Fundamentos Teóricos da Computação

CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

Prof. Dr. João Paulo Aramuni

UNIVERSIDADE FUMEC

Autômatos de Pilha Não Determinísticos

* **Autômatos de Pilha Não Determinísticos**

Transições Compatíveis

* Uma pilha de símbolos de um alfabeto Γ será representada por meio de uma palavra w de Γ^*

* Seja a função de Transição

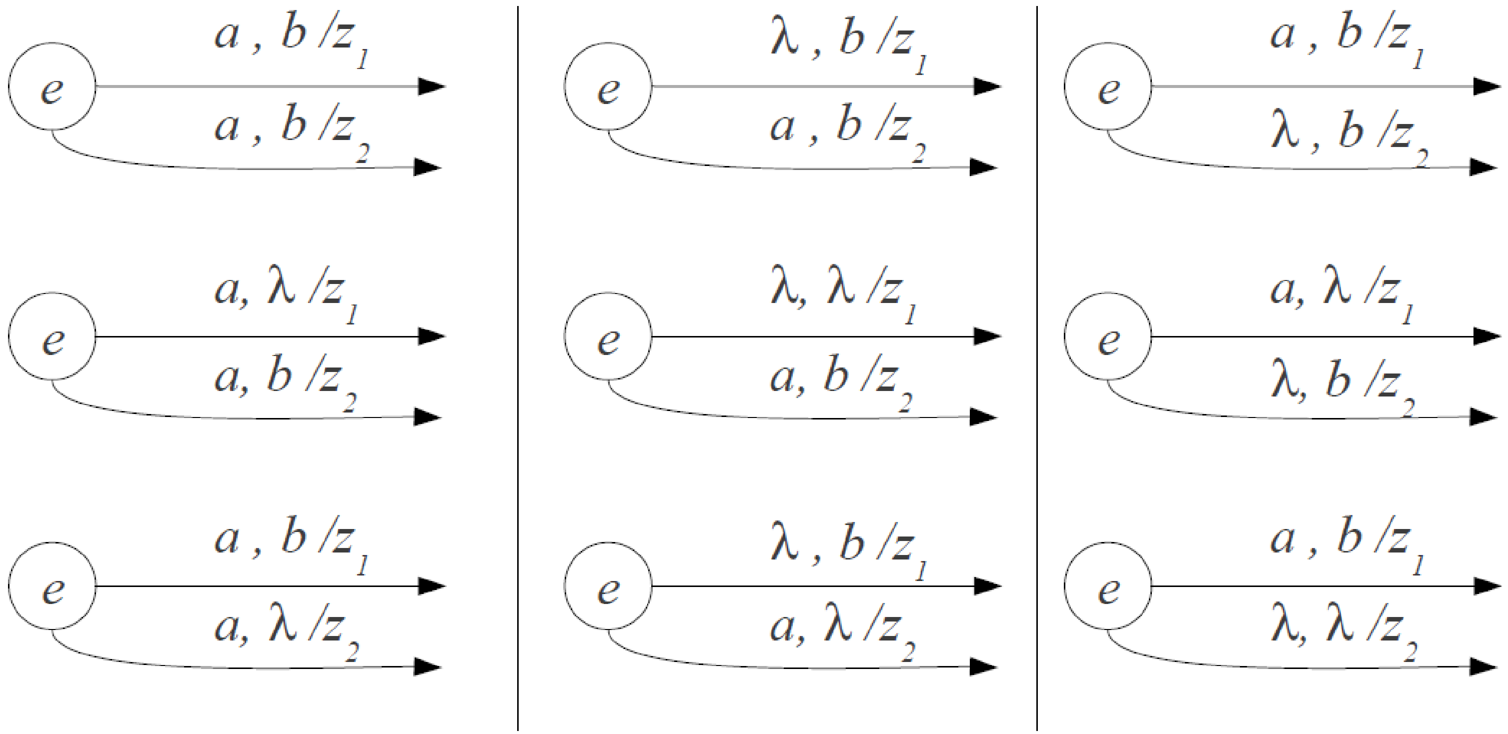
$$\delta : E \text{ x } (\Sigma \cup \{\lambda\}) \text{ x } (\Gamma \cup \{\lambda\}) \text{ -> } E \text{ x } \Gamma^*$$

