CURSO DE FÍSICA BÁSICA – VOLUME I

CAMPO GRANDE - 2009

CURSO DE FÍSICA BÁSICA

VOLUME I

Prof Dr Paulo Ricardo da Silva Rosa

Departamento de Física

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

Campo Grande – 2009

Conteúdo do volume I

Prólogo - Como estudar e solucionar problemas em Física

O objetivo deste texto é o de apresentar um conjunto de procedimentos úteis para que você tenha eficiência ao estudar Física e solucionar problemas em Física. Naturalmente, cada estudante tem seu modo de estudar. Entretanto, a experiência mostra que certas atitudes e hábitos favorecem a aprendizagem.

Como estudar corretamente?

O primeiro ponto que gostaríamos de salientar é o de que não é possível a solução de um problema sem que tenhamos estudado a teoria a ele relacionada. E aqui, no estudo da teoria, está um ponto no qual o estudante novato em Física, normalmente, gasta uma grande quantidade de energia, muitas vezes com um resultado desestimulante.

A dificuldade, muitas vezes, não está no número de horas despendido no estudo, mas em como estas horas são gastas. Ler um texto de Física necessita que a leitura seja acompanhada da anotação das dúvidas que aparecem durante a leitura do texto. Dificilmente alguém lê um texto e não consegue retirar deste texto alguma informação. Contudo, sempre existem pontos onde a compreensão é deficiente e o surgimento de dúvidas é natural. Porém, a solução de uma dúvida passa pela consciência de qual é essa dúvida. Saber expressar uma dúvida é mais da metade do caminho para a superação dessa dúvida.

O professor de uma disciplina somente pode esclarecer dúvidas que são conscientes para o estudante. Esse tipo de dúvida é o que chamamos de **dúvida qualificada**. Não é a dúvida do tipo: *eu nada sei*. Mas é a dúvida do tipo: *eu não entendi este ponto em particular*.

Como sugestão de método de estudo, sugerimos:

a. Estude sempre com um caderno de anotações ao lado. Ao surgir uma dúvida, anote-a imediatamente para referência futura: anote a dúvida, acompanhada com o número da página e o parágrafo em que a dúvida apareceu. Seja claro ao anotar esta dúvida: *o que exatamente não foi compreendido?*

b. Procure em outros textos sobre o mesmo assunto e compare-os uns com os outros. Por vezes o assunto está mais claro em outros textos, e nossa compreensão fica melhor ao consultarmos mais de uma fonte;
c. Forme um grupo de estudos, com mais dois ou três estudantes, com um nível de conhecimento equivalente ao seu. Grupos maiores não funcionam e grupos muito heterogêneos também não. Contudo, o trabalho em grupo não significa que tarefas deverão ser divididas. Todos no grupo deverão realizar todas as tarefas propostas pelo professor. A função do grupo é oferecer suporte naquelas tarefas em que você apresenta mais dificuldades. Às vezes, o colega do grupo entendeu melhor certa parte do conteúdo enquanto você entendeu melhor outras;
d. Não deixe dúvidas acumularem sem resposta. Lembre que um curso é construído de forma que novos conceitos sejam ancorados em conceitos que você já possui. Portanto, procure o professor ou o monitor da disciplina para esclarecer dúvidas que você não conseguiu resolver dentro do seu grupo de estudos;
e. Exemplos não são somente para serem lidos. Eles devem ser lidos e refeitos por você. A função do exemplo é a de fornecer um conjunto de situações padrão para que você possa resolver problemas. Ao solucionarmos problemas sempre buscamos situações similares para, a partir delas, construirmos a estratégia de solução para situações novas (os problemas).

Estratégias para a solução de problemas

Tendo estudado a teoria nas linhas que apontamos acima, você estará pronto para iniciar a solução dos problemas propostos. Para ter sucesso nesta tarefa, você deverá usar uma estratégia adequada. A capacidade de solucionar problemas não é uma habilidade divina, dada a um punhado de seres humanos iluminados. Essa capacidade surge do trabalho sistemático e árduo. Só é bom em solucionar problemas quem já resolveu muitos problemas! O uso da estratégia adequada é meio caminho.

A estratégia que propomos é delineada nas etapas a seguir:

1. Leia atentamente o problema.

Ler atentamente o problema significa que você primeiro vai lê-lo pelo menos duas vezes antes de tentar realizar qualquer coisa. Leia todos os itens que estão sendo solicitados até que você tenha clareza do que está sendo pedido e de quais informações você dispõe.

2. Faça um desenho ou diagrama, anotando as informações relevantes fornecidas pelo problema.

O especialista em solucionar problemas em um dado campo começa a solução de um problema fazendo um desenho ou diagrama da situação descrita no problema. Neste desenho ou diagrama são anotadas as informações que o problema fornece. Observe que nesta etapa não estamos ainda procurando a solução do problema, mas tomando consciência do que nos está sendo solicitado e das informações que temos a nossa disposição. Este é o momento de você se perguntar: qual situação que eu conheço (exemplos ou outros problemas que você já tenha solucionado) que seja similar à situação atual?

3. Descreva as variáveis do problema, incluindo o que está sendo solicitado como resposta.

Dê nomes às variáveis que serão utilizadas e às informações que estão sendo fornecidas. Lembre: **todos** os símbolos que serão utilizados devem ser definidos **antes** de sua utilização. Escolha quais são as variáveis relevantes à solução daquele problema específico. Lembre que nem sempre toda a informação oferecida no enunciado do problema é relevante e necessita ser utilizada durante o processo de solução do problema.

4. Liste as estratégias possíveis para a solução do problema.

Usualmente, temos mais de um modo de solucionar um problema. Portanto, a menos que o enunciado exija claramente que a solução seja obtida por um determinado método, você tem a opção da escolha de uma dentre as várias possibilidades de caminho para chegar ao resultado pedido. Nesta etapa pense sobre a seguinte questão: que estratégias eu conheço que poderiam me levar à solução deste problema? A fonte destas estratégias são, novamente, os exemplos e os problemas que você resolveu anteriormente.

5. Escolha aquela estratégia que pareça mais simples e direta.

Dentre as estratégias analisadas anteriormente, escolha aquela que parece fornecer a solução de forma mais simples e direta, exigindo um menor número de etapas intermediárias. O menor número de etapas intermediárias facilitará a verificação do que foi feito, melhorando suas chances de encontrar a resposta adequada ao problema.

6. Implemente a estratégia escolhida.

Tendo escolhido a estratégia chegou o momento de implementá-la. Neste momento lembre que a solução de um problema não é um amontoado de contas. Resolver um problema pode ser comparado, em certo sentido, a contar uma história para alguém. Ao contar uma história utilizamos o texto e os desenhos ou símbolos necessários para transmitir ao leitor os elementos necessários à compreensão da história que queremos contar. Da mesma forma, ao solucionarmos um problema, devemos contar ao leitor (nós mesmos no futuro ou ao professor no caso de uma avaliação) qual o raciocínio que estamos seguindo. Isto envolve o uso do discurso. Veja, você não deverá escrever uma enciclopédia, mas indicar claramente ao leitor que hipóteses estão sendo levantadas, que escolhas estão sendo feitas, qual a lógica que está sendo seguida. Isto normalmente é conseguido com frases curtas.

Outro ponto a ser salientado é que devemos sempre resolver nosso problema literalmente antes de substituir resultados numéricos. Isto é fundamental. Ao solucionarmos literalmente podemos enxergar mais facilmente cancelamentos que ocorrem ao longo da solução do problema. Também evitamos cometer erros numéricos originados de arredondamentos e/ou de simples erros de cálculo.

Somente substitua valores numéricos no final, quando você já encontrou a expressão da grandeza procurada em termos das quantidades conhecidas.

Como saber se acertei um problema em Física?

Uma dificuldade que a natureza nos coloca é que ela não traz um rótulo com a resposta dos problemas que ela nos propõe. Ao estudarmos Física, a principal ferramenta para a aprendizagem e para a verificação da aprendizagem é a solução de problemas. Os livros textos estão cheios deles, dos mais diferentes tipos e formas. Contudo, como saber ao resolvermos um problema se chegamos à resposta correta do problema?

Uma primeira opção é conferir a solução obtida por nós com a solução encontrada no livro. Essa abordagem, no entanto, apresenta problemas, pois muitas vezes as respostas nos livros estão erradas, muitas vezes por erros de digitação ao produzir o livro. Mesmo livros com muitos anos de mercado apresentam esse tipo de erro. Outra dificuldade com as respostas dadas nos livros se encontra na modelagem feita pelo autor da situação física subjacente para a solução do problema. Em muitos casos, o autor do livro fez hipóteses que não são explícitas e, ao solucionarmos o problema partimos de um conjunto de hipóteses levemente diferentes e igualmente válidas, sendo levados a uma solução diferente da do autor do texto. Aparentemente nossa resposta é incorreta quando de fato ela não o é.

