

As portas quânticas são sempre reversíveis pois todas são descritas por um operador unitário,  $U$  no qual:  $U^\dagger U = I$ . Tendo isso como uma das diferenças da computação clássica (Jesus *et al.*, 2021).

Um exemplo de porta não reversível em nível clássico seria a porta AND se o resultado de AND for 0, a entrada poderia ser 0 e 0, 1 e 0, 0 e 1, porém não é possível ter essa informação após a inferência.

### 2.4.2 Portas de 1 Qubit

As portas quânticas de 1 Qubit, também conhecidas como portas elementares, ou portas de Pauli, correspondentes com as matrizes de Pauli (Nielsen; Chuang, 2010; Jesus *et al.*, 2021).

As portas de Pauli correspondem a uma rotação na esfera de Bloch de  $\pi$  rad no eixo da direção apresentada pela porta. O *Qubit* pode ser representado por um vetor coluna, apresentado na Equação 4:

$$|\psi\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \quad (4)$$

A aplicação das portas de 1 *qubit* pode ser representado por meio das multiplicações de matrizes por vetores.

#### 2.4.2.1 Portas X, Z, H e $R_x$ e $R_z$

Nesta seção são apresentadas algumas portas quânticas de um *qubit* que serão utilizadas ao longo do trabalho, especialmente na implementação do QAOA. Essas portas atuam diretamente no estado do qubit, realizando operações básicas como inversão, mudança de fase, criação de superposição e rotações em torno dos eixos da Esfera de Bloch. As portas X, Z, H,  $R_x$  e  $R_z$  são exemplos fundamentais desse conjunto.

A porta X, ou NOT quântico, inverte o estado do *Qubit* de  $|0\rangle$  para  $|1\rangle$ .

A porta Z inverte a fase de uma das partes, deixando a outra intacta. Imaginando a Esfera de Bloch, seria como uma rotação de  $\pi$  em torno do eixo Z.

A Porta Hadamard, resulta na criação da superposição. A aplicação desta porta é feita pela multiplicação das matrizes e o  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  seria o fator de normalização, para que no fim a soma de suas probabilidades resulte em 100%.

As portas  $R_x$  e  $R_z$  são as versões parametrizadas das portas anteriores, imaginando na esfera de Bloch, ao invés de girar  $180^\circ$ , elas giram um ângulo qualquer.

$$R_x(\beta) = e^{-i\frac{\beta}{2}X} \quad (5)$$

$$R_z(\gamma) = e^{-i\frac{\gamma}{2}Z} \quad (6)$$

Sendo assim,  $R_x(\beta)$  é uma rotação do estado em torno do eixo X, alterando a probabilidade. E para  $R_z(\gamma)$  é uma rotação no eixo Z, mudando o angulo de fase da amplitude, controlando a interferência.

#### 2.4.3 Portas de múltiplos *qubits* e CNOT(CX)

Uma das grandes vantagens da computação quântica sobre a clássica vem quando trabalhamos com circuitos de múltiplos *qubits*. Como analisado anteriormente, o estado de 1-qubit tem duas amplitudes complexas, onde seu módulo ao quadrado corresponde as amplitudes de probabilidades dos estados, podendo ser  $|0\rangle, |1\rangle$ .

Da mesma forma que na computação clássica, na qual dois *bits* possuem quatro possíveis combinações, os *qubits* também possuem esta mesma equivalência, sendo:  $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$ .

A porta Controlled-NOT (CNOT) é uma porta de dois *qubits*, atua apenas quando o *qubit* de controle estiver no estado  $|1\rangle$ . Nesse caso, aplica-se a operação NOT no estado do outro *qubit*, que seria o alvo. Um exemplo de sua execução para o caso de 2 *qubits*.

$$\begin{aligned} CNOT|00\rangle &= |00\rangle \\ CNOT|01\rangle &= |01\rangle \\ CNOT|10\rangle &= |11\rangle \\ CNOT|11\rangle &= |10\rangle \end{aligned} \quad (7)$$

Essa porta é fundamental para criar correlações entre *qubits*, sendo o principal mecanismo para gerar emaranhamento.

#### 2.4.4 Mercado financeiro e o problema de otimização

O mercado financeiro sempre buscou formas de obter o maior retorno possível com o menor risco (Markowitz, 1952). Com o avanço dos computadores, surgiram métodos cada vez mais estruturados para analisar ativos e montar portfólios, permitindo comparar diferentes combinações de investimentos de forma mais objetiva.