(Além dos estados atingidos, é importante saber o conteúdo da pilha)

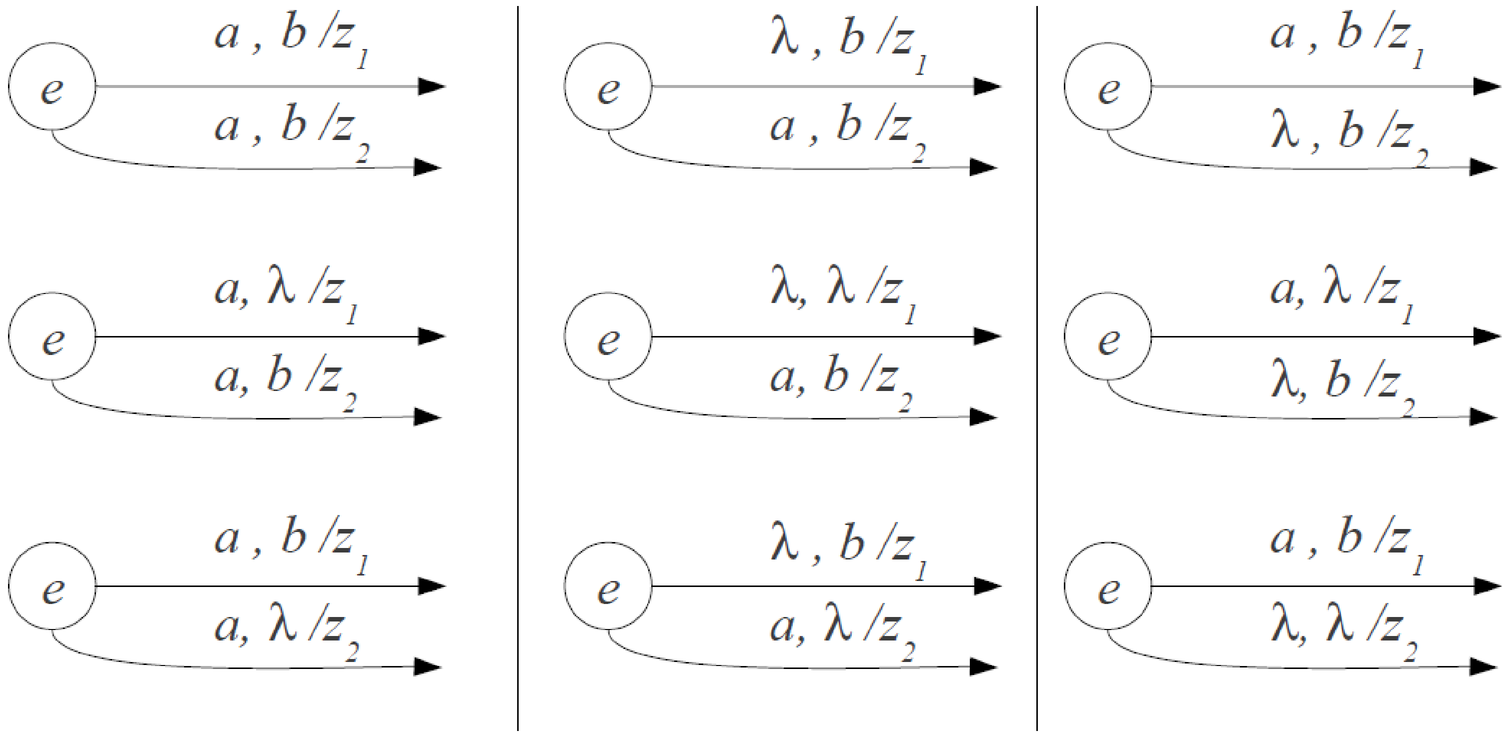
* Duas transições $\delta(e, a, b)$ e $\delta(e, a', b')$ são ditas compatíveis se, e somente se:

$$(a = a' \text{ ou } a = \lambda \text{ ou } a' = \lambda) \text{ e } (b = b' \text{ ou } b = \lambda \text{ ou } b' = \lambda)$$