Isso coloca a seguinte questão: como determinar se a solução obtida por nós é correta?

Em Física temos vários procedimentos para determinar se a resposta é válida ou plausível. Vamos analisar cada um deles.

Análise dimensional

Em Física devemos distinguir dois tipos de grandezas: aquelas que possuem dimensões e as grandezas adimensionais. As primeiras serão expressas na forma de um número e uma unidade, medida em algum sistema de unidades adequado (o Sistema Internacional de Unidades é o sistema oficial no Brasil) enquanto que as segundas são expressas apenas por um número. Em geral as grandezas adimensionais são obtidas pela razão entre duas grandezas que possuem a mesma dimensão.

A dimensão de uma grandeza, cujo símbolo é A, é denotada por $[A]$, o símbolo da grandeza entre colchetes. Devemos fazer aqui a diferenciação entre sistema de unidades e dimensão. A dimensão da grandeza diz respeito às propriedades da natureza em relação às quais a grandeza é expressa. Já o sistema de unidades diz respeito a certo padrão de medida daquela propriedade. Tomemos o exemplo da distância entre duas partículas, que denotaremos pela letra d. Essa distância é uma medida do comprimento do espaço, que denotaremos pela letra L, entre as duas partículas. Essa é a dimensão dessa grandeza. Assim, a dimensão da grandeza d é L:

$$[d] = L.$$

Esse comprimento pode ser medido em qualquer um dos sistemas de unidades que conhecemos: metro (m) no Sistema Internacional, centímetro (cm) no Sistema CGS[1], etc. Outro exemplo: considere o tempo transcorrido entre dois eventos, que denotaremos pelo símbolo Δt. A dimensão dessa grandeza é o tempo, a propriedade medida por ela. Então, se chamarmos por T essa dimensão, podemos escrever:

$$[\Delta t] = T.$$

Já a unidade na qual essa grandeza vai ser medida pode ser o segundo (s), a hora (h) e assim por diante.

As grandezas das quais falamos há pouco são grandezas simples, expressas apenas por uma dimensão. Podemos ter casos mais complicados de grandezas obtidas por operações de multiplicação ou divisão entre várias grandezas simples. Tomemos o exemplo da **velocidade escalar média**, definida por:

$$v = \frac{\Delta d}{\Delta t}.$$

Nesta expressão $\Delta d \; e \; \Delta t$ são, respectivamente, a distância percorrida e o intervalo de tempo gasto para percorrê-la. A dimensão da velocidade será obtida pela razão entre as dimensões de distância pelas dimensões de intervalo de tempo:

$$[v] = \frac{[\Delta d]}{[\Delta t]} = \frac{L}{T}.$$

[1] O Sistema de unidades CGS tem por unidades fundamentais o centímetro (C) para comprimentos, a grama (G) para massa e o segundo (S) para o tempo.

As unidades da velocidade podem ser m/s, cm/s, etc.

Uma primeira verificação que deve ser feita ao obtermos a resposta a um problema é se as dimensões do resultado são aquelas que esperaríamos. Assim, por exemplo, se em um dado problema nos é solicitado o cálculo da aceleração cujas dimensões são $[a]=\frac{\frac{L}{T}}{T}=\frac{L}{T^2}$ (comprimento por tempo ao quadrado) o resultado obtido deve ser expresso em unidades que expressem essa razão entre as dimensões de comprimento e tempo, tais como: m/s^2, cm/s^2, etc. Se o resultado não for dimensionalmente correto, com certeza cometemos algum erro ao longo do caminho.

Em situações mais complexas, a análise da dimensionalidade deve ser feita para cada parcela de uma expressão. Observe que somente podemos adicionar quantidades que possuem a mesma dimensão e que estão expressas em um mesmo sistema de unidades. Considere o caso abaixo, no qual a grandeza f é obtida como a soma de duas outras grandezas, f_1 e f_2:

$$f=f_1+f_2$$

Para que a operação expressa por essa equação seja válida é necessário que as duas parcelas, f_1 e f_2, tenham as mesmas dimensões (e sejam expressas no mesmo sistema de unidades) que a dimensão esperada da grandeza f.

Ordem de grandeza

Outra maneira de termos indicadores de que acertamos ou não um problema é realizar uma análise da ordem grandeza da solução. Ordem de grandeza de uma expressão é uma estimativa do valor que a expressão calculada deveria ter. Não nos preocupamos em obter o valor exato da expressão, mas sim uma estimativa desse valor. Se essa estimativa estiver muito acima ou muito abaixo do valor encontrado então é sinal de que nossa solução pode não ser a correta.

Considere como exemplo a seguinte situação: você calculou a velocidade com a qual um carro chocou-se com um poste em um acidente de trânsito e encontrou um valor de 350 km/h. A menos que esse carro seja um carro de corrida, esse resultado obviamente não tem o menor sentido. Por outro lado, em um problema no qual uma pedra cai de uma altura de 30 m no qual você deverá calcular a velocidade com a qual a pedra chega ao solo, se você encontrar uma velocidade de 0,5 m/s há um problema óbvio com o cálculo.

Limites assintóticos

Chamamos por limite assintótico de um resultado ao valor do resultado quando certa condição de limite é imposta a esse resultado.

Considere os dois exemplos a seguir:

- A solução do problema de obter-se a equação horária para o movimento de uma partícula sujeita à ação de uma força constante. A solução, bem conhecida, é dada por:

  $$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2.$$

  Nesta expressão x_0 é a posição inicial da partícula, v_0 é a velocidade da partícula quando esta estava na posição x_0, a é a aceleração da partícula e t o tempo transcorrido desde o momento em que a partícula estava na posição x_0.

  Como saber se essa é a solução correta desse problema? Suponhamos que saibamos a solução do problema no qual a partícula se movimenta sem a ação de força alguma. Nesse caso, a equação de movimento será dada por: $x(t) = x_0 + v_0 t$. Sabendo disso, podemos conferir se nosso resultado é correto, fazendo com que a aceleração seja zero. Ao fazermos isso obtemos:

  $$x(t) = x_0 + v_0 t.$$

  Esse é o resultado esperado nesse limite $(a \to 0)$ [2]. A conclusão que podemos tirar é que nossa solução é provavelmente correta.

- Agora o problema de um objeto deslizando sem rotação por uma rampa com atrito (veja a Figura 1). Desejamos calcular a aceleração a qual o objeto está submetido. Esse também é um problema clássico cuja solução é dada por:

  $$a(t) = g[\mathrm{sen}(\theta) - \mu \cos(\theta)].$$

  Nessa expressão, g é o módulo da aceleração da gravidade e μ o coeficiente de atrito da superfície. O ângulo θ é mostrado na Figura 1.

[2] O símbolo $a \to 0)$ lê-se: quando *a* tende a zero.

Vamos agora supor que conheçamos com certeza a solução para o problema sem atrito. Essa solução é dada por:

$$a(t) = g\text{sen}(\theta).$$

O limite assintótico para o caso com atrito é quando o coeficiente de atrito vai a zero ($\mu \rightarrow 0$). Nesse caso, a solução obtida para o caso com atrito é a mesma obtida para o caso sem atrito e reproduzimos o comportamento esperado do sistema. Então nossa solução é provavelmente correta.

