Fundamentos Teóricos da Computação

CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

Prof. Dr. João Paulo Aramuni

UNIVERSIDADE FUMEC

Conceitos Preliminares

* Precisamos revisar, de forma sucinta, os conceitos matemáticos necessários para o entendimento desta disciplina.

* Vamos relembrar alguns assuntos da época da escola...

Conceitos Preliminares

* Sumário:
  * Conjuntos
  * Relações
  * Funções
  * Conjuntos Enumeráveis
  * Definições Recursivas

Conjuntos

* **Conjuntos**

UNIVERSIDADE FUMEC
DE MINAS GERAIS PARA O MUNDO

Conjuntos

* Conceito
  * Um conjunto é uma abstração matemática que captura o conceito de uma coleção de objetos.

  * Os objetos de um conjunto, chamados *elementos* ou *membros* do conjunto, podem ser também conjuntos.

Conjuntos

* Para se dizer que um elemento, a, pertence, ou não, ao conjunto A

$$a \in A \qquad a \notin A$$

* A ordem dos elementos na lista do conjunto é irrelevante

$$\{1,2\} = \{2,1\} = \{1,2,1\} = \{2, 1+1, 2-1, \sqrt{4}\}$$

Conjuntos

* Conjunto de objetos homogêneos

{Mercúrio, Vênus, Terra, Marte, Júpiter, Saturno, Urano, Netuno, **Plutão**}

* Conjunto de objetos heterogêneos

{10, Marte, {0}, {Terra, 1, 2, 3}}

Conjuntos

* Conjunto vazio

$$\emptyset = \{\}$$

* Conjuntos infinitos importantes
  * **N,** o conjunto dos números naturais
  * **Z,** o conjunto dos números inteiros
  * **R,** o conjunto dos números reais
  * **Q,** o conjunto dos números racionais: os números reais que podem ser expressos na forma *m*/*n* em que *m* e *n* são números inteiros