Transições Compatíveis



Transições Compatíveis



Não determinismo nas transições

Definição de APN

* Um Autômato de Pilha Não Determinístico (APN) é uma sêxtupla $(E, \Sigma, \Gamma, \delta, I, F)$ em que:
  * E é um conjunto finito de um ou mais estados;
  * Σ é o alfabeto de entrada;
  * Γ é o alfabeto de pilha;
  * δ, a função de transição, é parcial:
    * $\delta : E \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \times (\Gamma \cup \{\lambda\}) \rightarrow D$
      * D é constituído dos subconjuntos finitos de $E \times \Gamma^*$
  * I, um subconjunto de E, é o conjunto dos estados iniciais;
  * F é conjunto de estados finais.

Exemplo 1

* Construir um APN que reconheça a seguinte linguagem, e simular o funcionamento do AP para algumas palavras

$L(M) = \{ w \in \{0,1\}^* \mid \text{o número de 0s em } w \text{ é igual ao de 1s} \}$

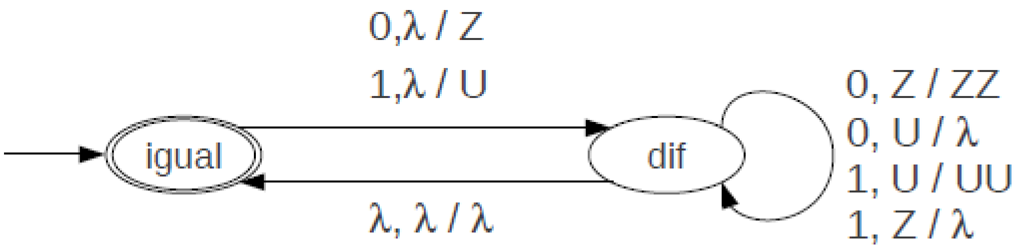
Exemplo 1

* Raciocínio
  * Sempre que se recebe um 0
    * Se o topo da pilha for Z, empilha ZZ:
    * Se o topo da pilha for U, não empilha nada.
  * Sempre que se recebe um 1
    * Se o topo da pilha for U, empilha UU:
    * Se o topo da pilha for Z, não empilha nada.
  * Ao fim da computação
    * A pilha terá Z^n se a palavra de entrada tiver *n* 0s a mais que 1s; ou
    * U^n se a palavra de entrada tiver *n* 1s a mais que 0s.
  * NÃO É necessário um símbolo para marcar que a pilha está vazia

Exemplo 1

* Construir um APN que reconheça a seguinte linguagem, e simular o funcionamento do AP para algumas palavras

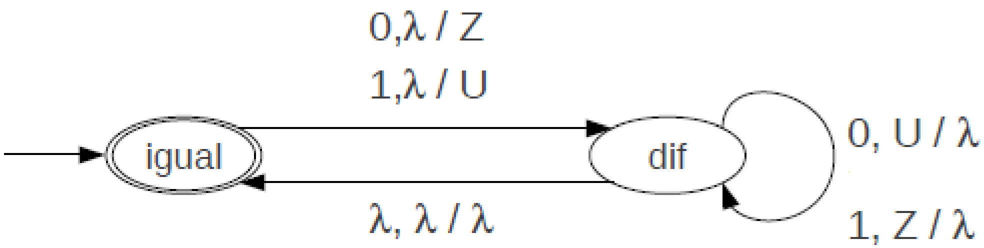
$$L(M) = \{\ w \in \{0,1\}^* \mid \text{o número de 0s em } w \text{ é igual ao de 1s}\ \}$$



Exemplo 1
Outra Solução

- Construir um APN que reconheça a seguinte linguagem, e simular o funcionamento do AP para algumas palavras

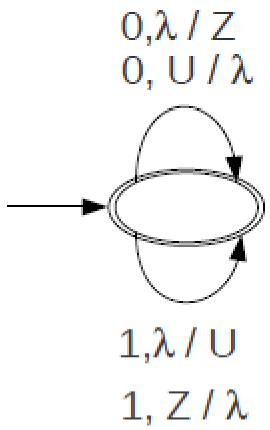
$$L(M) = \{\ w \in \{0,1\}^* \mid \text{o número de 0s em } w \text{ é igual ao de 1s}\ \}$$