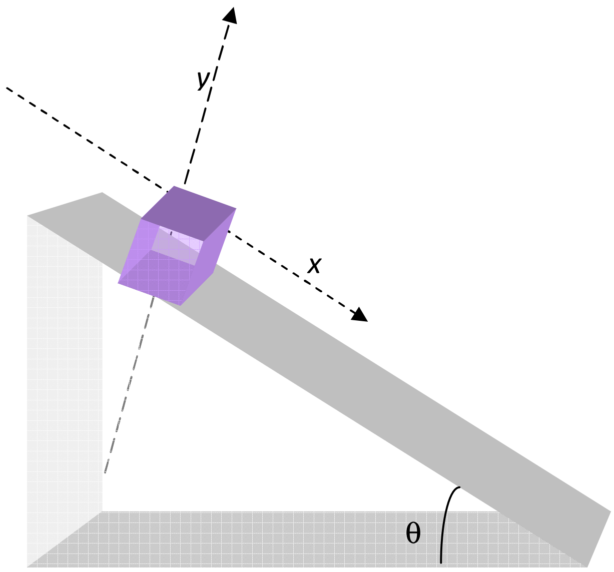


Figura 1 - o Plano inclinado

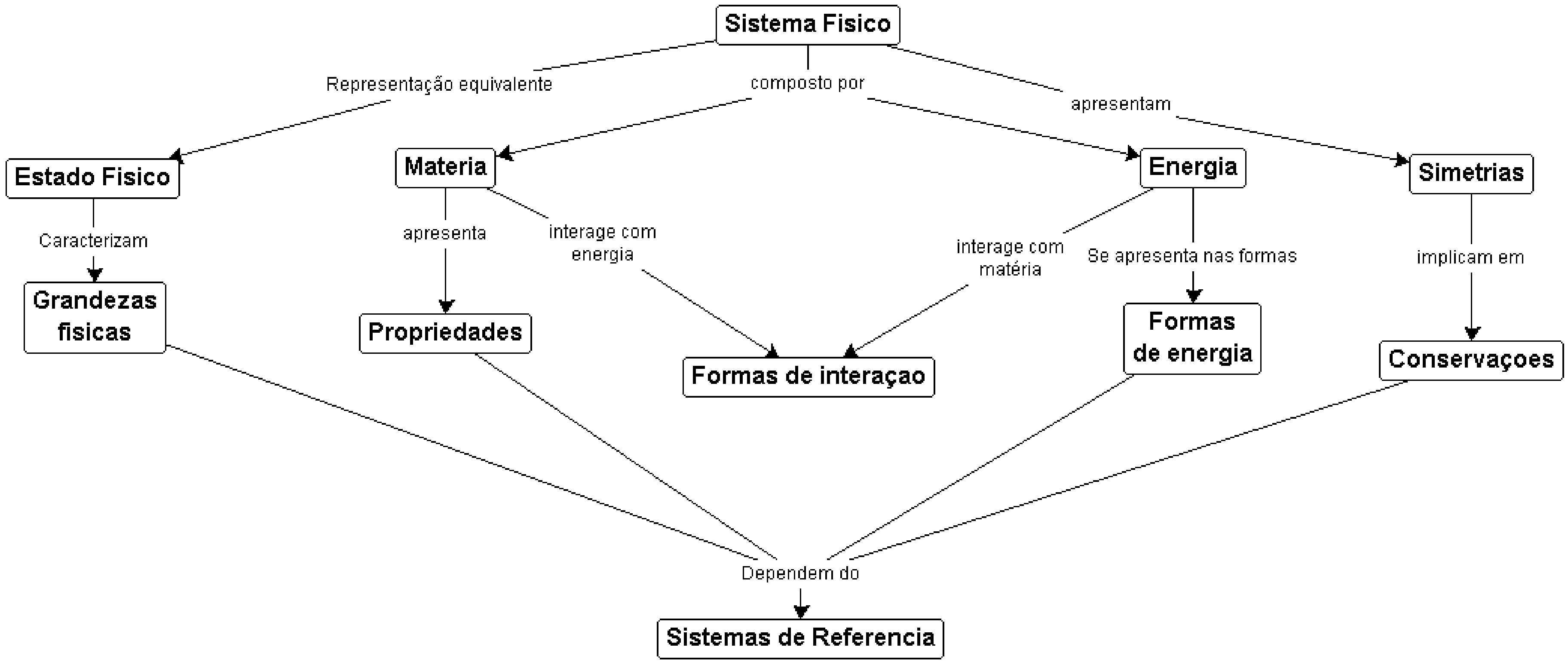
Comparação com alguma medição

As análises mostradas acima apenas podem indicar se cometemos algum erro formal na dedução de nossa solução. Contudo o teste final para qualquer solução que encontremos é a confrontação com o experimento, uma vez que o objetivo da Física é a descrição do mundo que nos cerca.

Portanto, outra maneira de sabermos se acertamos ou não o problema, é comparar o resultado de nosso cálculo com algum valor medido conhecido. Essa é a maneira usada pelos físicos teóricos para verificarem se acertaram ou não no modelo que levou a obtenção da solução.

Por exemplo, você resolveu um determinado problema e chegou à conclusão que um carro deveria levar 1 min 30 s para percorrer certo circuito oval do campeonato de Fórmula Indy. Esses tempos são medidos com bastante precisão ao longo das corridas e estão disponíveis na Internet. Basta comparar, então, o resultado obtido com o valor medido. Se o cálculo estiver próximo o bastante do valor medido então o problema foi resolvido satisfatoriamente. Naturalmente, que em uma situação de pesquisa, o nosso cálculo deverá ser confrontado com um grande número de medidas para termos confiança de que ele é correto.

Capítulo I - Introdução



Mapa 1 - Conceitos básicos do curso de Fisica Básica

Apresentação

Começamos aqui nosso estudo da Física. Neste texto, você encontrará uma nova abordagem dos conceitos físicos. Nesta nova abordagem, procuraremos desenvolver os conceitos de uma forma integrada, chamando atenção para os conceitos gerais primeiro e, após, para as instâncias particulares dos conceitos.

Para melhor visualizarmos os pontos estudados, de modo que você sempre saiba qual parte do conteúdo estamos explorando, faremos uso intensivo de uma ferramenta pedagógica chamada **Mapa Conceitual**. Você encontra um exemplo desse tipo de mapa na figura que abre este capítulo. A exemplo dos mapas rodoviários, os quais mostram cidades e as rotas que as unem, os mapas conceituais mostram conceitos e as rotas que os unem. No entanto, diferentemente dos mapas rodoviários nos quais todas as cidades, grandes ou pequenas, têm a mesma importância, nos mapas conceituais os conceitos são organizados de uma forma hierárquica. Assim, o conceito mais geral aparece no topo do mapa, enquanto conceitos menos gerais e mais particulares aparecem na sua base. Essa é uma regra e, como toda regra, apresenta exceções. Uma delas é apresentada no Mapa 1 mostrado na página anterior. Para nós os conceitos de **Sistema de Referência e Sistema Físico** são hierarquicamente equivalentes. No entanto, o conceito de Sistema de Referência (o qual será discutido mais extensivamente no Capítulo III) está na base do mapa. Fizemos assim para que não tivéssemos linhas cruzando umas as outras, o que tornaria o Mapa 1 de mais difícil compreensão.

Sugestão de atividade

Pesquise qual a origem da palavra Física. O que esta palavra quer dizer?

O que é a Física? Essa pergunta é difícil de responder, não havendo consenso mesmo entre os físicos profissionais.

Nascemos e um Universo nos é dado. Nesse Universo podemos perceber eventos que ocorrem: o Sol que nasce todas as manhãs, a chuva que cai, a Natureza que se renova a cada estação nos seus diferentes ciclos, um material que é mais duro que outro, um riacho que se transforma em véu de noiva. Todos esses eventos apresentam regularidades e padrões. O objetivo da Física é explicitar que padrões são esses. O físico não questiona o porquê de serem esses padrões e não outros. Nos contentaremos em saber quais são eles. À Filosofia (e, em certo sentido, às religiões) cabe decifrar o porquê de eles serem como são. A nós, físicos, cabe, modestamente, tentar descobrir como o Universo funciona. É isso que procuraremos responder nos volumes que compõem essa coleção.

Boa jornada por esse mundo maravilhoso e belo que é a Física!

Sistema físico

O Universo é extremamente complexo. São inúmeros os objetos que o compõe, todos interagindo uns com os outros, o que acontece com um se refletindo em todos os outros. Habitamos um planeta pertencente a um dos bilhões de sistemas que temos em nossa galáxia. Essa, por sua vez, possui em torno de 200 bilhões de estrelas dos mais variados tipos: azuis, amarelas, vermelhas, gigantes e anãs, novas, supernovas e não tão novas assim. A galáxia, por sua vez, pertence a um grupo de galáxias chamado Grupo Local. Próximas a nós, as Pequena e Grande Nuvens de Magalhães são os satélites da Via Láctea (a nossa galáxia) e, um pouco mais longe, a nossa vizinha mais próxima, a galáxia de Andrômeda. Indo mais longe na análise do céu noturno, encontramos outros bilhões de galáxias como a nossa. Nesta escala de tamanho as nossas unidades de medida de distância e tempo (como o quilômetro e a hora) perdem completamente o sentido e temos que usar outras unidades, como o ano-luz[3].

Se caminharmos em direção ao muito pequeno, rapidamente os conceitos que temos de nossa experiência diária perdem o sentido. No domínio dos átomos e moléculas efeitos quase mágicos são possíveis: atravessar “paredes”, o que antes era localizado deixa de sê-lo; uma partícula pode ser uma partícula ou uma onda. Tudo são probabilidades.

Esse é o palco no qual a Física se move e o Universo representa o seu ato.

No entanto, seres humanos que somos, não conseguimos lidar com toda essa complexidade. De modo a podermos tratar com o Universo e tentarmos desvelar o seu *modus operandi* é necessário que façamos recortes nesta realidade complexa, recortes que possamos tratar e analisar na busca das regularidades de que falamos antes.

