Álgebra Linear e Aplicações - Lista 3

Entregar dia 3 de Abril

1. (4 pts) Considera o espaço vectorial $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ da lista 2, com as operações $+$ e $\cdot$ definidas por

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_1 y_2 + x_2 y_1), \quad \forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in U$$

$$\alpha(x_1, x_2) = (x_1^\alpha, \alpha y_1 x_1^{\alpha-1}), \quad \forall (x_1, x_2) \in U, \alpha \in \mathbb{R}$$

   Mostra que o mapa $T : \mathbb{R}^2 \to U$ dado por $T(x, y) = (e^x, ye^x)$ é uma transformação linear.

2. As seguintes funções de $\mathbb{R}^2$ para $\mathbb{R}^2$ são transformações lineares? Prova ou dá um exemplo que viola a definição.
   (a) (2 pts) $f(x, y) = (x + y, -x)$
   (b) (2 pts) $f(x, y) = (xy, y)$
   (c) (2 pts) $f(x, y) = (0, 0)$
   (d) (2 pts) $f(x, y) = (x, 1 - x)$

3. Considera um conjunto de vetores ortonormais $\{v_1, \ldots, v_n\} \in \mathbb{R}^m$ (ortogonais e a norma de cada vector é 1) e a matriz $Q = \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{bmatrix}$.
   (a) (3 pts) Mostra que $n \leq m$.
   (b) (3 pts) Mostra que $Q^T Q = I_{n \times n}$ (matriz identidade $n \times n$).
   (c) (2 pts) Define $P = QQ^T$. Mostra que $P^2 = P$.
   (d) (6 pts) Mostra que, se $n = m$, $P = I_{n \times n}$, ou seja, $Q^T Q = QQ^T = I_{n \times n}$. Isto prova o facto curioso que, se a colunas duma matriz quadrada são ortonormais, então as linhas também são ortonormais.
   (e) (4 pts) Mostra que, se $n < m$, então $QQ^T \neq I_{m \times m}$.

4. Dado um espaço vectorial V, $b \in V$ e U subespaço de V, calcula a projeção de b em U.
   (a) (2 pts) $V = \mathbb{R}^2$, $b = (1, 2)$, $U = \text{Span}\{(1, 1)\}$
   (b) (4 pts) $V = \mathbb{R}^3$, $b = (1, 2, 3)$, $U = \text{Span}\{(1, 1, 1), (1, -1, -1)\}$

5. (14 pts) Implementa uma função para calcular a ortogonalização de Gram-Schmidt das colunas de uma matriz. Olha o arquivo `ALA24_QR.ipynb` no site da disciplina.