Esse mercado é composto por vários tipos de ativos, como ações, títulos públicos e fundos. Cada um reage de forma diferente às condições do mercado. Um portfólio nada mais é do que o conjunto desses ativos que um investidor possui. Otimizar um portfólio significa escolher quais ativos devem entrar nele para atingir um objetivo, como aumentar o retorno

esperado. Essa escolha se torna difícil à medida que o número de ativos cresce, pois o total de combinações possíveis aumenta rapidamente.

Os Fundos de Investimento Imobiliário (FIIs) são uma categoria relevante no Brasil. Eles são negociados por meio de cotas na bolsa e possuem indicadores simples de acompanhar, como *Dividend Yield* (B3, 2024a) e *P/VP* (B3, 2024b). Isso os torna uma boa escolha para análises e experimentos como os realizados neste trabalho.

#### 2.4.5 O problema de otimização de portfólio

A otimização de portfólio é muito utilizada por grandes bancos e fundos de investimento, que visam manter seus lucros e possuem portfólios extremamente grandes.

Um dos modelos mais conhecidos da área, tendo recebido um prêmio Nobel por sua proposta é o Harry Markowitz. O modelo de otimização de portfólio clássico proposto pode ser formulado como na Equação 8 (Markowitz, 1952):

$$\min_w w^\top \Sigma w \text{ sujeito a: } \mu^\top w \geq r_{\text{alvo}}, \sum_i w_i = 1, w_i \geq 0 \quad (8)$$

na qual  $w_i$  representa a proporção investida em cada ativo,  $\Sigma$  é a matriz de covariância dos retornos,  $\mu$  é o vetor de retornos esperados e  $r_{\text{alvo}}$  é o retorno mínimo desejado para o portfólio. Em essência, o modelo média-variância busca pesos  $w$  que minimizam a variância para um dado retorno-alvo.

Além da formulação média-variância de Markowitz (1952), problemas de seleção de ativos também podem ser representados por modelos clássicos de otimização combinatória, como o *Knapsack Problem* (Huot *et al.*, 2024). No caso do *0-1 Knapsack*, cada item possui um valor e um custo, e o objetivo é escolher um subconjunto binário que maximize o valor total sem ultrapassar a capacidade disponível, estrutura análoga à seleção de ativos sujeitos a orçamento (Huot *et al.*, 2024). Já o *Unbounded Knapsack* (Poirriez, 1970) permite selecionar múltiplas unidades do mesmo item, sendo adequado para problemas de alocação em que é possível adquirir várias cotas de um mesmo ativo. Ambos são problemas *NP-Hard*, reforçando o caráter combinatório da otimização de portfólios e motivando o uso de heurísticas e modelos variacionais, como o QAOA, discutidos nas próximas seções.

Neste trabalho, em vez da formulação clássica de Markowitz (1952), adota-se uma heurística prática baseada em indicadores financeiros (*Dividend Yield*, *P/VP* e volatilidade), utilizada como função de custo para o algoritmo quântico QAOA. Após a seleção dos ativos com QAOA, a alocação final dos recursos será realizada por meio do problema *Unbounded Knapsack*, permitindo definir quantas cotas de cada ativo comprar de forma a respeitar o orçamento total disponível.

#### 2.4.6 Indicadores financeiros utilizados

O P/VP compara o preço de mercado de um ativo com seu valor patrimonial contábil. O valor patrimonial por cota é obtido dividindo o patrimônio líquido da empresa pelo total de cotas emitidas, e o indicador é dado por:

$$P/VP = \frac{\text{Preço por cota}}{\text{Valor Patrimonial por cota}} \quad (9)$$

Valores de  $P/VP < 1$  indicam ativos negociados abaixo do seu valor contábil ("baratos"), enquanto  $P/VP > 1$  indicam ativos acima ("caros").

Para fundos de investimento imobiliário (FIIs), o valor patrimonial é reportado nos informes regulatórios CVM (2023), permitindo calcular o indicador de forma padronizada.

Trata-se de um múltiplo clássico em *valuation*, isto é, no processo de estimar quanto um ativo ou empresa vale no mercado (Damodaran, 2022b). Esse indicador é amplamente usado para identificar cotas negociadas a desconto no mercado brasileiro (B3, 2024a). Assim, o P/VP é adequado como métrica de atratividade na função de custo.