[3] Um ano luz é a distância que a luz percorre em um ano, aproximadamente 9,5 trilhões de quilômetros.

Toda vez que isolamos[4] uma parte do Universo sobre a qual lançamos nosso olhar, a nossa atenção, estamos falando de um **sistema físico**. Esse pode ser uma barra de metal na qual procuramos descobrir propriedades magnéticas, uma estrela em colapso gravitacional sobre a qual queremos aprender um pouco mais, um núcleo que se desintegra emitindo nêutrons e radiação gama, um grão de soja irradiado; enfim, toda vez que lançamos um olhar sobre uma parte do Universo estamos falando de um Sistema Físico. Complementar ao conceito de sistema físico, há o conceito de **vizinhança**. Obviamente o Universo é a união do sistema físico com a vizinhança[5]:

Universo = Sistema Físico ∪ Vizinhança

(a) (b)

Figura 2 – Fotos da Pequena (a) e Grande Nuvens de Magalhães[6] (b).

Ao olharmos para os Sistemas Físicos quais perguntas fazemos? Algumas se originam no senso comum: o que compõe o sistema? De quais partes é composto? Outras são mais sutis e resultam da reflexão que fazemos sobre a Natureza: será que posso prever o que vai acontecer a esse sistema? Sabendo como o sistema é hoje será que posso deduzir como era no passado próximo ou longínquo? Como esse sistema afeta a vizinhança? Como é afetado por esta vizinhança? Naturalmente, muitas outras perguntas podem ser colocadas. Nas próximas seções procuraremos esboçar algumas respostas a essas questões.

[4] Naturalmente que este processo é apenas abstrato.

[5] O símbolo ∪ indica a união de dois conjuntos.

[6] Fonte: http://www.on.br acessado em 25/04/2005.

Exemplo 1

Definimos sistema físico como uma parte do Universo, e seu complemento de vizinhança. Geralmente, desejamos estudar e analisar um sistema físico para fazer previsões de como será sua evolução, ou como foi no passado. É fundamental conhecermos qual é a natureza dos elementos que compõem a vizinhança que interage de forma significativa, e como contribuem para a evolução do sistema.

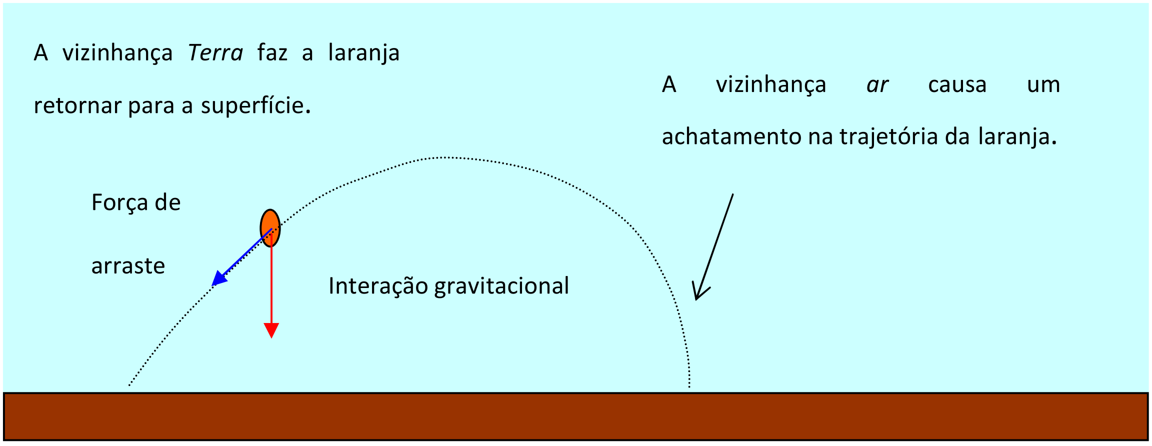


Figura 3 – Exemplo 1.

As interações também podem ocorrer entre os próprios elementos que constituem o sistema físico, e, às vezes, não são importantes para a análise de sua evolução. Por exemplo, se estamos interessados em estudar a evolução do movimento de uma laranja que foi lançada próxima à superfície terrestre, a sua constituição (semente, bagaço etc...) não é importante para o estudo do seu movimento, mas sim, a laranja como um todo. Considera-se a laranja como um sistema físico, que contém uma determinada quantidade de matéria, ocupando uma extensão (volume), de determinada forma (esférica). Este sistema (laranja) enquanto movimenta, sofrerá interações de natureza gravitacional por estar próximo à vizinhança da Terra, e interações de natureza elétrica (repulsão coulombiana entre as nuvens eletrônicas dos átomos que formam a laranja e os átomos que formam o ar que desliza sobre a superfície da laranja resultando em uma força de arrasto contrária à velocidade da laranja). Veja a Figura 3.

Estado Físico

Na descrição de problemas em Física, normalmente não lidamos com os sistemas físicos diretamente. Para compreender o mundo, e poder escrever leis gerais sobre ele, fazemos uso de modelos mentais. O estudante deve cedo se dar conta que esses modelos mentais são abstrações que fazemos e não são o mundo cognoscível. Quando falamos, por exemplo, em temperatura e pressão, ou quando desenhamos a estrutura cristalina de uma substância qualquer, trabalhamos com uma representação da realidade. Cada característica de um sistema físico será representada por uma variável, uma **grandeza física**. Assim, por exemplo, a agitação das moléculas do sistema terá como contrapartida no modelo que o representa a temperatura. Os choques das partículas que compõem o sistema contra as paredes do recipiente que o contém terá como contrapartida a pressão, a quantidade de espaço ocupado pelo sistema será representada pelo volume, e assim por diante.

A cada momento os sistemas físicos mudam. Conseqüentemente, os valores das variáveis que representam as suas propriedades devem mudar de acordo. Às variáveis que no modelo descrevem o sistema físico damos o nome de **variável de estado**. Chamamos de **estado físico** ao conjunto de valores das variáveis de estado em um dado instante de tempo.

Exemplo 2 – O Gás ideal

Como um exemplo de estado físico e de variáveis de estado, vamos considerar o caso de um gás ideal contido em um recipiente. Por **gás ideal** entendemos um gás no qual as partículas apenas interagem umas com as outras por meio de colisões. Esquematicamente, vamos considerar a situação de um gás que se encontra em um recipiente rígido, como mostrado na Figura 4.

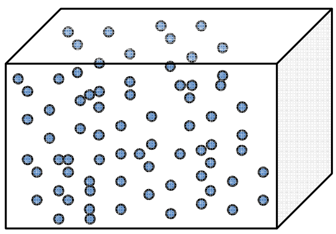


Figura 4 – Gás ideal contido em uma caixa

Nessa figura, mostramos um gás contido em uma caixa. Quando dentro da caixa, o gás ocupa certo volume que denotaremos por V. Como a caixa é rígida, o volume ocupado pelo gás em cada instante de tempo é constante. Logo $V(t) = V_0$. Vamos supor agora que as paredes sejam permeáveis, ou seja, o gás pode fluir através das paredes, Portanto, a quantidade de gás dentro da caixa pode variar com o tempo. Se chamarmos esta quantidade de gás por m, então a quantidade de gás dentro da caixa será uma função do tempo: $m = m(t)$. Estas duas variáveis são variáveis de estado e o estado do gás em qualquer momento poderá ser descrito pelo par $\{V, m\}$. Naturalmente, estas são apenas duas variáveis que podemos usar para descrever o gás dentro da caixa. Outra variável interessante é a Temperatura do gás (T). Se o gás estiver trocando calor com a vizinhança a sua temperatura também será função do tempo: $T = T(t)$. Nesse caso, o estado dinâmico do gás será descrito por um terno de números: $\{V, m, T\}$.

Composição dos sistemas físicos

Um sistema físico é composto por matéria e energia. Definir estas duas entidades é bastante difícil e depende do nível no qual analisamos o sistema em questão. Como uma primeira aproximação, utilizaremos o conceito de matéria oriundo do senso comum, no sentido de coisa palpável.

Por exemplo, o Aurélio[7] define matéria como:

> *1.Qualquer substância sólida, líquida ou gasosa que ocupa lugar no espaço;*
>
> *2.Substância capaz de receber certa forma, ou em que atua determinado agente.*

Energia é um conceito mais difícil de conceituar e definir. Diremos, por ora, que energia é uma propriedade dos sistemas físicos que permite a eles exercerem influência sobre outros sistemas físicos. Essa influência pode se manifestar de várias formas: um puxão, um empurrão, uma queda, um choque elétrico, aquecimento, etc.

Se definir precisamente matéria e energia é difícil, falar das propriedades de uma e de outra é mais simples.