Exemplo 1
E mais Outra Solução

* Construir um APN que reconheça a seguinte linguagem, e simular o funcionamento do AP para algumas palavras

$L(M) = \{\, w \in \{0,1\}^* \mid$ o número de 0s em w é igual ao de 1s $\}$



Exemplo 2

* Construir um APN que reconheça a seguinte linguagem:

APN para palíndromos sobre $\{0,1\}^*$

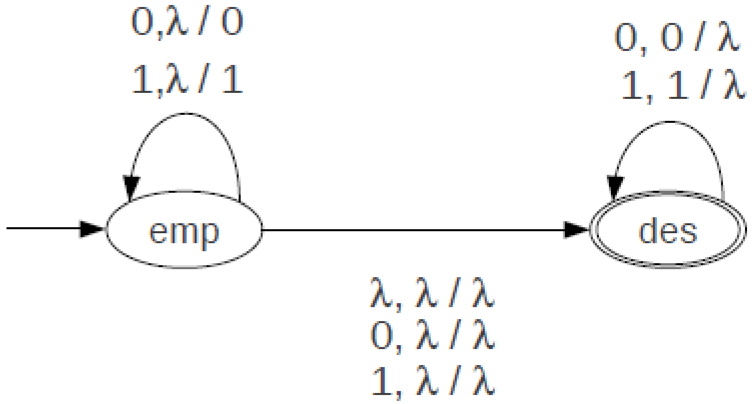
$$L(M) = \{\ w \in \{0,1\}^* \mid w = w^{\mathrm{r}}\ \}$$

Exemplo 2

- Construir um APN que reconheça a seguinte linguagem:

APN para palíndromos sobre {0,1}*

$$L(M) = \{\, w \in \{0,1\}^* \mid w = w^r \,\}$$

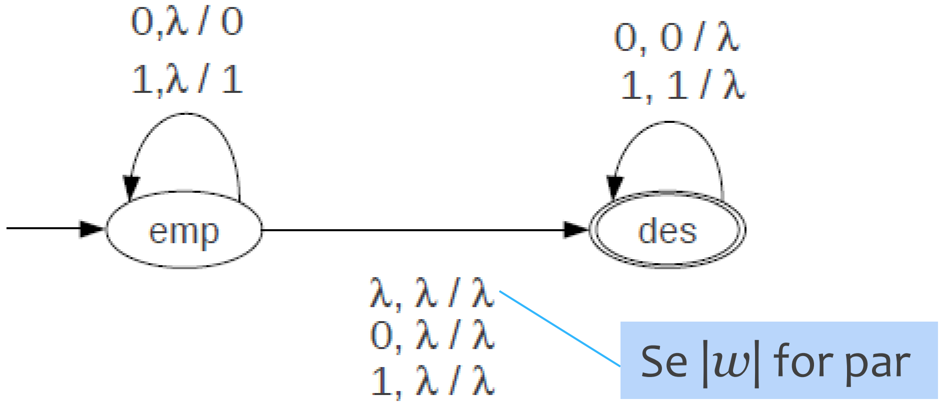


Exemplo 2

- Construir um APN que reconheça a seguinte linguagem:

