Álgebra Linear e Aplicações - Lista 6

Entregar dia 27 de Junho

1. (5 pts) Encontra a reflexão de Householder $H = I - 2zz^T$ tal que HAH^{-1} é tridiagonal, com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Considera a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

   e o vetor $v = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$.

   (a) (3 pts) Calcula uma iteração do método das potências começando em v

   (b) (3 pts) Calcula uma iteração do método das potências inversas começando em v.

   (c) (10 pts) Qual é o fator de convergência de cada um dos métodos?

3. Considera a norma $\|A\|_{op} = \max\limits_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$.

   (a) (8 pts) Mostra que para quaisquer matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e vetor $x \in \mathbb{R}^n$, $\|Ax\|_{op} \leq \|A\|_{op}\|x\|_{op}$.

   (b) (8 pts) Mostra que $\|A\|_{op} = \sigma_1(A)$, onde $\sigma_1(A) \geq \cdots \geq \sigma_n(A)$ são os valores singulares de A.

   (c) (4 pts) Mostra que $\|A\|_{op} = \|A^T\|_{op}$.

   (d) (8 pts) Mostra que para quaisquer matrizes $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\|A + B\|_{op} \leq \|A\|_{op} + \|B\|_{op}$.

   (e) (8 pts) Mostra que para quaisquer matrizes $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $\|AB\|_{op} \leq \|A\|_{op}\|B\|_{op}$.

   (f) (12 pts) Mostra que se A é quadrada, então $\|A\|_{op} \geq \max_k |\lambda_k(A)|$.

4. (4 pts) Prova que o número de condição $\|A\|_{op}\|A^{-1}\|_{op}$ é maior ou igual a 1.

5. Considera as iterações $x_{k+1} = S^{-1}(Tx_k + b)$, onde S e T são matrizes $n \times n$, e define $x_* = (S - T)^{-1}b$, e os vectores de erro $e_k = x_k - x_*$.

   (a) (2 pts) Mostra que $e_{k+1} = S^{-1}Te_k$

   (b) (5 pts) Mostra que $\|e_k\| \leq \|S^{-1}T\|_{op}^k \|e_0\|$ e que as iterações $x_{k+1} = S^{-1}(Tx_k + b)$ convergem para x_* qualquer que seja o ponto inicial x_0 se $\|S^{-1}T\|_{op} < 1$.

(c) (8 pts) Para uma matriz quadrada M, define $\rho(M) = \max_k |\lambda_k(M)|$. Dá um exemplo duma matriz quadrada M tal que $\rho(M) < 1 < \|M\|_{op}$, e de um vetor e_0 tal que $\|Me_0\| > \|e_0\|$. (Isto implica que existem S e T e e_0 tais que $\rho(S^{-1}T) < 1$ mas $\|e_1\| \not\leq \|e_0\|$)

(d) (12 pts) Mostra que se $S^{-1}T$ é diagonalizável, existe uma constante c, que depende só de $S^{-1}T$, tal que

$$\|e_k\| \leq c\rho(S^{-1}T)^k \|e_0\|$$

Mostra também que as iterações convergem se $\rho(S^{-1}T) < 1$.

(*) (opcional) Mostra que se $\rho(S^{-1}T) < 1$ então as iterações convergem (envolve a forma de Jordan no caso geral). Qual é o fator de convergência nesse caso?