[7] Dicionário Aurélio Século XXI, versão eletrônica.

Extensão

A extensão é o espaço ocupado pela matéria. Essa propriedade é medida pelo **volume**. Em determinadas situações os corpos podem ser considerados fisicamente como corpos extensos ou partículas, também chamadas de pontos materiais.

Considere o seguinte exemplo. O planeta Júpiter é o maior planeta do sistema solar. Composto, basicamente, por Hidrogênio e Hélio, se encontra a uma distância de, aproximadamente, 778 milhões de quilômetros do Sol. O diâmetro do planeta é de 140.000 km, aproximadamente. Vamos dividir o valor do raio de Júpiter pela sua distância ao Sol. Chamaremos esse número pela letra grega δ[8] e indicaremos que estamos falando da distância Júpiter – Sol usando o índice *J-S*.

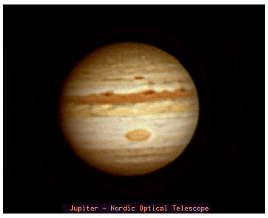


Figura 5 - O planeta Júpiter.

Assim:

$$\delta_{J-S} = \frac{70.000}{778.000.000} = 0,00009 = 9,0 \times 10^{-5}$$

Como vemos, esse valor é muito menor que 1. Isto significa que, se estivermos analisando a interação Sol – Júpiter, a distância entre um lado e outro do planeta terá uma influência insignificante. Nesta situação, portanto, podemos considerar o planeta Júpiter como uma simples partícula (veja a Figura 6).

Por outro lado, consideremos agora o mesmo planeta Júpiter em sua interação com um de seus satélites, Europa, por exemplo. Se repetirmos o cálculo feito mais acima tomando agora a distância entre Europa e Júpiter (em torno de 700.000 km do centro do planeta) e chamarmos esse número por δ_{E-J}:

$$\delta_{E-J} = \frac{70.000}{700.000} = 0,1 = 1,0 \times 10^{-1}$$

Ainda é um número pequeno, mas muito mais próximo de 1 e muito maior do que o obtido anteriormente para δ_{J-S} (aproximadamente 10.000 vezes maior). Nesse caso o planeta Júpiter não

[8] Lê-se *delta*.

pode mais ser considerado um simples ponto. A sua estrutura deve ser considerada para podermos prever o que vai acontecer com o satélite Europa pela ação de Júpiter (e vice-versa). Ou seja, Júpiter deve ser considerado, em princípio, um **corpo extenso**.

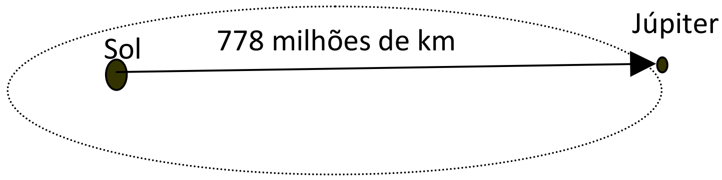


Figura 6 - O planeta Júpiter em sua órbita.

Podemos agora definir o que é um **ponto material**:

Ponto material é um objeto cujas dimensões são pequenas frente às dimensões típicas do problema. Se chamarmos l a dimensão típica do objeto e L a dimensão típica do problema sob análise.

Então:

$$\delta = \frac{l}{L} \ll 1 \qquad \text{eq. 1}$$

Se isto for satisfeito, então o objeto pode ser considerado um ponto material. Caso a condição expressa pela eq. 1 não seja satisfeita, o objeto deve ser considerado um corpo extenso.

As **partículas**, por sua vez, podem ser classificadas como macroscópicas ou microscópicas. Partículas microscópicas são aquelas que possuem dimensões na escala do micrômetro[9] ou menor, enquanto que as macroscópicas possuem dimensões típicas maiores que esta. Observe que uma partícula microscópica pode ser considerada um ponto material ou um corpo extenso, dependendo da situação. Por exemplo, ao analisarmos uma reação química que envolva átomos de Oxigênio a estrutura interna desses átomos (como os seus elétrons se distribuem nas várias camadas eletrônicas) é importante. Por outro lado, se quisermos estudar a evolução do volume desse gás quando aquecido

---

[9] Um micrômetro (1 μm) vale 0,000001 m.

a estrutura das camadas eletrônicas não é fundamental e podemos pensar apenas no átomo Oxigênio como se este fosse uma unidade.

No **Sistema Internacional de Unidades (SI)** usado neste livro a unidade de medida de comprimento é o metro (símbolo m). Para a medida de superfícies e de volumes são usados, respectivamente, o metro quadrado (símbolo: m^2) e o metro cúbico (símbolo: m^3).

Exemplo 3

A distância média da Terra ao Sol é D_{TS} = 1,5 x 10^8 km. Escreva esta distância na unidade ano-luz, considerando a velocidade da luz no vácuo c = 3 x10^5 km/s.

Solução

1 ano-luz é a distância que a luz percorre no vácuo durante um ano. Portanto:

$$1 \text{ ano-luz} = c \times 1 \text{ ano} = 3 \times 10^5 \text{ km/s} \times 365 \text{ dias} \times 86400 \text{ s/dia} = 9{,}5 \times 10^{12} \text{ km.}$$

Assim:

$$D_{TS} = 1{,}5 \times 10^8 \text{ km} / \left(9{,}5 \times 10^{12} \text{ km/ano-luz}\right)$$
$$D_{TS} = 1{,}6 \times 10^{-5} \text{ ano-luz}$$

Inércia

As partículas e corpos extensos se movimentam. Por exemplo, a bola chutada pelo atacante em direção ao gol. Qualquer goleiro sabe que, quanto mais rápida vier a bola, mais difícil é desviá-la. Do mesmo modo, no Vôlei, quanto mais rápida a bola mais difícil é para a defesa desviá-la da sua trajetória. Também, da nossa experiência do dia a dia, sabemos que desviar uma bola de boliche é mais difícil que desviar uma bola de futebol, ambas se movendo com a mesma rapidez. A propriedade da matéria que faz com que esta imponha resistência a mudanças na sua trajetória e rapidez é a **inércia**[10]. Uma medida da inércia é a massa: quanto mais inércia mais massa.

A inércia é uma propriedade extensiva: se adicionarmos duas porções de matéria cujas inércias são indicadas pelas suas respectivas massas (m_1 e m_2) a inércia do corpo formado pelas duas porções de matéria (que indicaremos por M) será a soma das inércias de cada uma das duas massas m_1 e m_2:

[10] A inércia também é uma propriedade da Energia.

$$M = m_1 + m_2$$

No Sistema Internacional de Unidades a massa é medida em quilogramas (símbolo: *kg*).

Exemplo 4

A grandeza física que mede a quantidade de matéria (ou quantidade de substância) é o mol, isto é, em um mol de matéria temos a quantidade de 6,02 $\times 10^{23}$ unidades de matéria, este número é chamado de **número de Avogadro**, N_{AV}.

Um mol de moléculas de hidrogênio, H_2, possui massa aproximadamente igual a 2g e nas *condições normais de temperatura e pressão* (CNTP)[11] ocupa um volume de 0,0224 m^3. Considere a molécula de hidrogênio como uma pequena esfera, cujo raio vale, aproximadamente, duas vezes o raio de Bohr (R_{Bohr} = 5,29 x 10^{-11} m). Determine a razão *R* entre o volume preenchido apenas pelas moléculas, e o volume total ocupado pelo gás H_2 nas CNTP.

Solução

O volume preenchido pelas moléculas será dado pelo volume de cada molécula vezes o número das moléculas presentes[12]:

$$V_p = N_{av}\left[\frac{4}{3}\pi R_{\text{átomo}}{}^{3}\right]$$

$$V_p = N_{av}\left[\frac{4}{3}\pi\left(2R_{Bohr}\right)^3\right] = 6{,}02\times10^{23}\times\frac{4}{3}\pi\times\left(2\times5{,}29\times10^{-11}\right)^3$$

$$V_p = 2{,}98\times10^{-6}\ \text{m}^3$$

A razão será o volume ocupado pelo gás sobre o volume ocupado pelas moléculas:

$$R = \frac{V_p}{V_g} = \frac{2{,}98\times10^{-6}\ \text{m}^3}{2{,}24\times10^{-2}\ \text{m}^3} = 1{,}3\times10^{-4} = 0{,}00013$$

Portanto, apenas 0,013% do volume ocupado pelo gás são ocupados pela matéria, o restante é espaço vazio.

---

[11] CNTP= condições normais de temperatura e pressão: temperatura igual a 25 ^{o}C e pressão igual a 1 atmosfera.

[12] O número π vale 3,14159... .Esse é um número irracional e representa a razão entre o comprimento e o diâmetro de qualquer circunferência.

