SME0803 Visualização e Exploração de Dados

Associação entre variáveis quantitativas

Prof. Cibele Russo

cibele@icmc.usp.br

Baseado em

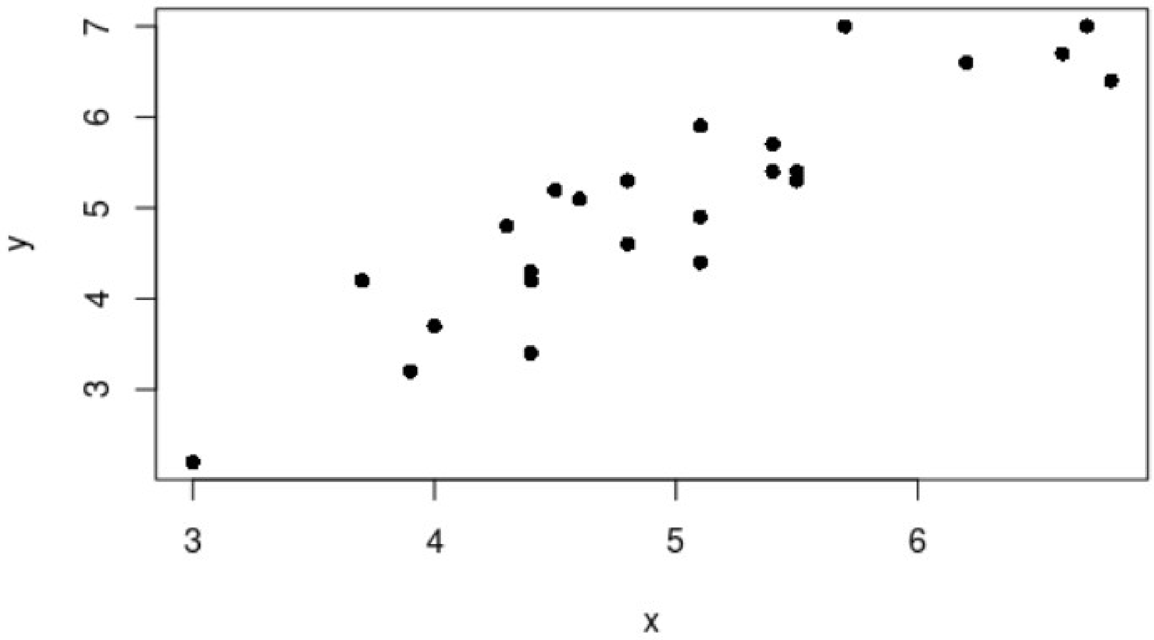
Murteira, B. J. F., Análise Exploratória de Dados. McGraw-Hill, Lisboa, 1993.

Notas de aula de Análise Exploratória de Dados do Mário de Castro, ICMC-USP, 2010.

Variáveis quantitativas

$(x_1,y_1), \ldots, (x_n,y_n)$: conjunto de dados bivariado.

Representação gráfica: gráfico de dispersão (*scatter plot*). Gráfico cartesiano dos pares (x_i,y_i), i = 1,...,n.



Covariância entre x e y: medida da variação conjunta de x e y em relação às suas médias.

$$\operatorname{cov}(x,y) = \frac{1}{n-1}\sum (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}), \qquad -\infty < \operatorname{cov}(x,y) < \infty$$

Variáveis quantitativas

Obs.

(a) cov(x, y) = cov(y, x) e
(b) cov(x, x) = s_x^2.

Coeficiente de correlação linear de Pearson (r):

$$\mathrm{cor}(x,y) = r = \frac{\mathrm{cov}(x,y)}{s_x s_y} = \frac{\frac{1}{n-1}\sum (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{s_x s_y},$$

sendo que s_x e s_y denotam os desvios padrão de x e y.

Se s_x = 0 e/ou s_y = 0, r não está definido.

Propriedades:

P1. cor(x, x) = 1.

P2. $-1 \leq r \leq 1$.

P3. r = 1 se, e somente se, a relação entre x e y for linear (y = a + bx) e $b > 0$.

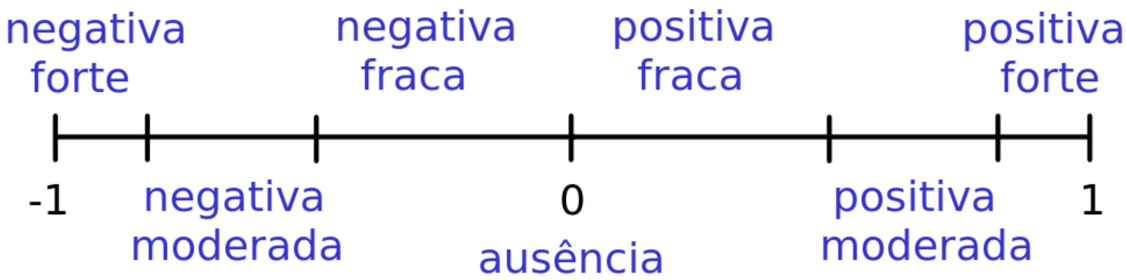
P4. r = – 1 se, e somente se, a relação entre x e y for linear (y = a + bx) e $b < 0$.

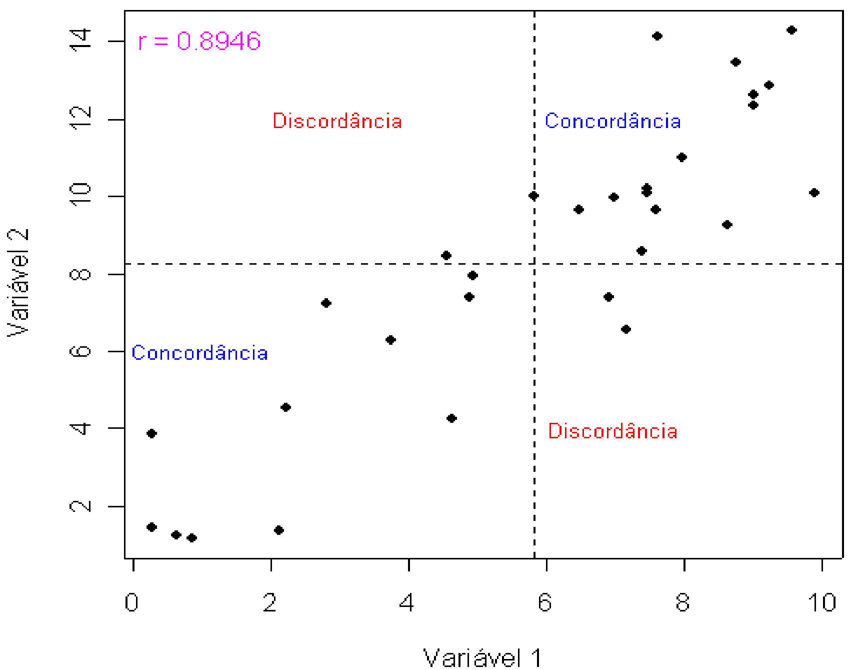
P5. Invariância. Se $b_1 > 0$ e $b_2 > 0$, então $cor(x,y) = cor(a_1 + b_1x, a_2 + b_2y)$, em que a_1 e a_2 são reais quaisquer.

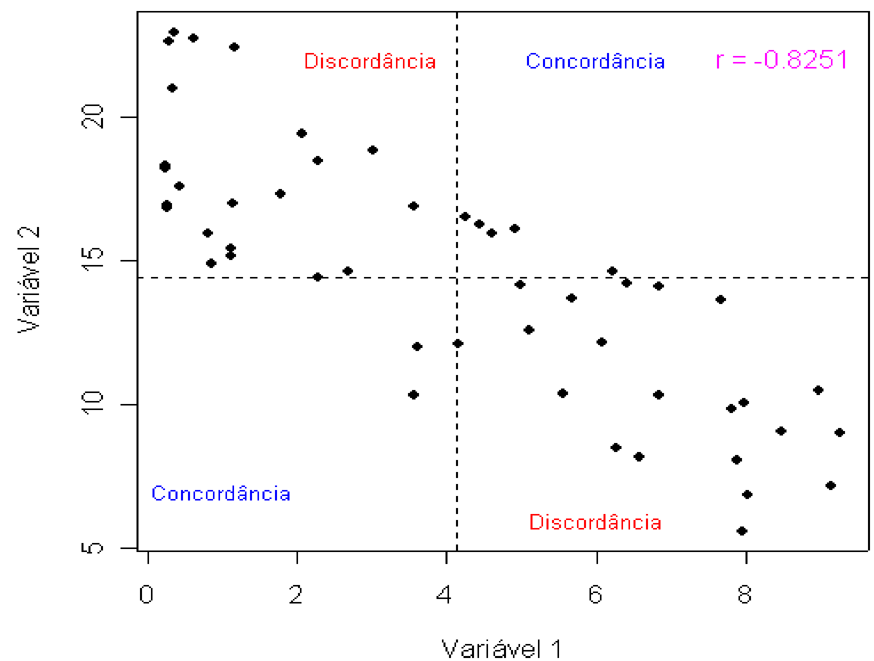
Exercício. Se $b_1 < 0$ e $b_2 > 0$ ou $b_1 > 0$ e $b_2 < 0$ ou $b_1 < 0$ e $b_2 < 0$, o que se pode afirmar sobre $cor(a_1 + b_1x, a_2 + b_2y)$?

Variáveis quantitativas

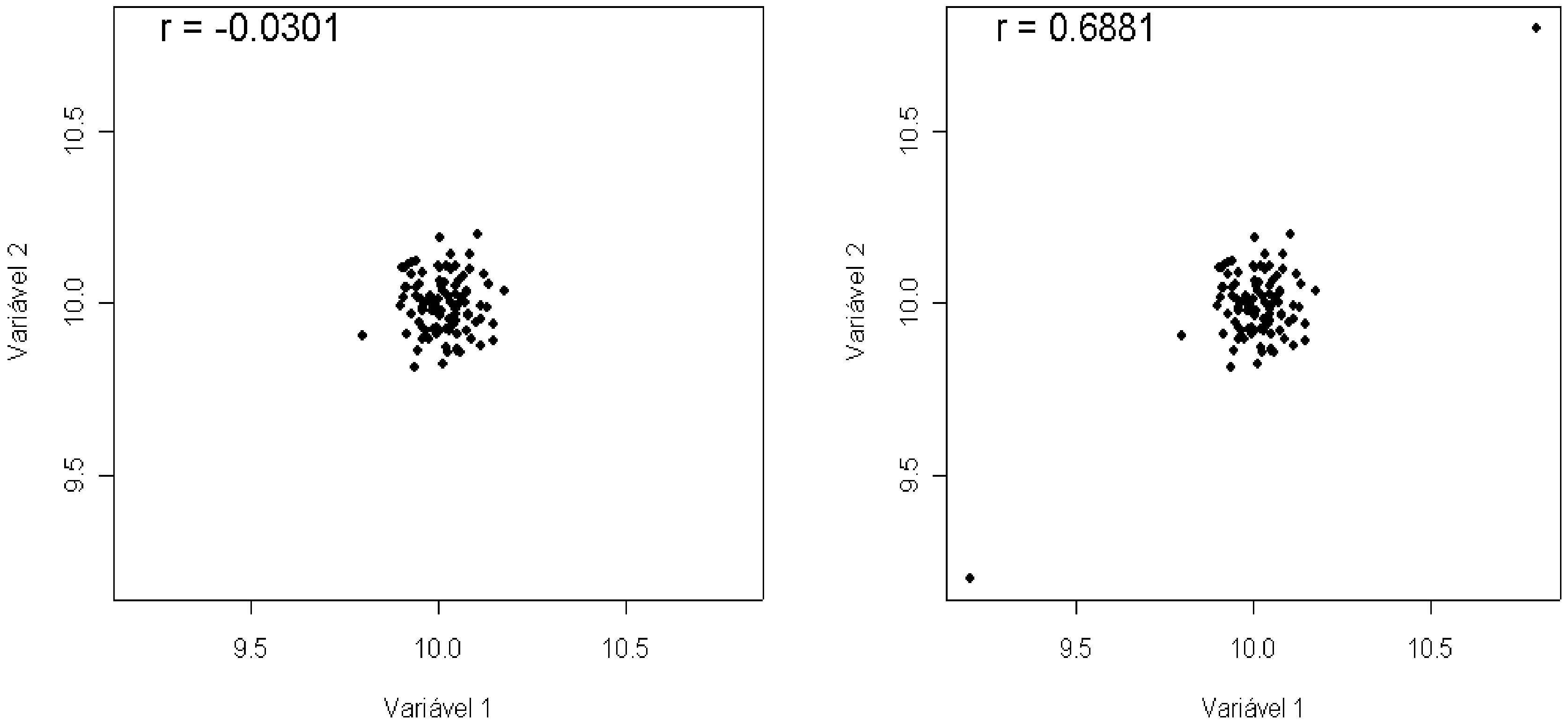
Sentido e força de r (correlação)



