Ciclo Hamiltoniano

Douglas Renan Ribeiro Santos douglasrenan21@gmail.com
João Gabriel Alves Nery gabriel.nery@dcomp.ufs.br

PROCC - UFS

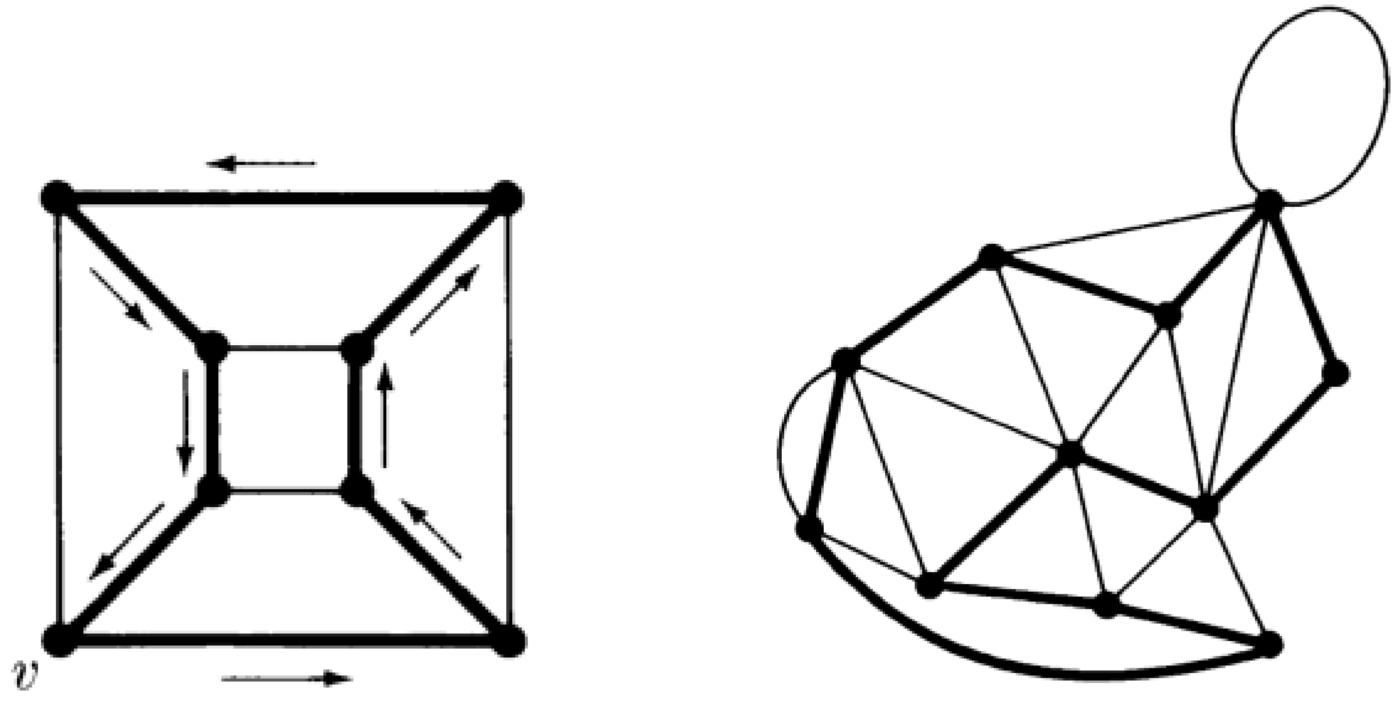
Introdução

A Teoria dos Grafos é um ramo da Matemática que estuda as relações entre os objetos de um determinado conjunto. Para tal estudo, são utilizados estruturas que chamamos de grafos. Seja G = (V,E) um grafo, onde V é um conjunto finito cujos elementos são denominados vértices e E é um conjunto de subconjuntos de dois elementos de V denominados arestas.

Podemos representar muitas situações reais através de grafos.

