

Álgebra Linear e Aplicações - Lista 4

Entregar dia 18 de Maio

1. Calcula os determinantes das seguintes matrizes:

(a) (4 pts)
$$\begin{bmatrix} a & b & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ a & 0 & 0 & d \\ a & b & c & 1 \end{bmatrix}$$

(b) (4 pts)
$$\begin{bmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{bmatrix}$$

(c) (4 pts)
$$\begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & g & h \end{bmatrix}$$

2. Calcula os autovalores e autovetores das seguintes matrizes:

(a) (6 pts)
$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

(b) (12 pts)
$$\begin{bmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{bmatrix}$$

3. (15 pts) Supõe $A = \begin{bmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{bmatrix}$. Usando, autovalores e autovetores, calcula:

(a) A^n

(b) $I + (A - \frac{1}{2}I)^{-1}$

(c) $\exp(A)$

4. (10 pts) Encontra uma fórmula fechada para a sequência (a_n) , definida pela recorrência:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 2a_n + 2a_{n-1}$$

5. (10 pts) Mostra que para $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, se $\lambda \neq 0$ é autovalor de AB , então é também autovalor de BA .

6. Considera a matriz tridiagonal:

$$T_n = \begin{bmatrix} a_n & b_n & & & \\ c_n & a_{n-1} & b_{n-1} & & \\ & c_{n-1} & a_{n-2} & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & b_1 \\ & & & c_1 & a_0 \end{bmatrix}$$

(a) (15 pts) Encontra escalares u_n e v_n (dependendo de a_n , b_n e c_n) tais que, para $n \geq 2$:

$$\det(T_n) = v_n \det(T_{n-1}) + u_n \det(T_{n-2})$$

(b) (5 pts) Encontra uma fórmula de recorrência para o polinómio característico da matriz tridiagonal A_n .

$$A_n = \begin{bmatrix} a_n & \sqrt{b_n} & & & \\ \sqrt{b_n} & a_{n-1} & \sqrt{b_{n-1}} & & \\ & \sqrt{b_{n-1}} & a_{n-2} & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \sqrt{b_1} \\ & & & \sqrt{b_1} & a_0 \end{bmatrix}$$

Para refletir, não precisa responder: Esta fórmula de recorrência faz lembrar alguma coisa?

7. (15 pts) Mostra que se λ é um autovalor de uma matriz unitária, então $|\lambda| = 1$.