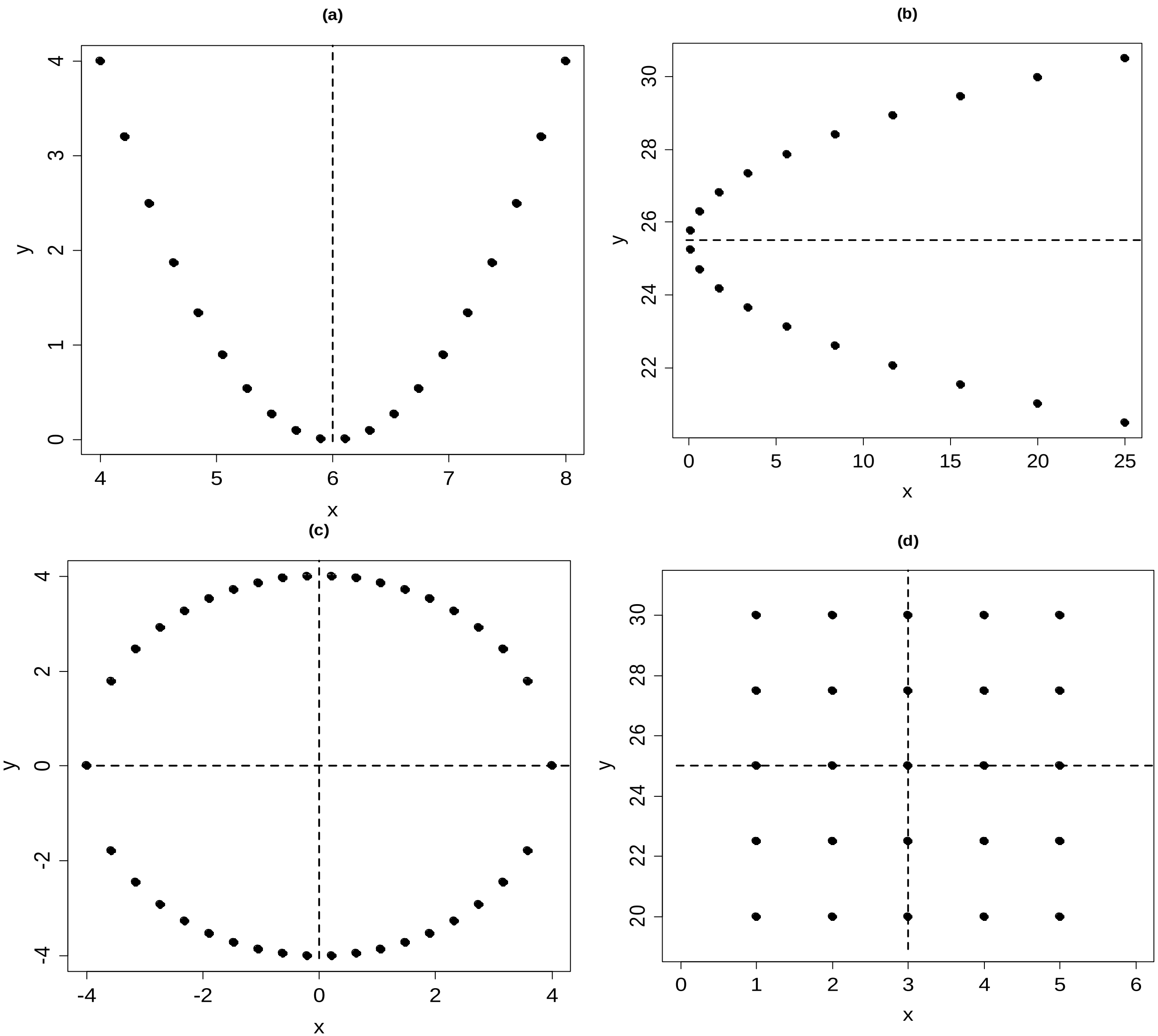




Variáveis quantitativas



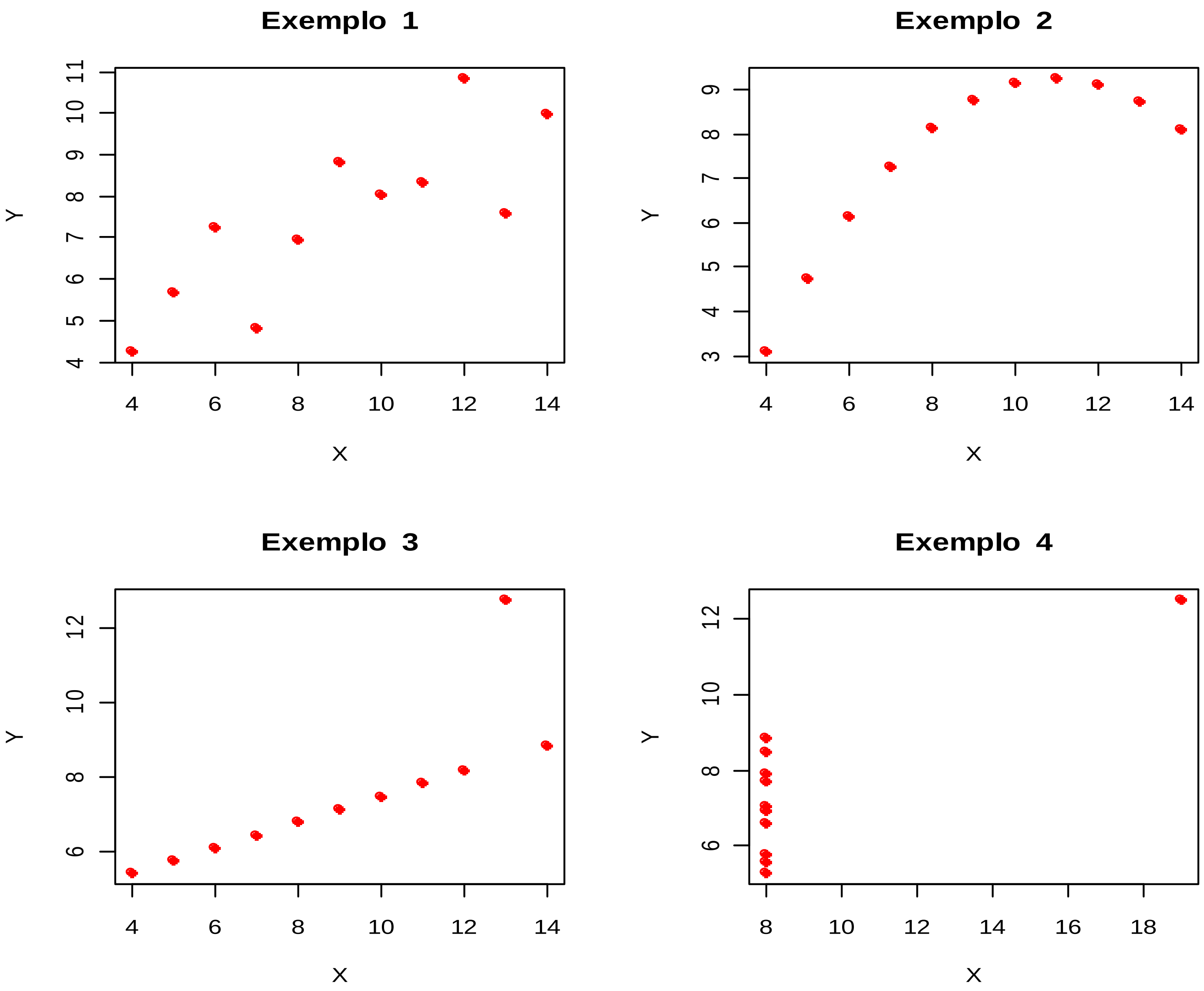
Variáveis quantitativas



Exercício. Prove que se houver simetria em x e/ou y, então r = 0.

Obs. r = 0 não significa ausência de associação.

Variáveis quantitativas



Dados anscombe em R

`> ?anscombe`

Valores de r:

Exemplo 1: 0,8164

Exemplo 2: 0,8162

Exemplo 3: 0,8163

Exemplo 4: 0,8165

Veja também http://www.jerrydallal.com/LHSP/corr.htm

Correlação em R

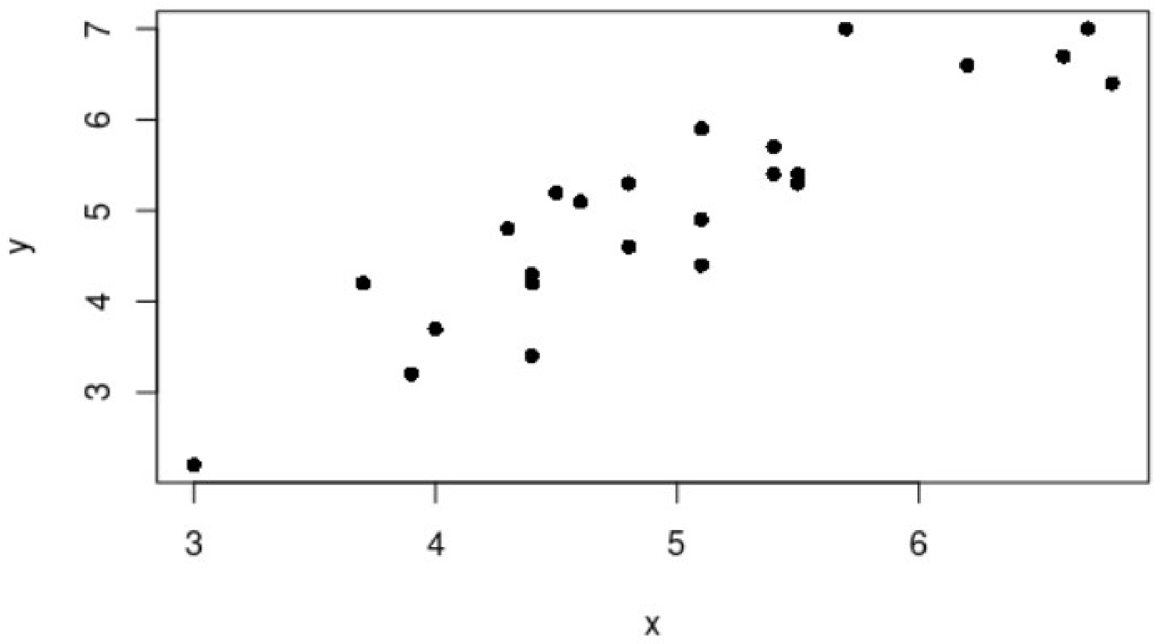
Funções `cor`, `cov` e `cov2cor`.

```
x<-
c(4.4,4.8,6.6,5.1,5.1,6.7,5.5,3.7,4.3,4.6,6.2,5.4,5.4,5.1,4.4,6.8,5.5,
3.0,5.7,4.5,3.9,4.8,4.0,4.3,4.4)

y<-
c(3.4,5.3,6.7,4.4,5.9,7.0,5.3,4.2,4.8,5.1,6.6,5.7,5.4,4.9,4.2,6.4,5.4,
2.2,7.0,5.2,3.2,4.6,3.7,4.8,4.3)
```

```
> length(x)
[1] 25
```

```
> cor(x, y)
[1] 0.8940744
```

```
> plot(x, y, pch = 16)
```



Correlação em R

```
> ? USArrests
```

```
Description

This data set contains statistics, in arrests per 100,000 residents
for assault, murder, and rape in each of the 50 US states in 1973.
Also given is the percent of the population living in urban areas.
```

Número de prisões por assalto, homicídio e estupro por 100 000 hab. e proporção da população urbana.

```
> names(USArrests)

[1] "Murder"   "Assault"  "UrbanPop" "Rape"
```

```
> class(USArrests)

[1] "data.frame"
```

Classe “folha de dados”.