Introdução

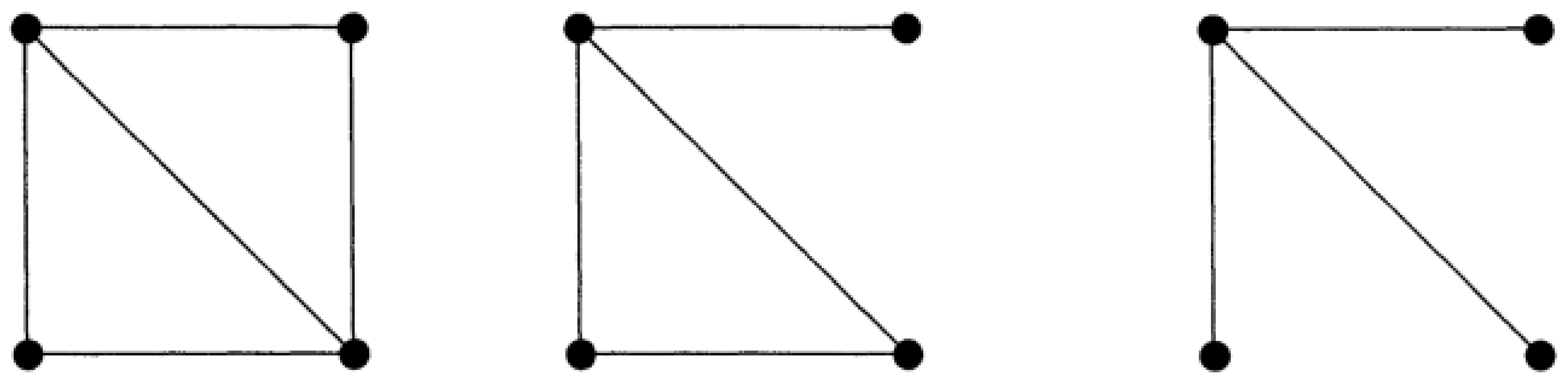
Um trajeto euleriano é caracterizado pelo fato de incluir todas as arestas de um dado grafo, uma única vez.
Entretanto os vértices podem se repetir em um trajeto euleriano. Surge então a questão da possibilidade de se obter um trajeto fechado (não necessariamente euleriano) que inclua cada vértice uma única vez; como nos grafos abaixo:



Definição

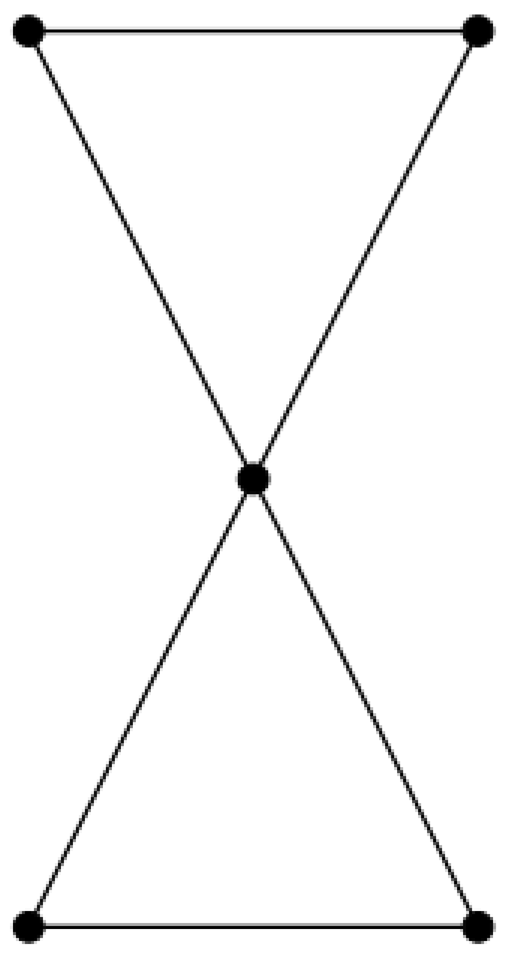
- Um **circuito hamiltoniano** em um grafo conexo é um circuito que contém todos o vértices do grafo.
- Um grafo é chamado de **grafo hamiltoniano** se possui um circuito hamiltoniano.
- Um grafo não-hamiltoniano é **semi-hamiltoniano** se possui um caminho que contém todos os seus vértices.