APN para palíndromos sobre $\{0,1\}^*$

$$L(M) = \{\, w \in \{0,1\}^* \mid w = w^r \,\}$$

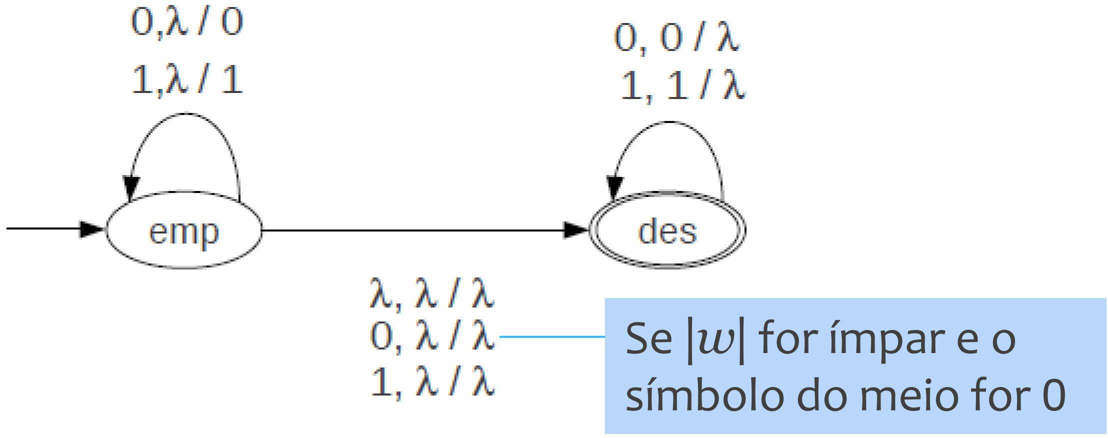


Exemplo 2

* Construir um APN que reconheça a seguinte linguagem:

APN para palíndromos sobre $\{0,1\}^*$

$$L(M) = \{ w \in \{0,1\}^* \mid w = w^r \}$$

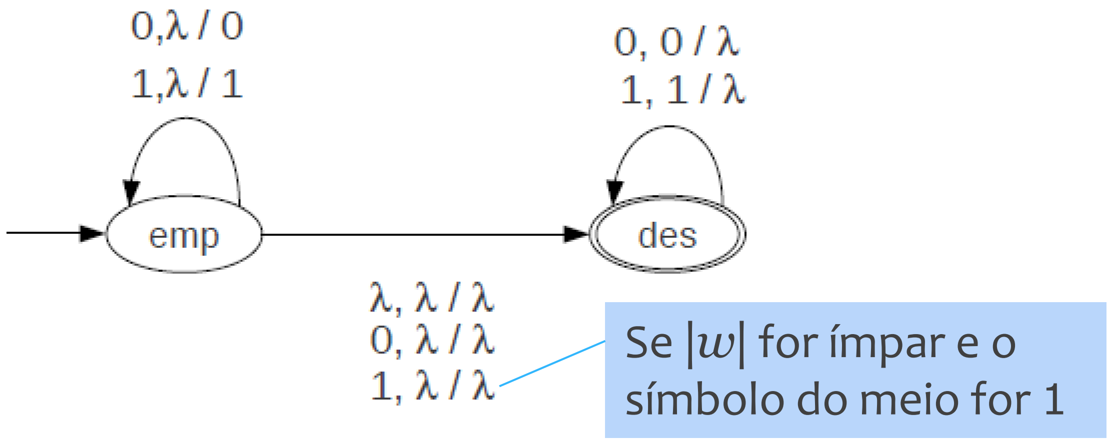


Exemplo 2

* Construir um APN que reconheça a seguinte linguagem:

APN para palíndromos sobre $\{0,1\}^*$

$$L(M) = \{ w \in \{0,1\}^* \mid w = w^r \}$$



Exemplo 2

- Construir um APN que reconheça a seguinte linguagem:

APN para palíndromos sobre $\{0,1\}^*$

$$L(M) = \{ w \in \{0,1\}^* \mid w = w^r \}$$

- Testando o autômato:
  - 0 : sob a transição 0, λ/λ É palíndromo
  - 1 : sob a transição 1, λ/λ É palíndromo
  - 010 : sob as transições 0, λ/0 e 1, λ/λ e 0, 0/λ É palíndromo
  - 101 : sob as transições 1, λ/1 e 0, λ/λ e 1, 1/λ É palíndromo
  - 0110 : sob as transições 0, λ/0 e 1, λ/1 e λ, λ/λ e 1, 1/λ e 0, 0/λ É palíndromo
  - 0101 : sob as transições 0, λ/0 e 1, λ/1 e λ, λ/λ e para Não é palíndromo

Exemplo 2

* Construir um APN que reconheça a seguinte linguagem:

APN para palíndromos sobre $\{0,1\}^*$

$$L(M) = \{ w \in \{0,1\}^* \mid w = w^r \}$$

* Testando o autômato:
  * 0101 : sob as transições 0, λ/0 e 1, λ/1 e λ, λ/λ e para Não é palíndromo
  * 0101 não é palíndromo e não é reconhecida por esse APN pois a pilha estava com 10, ou seja, o topo da pilha é 1, o último símbolo (1) a entrar na pilha, deve ser o primeiro a sair (LIFO). Já se tentarmos com a palavra 0110, por exemplo, também teremos 10 na pilha ao processar 01, com topo da pilha em 1, porém, dessa vez, será possível desempilhar o 10 e reconhecer a w.