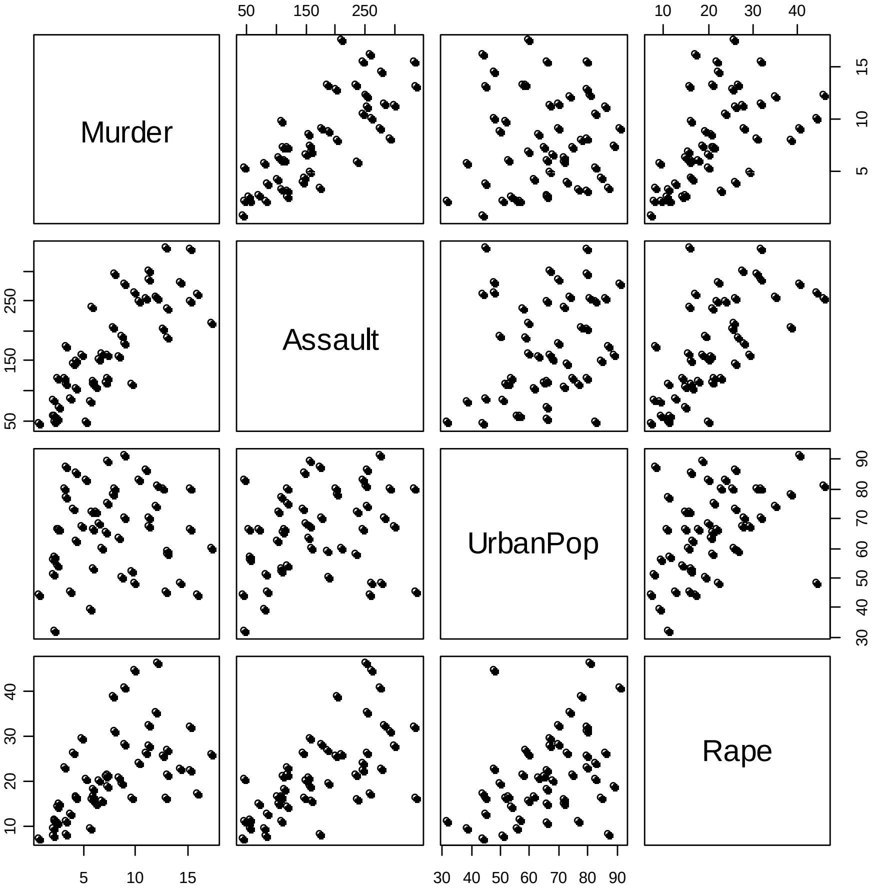
```
> rownames(USArrests)

[1] "Alabama" "Alaska" "Arizona” "Arkansas“ "California“ etc
[50] "Wyoming"
```

```
> summary(USArrests)

 Murder           Assault          UrbanPop          Rape
 Min.   : 0.800   Min.   : 45.0   Min.   :32.00   Min.   : 7.30
 1st Qu.: 4.075   1st Qu.:109.0   1st Qu.:54.50   1st Qu.:15.07
 Median : 7.250   Median :159.0   Median :66.00   Median :20.10
 Mean   : 7.788   Mean   :170.8   Mean   :65.54   Mean   :21.23
 3rd Qu.:11.250   3rd Qu.:249.0   3rd Qu.:77.75   3rd Qu.:26.18
 Max.   :17.400   Max.   :337.0   Max.   :91.00   Max.   :46.00
```

Correlação em R

Gráficos de dispersão: função `pairs`.

```
> pairs(USArrests, pch = 20)
```

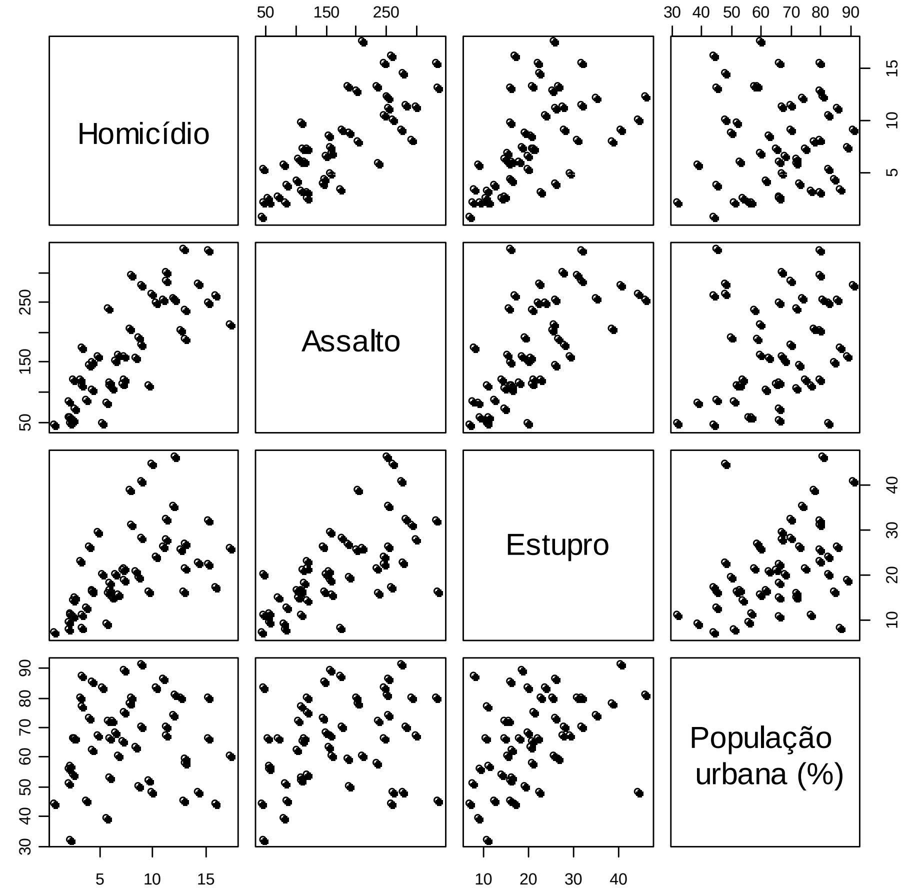


Matriz de gráficos de dispersão (*scatter plot matrix*).

```
> ordem = c("Murder", "Assault",
"Rape", "UrbanPop")
```

```
> nomes = c("Homicídio", "Assalto",
"Estupro", "População \n urbana (%)")
```

```
> pairs(USArrests[, ordem], pch = 20,
labels = nomes)
```



Correlação em R

Matriz de covariâncias:

```
> cov(USArrests[, ordem])
             Murder  Assault     Rape   UrbanPop
Murder    18.970465 291.0624 22.99141   4.386204
Assault  291.062367 6945.1657 519.26906 312.275102
Rape      22.991412 519.2691 87.72916  55.768082
UrbanPop   4.386204 312.2751 55.76808 209.518776
```

Obs. É uma matriz simétrica com as variâncias na diagonal principal.

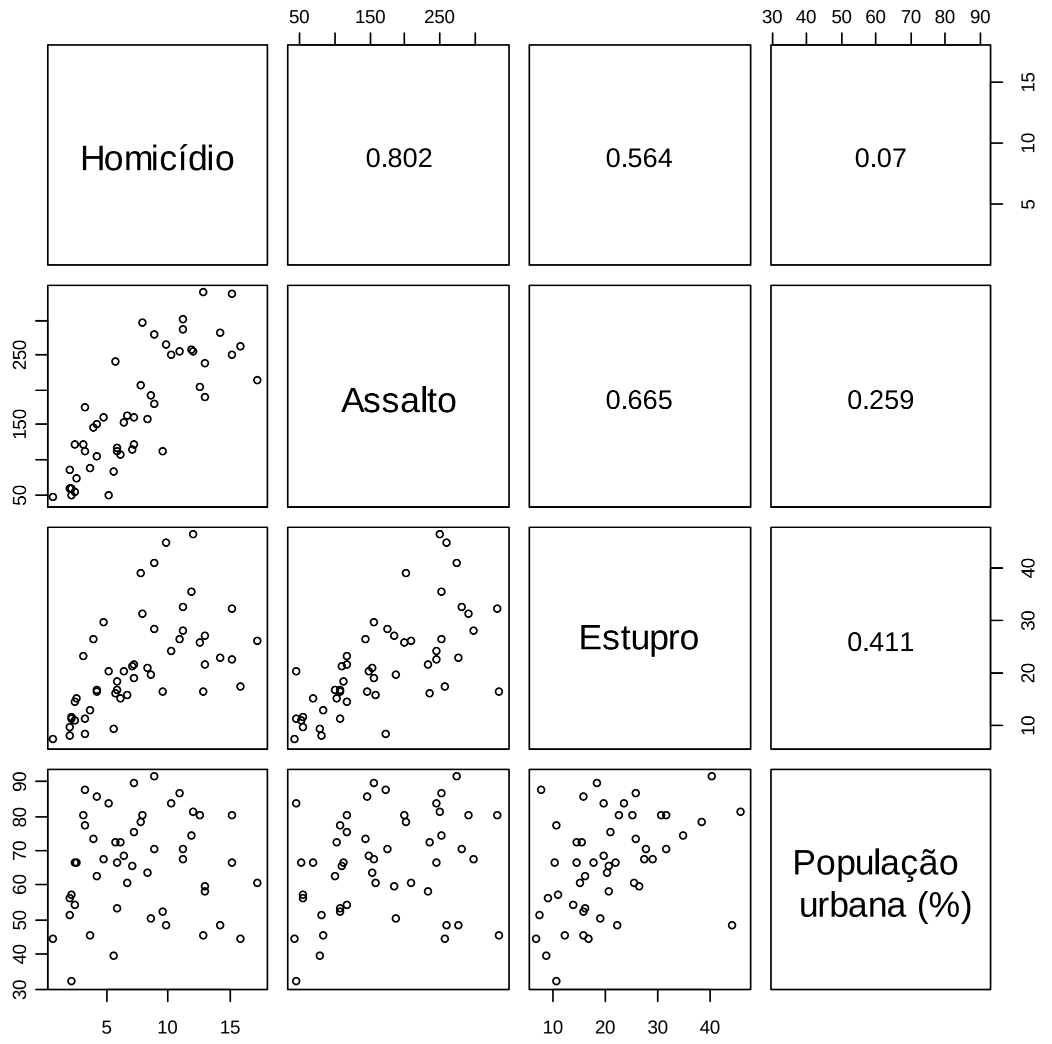
Matriz de correlações:

```
> cor(USArrests[, ordem])
             Murder   Assault      Rape   UrbanPop
Murder   1.00000000 0.8018733 0.5635788 0.06957262
Assault  0.80187331 1.0000000 0.6652412 0.25887170
Rape     0.56357883 0.6652412 1.0000000 0.41134124
UrbanPop 0.06957262 0.2588717 0.4113412 1.00000000
```

Obs. A função `cov2cor` transforma uma matriz de covariâncias em uma matriz de correlações.