O indicador *Dividend Yield* (DY) expressa o retorno em dividendos de um ativo em relação ao seu preço:

$$DY = \frac{\text{Dividendo pagos nos últimos 12 meses}}{\text{Preço atual}} \times 100 \quad (10)$$

Também tendo sua versão mensal, para caso de FIIs:

$$DY_{\text{mensal}} = \frac{\text{Dividendo do mês}}{\text{Preço atual}} \times 100 \quad (11)$$

Diante disso, o DY acaba sendo uma parte essencial do *retorno total* de um ativo (Damodaran, 2022a; B3, 2024a), sobretudo em FIIs, que são obrigados por lei a distribuir pelo menos 95% do resultado de seu lucro semestral (Planalto, 2021).

Sua aplicação em funções de custo de otimização (Canabarro *et al.*, 2022; Herman *et al.*, 2022; Greenhalgh; Campani, 2023) é consistente com a teoria clássica de portfólio.

A volatilidade mede a intensidade das variações de preço de um ativo e é amplamente utilizada para representar o seu nível de instabilidade. Segundo Markowitz (1952), ela está diretamente relacionada à variância dos retornos: quanto maior a volatilidade, maior o risco associado ao ativo. A B3 também emprega a volatilidade como indicador de risco em seus materiais educacionais (Naldis, 2024). Neste trabalho, aplica-se um filtro simples para excluir ativos excessivamente voláteis, compondo uma heurística *baseline* (DY + P/VP + volatilidade) que servirá como função de custo para o algoritmo quântico QAOA.

## 2.5 Quantum Approximation Optimization Algorithm e Qiskit

QAOA é um algoritmo variacional híbrido quântico-clássico, utilizado em problemas de otimização combinatória (Farhi; Goldstone; Gutmann, 2014). Seu funcionamento é iterativo: um circuito quântico é executado, medido e ajustado por um otimizador clássico (como *COBYLA* ou o *SPSA*) até que os parâmetros converjam, em um processo análogo ao treino de modelos de *Machine Learning*.

O problema de otimização é representado de forma binária, permitindo sua conversão para um Hamiltoniano, que é uma expressão matemática usada em computação quântica para descrever a energia do sistema. Nesse contexto, o Hamiltoniano funciona como a função de custo do problema: quanto menor a energia, melhor o resultado que o circuito tenta alcançar.

Neste trabalho, cada *qubit* representa a decisão de incluir (1) ou não incluir (0) um ativo no portfólio, e a função de custo avalia o retorno obtido sob restrições de cardinalidade, orçamento global e unitário do ativo.

Inicialmente, aplica-se a porta Hadamard (H) a todos os *qubits*, gerando uma superposição de todos os estados possíveis, que são todas as combinações de ativos. O circuito é composto por camadas alternadas:

- $U_C(\gamma)$ , responsável por aplicar o custo (ou penalidade) por meio das portas  $R_Z$  e CNOT, conforme as interações do problema;
- $U_B(\beta)$ , que mistura os estados via portas  $R_X$ , explorando o espaço de soluções.

Após as medições, obtêm-se *bitstrings* como 01010, indicando quais ativos foram selecionados. A cada iteração, calcula-se o custo (energia média), que é minimizado ao longo das execuções.

O QAOA normalmente resolve problemas formulados como Quadratic Unconstrained Binary Optimization (QUBO). Nesse modelo, o problema é escrito como uma função quadrática composta por variáveis binárias, que assumem 0 ou 1 para representar cada decisão possível. O objetivo é encontrar a combinação que produz o menor valor dessa função. Essa estrutura facilita a conversão direta para o Hamiltoniano usado no circuito (Canabarro *et al.*, 2022; Zaman *et al.*, 2024).

### 3 TRABALHOS RELACIONADOS

O avanço da computação quântica tem impulsionado o desenvolvimento de circuitos voltados à otimização combinatória, sendo o setor financeiro apontado como um dos grandes beneficiados (Herman *et al.*, 2022). Nesse contexto, diferentes estudos reformulam o problema de portfólio em modelos combinatórios já consolidados.

