Álgebra Linear e Aplicações - Lista 4

Entregar dia 10 de Abril

1. (8 pts) Mostra que a projecção para um complemento ortogonal de um espaço é dada por: $P_{V^\perp} = I - P_V$, onde I é a matriz de identidade.

2. Se a projecção para o espaço coluna de A (quando as colunas de A são linearmente independentes) é dado por $A(A^T A)^{-1}A^T$, qual é a fórmula para a projecção:

   (a) (4 pts) no espaço linha de A?

   (b) (4 pts) no espaço nulo de A^T? (Sugestão: Usa 1.)

   (c) (4 pts) no espaço nulo de A?

3. Este exercício é sobre várias propriedades interessantes da transformada de Fourier discreta (DFT) convoluções e matrizes circulantes.

   (a) (5 pts) Mostra que a matriz $\frac{1}{\sqrt{n}}\mathcal{F}_n$, onde $\mathcal{F}_n$ é a matriz DFT, é unitária. Isto é $\mathcal{F}_n^*\mathcal{F}_n = nI_n$. Sugestão: Usa a fórmula da soma de séries geométricas.

   (b) (5 pts) Considera dois vectores $x, y \in \mathbb{C}^n$, e $\hat{x}, \hat{y}$ as suas transformadas de Fourier. Mostra que $\langle \hat{x}, \hat{y} \rangle = n\langle x, y \rangle$. (Relembrar: $\langle x, y \rangle = \sum_{j=0}^{n-1} x_j \overline{y_j} = y^* x$). Noutras palavras, a transformada de Fourier preserva o produto interno.

4. (20 pts) Dado um conjunto de pontos, calcula o melhor encaixe de um polinómio nesses pontos, usando 3 métodos. Olha o arquivo `ALA24_notebook_QR.ipynb` no site da disciplina.