Exemplo 5

Chamaremos de l o valor típico de uma das dimensões de um objeto, por exemplo, o diâmetro médio; e L o valor de uma dimensão típica do problema, por exemplo, o comprimento de uma trajetória descrita pelo objeto. Se a razão $l/L<\delta$, com o valor de δ definido a priori, consideraremos o objeto como uma partícula, caso contrário deve-se levar em consideração sua extensão.

Considere que o tamanho do Sistema Solar será limitado pelo diâmetro da órbita do planeta anão mais distante do Sol, isto é Plutão[13] cuja distância ao Sol é de, aproximadamente, D_{SP}= 6 x10^9 km. Verifique se o Sol pode ser considerado como partícula com relação ao tamanho do sistema Solar para $\delta = 1 \times 10^{-3}$.

Solução

Determinaremos $\delta = l/L$ (l é diâmetro da órbita do planeta anão Plutão, D_{SP}, e L = 1,4x10^6 km é o diâmetro do Sol, D_S).

Assim:

$$\delta = \frac{1{,}4 \times 10^5 \text{ km}}{6 \times 10^9 \text{ km}} \approx 2{,}3 \times 10^{-4}$$

Portanto, o Sol pode ser considerado como uma partícula com relação à Plutão e em relação ao sistema solar, quando este for considerado em sua totalidade.

Exemplo 6

Sempre que um sistema físico for pequeno quando comparado com sua trajetória, podemos considerá-lo como ponto material para análises de qualquer grandeza física que caracteriza seu estado de movimento?

Solução

Não. Por exemplo: consideremos o caso de uma bolinha de tênis que desce rolando, sem deslizar, a rampa do Palácio do Planalto. Podemos considerá-la como ponto material, pois o tamanho da bolinha é desprezível quando comparado com o comprimento da rampa. Por outro lado, se estivermos

---

[13] Segundo a União Astronômica Internacional, Plutão não é um planeta, mas sim um planeta anão ou um plutóide.

analisando a transformação da energia potencial gravitacional (energia de configuração entre a bolinha e a Terra) em energia de movimento (energia cinética), devemos considerar o tamanho da bolinha (raio), pois a energia de rotação depende de como as partículas que constituem a bolinha estão distribuídas no volume que a compõe.

Assim, para esse exemplo, a bolinha não pode ser considerada como um ponto material, mesmo sendo pequena quando comparada com sua trajetória.

Exemplo 7

Um corpo de geometria irregular está amarrado na extremidade de um fio preso no teto. O comprimento do fio possui a mesma ordem de grandeza das dimensões do corpo. Esse sistema é chamado de pêndulo físico.

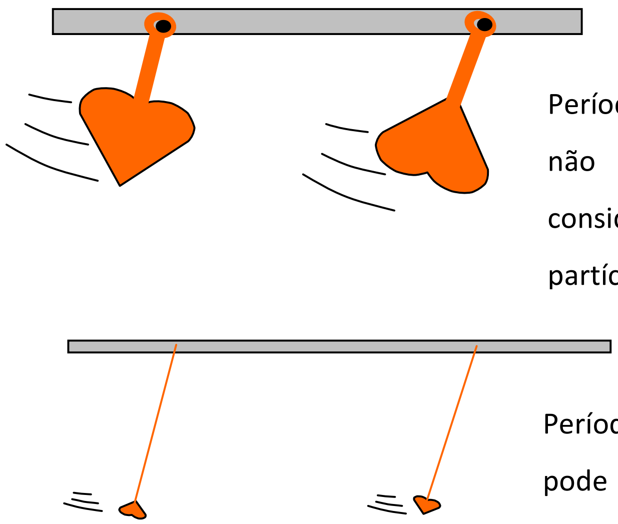


Figura 7 – Exemplo 7 (pêndulos físicos).

Quando o corpo é deslocado de sua posição de equilíbrio e solto, o intervalo de tempo que leva para completar uma oscilação completa chama-se período e depende da região em que o fio está preso no corpo. Assim, para analisarmos a dependência do período com o comprimento do fio, o corpo não pode ser considerado como partícula. Contudo, quando o comprimento do fio for muito maior que o tamanho do corpo, a variação do período não é significativa com a região de fixação do fio no corpo e assim, podemos considerar o corpo como partícula. Veja a Figura 7.

Organização

Dependendo de como as diferentes partes da matéria se ligam podemos ter estruturas mais ou menos organizadas. Na extremidade menos organizada temos os fluidos (líquidos, gases e plasmas) e na extremidade das estruturas mais organizadas, os sólidos.

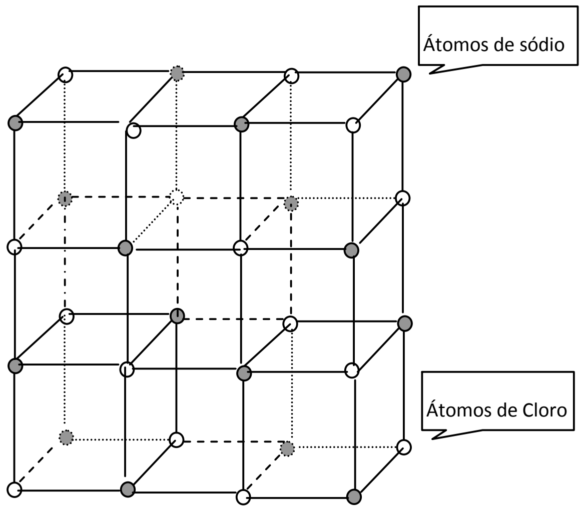


Figura 8 - Estrutura cristalina do cloreto de sódio.

Enquanto no grupo dos fluidos as ligações entre os constituintes da matéria são fracas, não sendo suficientes para manter uma estrutura rígida, no caso dos sólidos o tipo de ligação entre os vários constituintes é de tal natureza que a matéria consegue manter uma estrutura rígida, o que se traduz em uma forma que se mantém no tempo.

Mesmo para materiais sólidos o nível de organização é variável. Contudo, podemos dividir esses materiais em dois grandes grupos: os **cristalinos** e os **amorfos**. O que define cada um deles é a ordem microscópica. Os materiais cristalinos (ou simplesmente cristais) possuem uma **ordem de longo alcance** enquanto os materiais amorfos possuem apenas **ordem de curto alcance**.

Por ordem de longo alcance entendemos a existência de estruturas que se repetem no espaço periodicamente. Observe a Figura 8 que mostra a estrutura do sal de cozinha (cloreto de sódio[14]).

[14] N_aCl: um átomo de sódio (símbolo N_a) e outro de Cloro (símbolo Cl).

Nessa figura os átomos de sódio são representados por pequenas esferas claras e os átomos de cloro são representados por esferas escuras. Observando melhor você verá que esta figura é composta pela repetição na estrutura mostrada na Figura 9.

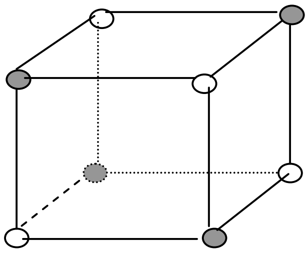


Figura 9 - Célula unitária do Cloreto de Sódio (NaCl).

Essa estrutura recebe o nome de **célula unitária**, pois a grande estrutura é obtida pela superposição de várias dessas unidades básicas, colocadas lado a lado.

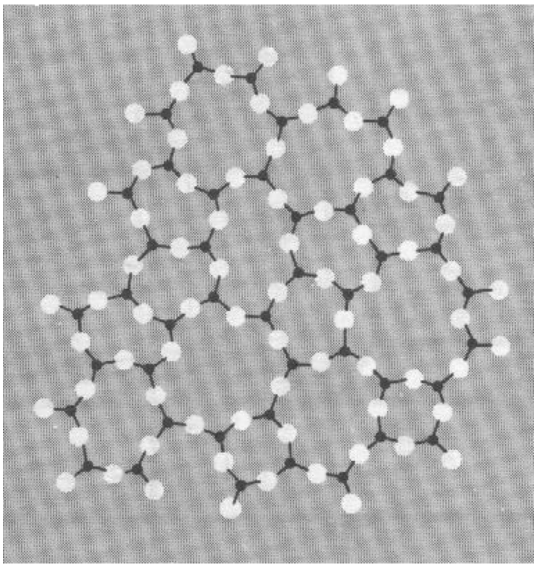


Figura 10 - Exemplo de uma estrutura amorfa.

Por outro lado, o termo ordem de curto alcance significa que podemos até identificar estruturas locais, mas estas não se repetem. Veja, por exemplo, a Figura 10 que mostra, esquematicamente, a estrutura de um material amorfo como um vidro.