Huot *et al.* (2024) propõem transformar o problema, por ser NP-Hard, em uma instância do problema da mochila (*Knapsack*), tratando cada ativo como item, com o retorno como valor, risco como peso e orçamento como capacidade. O trabalho introduz o *Quantum Walk Mixer* (QWM) combinado ao QAOA, obtendo boas aproximações e explorando de forma mais eficiente o espaço de soluções.

Complementando essa linha, Zaman *et al.* (2024) comparam o desempenho de duas famílias variacionais, o *Variational Quantum Eigensolver* (VQE) e o QAOA no framework PO-QA. O estudo avalia diferentes parâmetros de circuito, como blocos de rotação, tipo de emaranhamento e profundidade, concluindo que o QAOA tende a superar o VQE nesse contexto.

Enquanto os trabalhos anteriores exploram modelagens e arquiteturas, outros estudos propõem o enriquecimento da função objetivo, incorporando momentos de ordem superior (assimetria e curtose), levando a formulações *Higher-Order Unconstrained Binary Optimization* (HUBO). Uotila, Ripatti e Zhao (2025) apresentam a primeira formulação quântica para portfólio com esses momentos, obtendo carteiras mais diversificadas e alocações superiores ao *baseline* clássico.

Do ponto de vista prático, Canabarro *et al.* (2022) oferecem uma excelente introdução aplicada à formulação QUBO e à conversão em Hamiltonianos de custo. O artigo demonstra a replicação de resultados clássicos de Markowitz em circuitos QAOA e ressalta que o aumento da profundidade nem sempre se traduz em melhor desempenho, evidenciando as limitações dos dispositivos NISQ.

Por fim, revisões mais amplas, como Herman *et al.* (2022), mostram o estado da arte da computação quântica em finanças, identificando tendências, gargalos e oportunidades de curto prazo para otimização e aprendizado de máquina.

O presente trabalho se diferencia das pesquisas mencionadas ao aplicar o QAOA especificamente para a seleção de FIIs, usando uma função de custo baseada em indicadores financeiros brasileiros em vez da formulação de Markowitz. O contexto de Herman *et al.* (2022) reforça a relevância da otimização combinatória em finanças, e Zaman *et al.* (2024) motivou a escolha do QAOA. Diferente de Uotila, Ripatti e Zhao (2025), que exploram modelos de ordem superior, adotamos a formulação QUBO padrão por ser mais adequada à era NISQ e permitir a inclusão direta de restrições via penalidades (Canabarro *et al.*, 2022). A solução segue um modelo híbrido de dois estágios: o QAOA realiza a seleção binária dos ativos e a alocação final é feita pelo problema *Unbounded Knapsack* (Poirriez, 1970), resolvido por programação dinâmica (Andonov; Poirriez; Rajopadhye, 1997), mantendo a separação entre seleção e alocação sugerida em Huot *et al.* (2024) e contornando limitações atuais de *hardware*.



## 4 PROPOSTA

Este trabalho tem como objetivo geral **validar uma heurística prática ( $DY + P/VP + \text{volatilidade anual}$ ) com restrições de cardinalidade e orçamento**, aplicada ao QAOA para otimização de portfólio de FIIs com dados reais. Para atingir este objetivo, serão desenvolvidos módulos para coleta, tratamento e transformação dos dados em uma função de custo adequada ao modelo quântico.

Como o estudo depende de dados reais, o primeiro passo é obter informações confiáveis de FIIIs. Para isso, serão utilizados os Informes Mensais da Comissão de Valores Mobiliários (CVM), órgão responsável por regular o mercado de capitais brasileiro, que disponibiliza indicadores como  $DY$  e  $P/VP$ . Como o informe não traz preços, a *API do Yahoo Finance* será utilizada para complementar os dados e permitir o cálculo da volatilidade anual.

Uma função de custo será formulada para combinar esses indicadores em um valor que representa a atratividade de cada ativo. Ela incluirá penalizações de cardinalidade, orçamento global e limite unitário, garantindo que a solução final contenha exatamente  $K$  ativos. Esse valor reflete o número de fundos que o investidor deseja realmente selecionar, já que normalmente não se investe em todos os FIIIs acompanhados. Isso permite comparar a solução quântica com o *baseline* clássico e representa uma restrição comum no processo de decisão mensal de investidores.

O problema será então adaptado para uma representação QUBO compatível com a execução do QAOA, permitindo avaliar seu comportamento em simulação e em dispositivos hardware quânticos, respeitando as limitações da era NISQ.