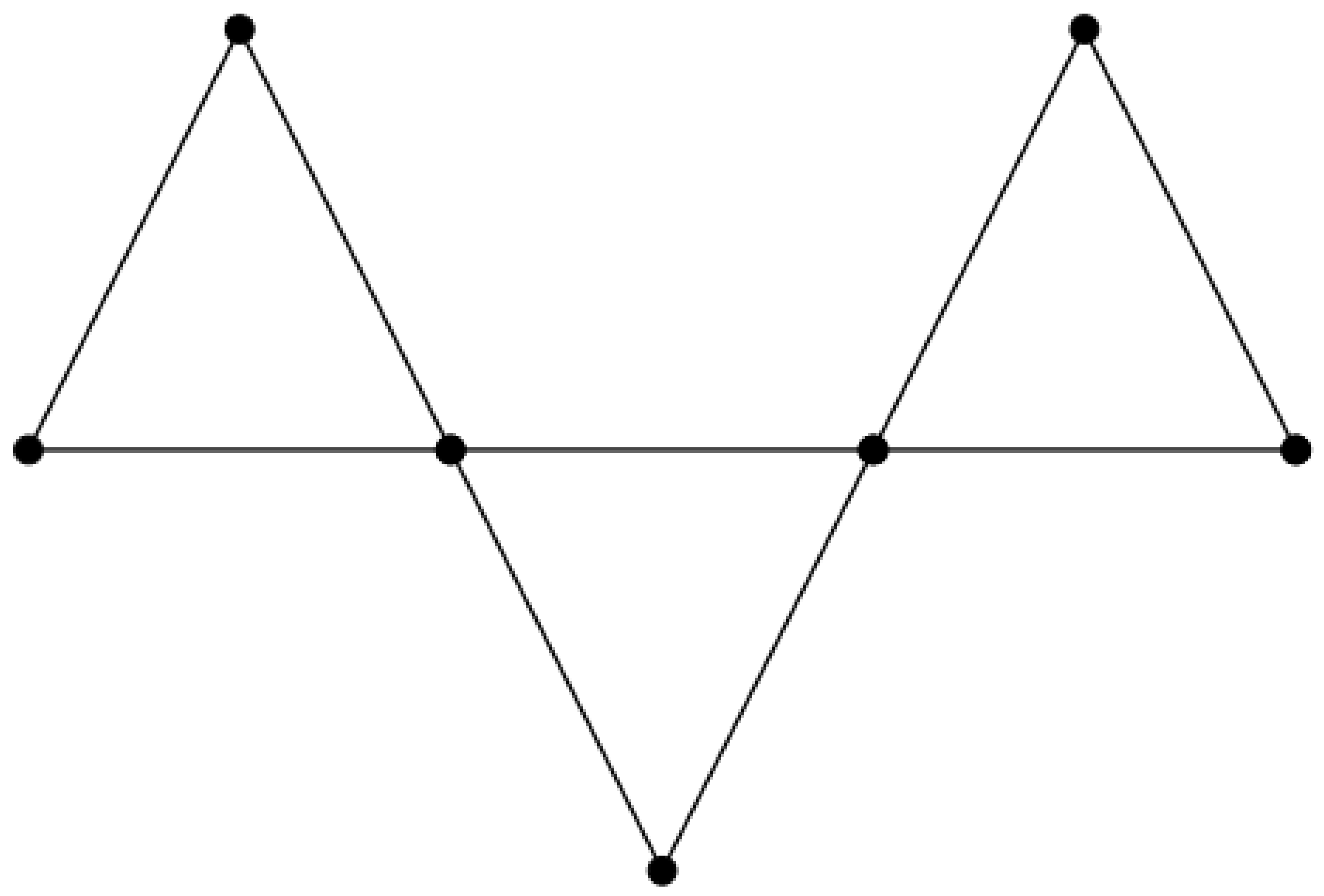
Exemplo:



Grafos não hamiltonianos

- Os grafos abaixo não são hamiltonianos, pois um **ciclo hamiltoniano** é um ciclo que passa por **todos os vértices exatamente uma vez** e retorna ao vértice inicial. Note que o vértice central tem **grau 4**, mas é o **único ponto de articulação** entre as duas partes do grafo (se for removido, o grafo se desconecta).