Exemplo 8

As características de um sistema físico são representadas por grandezas físicas denominadas **variáveis de estado**. Por exemplo, um gás contido em uma lâmpada pode ser considerado como um sistema físico e podemos caracterizá-lo por variáveis de estado tais como: o volume ocupado, a temperatura, a pressão, etc.

Como poderíamos caracterizar um sistema físico composto por uma massa oscilando pendurada em uma mola vertical e de massa desprezível?

Solução

Este sistema pode ser caracterizado pelas seguintes variáveis de estado: deformação da mola, velocidade da massa, altura da massa. Podemos definir outras quantidades associadas a essas: energia de configuração da mola, energia de configuração entre a Terra e a massa, energia de movimento da massa, etc.

Carga elétrica

Desde os antigos gregos já havia sido observado que materiais atritados poderiam atrair ou repelir outros materiais. Em particular, o âmbar apresentava essa característica. Do nome grego para o âmbar amarelo, *élektron*, este fenômeno ficou conhecido como eletricidade. Observou-se desde muito cedo que os objetos poderiam ser divididos em dois grupos a partir de suas propriedades de atração ou de repulsão. Os elementos de um grupo quando atritados com os elementos do outro grupo repeliam todos os elementos do seu próprio grupo e atraiam todos os elementos do outro grupo. Isto indicava que existiam dois e somente dois tipos de eletricidade. Muito tempo depois, Benjamin Franklin[15] denominou-os tipos **positivo** e **negativo**, denominação que persiste até hoje.

Cabe aqui um comentário. A Física ainda não encontrou uma razão pela qual existem somente dois tipos de carga elétrica e não três, quatro ou mais. O fato é que em todos os níveis em que estudamos a matéria, encontramos sempre os mesmos dois tipos com as mesmas propriedades. No século XX se descobriu que a quantidade de eletricidade (chamada de **quantidade de carga elétrica**) é sempre um múltiplo de um valor fundamental, a carga de um elétron.

No Sistema Internacional de Unidades a quantidade de carga elétrica é medida em Coulomb[16] (símbolo: C) e a carga elementar (símbolo: *e*) vale $1{,}6 \times 10^{-19}$ C.

---

[15] Benjamin Franklin: físico e político americano (1706 – 1790).

16 Charles Augustin Coulomb, físico e matemático francês (1736-1806).

Simetrias

O conceito de simetria é um daqueles conceitos capazes de unificar vários ramos do pensamento humano: a Física e a Escultura, a Matemática e a Poesia, etc. A arte em geral sempre foi guiada por parâmetros de simetria para definir o Belo.

Mas o que é uma simetria? Para nossos propósitos vamos definir uma simetria como uma propriedade que se mantém inalterada quando executamos alguma operação sobre o objeto analisado.

Vamos estudar mais adiante este conceito de uma forma mais aprofundada, mas adiantaremos aqui um teorema muito importante para a Física (o Teorema de Noether[17]). Esse teorema associa a cada simetria observada no Universo uma grandeza física conservada. A importância desse teorema vem do fato de que grandezas físicas que se conservam, ou seja, não mudam de valor com o tempo, nos ajudam a prever o valor de outras grandezas que variam no tempo. Em tese, se soubéssemos todas as simetrias do Universo conheceríamos todas as grandezas que se conservam e poderíamos predizer com exatidão a sua evolução.

Exemplo 9

Segundo o teorema de Noether a cada simetria observada no Universo associa-se uma grandeza física que se conserva.

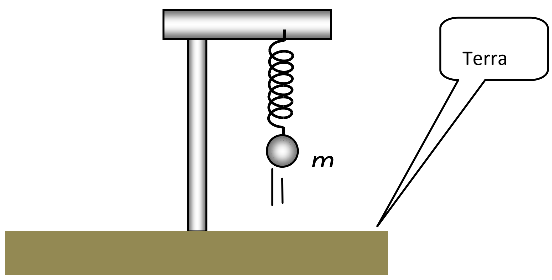


Figura 11 -Exemplo 9.

Estas últimas são úteis para prever outras grandezas que variam com o tempo. Assim, por exemplo, em um corpo de massa m preso na extremidade de uma mola, que oscila verticalmente próximo da superfície terrestre, as energias de configuração da mola, somada com a de configuração do sistema

17 Emmy Amalie Noether, 1882 – 1935.

corpo - Terra e mais a de movimento permanece constante no tempo. Quais grandezas físicas poderíamos determinar utilizando a conservação da energia?

Solução

Poderíamos utilizar esta simetria para determinarmos como a velocidade da massa varia com o tempo, ou como sua posição varia no tempo.

Propriedades da energia

Diferentemente da matéria, a energia é uma entidade que é mais bem definida por suas instâncias particulares. Contudo, certas propriedades da energia têm caráter geral.

Extensão

Ao contrário da matéria, a qual ocupa certo espaço, a energia é no espaço, mas não o ocupa no sentido de *expulsar* desse espaço outras formas de energia ou mesmo a matéria. Pela expressão *ser no espaço*, entendemos que podemos associar a cada ponto do espaço certa quantidade de energia, a qual chamamos de **densidade de energia**.

Tipos de energia

Ao contrário da matéria, para a qual existe apenas um tipo[18], a energia pode se apresentar em diferentes formas: de movimento, de configuração e formas de transferência.

As formas de energia associadas ao movimento são chamadas de **cinéticas**[19] enquanto aquelas que dependem da posição relativa das partículas que compõem o sistema são ditas energias de **configuração** ou **potencial**. As formas de transferência são aquelas pelas quais a energia flui de um sistema físico para outro. Todas serão objeto de estudo mais detalhado nos próximos capítulos.

---

[18] A bem da verdade, são dois: matéria e antimatéria. No entanto, o segundo aparece somente em condições bastante especiais. Recentemente um novo tipo de matéria foi descoberto, a **matéria escura**. As propriedades desse novo tipo de matéria não são ainda bem conhecidas.

[19] Do grego *kinesis* (movimento).

Exemplo 10

A energia pode se apresentar em diferentes formas: de movimento, de configuração e formas de transferência. Considere os sistemas físicos abaixo e identifique os tipos de transformação de energia que estão ocorrendo durante a evolução do sistema físico.

Sistema físico	**Evolução do sistema físico**
a) Foguete + Terra	Foguete subindo acelerado
b) Gás em um recipiente de volume constante	Expansão livre
c) Barra de chumbo	Fusão da barra

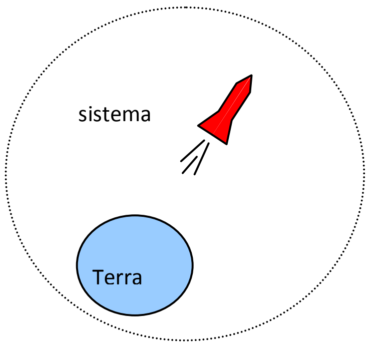


Figura 12 - Exemplo 10.a

Solução

a) O sistema é constituído pelos elementos foguete e Terra (Figura 12) e, à medida que o foguete vai subindo, a distância relativa entre os elementos que compõem o sistema vai aumentando. Desse modo aumenta também a energia de configuração do sistema. Por outro lado, o foguete vai ganhando energia de movimento. O acréscimo dessas energias é cedido durante a subida do foguete pela combustão dos combustíveis, os quais durante a queima liberam a energia que estava armazenada na forma de **energia potencial química**.

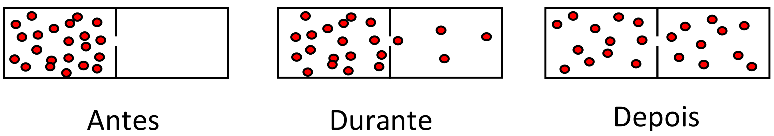


Figura 13 - Exemplo 10.b

b) A expansão livre é um fenômeno termodinâmico no qual o gás (sistema) expande-se livremente de um recipiente para outro no qual não existia gás (vácuo). Veja a Figura 13. Portanto, durante a expansão não varia a rapidez das moléculas, conservando assim a energia de movimento. Por outro lado, a distância relativa entre as moléculas aumenta variando a energia de configuração do sistema.

c) Para uma barra de chumbo fundir, o sistema deve receber energia da vizinhança. Durante a fusão, a energia absorvida muda apenas o arranjo organizacional dos átomos que compõe a barra, isto é, seu arranjo estrutural é modificado, transformando o sistema do estado sólido para o estado líquido. No estado líquido a distância relativa entre os átomos é maior, e o sistema passa a ocupar um maior volume (veja a Figura 14)[20].

Inércia

Embora menos perceptível, a energia também possui inércia. Se tentarmos desviar certo fluxo de energia de sua direção esse oferecerá certa *resistência*.