Os resultados obtidos serão comparados a um *baseline* clássico determinístico construído com a mesma heurística e restrições, permitindo verificar se o QAOA produz soluções coerentes e próximas dos métodos tradicionais de otimização de portfólio.

Por fim, alinhado ao que aponta Callison e Chancellor (2022), a proposta reforça o uso de estratégias híbridas quântico-clássicas como caminho natural para explorar algoritmos como o QAOA nos próximos anos.

### 4.1 Método de pesquisa

O método para realização deste estudo será realizado conforme os passos descritos a seguir.

1. Realizar a revisão abrangente da literatura da computação quântica e do mercado financeiro.
2. Desenvolver API com FastAPI que consome, trata e armazena os dados dos informes da CVM, para  $DY$  e  $P/VP$ , e a utiliza a biblioteca *Python yfinance* (Aroussi, 2017) para obtenção do preço e histórico.

3. Para o cálculo de *score*, será feita a normalização dos indicadores (0-1) a fim de permitir comparações entre métricas de diferentes escalas:

$$valor\_normalizado = \frac{valor - \text{mínimo}}{\text{máximo} - \text{mínimo}} \quad (12)$$

4. Será implementada a função de custo com pesos e penalidades, seguida da conversão para o formato QUBO, conforme a Equação 13:

$$\begin{aligned} C(x) = & - \sum_i \left( \alpha DY'_i + \beta \frac{1}{PVP'_i} - \gamma VOL'_i \right) x_i \\ & + \lambda_K \left( \sum_i x_i - K \right)^2 \\ & + \lambda_B \left( \sum_i p_i x_i - B \right)^2 \\ & + \lambda_{slot} \sum_i \max \left( 0, p_i - \frac{B}{K} \right) x_i \end{aligned} \quad (13)$$

Na qual:

- $C(x)$  é a função de custo que o QAOA tentará minimizar (menor, melhor)
- $i$  = o índice do fundo
- $DY'$  =  $DY$  normalizado, representa retorno (maior, melhor)
- $PVP'$  =  $P/VP$  normalizado, representa desconto (menor, mais barato)
- $VOL'$  = volatilidade normalizada, representa risco (maior, pior)
- $(\alpha, \beta, \gamma)$  = pesos que controlam a influência de cada indicador ( $DY$ ,  $P/VP$  e volatilidade).
- $(x_i)$  = variável binária de escolha do ativo (0 ou 1)
- $(p_i)$  = preço unitário do ativo  $i$
- $B$  = orçamento total disponível
- $(\lambda_K)$  = peso da penalidade para forçar a seleção de exatamente  $K$  ativos. Quanto maior esse valor, maior o custo para soluções com mais ou menos de  $K$  ativos.
- $(\lambda_B)$  = peso da penalidade que controla o orçamento global. Penaliza soluções cujo preço total dos ativos selecionados ultrapassa o orçamento  $B$ .
- $(\lambda_{slot})$  = peso da penalidade para o limite de custo por ativo  $B/K$ . Penaliza fundos individuais que são muito caros em relação ao orçamento dividido entre os  $K$  ativos.

- $K$  = número de fundos a selecionar
- $\sum_i x_i$  = soma dos fundos escolhidos
- $(\sum_i x_i - K)^2$  = penalização de cardinalidade

Essa função de custo, ao ser convertida para o formato QUBO, permite representar cada variável binária como a seleção (ou não) de um ativo, tornando-se compatível com a execução via QAOA.

5. Conversão do problema de seleção para o formato QUBO
6. Implementação do QAOA com a biblioteca Qiskit, definindo o circuito variacional e os parâmetros do modelo.
7. Escolha e configuração de um otimizador clássico apropriado (como COBYLA, SPSA ou similar) para ajustar os parâmetros variacionais do QAOA durante o processo de minimização.
8. Aplicação de uma etapa complementar de alocação por meio do problema *Unbounded Knapsack* (Poirriez, 1970), resolvido por programação dinâmica (Andonov; Poirriez; Rajopadhye, 1997), para determinar a quantidade ótima investida nos ativos selecionados, respeitando o orçamento disponível.
9. Escolha e implementação de uma heurística clássica determinística como *baseline* de comparação, replicando indicadores e restrições adotados no modelo quântico.
10. Avaliação e validação dos resultados, comparando retorno, custo, respeito às restrições e consistência entre o modelo clássico e o quântico.
11. Defender o trabalho de pesquisa.
12. Redigir e revisar o texto, consolidando os resultados e análises.

