Fundamentos Teóricos da Computação

CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

Prof. Dr. João Paulo Aramuni

Linguagens Formais

* **Linguagens Formais**

Linguagens Formais

* Uma linguagem formal é tal que:
  * Tem uma sintaxe bem definida, de forma que, dada uma sentença, seja sempre possível saber se ela pertence ou não à linguagem; e
  * Tem semântica precisa, de modo que não contenha sentenças sem significado ou ambígua
* Exemplos de concretização de Linguagens Formais
  * C++, Java, Pascal, HTML, etc

Nomenclatura

- Toda *linguagem* tem um *alfabeto* associado
  - Um *alfabeto* é um conjunto finito, não vazio, de símbolos
  - Uma *palavra* sobre um *alfabeto* é uma sequência finita de símbolos do *alfabeto*
  - O *tamanho* de uma palavra x, $|x|$, é o número de símbolos que a compõem
  - *Palavra vazia*: λ
    - $|\lambda| = 0$

Exemplo 1

* Sejam os seguintes alfabetos

$$\Sigma = \{1\} \text{ e } \Gamma = \{0, 1\}$$

* Com estes alfabetos é possível representar qualquer número natural
  * Representações sobre Σ são exponencialmente maiores que sobre Γ
* Exemplos de palavras sobre
  * Γ : λ, 0^0,0, 1, 00, 01, 10, 11, 0^3
  * Σ : λ, 1^0, 1, 11, 111, 1111, 1^5

Linguagens sobre Alfabetos

- Seja o alfabeto Σ
  - Uma linguagem sobre Σ é um conjunto de palavras sobre Σ

- Seja Σ^* o conjunto de todas as palavras sobre Σ
  - Uma linguagem sobre Σ é um subconjunto de Σ^*

$$L \subseteq \Sigma^*$$

Linguagens sobre Alfabetos

* Fecho de *Kleene* sobre um alfabeto Σ
  * Seja Σ um alfabeto. O Fecho de *Kleene* ou **fecho estrela** de Σ, denotado por Σ^*, é o conjunto de todas as cadeias (finitas) obtidas concatenando zero ou mais símbolos de Σ. Por exemplo, se $\Sigma = \{a\}$, então: $\Sigma^* = \{\lambda, a, aa, aaa, aaaa, \ldots\}$

  * Formalmente, podemos definir o fecho estrela de um alfabeto Σ, indutivamente, por:
    * 1) $\lambda \in \Sigma^*$
    * 2) Se $w \in \Sigma^*$ e $a \in \Sigma$, então $wa \in \Sigma^*$
    * 3) os únicos elementos de Σ^* são aqueles obtidos aplicando uma quantidade finita de vezes as regras 1) e 2).

Exemplo 2

* Seja o alfabeto Σ = {0,1}. O conjunto de todas as palavra sobre Σ é Σ* = {λ,0,1,00,01,10,11,000,....}.
* São exemplos de linguagens sobre Σ:
  * { }. A mais simples. Não contém palavras;
  * {λ}. Contém somente a palavra vazia;
  * {0}. Contém uma única palavra: 0;
  * {λ,0}. Contém duas palavras;
  * $\{w \in \Sigma^* | 1 \leq |w| \leq 5\}$. Contém $\sum_{i=1}^{5} 2^i$ palavras;
  * $\{0^n 1^n | n \in \mathbb{N}\}$ Linguagem com todas as palavras de tamanho par, cuja primeira metade só contém 0s e a segunda metade só 1s

Operações sobre Palavras

- Concatenação
  - $x = a_1 a_2 \ldots a_m$
  - $y = b_1 b_2 \ldots b_n$
  - $xy = a_1 a_2 \ldots a_m b_1 b_2 \ldots b_n$
  - Em particular $\lambda w = w \lambda = w$

- Reverso
  - $w = a_1 a_2 \ldots a_m$
  - $w^R = a_m a_{m-1} \ldots a_1$
    - Um palíndromo é uma palavra tal que $w = w^R$

Prefixo, Sufixo e Sub-palavra

* Seja a palavra $w = xyz$, em que x, y e z podem ser λ ou não
  * x é um prefixo de w
  * y é uma sub-palavra de w
  * z é um sufixo de w

  * Em particular λ é um prefixo, sufixo e uma sub-palavra de qualquer palavra, e w é um prefixo, sufixo e sub-palavra de qualquer palavra w

Exemplo 3

* Sejam duas palavras $v = abaabb$ e $w = abc$
  * $vw =$
  * $wv =$
  * $\lambda v =$
  * $w^R =$
  * $\lambda^R =$
  * Todos prefixos de w =
  * Todos sufixos de w =
  * Todas sub-palavras de w =
* 6 palíndromos =

Exemplo 3

* Sejam duas palavras $v = abaabb$ e $w = abc$
  * $vw = abaabbabc$
  * $wv = abcabaabb$
  * $\lambda v = abaabb$
  * $w^R = cba$
  * $\lambda^R = \lambda$
  * Todos prefixos de $w = \lambda, a, ab \text{ e } abc$
  * Todos sufixos de $w = \lambda, c, bc, abc$
  * Todas sub-palavras de $w = \lambda, a, b, c, ab, bc, abc$
* 6 palíndromos = $\lambda, a, bb, ccc, aba, baab$

Operações sobre Linguagens

* Como uma linguagem é um conjunto, pode-se lançar mão das operações sobre **conjuntos**.