Exemplo 2

- Construir um APN que reconheça a seguinte linguagem:

APN para palíndromos sobre $\{0,1\}^*$

$$L(M) = \{\, w \in \{0,1\}^* \mid w = w^r \,\}$$

- Não é possível reconhecer esta linguagem com um APD pois não se sabe onde fica o meio da palavra. Por esse motivo, construímos na aula anterior um APD para $w0w^r$, com um 0 marcando o meio da palavra.

Autômatos de Pilha

* **Critérios de Aceitação de Linguagens**

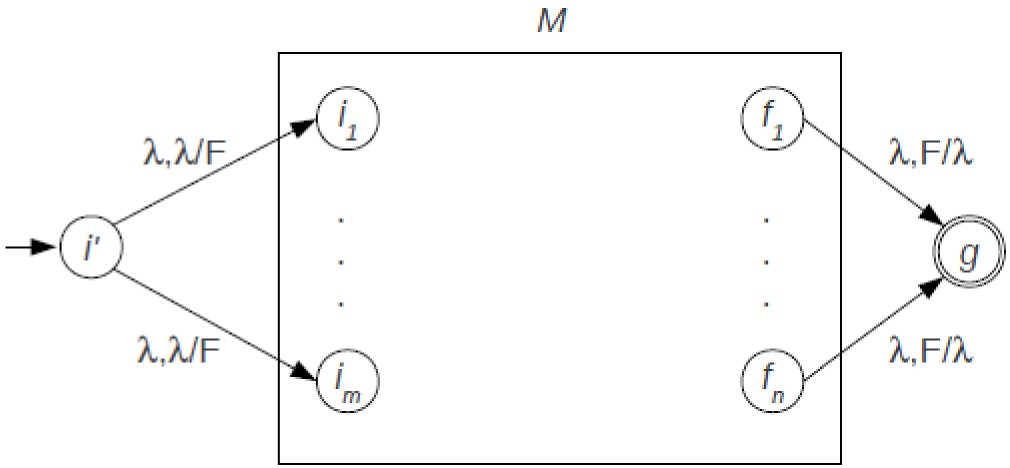
Aceitação de Linguagens

* Seja L uma linguagem. As seguintes afirmativas são equivalentes

  * a) L pode ser reconhecida por pilha vazia e estado final
  * b) L pode ser reconhecida por estado final
  * c) L U {λ} pode ser reconhecida por pilha vazia

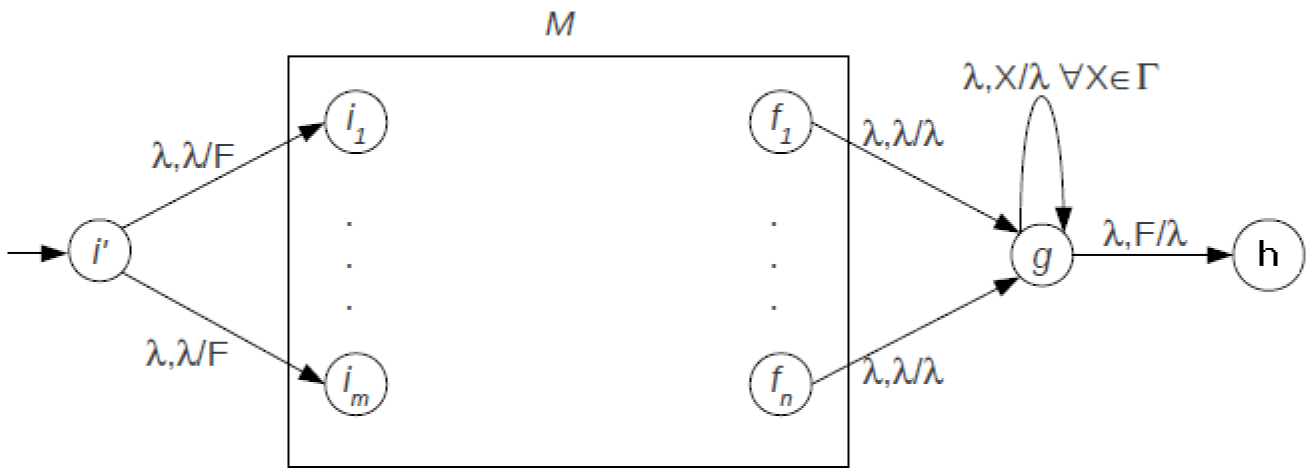
Transformação de APs

* (a) -> (b)