## 4.2 Cronograma

A Tabela 1 apresenta o cronograma que detalha o planejamento temporal para a execução dos passos descritos:

Passos	Agosto	Setembro	Outubro	Novembro	Dezembro	Janeiro	Fevereiro	Março	Abril	Maiο	Junho	Julho
1	X	X	X	X								
2			X	X	X	X						
3					X	X	X	X				
4					X	X	X	X				
5						X	X	X				
6						X	X	X	X	X		
7						X	X	X	X	X		
8								X	X	X		
9						X	X	X	X	X	X	
10	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
11												X
12	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X

**Tabela 1 – Cronograma**

## 4.3 Resultados preliminares

A Tabela 2 apresenta o cálculo determinístico da heurística proposta considerando os indicadores normalizados e a penalidade de orçamento. É possível observar que os dois ativos selecionados (XPML11 e HGLG11) mantêm o custo total dentro do orçamento definido (R\$400), demonstrando o funcionamento da restrição de orçamento e a coerência da função de custo.

As colunas da Tabela 2 representam:

- DY (norm): *Dividend Yield* normalizado, indicando o retorno relativo de cada ativo.
- P/VP (norm): P/VP normalizado, usado para identificar ativos negociados com desconto (valores menores são melhores).
- Vol (norm): volatilidade anual normalizada, representando o risco relativo (valores maiores indicam maior instabilidade).
- Preço (R\$): preço aproximado da cota, usado para as restrições de orçamento e de *slot*.
- Penalidade *Slot*: penalidade aplicada quando o preço do ativo ultrapassa o limite individual  $B/K$
- Score: valor final da função de custo para cada ativo após combinar indicadores e penalizações.

**Tabela 2 – Resultados preliminares da heurística determinística com penalidade de orçamento**

<b>Ticker</b>	<b>DY (norm)</b>	<b>P/VP (norm)</b>	<b>Vol (norm)</b>	<b>Preço (R\$)</b>	<b>Penalidade Slot</b>	<b>Score</b>
XPML11	0,415	0,389	0,954	106,50	0,00	0,133
HGLG11	0,000	0,222	0,417	200,30	0,30	-0,047
MXRF11	0,779	0,000	0,000	250,00	50,00	-4,610
BTHF11	1,000	1,000	1,000	300,25	100,25	-9,425

**Top 2 ativos selecionados:** XPML11 e HGLG11.

**Preço total dos selecionados:** R\$ 306,80 — *dentro do orçamento.*

**Orçamento total:** R\$ 400

**Limite por ativo (slot):** R\$ 200.

Também nota-se que ativos mais caros (como MXRF11 e BTHF11) sofrem penalizações significativas no *score* final, reforçando a eficácia da penalidade de *slot* e o alinhamento com a restrição de orçamento. Preços e valores meramente ilustrativos.

## 5 CONCLUSÃO

Este trabalho tem como objetivo validar uma heurística prática baseado em indicadores financeiros (DY, P/VP e volatilidade) aplicada ao algoritmo QAOA para o problema de otimização de portfólios de FIIs.

Serão desenvolvidas APIs para coleta e tratamento dos dados reais disponibilizados pela CVM, complementados com preços históricos obtidos pelo Yahoo Finance. Em seguida, será formulada uma função de custo que combina os indicadores financeiros com penalidades de cardinalidade e orçamento. Essa função permitirá adaptar o problema ao formato QUBO, viabilizando sua execução no QAOA por meio da biblioteca Qiskit.

Os resultados preliminares da versão clássica da heurística mostraram comportamento coerente, priorizando fundos com maior DY e menor P/VP, validando o potencial da formulação proposta. O próximo passo consiste em executar o QAOA com os mesmos dados, analisar o desempenho do modelo híbrido quântico-clássico e compará-lo ao *baseline* determinístico.

