Álgebra Linear e Aplicações - Lista 8

Entregar dia 30 de Maio

1. (20 pts) Mostra a generalização do Teorema de Davis-Kahan para valores singulares: Considera duas matrizes $m \times n$ A e $\tilde{A}$, com:
   - $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_k$ ($k = \min(m, n)$) valores singulares de A
   - $\tilde{\sigma}_1 \geq \cdots \geq \tilde{\sigma}_k$ valores singulares de $\tilde{A}$
   - $u_1, \ldots, u_k$ vetores singulares esquerdos de A
   - $\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_k$ vetores singulares esquerdos de $\tilde{A}$
   - $v_1, \ldots, v_k$ vetores singulares direitos de A
   - $\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_k$ vetores singulares direitos de $\tilde{A}$
   - $\mathcal{U} = \mathrm{Span}\{u_a, \ldots, u_b\}$
   - $\tilde{\mathcal{U}} = \mathrm{Span}\{\tilde{u}_a, \ldots, \tilde{u}_b\}$
   - $\mathcal{V} = \mathrm{Span}\{v_a, \ldots, v_b\}$
   - $\tilde{\mathcal{V}} = \mathrm{Span}\{\tilde{v}_a, \ldots, \tilde{v}_b\}$

   Então
   $$\max\{\|P_{\mathcal{U}} - P_{\tilde{\mathcal{U}}}\|, \|P_{\mathcal{V}} - P_{\tilde{\mathcal{V}}}\|\} \leq \frac{\|A - \tilde{A}\|}{\min\{\sigma_{a-1} - \tilde{\sigma}_a, \tilde{\sigma}_b - \sigma_{b+1}\}},$$
   onde $\|A\| = \sigma_1(A)$ denota a norma espectral (ou de operador). Pista: Aplica o teorema de Davis-Kahan em matrizes do tipo $\begin{bmatrix} 0 & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix}$. Quais são os autovalores/autovetores desta matriz?

2. (15 pts) Mostra que se A, B são matrizes quadradas,
   $$\det \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det(A - B)\det(A + B)$$

3. (15 pts) A ideia deste exercício é mostrar que todos os mapas linear de matrizes para matrizes podem ser escritos como somas de multiplicações de matrizes. Considera o espaço de matrizes $\mathcal{M}_{m\times n}$. Mostra que para qualquer mapa linear $T : \mathcal{M}_{m\times n} \to \mathcal{M}_{p\times q}$ existe um inteiro positivo $s \in \mathbb{Z}^+$ e matrizes $A_1, \ldots, A_s \in \mathbb{R}^{p\times m}$, $B_1, \ldots, B_s \in \mathbb{R}^{n\times q}$, tais que $\forall M \in \mathcal{M}_{m\times n}$, temos
   $$T(M) = \sum_{i=1}^{s} A_i M B_i$$