Correlação em R

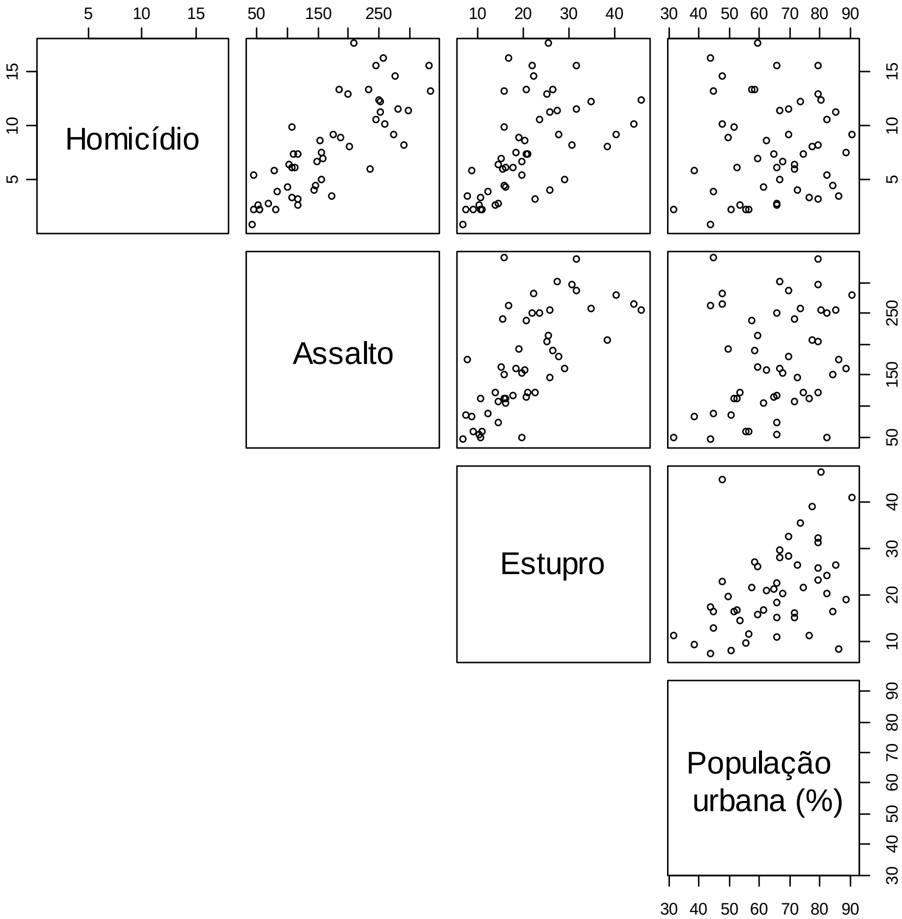
```
> panel.cor = function(x, y,
digits = 3)
{
   usr = par("usr")
   on.exit(par(usr))
   par(usr = c(0, 1, 0, 1))
   r = cor(x, y)
   text(0.5, 0.5, round(r,
digits), cex = 1.5)
}
> pairs(USArrests[, ordem],
 labels = nomes, upper.panel
= panel.cor)
```



Correlação em R

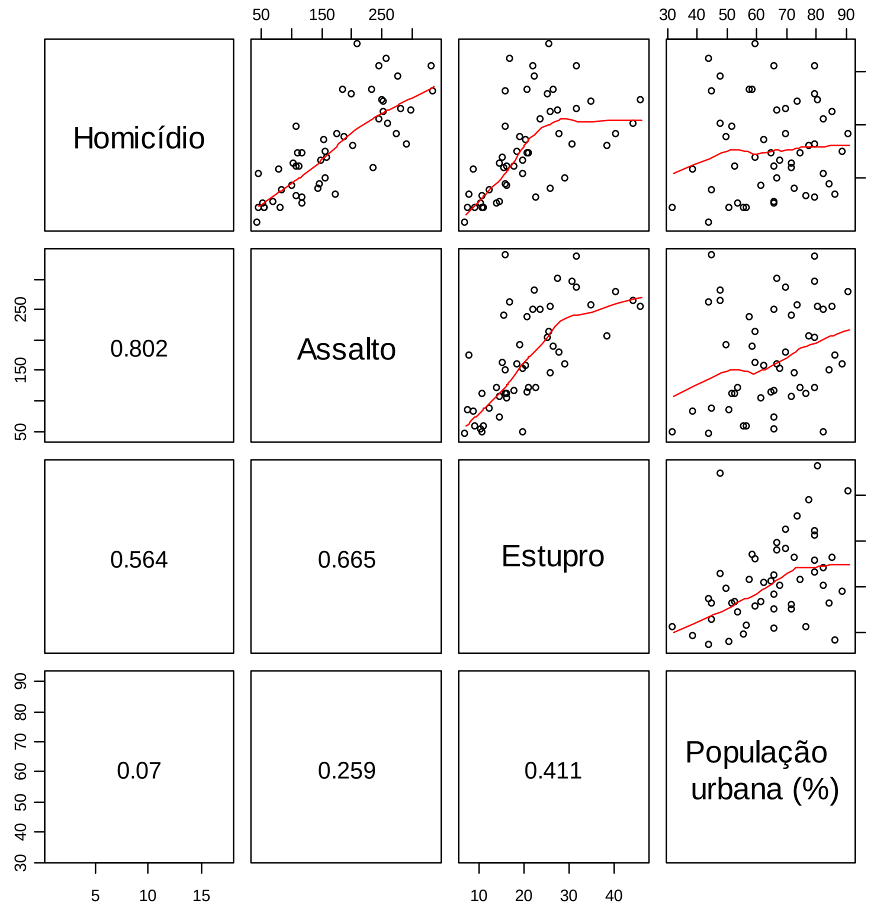
Omitindo a parte inferior da matriz:

```
> pairs(USArrests[, ordem],
labels = nomes, lower.panel =
NULL)
```



Correlações e linhas de tendência:

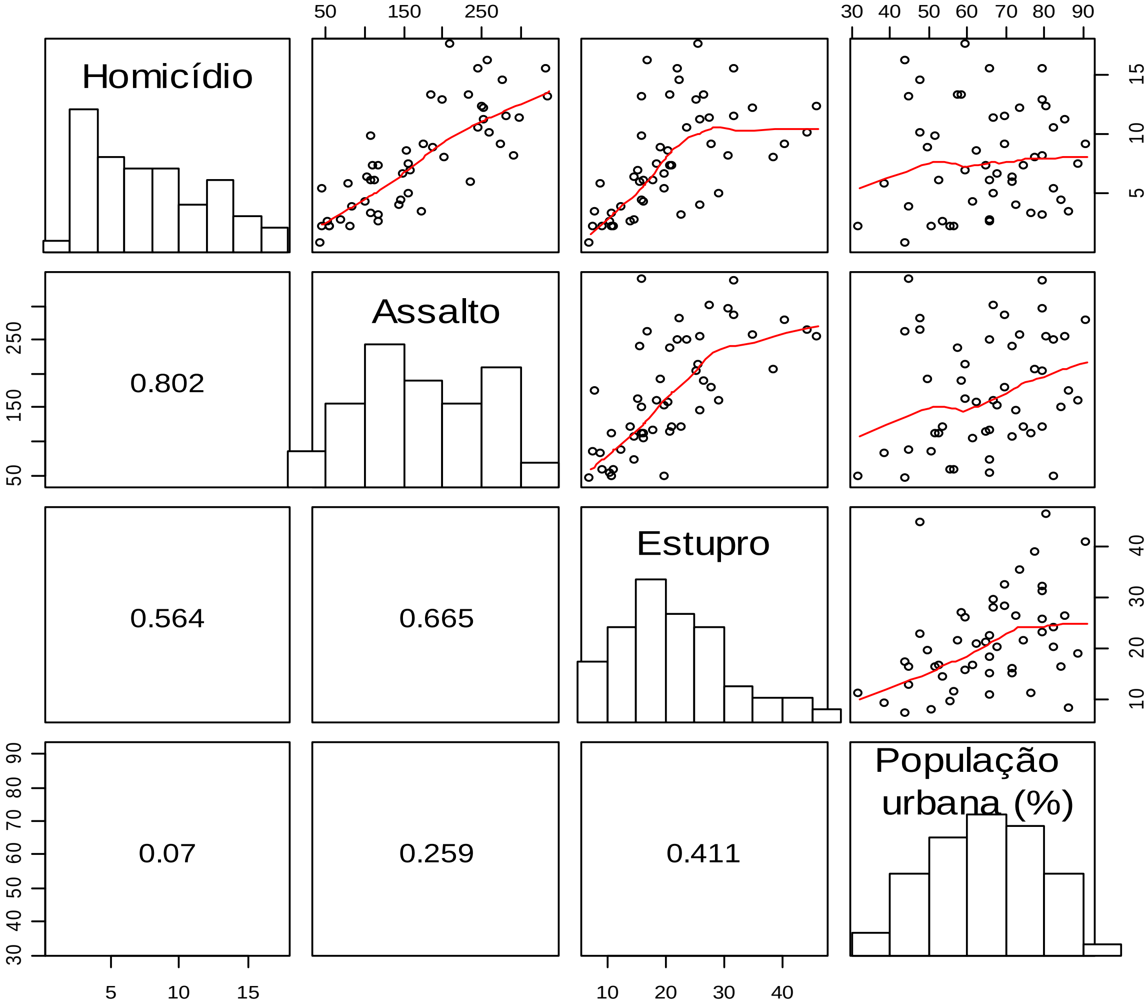
```
> pairs(USArrests[, ordem],
labels = nomes, upper.panel =
panel.smooth, lower.panel =
panel.cor)
```



Correlação em R

Correlações, linhas de tendência e histogramas (utilize `?pairs`):

```
> pairs(USArrests[, ordem], labels = nomes, upper.panel =
panel.smooth, lower.panel = panel.cor, diag.panel = panel.hist)
```



Quais pares apresentam as correlações mais fracas e mais fortes?

O efeito de urbanização está mais associado a qual tipo de crime?