Conjuntos

* Conjuntos unitários

$$\{Terra\}, \{10\}, \{\emptyset\}$$

* Subconjunto

$$A \subseteq B \leftrightarrow \forall x \in A \rightarrow x \in B$$

  * Diz-se que A está contido em B

* Subconjunto próprio

$$A \subset B \leftrightarrow A \subseteq B \text{ e } A \neq B$$

Definindo Conjuntos

- Conjunto de todos os elementos x tais que x satisfaz a propriedade P

$$\{x | P(x)\}$$

- Ou de forma mais clara

$$\{x \in B | P(x)\} \text{ ou } \{x | x \in B \text{ e } P(x)\}$$

Exemplos de Definição de Conjuntos

* Conjunto dos números naturais ímpares

$$\{k | k = 2n + 1 \text{ e } n \in \mathbb{N}\}$$

* Conjunto dos números reais entre 0 e 1, incluindo 0 e 1

$$\{k \in \mathbb{R} | 0 \leq k \leq 1\}$$

União, interseção e diferença

* União

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

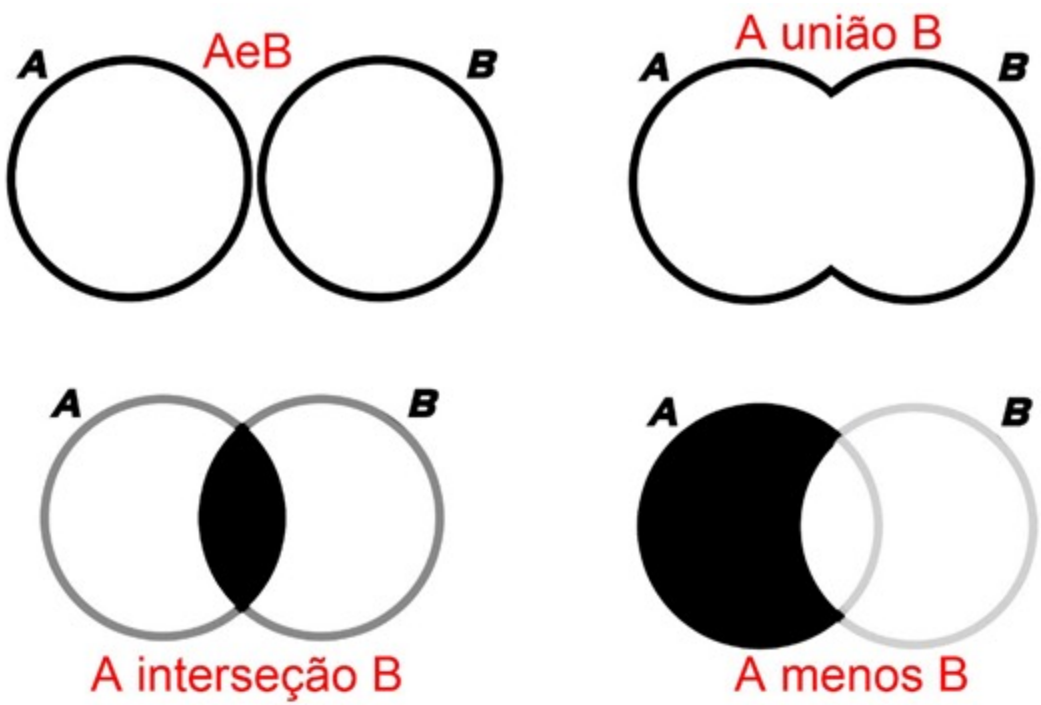
* Interseção

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ e } x \in B\}$$

* Diferença

$$A - B = \{x | x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

União, interseção e diferença



Complemento

* Complemento

$$\overline{A} = U - A$$

* Elementos do Complemento

$$x \in \overline{A} \leftrightarrow x \in (U - A)$$
$$x \in \overline{A} \leftrightarrow x \notin A$$

Complemento

* O complemento de um conjunto A com relação a um *conjunto universo U* é $U – A$. Em um determinado contexto, fixando-se um certo conjunto U como o conjunto universo, passa-se a expressar o complemento de um conjunto A por: $\overline{A}$

* Neste caso, dizer que: $x \in \overline{A}$

  é equivalente a dizer que: $x \in (U - A)$

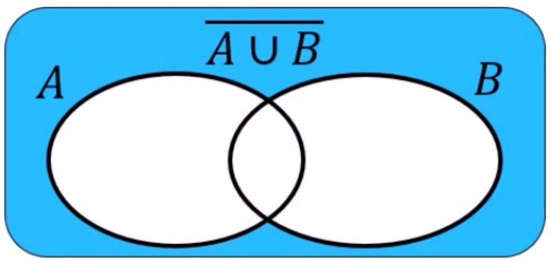
  e, também, que: $x \notin A$

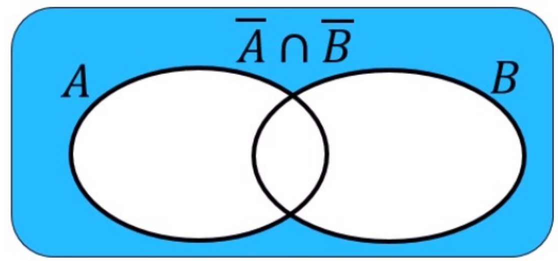
Propriedades da união, interseção e diferença

	Idempotência	
$A \cup A = A$		$A \cap A = A$
	Identidade	
$A \cup \emptyset = A$		$A \cap U = A$
	Comutatividade	
$A \cup B = B \cup A$		$A \cap B = B \cap A$
	Associatividade	
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$		$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
	Distributividade	
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$		$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
	Complementação	
$A \cup \overline{A} = U$ $\overline{U} = \emptyset$		$A \cap \overline{A} = \emptyset$ $\overline{\emptyset} = U$
	Leis de De Morgan	
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$		$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
	Diferença	
$A - \emptyset = A$	$A - A = \emptyset$	$\emptyset - A = \emptyset$

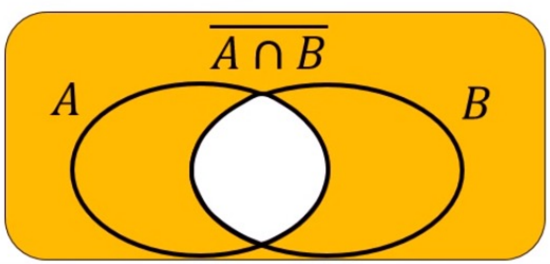
Leis de De Morgan

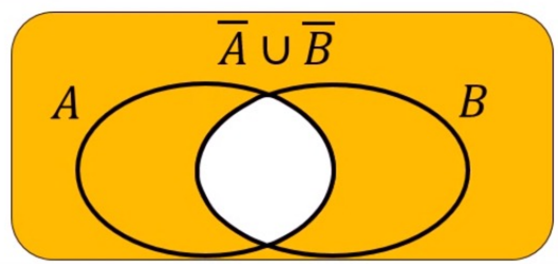
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$





$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$





Leis de De Morgan

- As leis de De Morgan para os conjuntos são intimamente relacionadas com as leis de De Morgan para os conectivos lógicos "e" e "ou".