Considerações

- Arestas paralelas e laços não podem pertencer a um ciclo hamiltoniano.
- Se um vértice possui grau 2, as arestas a ele incidentes devem pertencer ao circuito hamiltoniano.
- Nenhum subciclo próprio, isto é, um ciclo que não possui todos os vértices de G, pode ser formado durante a construção do ciclo hamiltoniano.
- Uma vez incluído um vértice, todas as arestas a ele incidentes e que não foram inseridas no circuito podem ser desconsideradas.

Ciclo Euleriano

- **Definição:** Um ciclo que percorre **todas as arestas** de um grafo exatamente uma vez, voltando ao vértice inicial.

- Teorema de Euler: Um grafo conexo possui um ciclo euleriano **se e somente se** todos os vértices têm grau par.

- Complexidade: verificar se um grafo tem ciclo euleriano é **fácil (tempo polinomial)**.

Teorema de Ore (1960)

Seja um grafo simples com vértices.

Se, para **todo par de vértices não adjacentes** , vale:

$$\deg(u) + \deg(v) \geq n,$$

então é **hamiltoniano**.

A ideia é que, mesmo que e não estejam ligados diretamente, se cada um tem grau "grande o suficiente", o grafo é "denso demais" para não ter um ciclo que passe por todos os vértices.

O teorema de Ore dá uma **condição suficiente**, mas **não é necessária**.

Ou seja:

Se a condição vale, **o grafo é hamiltoniano**.
Se a condição **não** vale, o grafo pode ser ou não hamiltoniano (precisa verificar de outra forma).

Demonstração Por contradição

Suponha que satisfaça a condição do Teorema de Ore, mas não seja hamiltoniano.

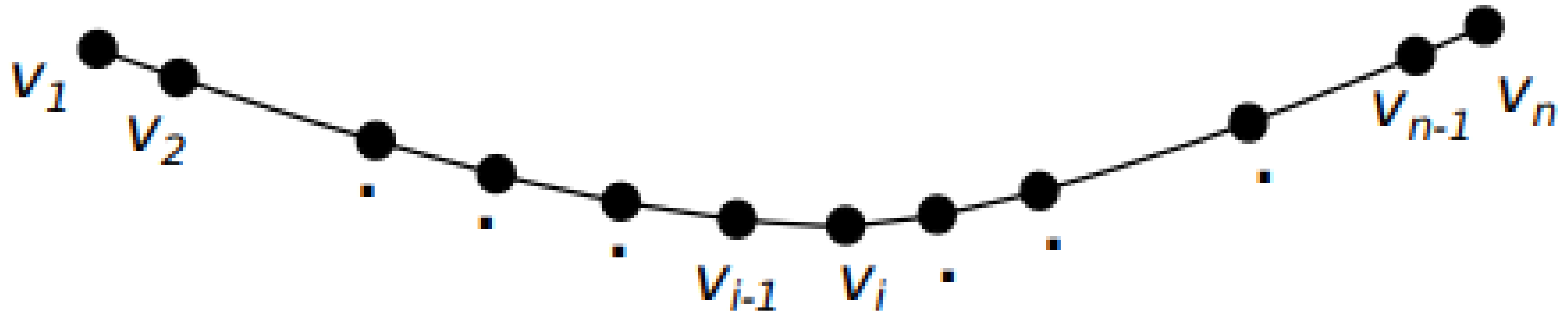
Podemos assumir que é **maximamente não hamiltoniano**, isto é, a adição de qualquer aresta ausente em torna o hamiltoniano.