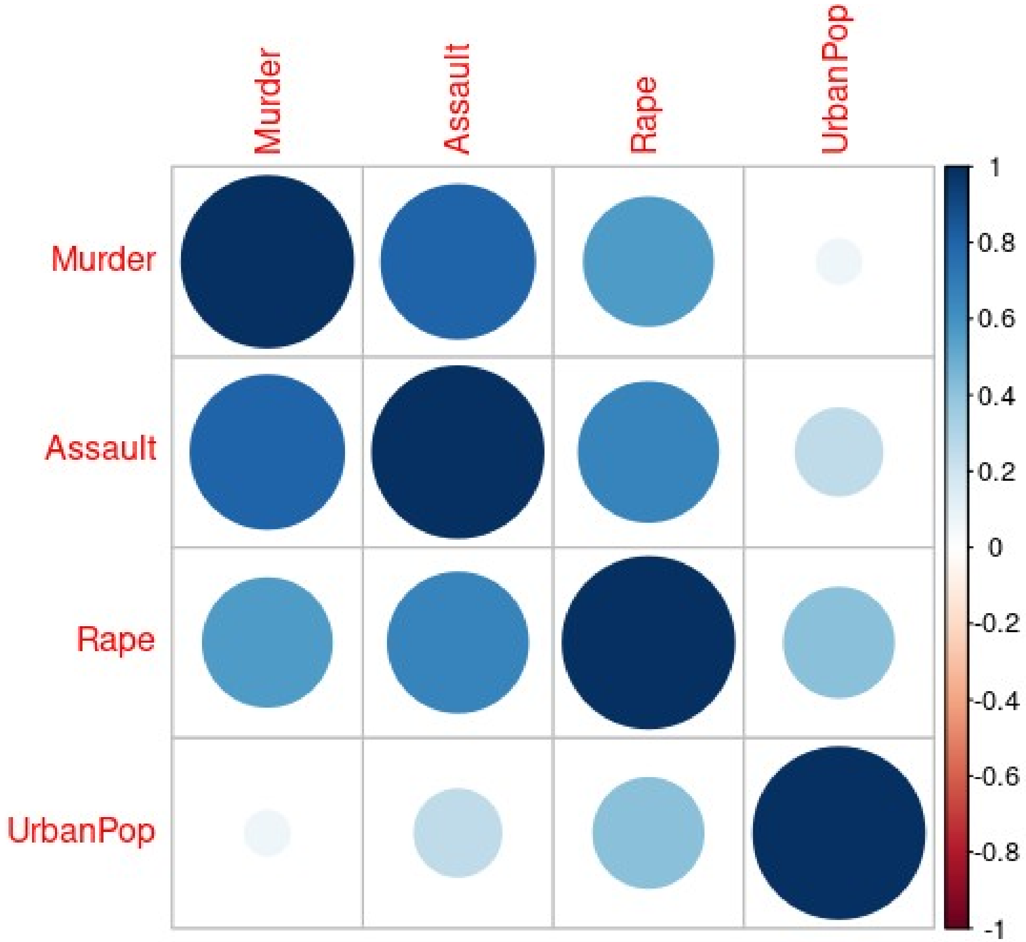
Uma grande quantidade de assaltos resultou em homicídios?

Que outras variáveis poderiam estar relacionadas à ocorrência dos crimes?

Corrplot

Matriz de correlações

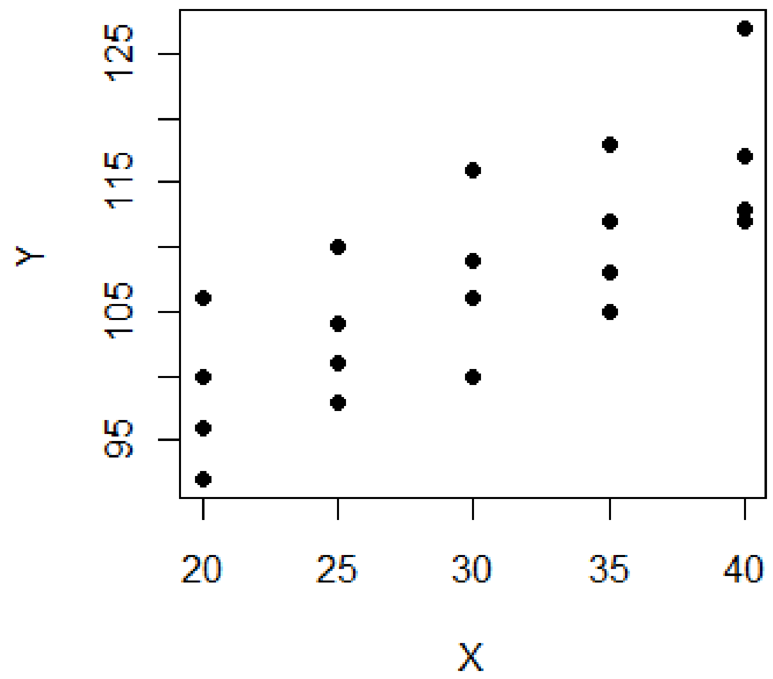
```
> library(corrplot)
> corrplot(cor(USArrests[, ordem]))
```



Modelo de regressão linear simples

Dados: (x_i, y_i), i = 1,...,n. n pares de observações das variáveis x e y (quantitativas). Queremos obter a melhor reta para explicar a (possível) relação linear entre x e y.

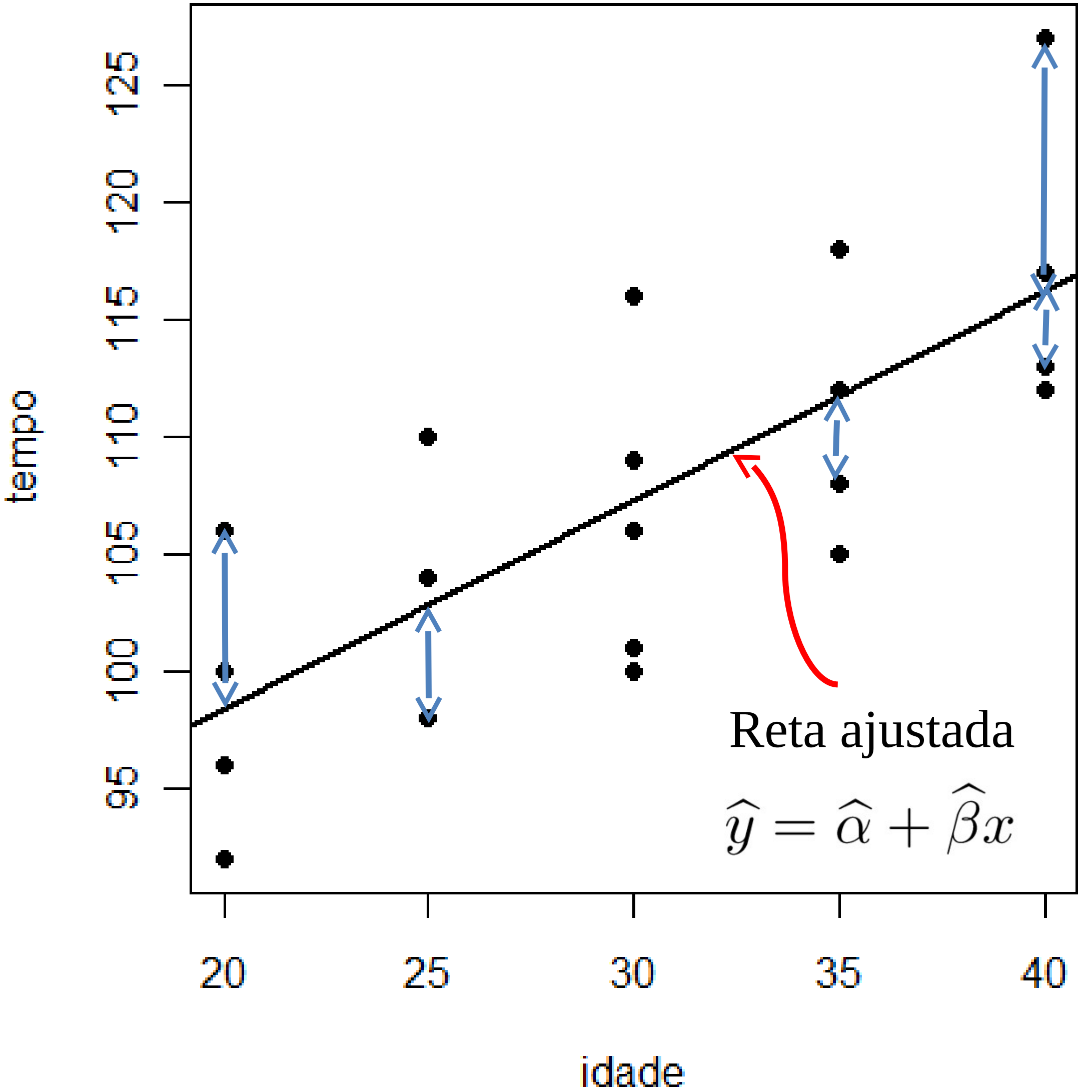
Exemplo: Observações do tempo de reação (Y) a um certo estímulo e idade (X) de 20 indivíduos



Modelo de regressão linear simples

Ajustar o melhor modelo do tipo $\mathrm{y_i} = \alpha + \beta \mathrm{x_i} + \epsilon_\mathrm{i},\ \mathrm{i} = 1, \ldots, \mathrm{n}$

α: coeficiente linear (intercepto) e β: coeficiente angular da reta



Para isso, pode-se minimizar
soma quadrática dos erros,

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i^2$$

Estimadores de mínimos quadrados de α e β:

$$\widehat{\alpha} = \overline{\mathrm{y}} - \widehat{\beta}\overline{\mathrm{x}}$$

$$\widehat{\beta} = \frac{\mathrm{Cov(x, y)}}{\mathrm{Var(x)}}$$

Modelo de regressão linear simples

Comandos em R:

```
> Acuidade <-read.table(
"http://wiki.icmc.usp.br/images/0/0f/Acuidade.txt", header=TRUE)

> X <- Acuidade$idade
> Y <- Acuidade$tempo

> plot(X, Y, pch=16)
> lm(Y~X)
> abline(lm(Y~X), col=2)
> summary(lm(Y~X))
```

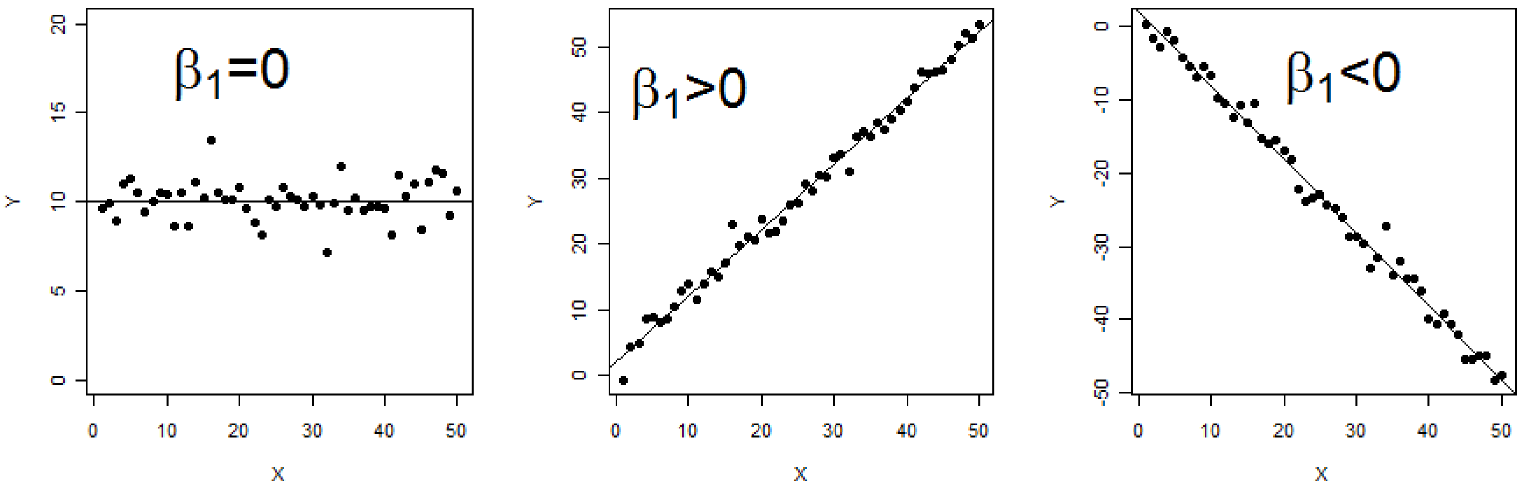
Modelo de regressão linear simples

Resultado do ajuste e coeficiente de determinação R^2

```
> summary(lm(Y~X))

Call:
lm(formula = Y ~ X)

Residuals:
   Min      1Q Median      3Q     Max 
-7.500 -4.125 -0.750  2.625 10.500 

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)    
(Intercept)  80.5000     5.4510  14.768 1.67e-11 ***
X             0.9000     0.1769   5.089 7.66e-05 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 5.593 on 18 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.5899,    Adjusted R-squared:  0.5672 
F-statistic:  25.9 on 1 and 18 DF,  p-value: 7.662e-05
```

Modelo de regressão linear simples

Coeficiente angular no modelo de Regressão Linear Simples



Exemplo em Wainer (2009)

Adaptado de Wainer, W. (2009), *Picturing the Uncertain World*, Princenton: Princenton, NJ

Número médio de pessoas por cômodo em 60 países ou regiões.