Operações sobre Linguagens

* Sejam as linguagens L_1 e L_2 sobre Σ_1 e Σ_2 respectivamente. São também linguagens:
  * $L_1 \cup L_2$, uma linguagem sobre $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$;
  * $L_1 \cap L_2$, uma linguagem sobre $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$;
  * $L_1 - L_2$, uma linguagem sobre Σ_1.

* Concatenação
  * $L_1 L_2 = \{xy | x \in L_1 \text{ e } y \in L_2\}$
  * Em particular

$$\emptyset L = L\emptyset = \emptyset \text{ e } \{\lambda\}L = L\{\lambda\} = L$$

Operações sobre Linguagens

* Fecho de *Kleene* sobre uma linguagem L
  * Definição recursiva
    * 1) $\lambda \in L^*$
    * 2) Se $x \in L^*$ e $y \in L$, então $xy \in L^*$

    * Informalmente, L^* é o conjunto de todos os elementos formados a partir da concatenação de zero ou mais elementos de L .

  * O Fecho de *Kleene positivo*, L^+, é igual a L^* sem a palavra vazia:

$$L^* = L^+ \cup \{\lambda\}$$

Um olhar para o futuro

* Como uma linguagem sobre um alfabeto Σ é sempre um conjunto contável, pois é um subconjunto de Σ^*, que é enumerável, existe a possibilidade de fazer uma definição recursiva, como foi visto anteriormente. Mas a verdade é que, na prática, as linguagens raramente são definidas dessa forma.

* Existe um formalismo, que permite o uso de recursão, porém foi especialmente projetado para a definição de linguagens: a **gramática**. Veremos este assunto em aulas posteriores.

Exemplo 4

- Sejam as linguagens a seguir

$$L_1 = \{w \in \{0,1\}^* \mid \, |w| = 5\}$$

$$L_2 = \{0y | y \in \{0,1\}^*\}$$

- Quais são as seguintes linguagens?
  - L_1L_1=
  - L_1L_2=
  - L_2L_1=
  - L_2L_2=

Exemplo 4

- Sejam as linguagens a seguir

$$L_1 = \{w \in \{0,1\}^* |\ |w| = 5\}$$

$$L_2 = \{0y | y \in \{0,1\}^*\}$$

- Quais são as seguintes linguagens?
  - L_1L_1={ $w \in \{0,1\}^*$ | $|w|$ = 10 };
  - L_1L_2={ $w \in \{0,1\}^*$ | o sexto símbolo de w é 0 };
  - L_2L_1={ $w \in \{0,1\}^*$ | w começa com 0 e $|w|$ >= 6 };
  - L_2L_2={ $0y$ | $y \in \{0,1\}^*$ e y <u>contém</u> no mínimo um 0 };

Exemplo 5

* Qual o número de prefixos, sufixos e sub-palavras de uma palavra de tamanho n?

Exemplo 5

* Qual o número de prefixos, sufixos e sub-palavras de uma palavra de tamanho n?

* O número de prefixos e sufixos para palavras de tamanho n é n+1; Para subpalavras não é possível generalizar, pois não se sabe ao certo quantos símbolos compõem a palavra, nem se existem símbolos repetidos, etc.

* *Veja o exemplo a seguir:*

Exemplo 5

* w = aaa ($n = 3$)
* w = abcb ($n = 4$)

  * **Prefixos** de aaa = λ, a, aa, aaa;
  * **Sufixos** de aaa = λ, a, aa, aaa;
  * **Subpalavras** de aaa = λ, a, aa, aaa

  * **Prefixos** de abcb = λ, a, ab, abc, abcb;
  * **Sufixos** de abcb = λ, b, cb, bcb, abcb;
  * **Subpalavras** de abcb = λ, a, b, c, ab, bc, cb, abc, bcb, abcb;

Exemplo 6

- A seguir, exemplos de definições informais de linguagens, seguidas das suas definições formais:

- Conjunto das palavras que começam com 0: {0}{0,1}*
- Conjunto das palavras que contêm 00 ou 11: {0,1}*{00,11}{0,1}*
- Conjunto das palavras que terminam em um 0 seguido de um número ímpar de 1s: {0,1}*{01}{11}*
- Conjunto das palavras de tamanho par, que começam com 0 ou terminam com 0: ({0,1}{0,1})*∩ [{0}{0,1}*U {0,1}*{0}]; *ou* [{0}{0,1}({0,1}{0,1})*] U [{0,1}({0,1}{0,1})*{0}];

Obrigado.

joaopauloaramuni@gmail.com
joaopauloaramuni@fumec.br

UNIVERSIDADE FUMEC