Relatório - 2º Projeto ASA 2021/2022

Grupo: al096

Aluno(s): João Nuno Cardoso (99251) e José João Ferreira (99259)

Descrição das Soluções dos Requisitos

No âmbito da resolução do exercício de determinação do ancestral comum mais próximo entre 2 vértices proposto, decidimos desenvolver uma solução *bottom-up* de pesquisa DFS que começasse pelos vértices `v1` e `v2`, explorando subsequentemente os seus ancestrais e pintando-os, de acordo e de forma recursiva.

Para o 1º requisito, de determinação da validez da árvore, lemos, pelo *input*, as relações de parentesco. Guardamos, por cada vértice, uma referência para cada um dos progenitores, numa estrutura de dados chamada `vertex`. Ao tentar atribuir a um vértice um 3º progenitor, é acusada a invalidez da árvore. Dentro de `vertex`, também é guardado um booleano `clear`, indicador da existência ou não de um ciclo atingível a partir do vértice (note-se que esta propriedade é hereditária). Deste modo, ao realizar uma DFS recursiva por cada vértice, com um `set` que vai mantendo registo dos vértices percorridos, atribuindo `true` a `clear` para cada vértice através do qual a DFS chega somente a antepassados órfãos, e retornando de imediato `false` assim que um caminho vá ter a um vértice já descoberto, conseguimos, eficazmente, detetar a existência de ciclos. Equivalentemente a uma DFS típica, estamos na presença de um limite assimptótico de grandeza **O(|V|+|E|)**. Contudo, se a DFS tiver início num vértice pertencente a um *loop*, o número de iterações é constante ($\Omega(1)$).

Por último, no que concerne o 2º requisito, guardamos também para cada vértice uma variável `color`, que pode ser `white`, `red`, `blue`, `purple` ou `black`. Para `v1`, realizamos uma DFS em que marcamos todos os seus antepassados, originalmente a branco, com a cor vermelha. De seguida, uma outra DFS, com início em `v2`, marca todos os seus antepassados brancos a azul. Ao encontrar um antepassado vermelho, marca-o a roxo, colorindo, seguidamente, todos os seus antepassados de preto, independentemente da sua cor. No final, sabemos que os vértices roxos são ancestrais comuns de `v1` e `v2`, por constarem na interseção dos seus antepassados, e que são os mais próximos, já que de outra forma seriam pretos e não roxos, pelo que constituem a solução do problema. Como se trata de uma DFS, a complexidade típica pertence a **O(|V|+|E|)**, conquanto na maioria dos casos apenas uma fração do grafo é explorada, ocorrendo ainda um número constante de iterações se o ancestral comum mais próximo for órfão e progenitor de `v1` e `v2`.

Análise Teórica

Numa árvore válida existem, no máximo, 2 arestas por vértice, logo, no pior caso, $|E| = 2|V|$.

- Leitura de arestas para *array* de vértices: $O(|E|) = O(2|V|)$
- Algoritmo que verifica se há *loops*: $O(|V|+|E|) = O(3|V|) = O(|V|)$, $\Omega(1)$
  Este algoritmo percorre em média cada vértice e aresta uma única vez.
  Se encontrar imediatamente o *loop*, corre apenas três iterações.
- DFS para determinar ancestral comum mais próximo: $O(|V|+|E|) = O(|V|)$, $\Omega(1)$
  Em média, este algoritmo percorre uma fração do número de arestas e vértices do grafo. No melhor caso, encontra de imediato um antepassado órfão, no pior terá que percorrer todos os vértices e arestas, tal como uma DFS normal.

Complexidade de tempo: $\underline{O(|V| + |E|)} = O(|V|)$, complexidade de espaço: $O(2|V|) = O(|V|)$.

Relatório - 2º Projeto ASA 2021/2022

Grupo: al096

Aluno(s): João Nuno Cardoso (99251) e José João Ferreira (99259)

Pseudocódigo de partes das lógicas por detrás das soluções apresentadas:

Verificação de loops:

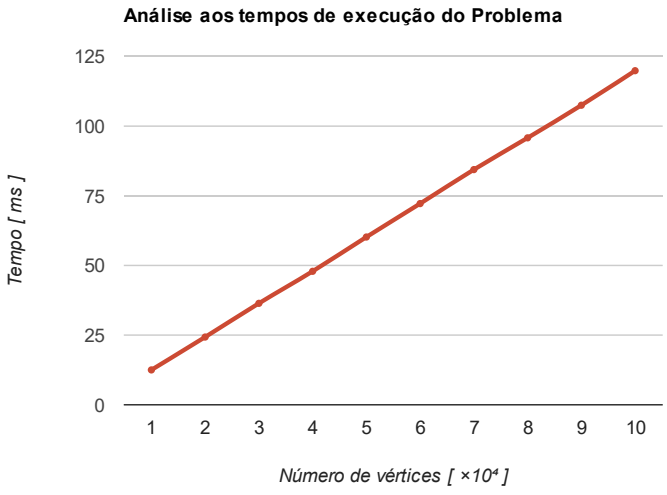
```
for i=1 to #vertices do
    let path be a new set
    if (has_cycle(i, path, vertices)) then
        print("0")
        return

has_cycle(int v, set path, vertex vertices[])
    if vertices[v].clear == true then
        return false
    if path.contains(v) then
        return true
    else do
        path.insert(v)
    bool res = res
    for p in v.parents do
        res = res || has_cycle(p, path, vertices)
    vertices[v].clear = !res
    return res
end
```

Determinação do LCA:

```
DFS(int v, color c, vertex vertices[])
    if vertices[v].color == red & c == blue then
        c = purple
    vertices[v].color = c
for p in v.parents do
    if p.color == {white || red} & c == blue do
        DFS(p, c, vertices)
    else if p.color != black &
    c == {purple || black} do
        DFS(p, black, vertices)
end
```

Avaliação Experimental dos Resultados

Foram registados 10 resultados, um para cada número de vértices dados por *input* e de forma incremental, desde 1×10^4 até 1×10^5, de 10000 em 10000, e calculados os tempos para cada instância. Para cada nº de vértices, o nº de arestas geradas foi, aproximadamente, o seu dobro e foram realizados 100 testes. Os *inputs* foram gerados com recurso ao `randGeneoTree` e a média de resultados foi calculada com recurso à ferramenta `hyperfine`. O tempo encontra-se em milissegundos (YYs) e o nº de vértices na potência 10^4 (XXs).



Recordando a complexidade da solução apresentada, a curva do gráfico gerado está de acordo com aquilo que seria de esperar de um algoritmo com limite assimptótico apertado de grandeza O(|V| + |E|).