Dados: http://unstats.un.org/unsd/demographic/products/socind/housing.htm

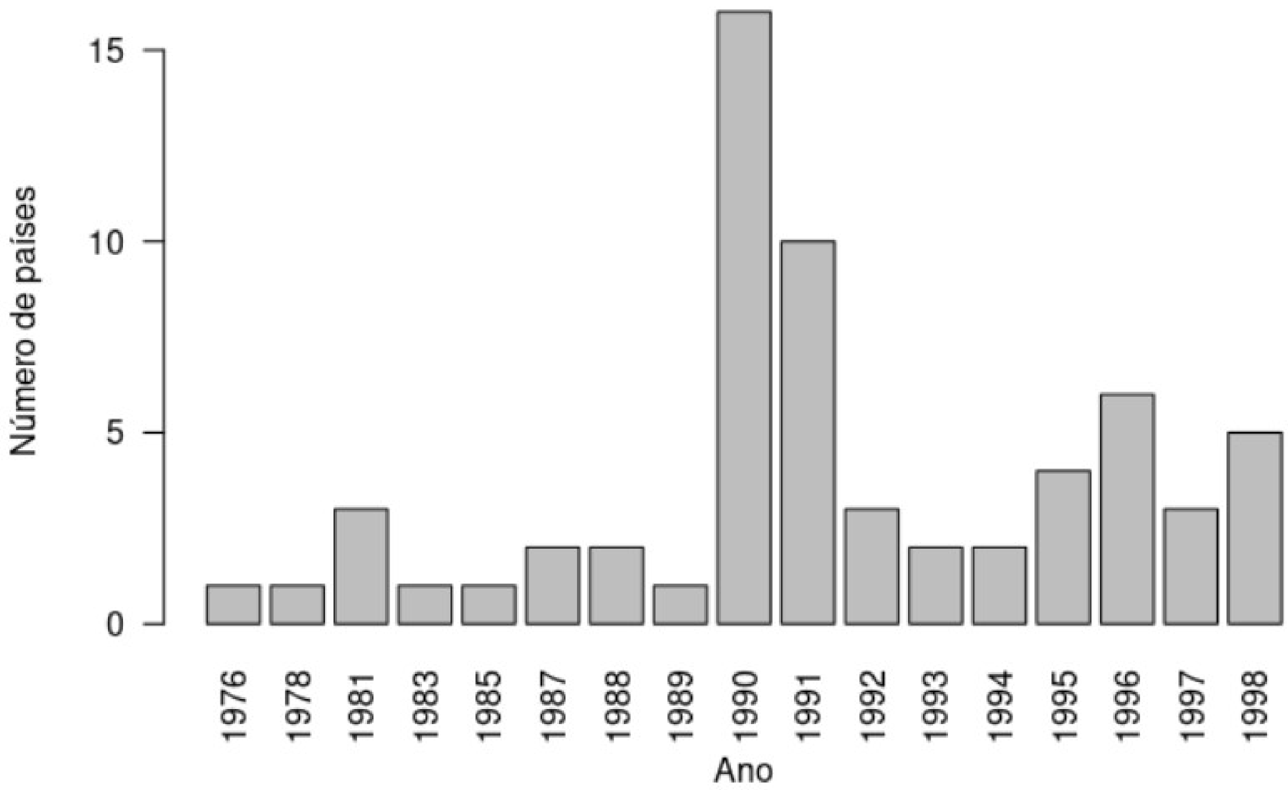
```
> dados = read.csv("
http://www.icmc.usp.br/~cibele/Dados/Housing_Dec2010.csv", header =
TRUE, sep = ";")

> names(dados)

[1] "countryarea" "year"   "total"       "urban"       "rural"
> summary(dados)
```

```
  year          total             urban             rural
 Min.   :1976   Min.   :0.500   Min.   :0.500   Min.   : 0.400
 1st Qu.:1990   1st Qu.:0.700   1st Qu.:0.700   1st Qu.: 0.700
 Median :1991   Median :1.000   Median :1.000   Median : 1.000
 Mean   :1991   Mean   :1.141   Mean   :1.153   Mean   : 1.230
 3rd Qu.:1995   3rd Qu.:1.300   3rd Qu.:1.300   3rd Qu.: 1.400
 Max.   :1998   Max.   :3.000   Max.   :3.100   Max.   : 3.300
                NA's   :2.000   NA's   :8.000   NA's   :10.000
```

É possível comparar dados coletados de 1976 com os de 1998?

Exemplo em Wainer (2009)

```
> attach(dados)

> table(year)

> barplot(table(year), xlab = "Ano", ylab = "Número de países",
                                  las = 2)
```



Exemplo em Wainer (2009)

```
> countryarea[year == 1976]
```

```
[1] Cameroon
```

```
> countryarea[year == 1998]
```

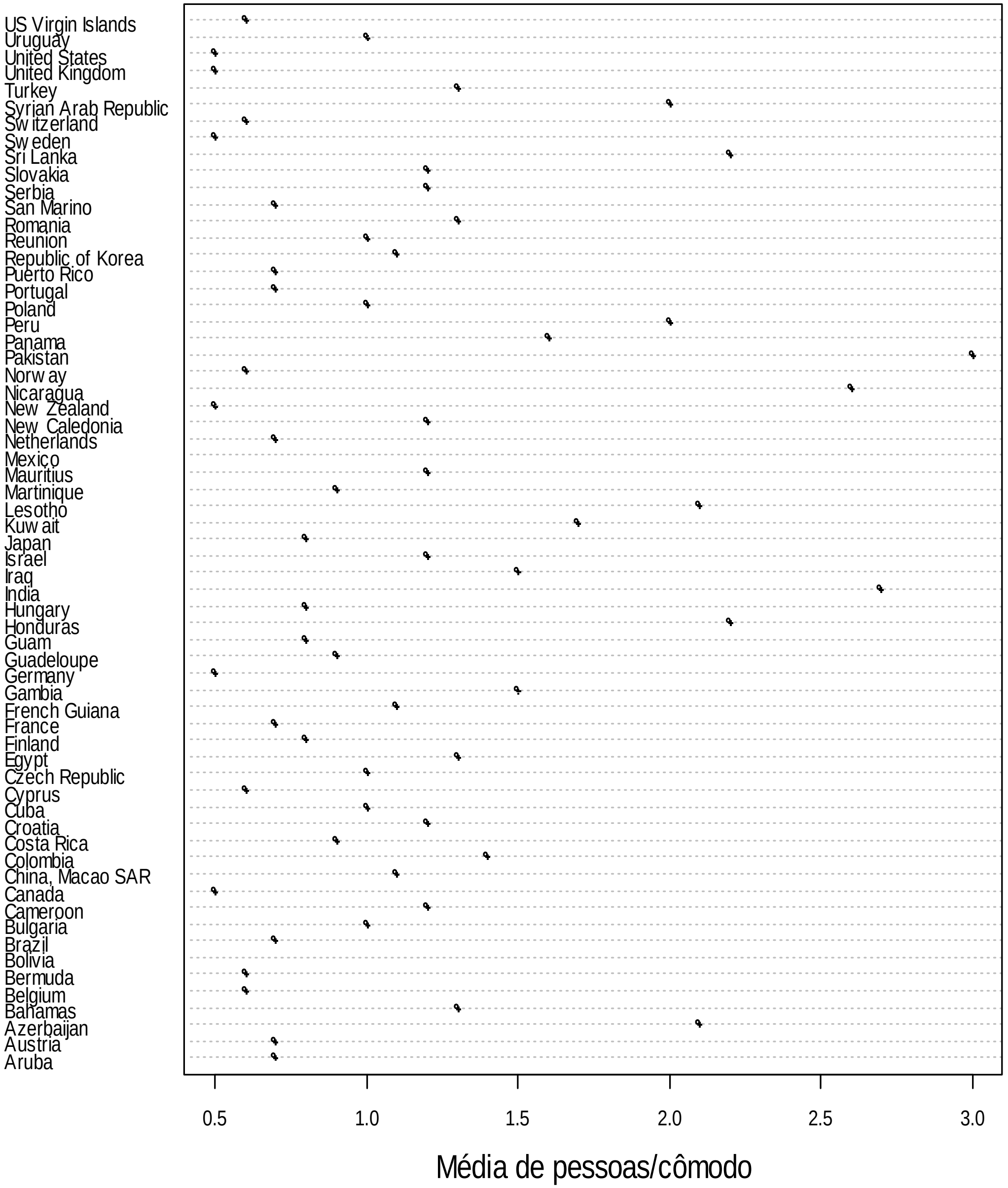
```
[1] Azerbaijan  Brazil
Finland   Netherlands
Pakistan
```

```
> dotchart(total, labels =
countryarea, xlab = "Média
de pessoas/cômodo", pch =
20, cex = 0.7, cex.lab =
1.5)
```

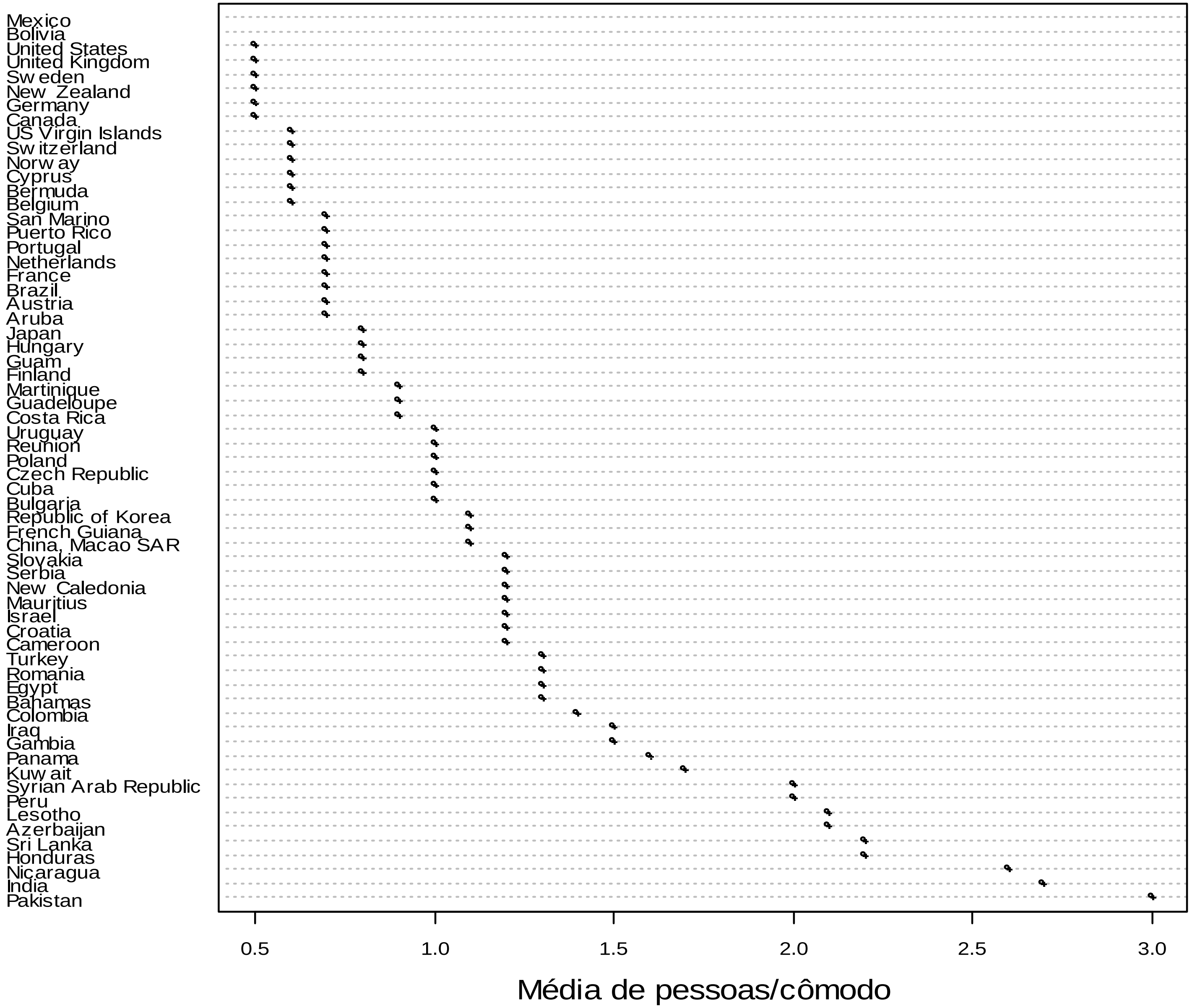
Por que utilizar a ordem alfabética?

```
> ordem = order(total,
decreasing = TRUE)
```

```
> dotchart(total[ordem],
labels =
countryarea[ordem], xlab =
"Média de pessoas/cômodo",
pch = 20, cex = 0.7,
cex.lab = 1.5)
```