Outros operadores de união e interseção

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n, n \in \mathbb{N} \text{ e } n \geq 1$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n, n \in \mathbb{N} \text{ e } n \geq 1$$

Conjunto Potência

* O conjunto potência de um conjunto A é o conjunto de todos os subconjuntos de A

$$\mathcal{P}(A) = \{X | X \subseteq A\}$$

* Em particular

$$\emptyset \in \mathcal{P}(A) \text{ e } A \in \mathcal{P}(A)$$

Número de Elementos do Conjunto

* O número de elementos do conjunto finito A é denotado por $|A|$

$$|\{\emptyset, a, \{a, b, c, d\}\}| = 3$$

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$$

Número de Elementos do Conjunto

* Número de elementos de um conjunto potência de um conjunto A

* A = {x,y,z}
* $|A|$ = 3

* $P(A)$ = {{}, {x}, {y}, {z}, {x,y}, {x,z}, {y,z}, {x,y,z}}
* $|P(A)|$ = 8

Produto Cartesiano

* Produto entre 2 conjuntos

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A \text{ e } b \in B\}$$

* Generalizando

$$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{(a_1, a_2, ..., a_n) | a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, ..., a_n \in A_n\}$$

* Produto cartesiano do mesmo conjunto

$$A \times A \times A \times ... \times A(\text{n vezes}) = A^n$$

Produto Cartesiano

- O *produto cartesiano* de dois conjuntos A e B, A x B, é o conjunto de todos os pares ordenados tais que o primeiro elemento pertence a A e o segundo pertence a B.

- Exemplo: Sejam $A = \{1,2\}$ e $B = \{2,3\}$. Tem-se:
  - $A \times B = \{(1,2), (1,3), (2,2), (2,3)\}$;
  - $A \times A = A^2 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$;
  - $A \times B \times A = \{(1,2,1), (1,2,2), (1,3,1), (1,3,2), (2,2,1), (2,2,2), (2,3,1), (2,3,2)\}$;

Relações

* **Relações**

Relações

* Uma relação sobre os conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ é um subconjunto de $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$

* Ex:

$$\{(a,d) | a \in A \text{ e } d \in D \text{ e } a \text{ está matriculado em } d\}$$

  * Onde A é o conjunto de todos os alunos de certo curso e D é o conjunto das disciplinas do curso

Relações Binárias

$$R \subseteq A \times B$$

* R é a relação (comumente escrita xRy)
* A é o domínio
* B é o contradomínio
* A imagem de R é o conjunto

$$\{y | (x, y) \in R \text{ para algum } x\}$$

* A relação inversa de R é

$$R^{-1} = \{(y, x) | (x, y) \in R\}$$

Relações Binárias

$$R \subseteq A^2$$

* A relação binária acima é:
  * Reflexiva se xRx para x ∈ A;
  * Simétrica se xRy -> yRx para todo x, y ∈ A;
  * Transitiva se xRy e yRz -> xRz para todo x,y,z ∈ A;

Relações Binárias

* A relação binária "*é irmão (ou irmã) de*", considerada sobre o conjunto das pessoas do mundo em um certo instante, é:

* Reflexiva?

* Simétrica?

* Transitiva?

Relações Binárias

- A relação binária "*é irmão (ou irmã) de*", considerada sobre o conjunto das pessoas do mundo em um certo instante, é:

- Reflexiva

- **Simétrica**

- Transitiva

Relações Binárias

* A relação binária "*é irmão (ou irmã) de*", considerada sobre o conjunto das pessoas do mundo em um certo instante, é:

* não reflexiva: uma pessoa não é irmã de si mesma;
* simétrica: se fulano é irmão de beltrano, então beltrano é irmão de fulano; e
* não transitiva: quando fulano é irmão de beltrano, beltrano é irmão de fulano (simetria), mas fulano não é irmão de fulano.

