Exame de Álgebra Linear e Aplicações - Prática

1. Considera a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

   (a) Calcula uma base para os quatro espaços fundamentais de A.

   (b) Encontra todas as soluções para o sistema $Ax = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}^T$.

2. D. Pedro I tinha três palácios no Rio de Janeiro. Ele não gostava de dormir dois dias seguidos no mesmo palácio, então depois de dormir no:

Palácio 1: Escolhia o palácio 2 com probabilidade 2/3 e o palácio 3 com probabilidade 1/3 (o palácio 3 estava mais longe);

Palácio 2: Escolhia o palácio 1 com probabilidade 1/2 e o palácio 3 com probabilidade 1/2;

Palácio 3: Escolhia o palácio 2 com probabilidade 2/3 e o palácio 1 com probabilidade 1/3;

   (a) Constrói a matriz de transição da cadeia de Markov que representa o palácio onde D. Pedro I dorme.

   (b) Qual é a probabilidade de ele voltar a dormir no palácio 1 dois dias depois de ter dormido lá?

   (c) Verifica que $1, -2/3, -1/3$ são os autovalores da matriz de transição, e calcula os autovetores correspondentes.

   (d) Qual é a probabilidade de ele voltar a dormir no palácio 2, n dias depois de ter dormido lá?

3. Escreve um sistema para encontrar os coeficientes de um polinómio de grau 2 que passe por (x_1, y_1), (x_2, y_2) e (x_3, y_3). Isto é, um sistema para a_0, a_1, a_2 tais que

$$y_i = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2, \quad i = 1, 2, 3.$$

   (a) Encontra o polinómio de grau 2 que passa pelos pontos $(-1, 1)$, $(0, 0)$ e $(1, 0)$

   (b) Calcula a regressão linear de y em função de x para esses 3 pontos.

4. Supõe que A é uma matriz simétrica positiva definida.

   (a) Mostra que A é invertível.

   (b) Mostra que A^{-1} também é positiva definida.

   (c) Dado um vetor $u \neq 0$, calcula α tal que $A - \alpha u u^T$ é singular.

   (d) Encontra um vetor não nulo no espaço nulo dessa matriz singular.