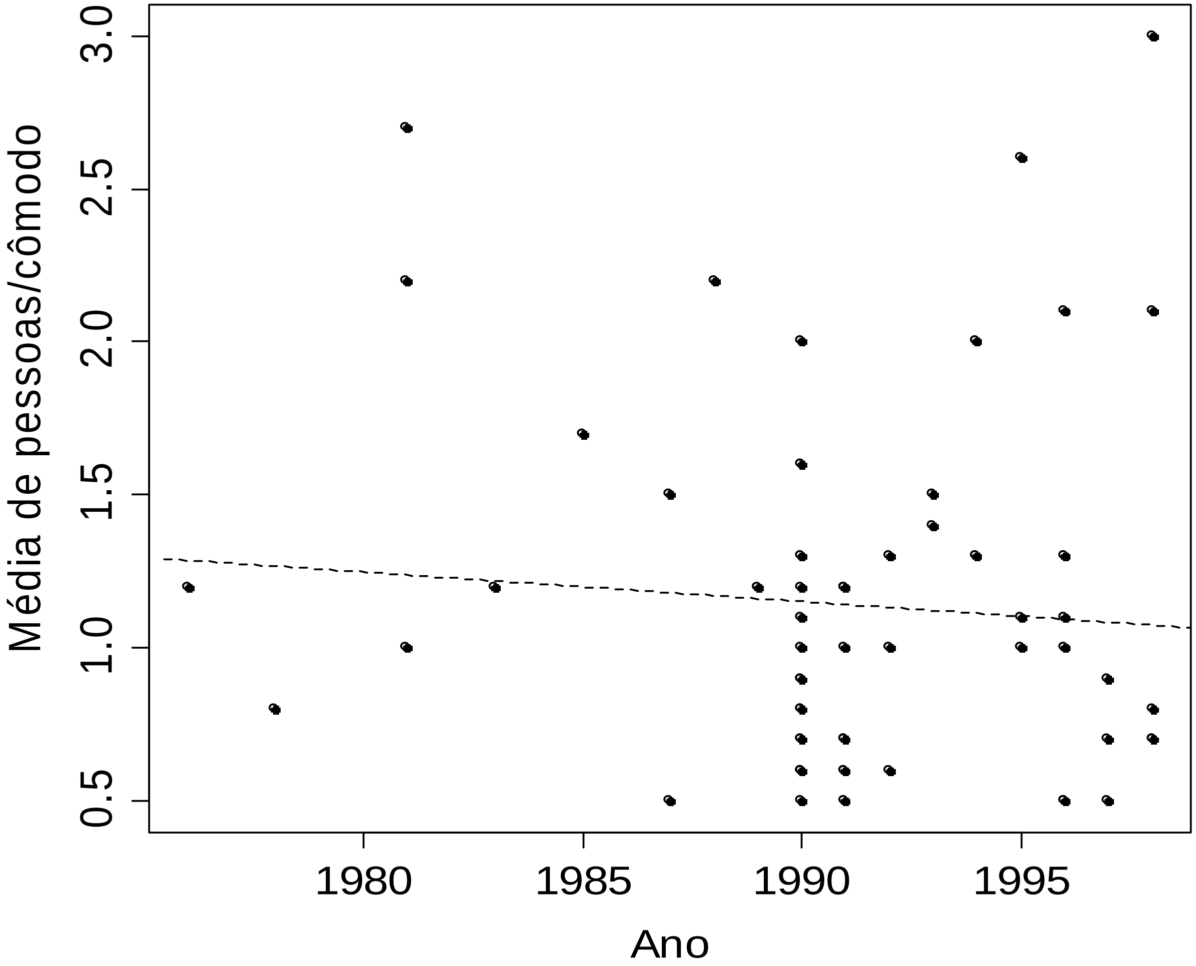


Exemplo em Wainer (2009)



Exemplo em Wainer (2009)

```
> plot(year, total, xlab = "Ano", ylab = "Média de pessoas/cômodo",
pch = 20)

> abline(lm(total ~
year), lty = 2)

> cor(year, total)
[1] NA

> cor(year, total,
use = "complete")
[1] -0.07985232
```



Não há indício de relação entre a densidade de ocupação e o ano em que o dado foi coletado.

Há diferença entre a ocupação nos meios rural e urbano?

Se a resposta for não, podemos trabalhar com a média geral (`total`).

Exemplo em Wainer (2009)

```
> plot(rural, urban, xlab = "Média de pessoas/cômodo - rural",
 ylab = "Média de pessoas/cômodo - urbano", pch = 20)
```

```
> abline(0, 1, lty = 2)
```

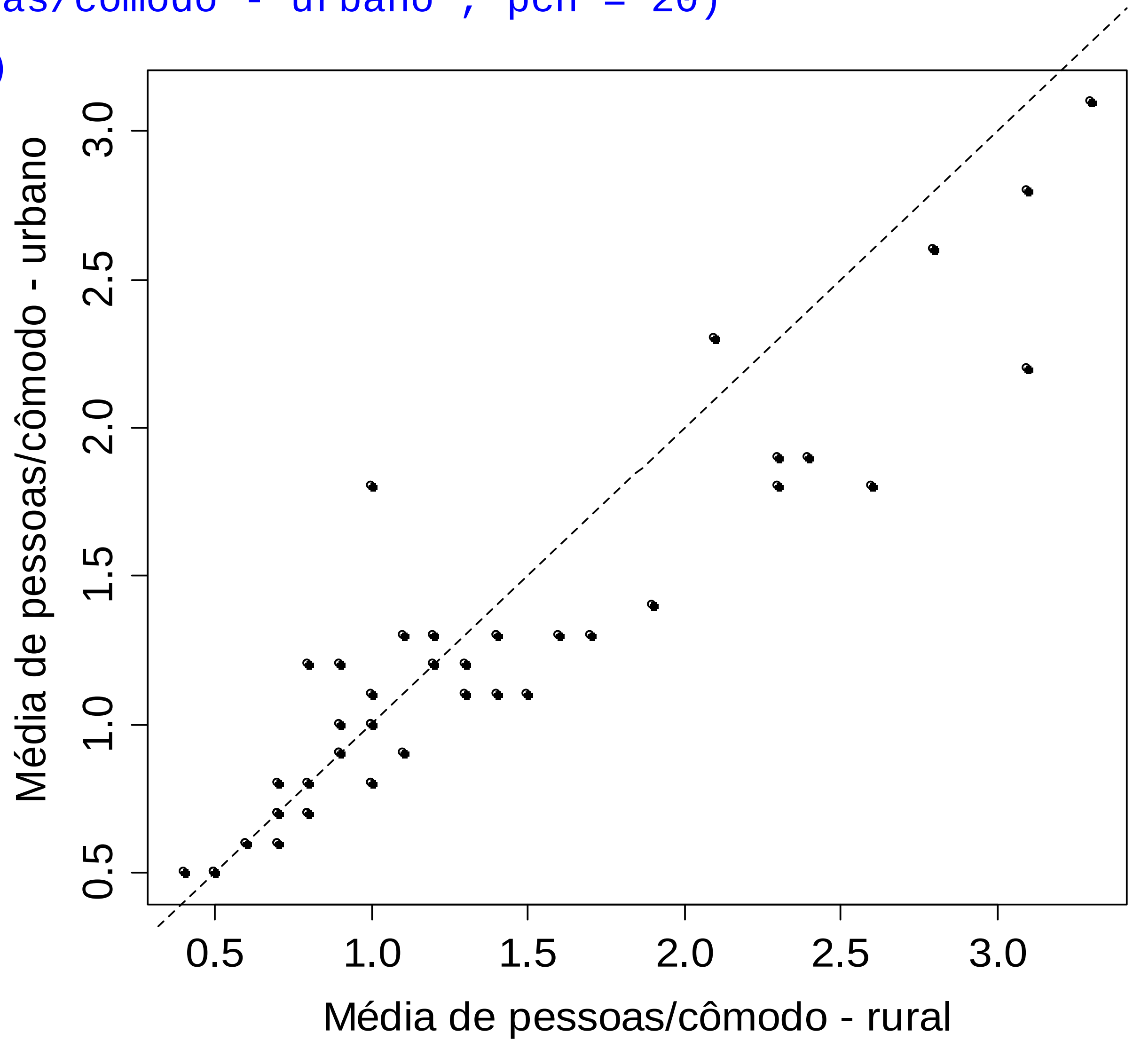
```
> cor(rural, urban,
use = "complete")
[1] 0.9385013
```

Correlação positiva forte.

Tendência de maiores médias no meio rural.

Situação econômica pode estar associada à densidade de ocupação?

Variável: PIB *per capita*.



Exemplo em Wainer (2009)

```
> pib =  read.csv("Income_Dec2010.csv", header = TRUE, sep = ";")
> names(pib)
[1] "countryarea" "year" "GDPcapita"
```

```
> dim(pib)
[1] 215   3
```

```
> summary(pib)
 countryarea        year          GDPcapita
 Afghanistan:  1   Min.    :2008   Min.    :   138
 Albania    :  1   1st Qu. :2008   1st Qu.:   1218
 Algeria    :  1   Median  :2008   Median :   4874
 Andorra    :  1   Mean    :2008   Mean   :  15772
 Angola     :  1   3rd Qu. :2008   3rd Qu.:  19291
 Anguilla   :  1   Max.    :2008   Max.   : 211501
 (Other)    :209   NA's    :   6   NA's   :      6
```

Dados de 2008 serão utilizados apenas como ilustração.

GDP: *per capita gross domestic product* (em US$).

