Álgebra Linear e Aplicações - Lista 2

Entregar dia 27 de Março

1. (8 pts) Quais destes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ são subespaços? Mostra que verificam todas as propriedades ou mostra um exemplo que viola alguma das propriedades.

   (a) O conjunto de vetores $b = (b_1, b_2)$ tais que $b_1 = 1$.

   (b) O conjunto de vetores b tais que $b_1 = b_2$.

   (c) O conjunto de vetores b tais que $b_1^2 = b_2^2$.

   (d) O conjunto de vetores b tais que $b_1^2 = 0$.

2. Nos seguintes problemas, mostra que os espaços descritos são espaços vetoriais (verificam as propriedades de espaço vetorial) ou mostra um exemplo que viole uma das propriedades.

   (a) (6 pts) Considera o conjunto $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ (elementos em $\mathbb{R}^2$ em que a primeira entrada é positiva) com as operações $+$ (adição) e $\cdot$ (multiplicação por escalar), definidas por

   $$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_1 y_2 + x_2 y_1), \quad \forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in U$$

   $$\alpha(x_1, x_2) = (x_1^\alpha, \alpha y_1 x_1^{\alpha - 1}), \quad \forall (x_1, x_2) \in U, \alpha \in \mathbb{R}$$

   (b) (6 pts) Considera o conjunto de funções $[0, 1] \to \mathbb{R}^+$ (funções positivas), com adição e multiplicação por escalar definidas por.

   $$(f + g)(x) := f(x)g(x) \quad \text{e} \quad (\alpha f)(x) := f(x)^\alpha, \quad \forall x \in [0, 1], \alpha \in \mathbb{R}$$

3. (10 pts) Mostra que se B é uma matriz $n \times n$ invertível, então para qualquer matriz A $m \times n$ temos $C(AB) = C(A)$.

4. (20 pts) Modifica o algoritmo da aula passada para calcular a forma escalonada de uma matriz. O algoritmo deve receber uma matriz A e retornar matrizes P, L e U tais que $PA = LU$, P é uma matriz de permutação, L é triangular inferior e U é a forma escalonada de A. Olha o arquivo `ALA24_notebook1.ipynb` no site da disciplina.