Relação de Equivalência

* A relação de equivalência R divide um conjunto A em classes de equivalência. Estas classes formam uma partição de A
  * Relação de equivalência é uma relação reflexiva, simétrica, transitiva
  * Classe de equivalência que contém x é chamada $[x]$

$$[x] = \{y | xRy\}$$
$$[x] = [y] \leftrightarrow xRy$$

Relação de Equivalência

* Uma relação de equivalência pode ser:

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 | x \ \ mod \ \ n = y \ \ mod \ \ n\}$$

  * Onde *n* é um número natural

* Outra relação de equivalência é:

$$\mathcal{A} = \{(p, q) \in P^2 | p \text{ e } q \text{ fazem aniversário no mesmo dia}\}$$

  * onde *P* é o conjunto das pessoas do mundo
  * é uma relação de equivalência que particiona P em 366 classes de equivalência, uma para cada dia do ano

Funções

* **Funções**

Função Parcial

* *"f de A para B"*

$$f : A \to B$$

* f é uma relação binária

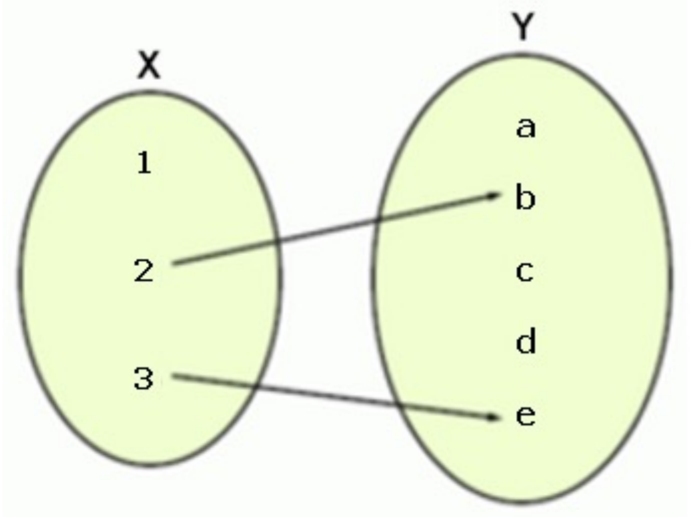
$$f \subseteq A \times B$$

$$(x, y) \in f \text{ e } (x, z) \in f \to y = z$$

* Uma notação mais utilizada para dizer que $(x,y) \in f$ é $f(x) = y$
* Se não existe y tal que $f(x)=y$, diz-se que f é *indefinida* para o argumento x

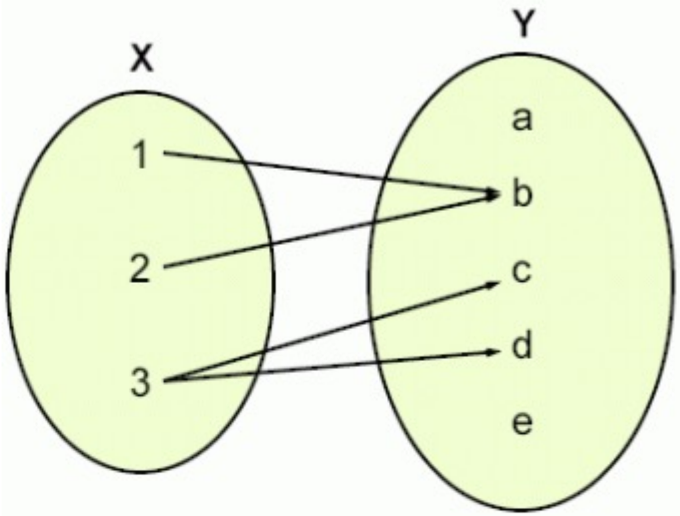
Função Parcial

* Exemplo de função parcial:
* Há pelo menos um elemento no conjunto de partida, que não se relaciona com nenhum elemento do contradomínio



Não é função

* Um único elemento do domínio não deve possuir duas imagens. $(x, y) \in f \text{ e } (x, z) \in f \rightarrow y = z$



Não é função!

Função Total

* É uma função parcial definida em todo argumento $x \in A$

* Se para todo $x \in A$ existe y tal que $f(x) = y$, diz-se que a função é total.

Função Total

* Ex: Um exemplo de função total é a soma sobre os reais

$$+ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

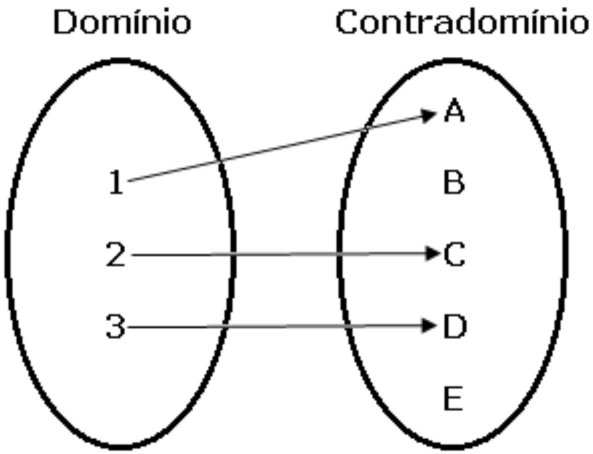
* A soma $x + y^n$ sempre existe para quaisquer reais x e y. Já a divisão $/ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ não é total, visto que não é definida quando o segundo argumento for 0 (zero).

