Álgebra Linear e Aplicações - Lista 5

Entregar dia 1 de Junho

1. Verifica se as seguintes matrizes são positivas semi-definidas, ou porque verifica ou viola uma das suas cinco propriedades:

   (a) (4 pts) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

   (b) (4 pts) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

   (c) (5 pts) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

2. Calcula a decomposição SVD das matrizes

   (a) (8 pts) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

   (b) (8 pts) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

3. Este exercício é sobre como ir da decomposição de Schur para a decomposição de Jordan usando transformações de similaridade.

   (a) (8 pts) Mostra que se $a \neq b$ existe uma matriz não singular S tal que:

   $$S \begin{bmatrix} a & c \\ 0 & b \end{bmatrix} S^{-1} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

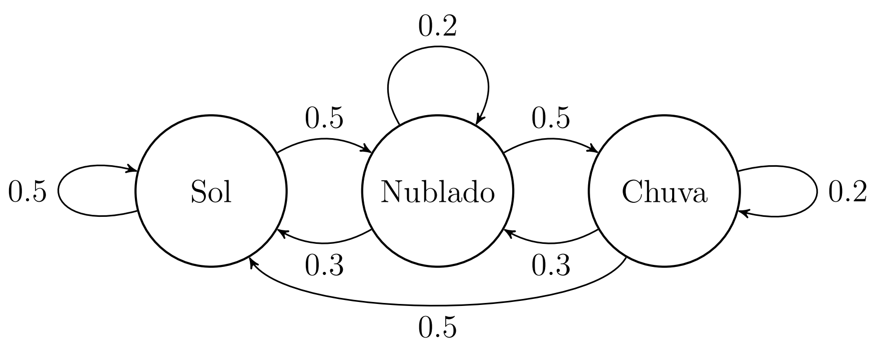
   Usando esta ideia podemos sempre criar zeros na entrada i, j da matriz se $\lambda_i \neq \lambda_j$.

   (b) (8 pts) Mostra que se $c \neq 0$ existe uma matriz não singular S tal que:

   $$S \begin{bmatrix} a & c \\ 0 & a \end{bmatrix} S^{-1} = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

   Usando esta ideia podemos sempre criar uns acima da diagonal da matriz quando $\lambda_i = \lambda_j$.

4. (10 pts) Calcula a distribuição estacionária da seguinte cadeia de Markov:



5. (15 pts) Supõe que $u_1, \ldots, u_n$ são vetores de um espaço vetorial com produto interno. Mostra que a matriz

$$\begin{bmatrix} \langle u_1, u_1 \rangle & \langle u_1, u_2 \rangle & \ldots & \langle u_1, u_n \rangle \\ \langle u_2, u_1 \rangle & \langle u_2, u_2 \rangle & \ldots & \langle u_2, u_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle u_n, u_1 \rangle & \langle u_n, u_2 \rangle & \ldots & \langle u_n, u_n \rangle \end{bmatrix}$$

é positiva semidefinida, e só é singular se os vetores $u_1, \ldots, u_n$ forem linearmente dependentes.

   (a) (5 pts) Mostra a seguinte generalização da desigualdade de Cauchy-Schwarz: Para quaisquer vetores a, b, c num espaço vetorial com produto interno, temos:

$$\|a\|^2\|b\|^2\|c\|^2 + 2\langle a, b\rangle \langle a, c\rangle \langle b, c\rangle \geq \|a\|^2 \langle b, c\rangle^2 + \|b\|^2 \langle a, c\rangle^2 + \|c\|^2 \langle a, b\rangle^2,$$

   com igualdade se e só se a, b, c são linearmente dependentes.

6. Considera o espaço de matrizes $m \times n$ com o produto interno $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(A^T B)$ e norma $\|A\| = \sqrt{\operatorname{tr}(A^T A)}$.

   (a) (5 pts) Mostra que se $Q_{m\times m}$ é uma matriz ortogonal, então $\|QA\| = \|A\|$.

   (b) (5 pts) Mostra que se $Q_{n\times n}$ é uma matriz ortogonal, então $\|A\| = \|AQ\|$.

   (c) (15 pts) Supõe que $m = n$ e $A = U\Sigma V^T$. Mostra que a matriz ortogonal mais próxima de A, no sentido que $\|A - Q\|$ é mínimimizado, é $Q = UV^T$