Se não for maximamente não hamiltoniano, podemos adicionar arestas até que seja, sem violar a condição de Ore, pois a soma dos graus só aumenta.

Demonstração Por contradição

Sejam $v, w \in V$ vértices não-adjacentes (existe pelo menos um par, caso contrário, *G* seria completo e, por conseguinte, hamiltoniano).
Logo, a adição da aresta (*v*, *w*) torna *G* hamiltoniano, o que implica na existência de um caminho passando por todos os vértices:

$$v = v1 \to v2 \to \cdots \to vn = w.$$



Complexidade computacional

Problema da decisão:

- “Dado um grafo , ele contém um ciclo hamiltoniano?”
- Esse é um **problema de decisão**, ou seja, a resposta é apenas **SIM ou NÃO**.
- Em 1972, Richard Karp provou que esse problema é **NP-completo**.
    - **NP**: significa que, se alguém te der uma solução (um ciclo hamiltoniano), você consegue verificar rapidamente (em tempo polinomial) se está correto.
    - **Completo**: significa que ele é “tão difícil” quanto qualquer outro problema em NP — se você encontrar um algoritmo eficiente para ele, resolveria todos os problemas em NP.
- Ou seja: **não existe algoritmo polinomial conhecido** para resolver o problema em todos os casos.

Complexidade computacional

- **Problema da otimização**
- Agora imagine que não basta apenas responder **"existe ou não"**, mas você quer:

  "Qual é o **menor ciclo hamiltoniano** que visita todos os vértices exatamente uma vez?"

- Isso é exatamente o **Problema do Caixeiro Viajante (TSP – Travelling Salesman Problem)**.

- No TSP, cada aresta tem um **custo/peso** (distância, tempo, etc.), e o objetivo é encontrar o ciclo hamiltoniano de **custo mínimo**.
- Esse problema é **NP-difícil**:
  - Mais difícil que NP-completo, porque não é apenas "sim ou não", e sim encontrar a melhor solução.
  - Se você conseguisse resolver o TSP em tempo polinomial, resolveria também todos os problemas NP-completos.

Algoritmos de busca

- Força bruta - testar todas as permutações de vértices: O(n!).
- Heurísticas e aproximações: *backtracking, branch and bound*, algoritmo de Held-Karp (programação dinâmica, $O(n^2 * 2^n)$).

Tabela de complexidade comparativa

n (vértices)	Força Bruta (≈ n!)	Held-Karp (≈ n²·2^n)
5	120	800
10	3628800	102400
15	1307674368000	7372800
20	2432902008176640000	419430400

Aplicações reais

- **Planejamento de rotas** (logística, drones, carteiros).
- **Circuitos integrados** (otimização de conexões).
- **Bioinformática** (reconstrução de genomas por caminhos hamiltonianos).

Referências

- SANTOS, Marcelo de Souza C. Ciclos Hamiltonianos em Grafos. Ciência e Natura, Santa Maria, v. 39, n. 3, p. 595-626, 2017. Universidade Federal de Santa Maria.

- BOAVENTURA NETTO, Paulo Oswaldo. Grafos: teoria, modelos, algoritmos. 2. ed. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 2004.

- CORMEN, Thomas H.; LEISERSON, Charles E.; RIVEST, Ronald L.; STEIN, Clifford. Introduction to Algorithms. 3. ed. Cambridge: MIT Press, 2009.

- OLIVEIRA, Valeriano A. de; RANGEL, Socorro; ARAUJO, Silvio A. de. Teoria dos Grafos: Capítulo 12 – Grafos Hamiltonianos. Departamento de Matemática Aplicada, UNESP, 2013. Preparado a partir de: RANGEL, Socorro. Teoria do Grafos: Notas de aula. IBILCE, UNESP, 2002-2013

- GRAPH ONLINE. GraphOnline: Criador de Grafos. Disponível em: https://graphonline.top/pt/. Acesso em: 27 set. 2025.

Acesso ao código:

Acesse: **https://github.com/joaonery1/algorithm-hamiltonian-cycle**