Função e Relação

* Uma função é uma relação, valendo todas as definições realizadas para relações.
  * Em especial, os termos **domínio, contradomínio** e **imagem** podem ser utilizados para as funções.

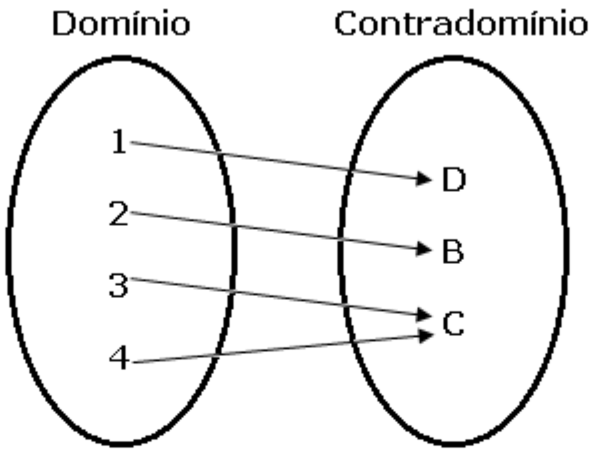
Função total injetora

* Injetora
  * Se para $x, y \in A$ quaisquer, $x \neq y \rightarrow f(x) \neq f(y)$



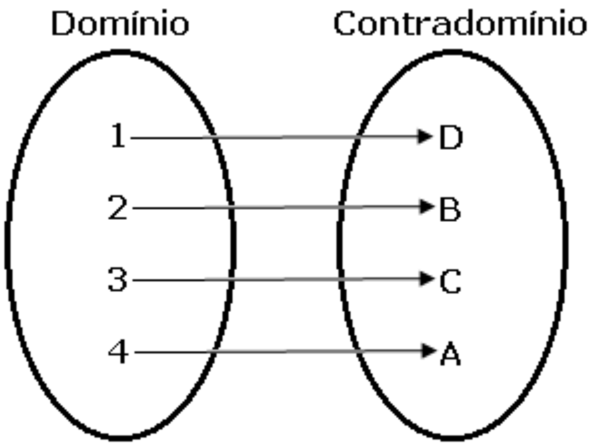
Função total sobrejetora

* Sobrejetora
  * Se a imagem de f é o contradomínio de f



Função total bijetora

* Bijetora
  * Se a função é injetora e sobrejetora



Exemplos

* f: **N** $\longrightarrow$ **N**, tal que $f(x) = 2x$
  * *Injetora*

* g: ***Z*** $\longrightarrow$ **N**, tal que $g(x) = |x|$
  * *Sobrejetora*

* h: ***Z*** $\longrightarrow$ **N**, tal que

$$h(x) = \begin{cases} 2x \text{ se } x \geq 0 \\ -(2x+1) \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

  * *Bijetora*

Conjuntos Enumeráveis

* **Conjuntos Enumeráveis**

Cardinalidade

- Dois conjuntos finitos, A e B, têm o mesmo tamanho se $|A| = |B|$

- Como fazemos para comparar conjuntos infinitos?
  - Utiliza-se a noção de Cardinalidade
    - Com este artifício é possível mostrar que o número de funções (que é infinito) é maior que o número de programas em qualquer linguagem (que também é infinito)
      - O que permite concluir que existem funções que **não** são programáveis em qualquer linguagem de programação

Cardinalidade

* Dois conjuntos, A e B, têm a mesma cardinalidade se existe uma função bijetora de A para B
  * *Card*(A) = *Card*(B)

* Um conjunto A é infinito se

$$B \subset A \text{ e } \mathrm{Card(A)} = \mathrm{Card(B)}$$

* Um conjunto é finito se tem a mesma cardinalidade de

$$\{k \in \mathbb{N} | k \leq n\}, \text{ para algum } n \in \mathbb{N}$$

* A relação de cardinalidade é reflexiva, simétrica e transitiva
  * É uma relação de equivalência

Cardinalidade

* O conjunto dos naturais, **N**, é infinito?