O trabalho propõe uma formulação híbrida na qual o algoritmo quântico QAOA é utilizado para a seleção dos ativos mais promissores, enquanto o problema da mochila (*Unbounded Knapsack*) é empregado posteriormente para alocar as quantidades dentro do orçamento total. Essa etapa de alocação será resolvida por programação dinâmica, conforme descrito em (Andonov; Poirriez; Rajopadhye, 1997). A separação entre as etapas de seleção (QAOA) e alocação (*Unbounded Knapsack*) decorre do fato de que a era NISQ limita o número de qubits disponíveis, impedindo que ambas as decisões sejam tratadas simultaneamente no circuito. Assim, a divisão do problema reduz a complexidade quântica e torna a solução viável com o hardware atual.

Apesar das limitações impostas pela era NISQ, a metodologia proposta estabelece a base para a execução e avaliação do modelo no TCC2, no qual será possível analisar seu desempenho e comparar os resultados quânticos e clássicos.

## REFERÊNCIAS

ANDONOV, R.; POIRRIEZ, V.; RAJOPADHYE, S. Efficient dynamic programming for the unbounded knapsack problem. **Research Gate**, v. 123,, 01 1997.

AROUSI, R. **yfinance: Yahoo! Finance market data downloader**, . 2017. <https://pypi.org/project/yfinance/>. Acesso em: 2025-01-29.

B3. **Dividend Yield - O que é, significado e definição**, . 2024. <https://borainvestir.b3.com.br/glossario/dividend-yield/>. Acesso em 05 nov. 2025.

B3. **Fundos imobiliários: muito além do rendimento, olhe o valor patrimonial**, . 2024. <https://borainvestir.b3.com.br/objetivos-financeiros/investir-melhor/fundos-imobiliarios-muito-alem-do-rendimento-por-que-voce-deve-olhar-o-valor-patrimonial/>. Acesso em 05 nov. 2025.

BELL, J. S. On the Einstein Podolsky Rosen Paradox. **Physics Physique Fizika**, v. 1, n. 3, p. 195–200, 1964.

BORN, M. Zur quantenmechanik der stoßvorgänge. **Zeitschrift für Physik**, v. 37, n. 12, p. 863–867, 1926. Tradução em inglês disponível como: “On the Quantum Mechanics of Collisions”.

CALLISON, A.; CHANCELLOR, N. Hybrid quantum-classical algorithms in the noisy intermediate-scale quantum era and beyond. **Phys. Rev. A**, American Physical Society v. 106,, p. 010101, Jul 2022. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.106.010101>.

CANABARRO, A. *et al.* Quantum finance: um tutorial de computação quântica aplicada ao mercado financeiro. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, Sociedade Brasileira de Física v. 44,, p. e20220099, 2022. ISSN 1806-1117. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2022-0099>.

CVM. **Resolução CVM 175 — Fundos de Investimento: informes mensais e valor patrimonial por cota**, . 2023. <https://dados.cvm.gov.br/>. Fonte oficial dos dados de valor patrimonial por cota de FIs.

DAMODARAN, A. **Dividends, Dividend Yield, Total Returns and Expected Returns**, . 2022. [https://pages.stern.nyu.edu/~adamodar/New\\_Home\\_Page/lectures/dividend.html](https://pages.stern.nyu.edu/~adamodar/New_Home_Page/lectures/dividend.html). Acesso em 05 nov. 2025.

DAMODARAN, A. **Pricing Ratios: PEG & PBV (Valuation multiples notes)**, . 2022. [https://pages.stern.nyu.edu/~adamodar/New\\_Home\\_Page/invphillectures/val.html](https://pages.stern.nyu.edu/~adamodar/New_Home_Page/invphillectures/val.html). Acesso em 05 nov. 2025.

DEUTSCH, D. Quantum theory, the church–turing principle and the universal quantum computer. **Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences**, The Royal Society v. 400, n. 1818, p. 97–117, 1985. Disponível em: <https://www.cs.princeton.edu/courses/archive/fall04/cos576/papers/deutsch85.pdf>.

EINSTEIN, A.; PODOLSKY, B.; ROSEN, N. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? **Physical Review**, v. 47,, p. 777–780, 1935.

FARHI, E.; GOLDSTONE, J.; GUTMANN, S. **A Quantum Approximate Optimization Algorithm**, . 2014. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1411.4028>.

FEYNMAN, R. P. Simulating physics with computers. **International Journal of Theoretical Physics**, Springer v. 21, n. 6-7, p. 467–488, 1982.