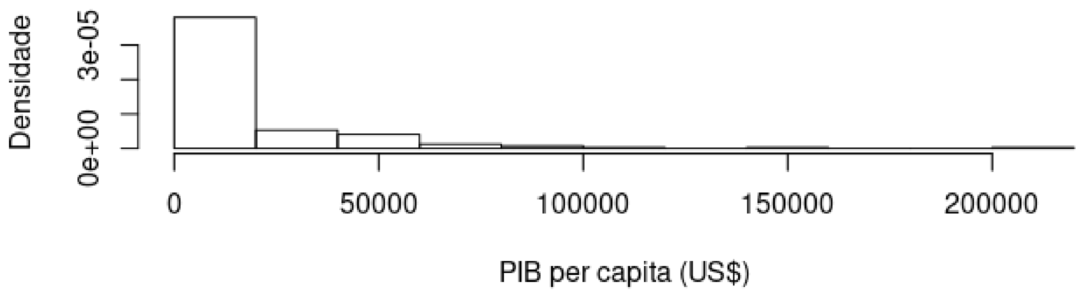
http://unstats.un.org/unsd/snaama/dnllist.asp

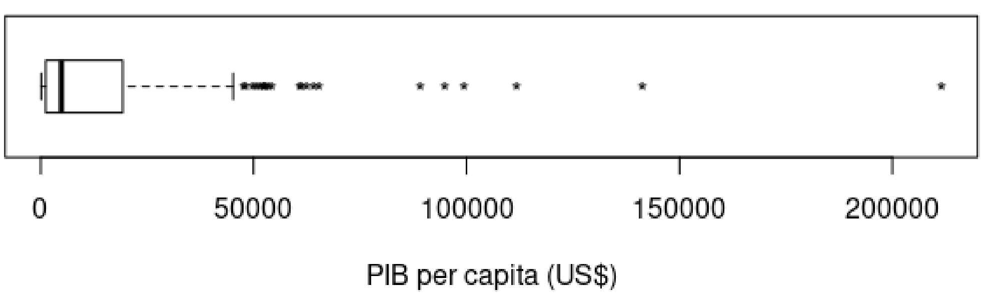
```
> pib$country[which.min(pib$GDPcapita)]
[1] Burundi
> pib$country[which.max(pib$GDPcapita)]
[1] Monaco
```

```
> pib$GDP[pib$country == "Brazil"]
[1] 8311
```

Exemplo em Wainer (2009)

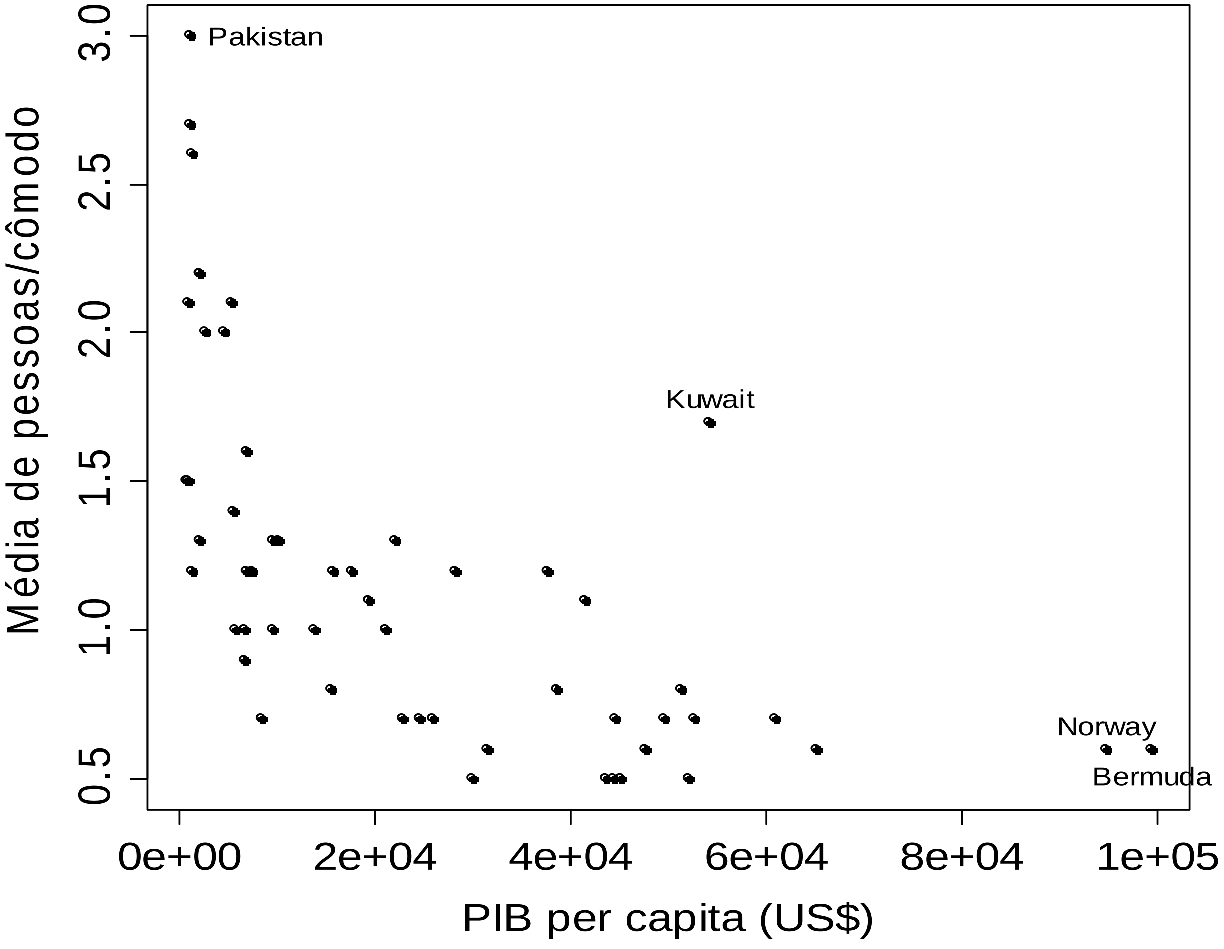
```
> par(mfrow = c(2, 1))

> hist(pib$GDP, freq = FALSE, xlab = "PIB per capita (US$)", ylab =
"Densidade", main = "“)

> boxplot(pib$GDP, xlab = "PIB per capita (US$)", pch = "*",
horizontal = TRUE)
```





Exemplo em Wainer (2009)

```
> pib60 = pib$GDP[match(countryarea, pib$country)]
> plot(pib60, total, pch = 20, ylab = "Média de pessoas/cômodo",
   xlab = "PIB per capita (US$)")
> identify(pib60, total, countryarea)
```



Associação negativa.

Assimetria em PIB *per capita*.

Transformações de variáveis

Alguns objetivos: (a) simetrizar os dados e (b) linearizar a relação entre as variáveis.

$$\text{Família de transformações: } t = t(x) = \begin{Bmatrix} x^{\lambda}, & \text{se } \lambda \neq 0, \\ \log(x), & \text{se } \lambda = 0, \end{Bmatrix} \text{ se } x > 0.$$

λ deve ser escolhido de modo a atingir o(s) objetivo(s), pelo menos aproximadamente.

t(x) é monótona em x:

(1) $\lambda \geq 0$. $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \ldots \leq x_{(n)} \Leftrightarrow t(x_{(1)}) \leq t(x_{(2)}) \leq \ldots \leq t(x_{(n)})$.

(2) $\lambda < 0$. $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \ldots \leq x_{(n)} \Leftrightarrow t(x_{(n)}) \leq t(x_{(n-1)}) \leq \ldots \leq t(x_{(1)})$.

Posições são preservadas em (1) e são invertidas em (2).

Obs. Se M é a mediana de x, então t(M) é a mediana de t.

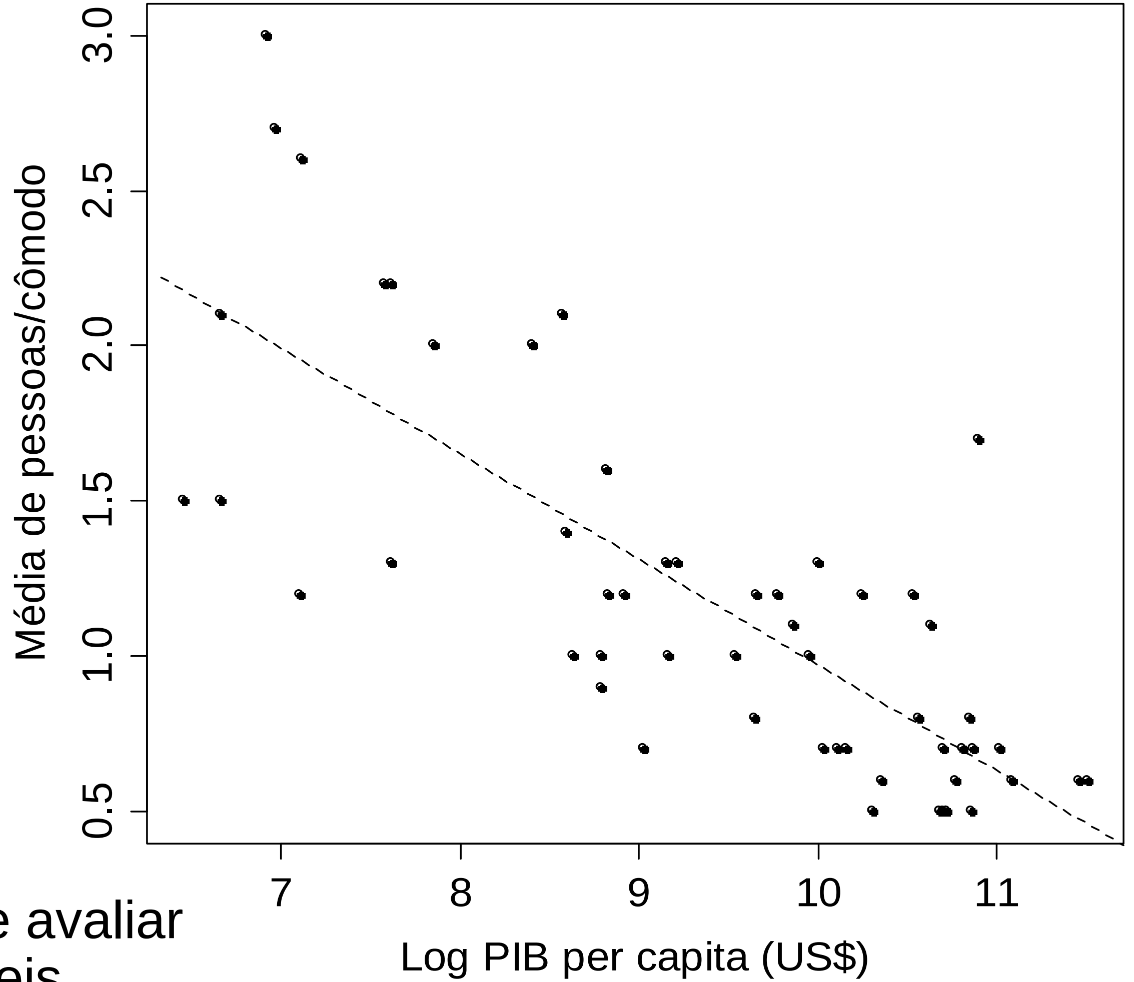
Transformações comuns: log(x), $x^{½}$, 1/x e $1/x^2$.

Exemplo em Wainer (2009)

Transformação logarítmica da variável PIB *per capita*.

```
> plot(log(pib60),
total, pch = 20, ylab =
"Média de
pessoas/cômodo", xlab =
"Log PIB per capita
(US$)“)

> abline(lm(total ~
log(pib60)), lty = 2)

> cor(log(pib60),
total, use =
"complete")

[1] -0.7787283
```

Outras variáveis: fertilidade e desemprego feminino.



Exercício: Baixar dados e avaliar associações entre variáveis http://unstats.un.org/unsd/demographic/products/socind/