* Seja *P* o conjunto dos naturais pares, incluindo o zero.
  * Qual conjunto possui maior cardinalidade, *P* ou **N**?

Cardinalidade

- O conjunto dos naturais, **N**, é infinito? R: Sim, pois

  a) **N** – {0} é um subconjunto próprio de **N**; e

  b) f: **N** -> **N** – {0} tal que $f(x) = x + 1$ é uma função bijetora

- Seja P o conjunto dos naturais pares, incluindo o zero.
  - Qual conjunto possui maior cardinalidade, P ou **N**?

  Por um lado, tem sentido dizer que **N** é maior, pois **N** contém todos os elementos de P mais todos os números naturais ímpares. Do outro, existe uma função bijetora: f:N -> P tal que $f(x) = 2x$. Assim, P e **N** têm a mesma cardinalidade.

Conjunto Enumerável

* Para um conjunto ser enumerável, este deve ter a mesma cardinalidade de **N**

* Um conjunto é dito contável se for finito ou enumerável

* Neste curso, trataremos apenas de conjuntos contáveis

Teorema 1

- As seguintes afirmativas são equivalentes
  - O conjunto *A* é contável
  - Existe uma função injetora de *A* para **N**
  - A = {} ou existe uma função sobrejetora de **N** para *A*

Teorema 1

* O seguinte teorema pode facilitar a demonstração de que determinados conjuntos são contáveis

* As seguintes afirmativas são equivalentes
    * O conjunto A é contável;
    * Existe uma função injetora de A para **N**;
    * $A = \{\}$ ou existe uma função sobrejetora de **N** para A;

Outras afirmativas

* Além do Teorema 1, os seguintes resultados também podem ser úteis para determinar se um conjunto é ou não contável:

  * Todo subconjunto de conjunto contável é contável;

  * A x B é contável, se A e B são contáveis;

  * A U B é contável, se A e B são contáveis;

Definições Recursivas

* **Definições Recursivas**

UNIVERSIDADE FUMEC
DE MINAS GERAIS PARA O MUNDO

Definições Recursivas

* Uma propriedade importante dos conjuntos enumeráveis é que eles podem ser definidos por meio de uma *definição recursiva* (ou indutiva).

* Uma definição recursiva especifica como um conjunto contável pode ser **gerado** a partir de um subconjunto do mesmo aplicando-se determinadas **operações** um número finito de vezes.

Definições Recursivas

- Para definir *A* recursivamente

- **Base:** especificação de um conjunto base***** *B* ⊂ *A*;
- **Passo recursivo:** especificação de um elenco de operações
  - Aplicadas sobre *A* geram elementos de *A*
- **Fechamento**:** afirmação que os únicos elementos de *A* são aqueles que podem ser obtidos a partir dos elementos de *B*, aplicando-se um número finito de vezes as operações especificadas em (b)

- ** O conjunto base deve ser contável e pode ser definido recursivamente*
- *** O passo **fechamento** muitas vezes é omitido*

Definições Recursivas

- Exemplos:
- 1) Definir o conjunto **N** recursivamente
- 2) Definir a operação de soma (+) sobre os naturais recursivamente
- 3) Definir a operação de multiplicação (*) sobre os naturais recursivamente

Definições Recursivas

- 1) Definir o conjunto **N** recursivamente

  a) 0 ∈ **N**;

  b) se *n* ∈ **N**. então s(*n*) ∈ **N**;

  c) só pertence a **N** o número que pode ser obtido de acordo com (a) e (b).

Definições Recursivas

* 2) Definir a operação de soma (+) sobre os naturais recursivamente

* Utilizando a representação de número natural dada pela definição recursiva do exemplo 1, em que a representação de um número $n>0$ é dada por $s(s(...s(0)...))$, onde aparece n sucessores:

  a) $n + 0 = n$, para todo $n \in \mathbf{N}$;

  b) $m + s(n) = s(m + n)$, para todo $m, n \in \mathbf{N}$;

Definições Recursivas

* 3) Definir a operação de multiplicação (*****) sobre os naturais recursivamente

a) $n * 0 = 0$, para todo $n \in \mathbf{N}$;
b) $m * s(n) = m + (m * n)$, para todo $m, n \in \mathbf{N}$;

Obrigado.

joaopauloaramuni@gmail.com
joaopauloaramuni@fumec.br

UNIVERSIDADE FUMEC