GREENHALGH, L. H.; CAMPANI, C. H. Dividend-yield variation as an asset selection criterion in momentum strategies of brazilian real estate investment trusts. **Revista Contabilidade Finanças**, Universidade de São Paulo, Faculdade de Economia, Administração, Contabilidade e Atuária, Departamento de Contabilidade e Atuária - Cidade Universitária v. 34, n. 91, p. e1667, 2023. ISSN 1519-7077. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/1808-057x20221667.en>.

GROVER, L. K. A fast quantum mechanical algorithm for database search. **ACM**, „ p. 212–219, 1996.

HERMAN, D. *et al.* A survey of quantum computing for finance. **arXiv preprint arXiv:2201.02773**, „, 2022. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/2201.02773>.

HUOT, C. *et al.* Enhancing knapsack-based financial portfolio optimization using quantum approximate optimization algorithm. **IEEE Access**, v. 12, p. 183779–183791, 2024.

JESUS, G. F. d. *et al.* Computação quântica: uma abordagem para a graduação usando o qiskit. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, Sociedade Brasileira de Física v. 43, p. e20210033, 2021. ISSN 1806-1117. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2021-0033>.

KASHAPOGU, R.; HASIB, S.; RASOOL, A. Exploring the versatility of qaoa: A comprehensive review. **2024 15th International Conference on Computing Communication and Networking Technologies (ICCCNT)**, „ p. 1–8, 2024.

MARKOWITZ, H. Portfolio selection. **The Journal of Finance**, Wiley for the American Finance Association v. 7, n. 1, p. 77–91, 1952.

MÉNARD, A. *et al.* A game plan for quantum computing. **McKinsey Quarterly**, McKinsey & Company,„ fev. 2020. Disponível em: <https://www.mckinsey.com/capabilities/tech-and-ai/our-insights/a-game-plan-for-quantum-computing>.

MAIA, M. S. U.; ISLAM, S. S.; BHOWMIK, A. From theory to reality: Tracing the milestones of quantum information systems. **3rd International Conference on Computing Advancements**, Association for Computing Machinery New York, NY, USA,„ p. 693–698, 2025. Disponível em: <https://doi.org/10.1145/3723178.3723269>.

NALDIS, G. **O que é volatilidade?**, . 2024. <https://borainvestir.b3.com.br/onde-investir/etfs/etf-volatilidade-o-que-e/>. B3 — Educação financeira (Bora Investir).

NIELSEN, M. A.; CHUANG, I. L. **Quantum Computation and Quantum Information**. 10th anniversary edition. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2010. ISBN 9781107002173.

PAN, Z. *et al.* Understanding the impact of quantum noise on quantum programs. **IEEE International Conference on Software Analysis, Evolution and Reengineering (SANER)**, „ p. 426–437, 2023. Disponível em: <https://ieeexplore.ieee.org/document/10123493/>.

PLANALTO. **Lei nº 8.668/1993, alterada pela Lei nº 8.658/2021 — Dispõe sobre os Fundos de Investimento Imobiliário**, . 2021. [https://www.planalto.gov.br/ccivil\\_03/leis/18668.htm](https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/18668.htm). Obrigatoriedade de distribuição mínima de 95% dos lucros semestrais dos FIs.

POIRRIEZ, V. Unbounded knapsack problem: New results. **Research Gate**, „, 02 1970.

PRESKILL, J. Quantum Computing in the NISQ era and beyond. **Quantum**, Verein zur Förderung des Open Access Publizierens in den Quantenwissenschaften v. 2, p. 79, ago. 2018. ISSN 2521-327X. Disponível em: <https://doi.org/10.22331/q-2018-08-06-79>.



SCHRÖDINGER, E. Die gegenwärtige situation in der quantenmechanik. **Naturwissenschaften**, v. 23,, p. 807–812, 1935. Tradução: *A Situação Atual da Mecânica Quântica*. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/BF01491891>. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/BF01491891>.

SHOR, P. Algorithms for quantum computation: discrete logarithms and factoring. **Annual Symposium on Foundations of Computer Science**, „ p. 124–134, 1994.

UOTILA, V.; RIPATTI, J.; ZHAO, B. **Higher-Order Portfolio Optimization with Quantum Approximate Optimization Algorithm**, . 2025. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/2509.01496>.

ZAMAN, K. *et al.* Po-qa: A framework for portfolio optimization using quantum algorithms. **IEEE International Conference on Quantum Computing and Engineering (QCE)**, v. 01,, p. 1397–1403, 2024.