Álgebra Linear e Aplicações - Lista 3

Entregar dia 4 de Maio

1. Dado um espaço vectorial V, $b \in V$ e U subespaço de V, calcula a projeção de b em U.
   (a) (5 pts) $V = \mathbb{R}^3$, $b = (1, 2, 3)$, $U = \text{Span}\{(1, 1, 1), (1, -1, -1)\}$
   (b) (5 pts) $V = \mathbb{R}^3$, $b = (1, 2, 3)$, $U = \{v \in \mathbb{R}^3, v_1 + v_2 + v_3 = 0\}$
   (c) (10 pts) $V = \mathbb{R}^n$, $b = (b_1, \ldots, b_n)$, $U = \{v \in \mathbb{R}^n, v_1 = v_2 = \cdots = v_n\}$
   (d) (10 pts) V é o espaço de funções integráveis em $[-\pi, \pi]$, tais que $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,dx < \infty$, com o produto interno:
   $$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx$$
   $b(x) = x$, $U = \text{Span}\{1, \sin(x), \cos(x)\}$

2. (10 pts) Mostra que a projecção para um complemento ortogonal de um espaço é dada por: $P_{V^\perp} = I - P_V$, onde I é a matriz de identidade.

3. Se a projecção para o espaço coluna de A é dado por $A(A^TA)^{-1}A$, qual é a fórmula para a projecção:
   (a) (5 pts) no espaço linha de A?
   (b) (5 pts) no espaço nulo de A^T? (Sugestão: Usa 2.)
   (c) (5 pts) no espaço nulo de A?

4. Este exercício é sobre várias propriedades interessantes da transformada de Fourier discreta (DFT) convoluções e matrizes circulantes.
   (a) (10 pts) Mostra que a matriz $\frac{1}{\sqrt{n}}\mathcal{F}_n$, onde $\mathcal{F}_n$ é a matriz DFT, é unitária. Isto é $\mathcal{F}_n^*\mathcal{F}_n = nI_n$. Sugestão: Usa a fórmula da soma de séries geométricas.
   (b) (10 pts) Considera dois vectores $x, y \in \mathbb{C}^n$, e $\hat{x}, \hat{y}$ as suas transformadas de Fourier. Mostra que $\langle \hat{x}, \hat{y}\rangle = n\langle x, y\rangle$. (Relembrar: $\langle x, y\rangle = \sum_{j=0}^{n-1} \overline{x_j} y_j = x^*y$). Noutras palavras, a transformada de Fourier preserva o produto interno.
   (c) (5 pts) Mostra que se $x \in \mathbb{R}^n$, então $(\mathcal{F}x)_0$ é real e, para k entre 0 e n $(0 < k < n)$, $(\mathcal{F}x)_k = \overline{(\mathcal{F}x)_{n-k}}$.
   (d) (10 pts) Mostra que as seguintes condições são equivalentes
      i. Para $k > 0$, $x_k = x_{n-k}$.
      ii. A matriz circulante C_x é simétrica.
      iii. A transformada de Fourier de x é real ($\mathcal{F}x \in \mathbb{R}^n$).
   (e) (10 pts) Para que vetores $x \in \mathbb{C}^n$ é que a matriz circulante C_x é unitária?