

Álgebra Linear e Aplicações - Lista 8

Entregar dia 30 de Maio

1. (7 pts) Dada uma matriz 2×2 , encontra a rotação de Jacobi que a torna triangular (relembrando que esta operação é feita no algoritmo QR para o cálculo de autovalores/autovetores):

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * \\ 0 & * \end{bmatrix}$$

Repara que existem duas possíveis respostas. Qual faz mais sentido usar? (para pensar; não precisam responder essa pergunta)

2. (8 pts) Dados dois vetores $x, y \in R^n$, tais que $\|x\| = \|y\|$, encontra a reflexão de Householder H tal que $Hx = y$. Mostra que também temos $Hy = x$.
3. (15 pts) Supõe que $A_{n \times n}$ é uma matriz simétrica. Mostra que para qualquer matriz $Q_{n \times m}$ com colunas ortonormais e $i \in \{1, \dots, m\}$ temos $\lambda_i(Q^T A Q) \leq \lambda_i(A)$ e $\lambda_{m-i}(Q^T A Q) \geq \lambda_{n-i}(A)$.
 - (a) (5 pts) Usa a alínea anterior para mostrar que, se $Q_{n \times m}$ tem colunas ortonormais, para qualquer matriz rectangular $A_{p \times n}$ e $i \in \{1, \dots, \min(m, p)\}$ temos $\sigma_i(AQ) \leq \sigma_i(A)$ e $\sigma_{m-i}(AQ) \geq \sigma_{n-i}(A)$.
4. (15 pts) Neste exercício implementará o método de gradientes conjugados e verá como o número de iterações depende do número de condição da matriz. Olha o arquivo `ALA24_notebook.CG.ipynb` no site da disciplina.