Álgebra Linear e Aplicações - Lista 1

Entregar dia 4 de Abril

1. (10 pts) Supõe que A é uma matriz 4×3, B é uma matriz 3×2, $v \in \mathbb{R}^4$ e $u \in \mathbb{R}^3$. Indica qual destes produtos de matrizes e vectores podem ser calculados e quais não fazem sentido. Para os que podem ser calculados, indica a dimensão do resultado.

   (a) AB

   (b) BA

   (c) $A^T B^T$

   (d) $B^T A^T$

   (e) AA^T

   (f) $A^T A$

   (g) $B(AB)^T$

   (h) $v^T A u$

   (i) $u^T B v$

   (j) $v u^T B$

2. (20 pts) Calcula as decomposições LU e a PA = LU das seguintes matrizes. Se o sistema for invertível, resolve o sistema Ax = b.

   (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

   (b) $A = \begin{bmatrix} 0.001 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

   (c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.0001 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2.0001 \end{bmatrix}$

   (d) $A = \begin{bmatrix} p & p & p \\ p & q & q \\ p & q & r \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

3. (10 pts) Mostra que a multiplicação de matrizes é associativa. Isto é, para quaisquer matrizes $A_{m\times n}$, $B_{n\times p}$, $C_{p\times q}$, temos $(AB)C = A(BC)$.

   (vira a página)

4. O objectivo deste problema é demonstrar formalmente que uma matriz é invertível se e só se na decomposição $PA = LU$, os elementos de diagonais de U são diferentes de 0.

   (a) (8 pts) Mostra, usando indução, que uma matriz quadrada A admite sempre uma decomposição $PA = LU$, onde P é uma matriz de permutação, L é triangular inferior, com 1's na diagonal, e U é uma matriz triangular superior (possivelmente com zeros na diagonal).

   (b) (8 pts) Mostra que uma matriz triangular (superior ou inferior) é invertível se todos os elementos da sua diagonal forem diferentes de 0.

   (c) (12 pts) Mostra que uma matriz triangular (superior ou inferior) não é invertível se algum de seus elementos da diagonal for igual a 0.

   (d) (4 pts) Usa a), b) e c) para demonstrar que uma matriz é invertível se e só se na decomposição $PA = LU$, os elementos de diagonais de U são diferentes de 0.

5. (10 pts) Nos seguintes problemas, mostra que os espaços descritos são espaços vetoriais (verificam as propriedades de espaço vetorial) ou mostra um exemplo que viole uma das propriedades.

   (a) Considera o conjunto $\mathbb{R}^2_+$ (elementos em $\mathbb{R}^2$ com entradas positivas) com as operações $+ : \mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}^2_+$ e $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}^2_+$ definidas por

   $$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1y_1, x_2y_2) \quad \text{e} \quad \alpha(x_1, x_2) = (x_1^\alpha, x_2^\alpha)$$

   (b) Considera o conjunto de funções $[0, 1] \to \mathbb{R}_0^+$ (funções não-negativas), com adição e multiplicação por escalar definida naturalmente.

   $$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \quad \text{e} \quad (\alpha f)(x) := \alpha f(x)$$

6. (18 pts) Quais destes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ são subespaços? Mostra que verificam todas as propriedades ou mostra um exemplo que viola alguma das propriedades.

   (a) O conjunto de vetores (b_1, b_2, b_3) cujo primeiro componente b_1 é 0.

   (b) O conjunto de vetores b tais que $b_1 = 1$.

   (c) O conjunto de vetores b tais que $b_2b_3 = 0$.

   (d) Todas as combinações lineares dos vetores $(1, 1, 0)$ e $(-2, 1, 3)$.

   (e) conjunto de vetores b com entradas não-negativas ($b_1 \geq 0$, $b_2 \geq 0$ e $b_3 \geq 0$).

   (f) conjunto de vetores b tais que ou $b_1 = 0$ ou $\frac{b_2}{b_1} \in \mathbb{Q}$.