Transformação de APs

* (b) -> (c)



Transformação de APs

* (b) -> (c)

* O símbolo de pilha F é utilizado para evitar que a pilha fique vazia, exceto quando a palavra deve ser reconhecida. A pilha fica vazia se, e somente se, for atingido o estado h.

Transformação de APs

* `(c) -> (a)`

* Um APN que reconhece por pilha vazia pode ser transformado em um APN que reconhece por pilha vazia e estado final apenas trocando os estados do APN para finais

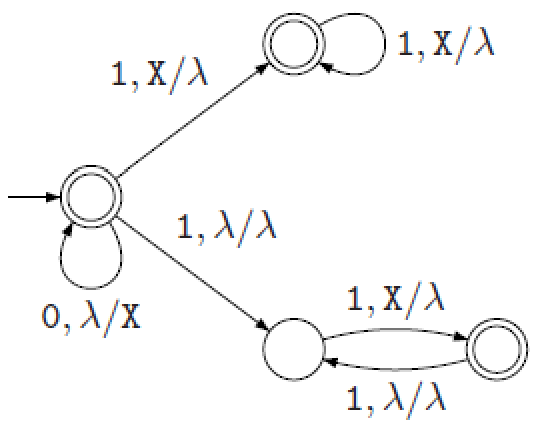
Exercícios

* Construa APNs para as seguintes linguagens, utilizando reconhecimento por pilha vazia e estado final
* $\{0^n1^n \mid n >= 0\} \cup \{0^n1^{2n} \mid n >= 0\}$;
* $\{0^m1^n \mid m >= n\}$;
* $\{0^m1^n \mid m > n\}$;

Exercícios

- Construa APNs para as seguintes linguagens, utilizando reconhecimento por pilha vazia e estado final
- $\{0^n 1^n \mid n >= 0\} \cup \{0^n 1^{2n} \mid n >= 0\}$;

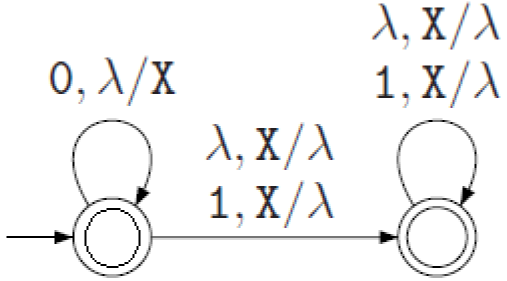
APN para $\{0^n 1^n \mid n \geq 0\} \cup \{0^n 1^{2n} \mid n \geq 0\}$:



Exercícios

* Construa APNs para as seguintes linguagens, utilizando reconhecimento por pilha vazia e estado final
* $\{0^m 1^n \mid m >= n\}$;

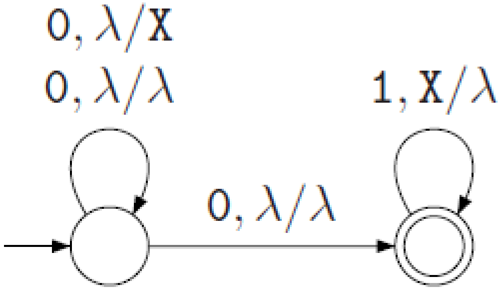
APN para $\{0^m 1^n \mid m \geq n\}$:



Exercícios

- Construa APNs para as seguintes linguagens, utilizando reconhecimento por pilha vazia e estado final
- $\{0^m 1^n \mid m > n\}$;

APN para $\{0^m 1^n \mid m > n\}$:



Obrigado.

joaopauloaramuni@gmail.com
joaopauloaramuni@fumec.br

UNIVERSIDADE FUMEC