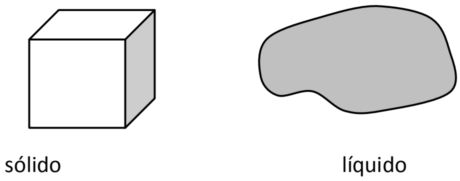


Figura 14 - Mudança de estado (Exemplo 10.c).

O fato de a energia possuir inércia e, portanto, massa, somente aparece na Relatividade Restrita e é expressa pela famosa equação de Einstein:

$$m = \frac{E}{c^2} \quad \text{eq. 2}$$

Essa equação deve ser lida como: a quantidade de inércia (medida pela massa m) de certa quantidade de energia (E) é dada pela razão da quantidade de energia pelo quadrado da velocidade da luz (c).

O estudante deve observar que escrevemos a eq. 2 de forma ligeiramente diferente da usualmente encontrada em livros de divulgação de Física[21]. O fizemos para que fique clara a interpretação correta dessa equação.

---

[20] Uma exceção notável a essa regra é a água que aumenta de volume entre 0 e 4 °C.

[21] Nos textos usuais essa equação é escrita como: $E = mc^2$.

Interação matéria – energia

A diferenciação entre matéria e energia faz sentido no mundo macroscópico em que vivemos e percebemos. No entanto, quando avaliamos a Natureza na sua mais profunda intimidade esses conceitos perdem o sentido.

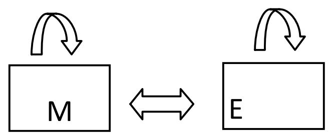


Figura 15 - Interação matéria - energia.

Macroscopicamente, matéria e energia são entidades diferentes, mas podem interagir entre si. Representaremos esse processo na Figura 15, na qual mostramos as interações possíveis: matéria $\leftrightarrow$ matéria, energia $\leftrightarrow$ energia e energia – matéria.

Essas interações, basicamente, podem ser descritas através de dois mecanismos: **força** e **campo**. Esses dois conceitos serão analisados em detalhe mais adiante, mas a característica básica que os difere pode ser mencionada aqui: força supõe uma ação direta entre os sistemas físicos enquanto o campo é uma interação mediada.

Algo (uma partícula, por exemplo) cria o campo e outra coisa interage com o campo criado. A Figura 16 mostra esquematicamente essas relações.

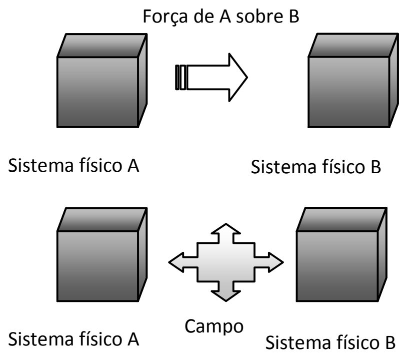


Figura 16 - Interação entre sistemas físicos.

Nessa figura procuramos ilustrar que, no caso de um campo, a interação entre os sistemas *A* e *B* é medida pelo campo: o sistema *A* interage com o campo criado pelo sistema *B* enquanto o sistema *B* interage com o campo criado pelo sistema *A.*

No nosso dia a dia essa diferenciação pode parecer um preciosismo, mas quando analisarmos situações mais complexas essa diferença será fundamental para compreendermos a realidade que nos cerca.

Considere o exemplo simples mostrado na Figura 17, a qual mostra a Lua em dois momentos diferentes em seu movimento orbital em torno da Terra (indicados pelos vetores $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$). Sabemos que a Lua se mantém em órbita a uma distância média de 380.000 km da Terra devido à atração gravitacional que a Terra exerce sobre ela. Mas como essa atração é exercida? Não há um "cabo" ligando a Lua à Terra de modo a exercer essa força. A esse tipo de ação, que se exerce sem que os corpos tenham contato físico, Newton[22] chamou de **ação à distância**. Do ponto de vista filosófico isso coloca certos problemas. Um deles é o seguinte: quando a Lua se movimenta (indo da posição indicada pelo vetor $\mathbf{r}_1$ para a posição indicada pelo vetor $\mathbf{r}_2$) como a Terra "sabe" qual força exercer em cada instante?

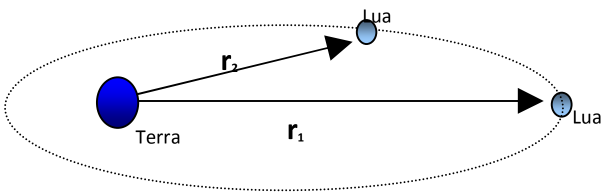


Figura 17 - Lua na sua órbita em torno da Terra.

Para solucionar esse problema foi concebido o conceito de campo. Imagine que a Terra coloque um "rótulo" em cada ponto do espaço com o valor da força que uma partícula de massa unitária (uma unidade de massa) experimentaria se estivesse naquela posição. Quando um objeto real ocupa essa posição basta então multiplicar a sua massa pelo valor estampado no "rótulo" para saber exatamente o valor da força a ser experimentada. Esses "rótulos" são o que chamamos de campo gravitacional da Terra. A vantagem dessa abordagem é que a interação se dá não com algo distante, por um mecanismo não conhecido, mas sim com algo que está na posição do objeto (a Lua no caso), ou seja, é uma **interação local**.

[22] Sir Isaac Newton, 1643 – 1727. Newton é o criador da Mecânica.

Pode parecer complicado no início, mas esta forma de descrever as interações da matéria com a energia, da matéria com a matéria e da energia com a energia é extremamente útil e poderosa, como veremos em capítulos subsequentes.

Problemas

1. Faça uma associação entre as possíveis vizinhanças da coluna da direita, que possam interagir de forma significativa com o sistema físico relatado na coluna da esquerda da Tabela 1; os fenômenos físicos acontecem próximos à superfície terrestre.

Tabela 1

Sistema físico	**Vizinhança que interage**
Pássaro voando	(a) Terra (campo gravitacional)
Peixe nadando	(b) Terra (campo magnético)
Carro derrapando na chuva	(c) Nuvem carregada de cargas elétricas
Ponteiro de uma bússola	(d) ar
Carga elétrica em repouso	(e) velocidade do vento
Carga elétrica em movimento	(f) força elétrica
Fóton ionizando a molécula d'água	(g) água
Elétron ionizando a molécula d'água	(h) outros campos elétricos
Satélite em órbita na Terra	(i) peso
	(j) velocidade
	(h) outros campos magnéticos
	(i) outros campos gravitacionais

2. O piloto de uma moto atravessa descuidadamente o sinal vermelho de uma avenida de tráfego intenso. Para evitar a colisão com a moto, o motorista do carro (1) freia bruscamente, resultando um engavetamento entre 4 carros (veja a Figura 18).

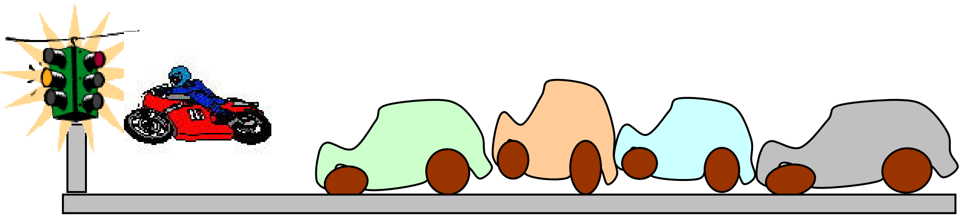


Figura 18 - Figura do problema I.2.

Assinale a(s) alternativa(s) que identifica(m) o causador dos danos físicos no veículo 3:

a) A moto; b) A moto e o carro (2); c) O carro (2);

d) O carro (2) e o carro (4); e) O carro (1) e o carro (4); f) O piloto;

g) O motorista do carro (3).

3. Uma das teorias sobre a origem do Universo é a teoria do Big-Bang. Essa teoria afirma que o universo iniciou a partir de uma grande explosão há, aproximadamente, 14 bilhões de anos, daí o nome Big-Bang. Supondo que nesse momento foram emitidas ondas eletromagnéticas viajando com a velocidade $c = 3 \times 10^5$ km/s em todas as direções, determine:

a) A distância em km mais longínqua do Big-Bang que a luz percorreu até os dias de hoje.

b) Supondo que a luz se propaga em todas as direções com a mesma velocidade, determine o volume da esfera equivalente, também chamado espaço de Hubble[23], que define nosso Universo observável.

4. Determine a razão entre o volume ocupado pelo espaço vazio existente no interior de uma amostra sólida de alumínio de volume igual a $1 cm^3$ e o volume total da amostra. Dados: 1 mol de átomos de alumínio possui 13 g. Considere a densidade do alumínio $\rho = 2,3$ g/cm^3 e o raio do átomo igual ao raio de Bohr.(veja o Exemplo 4).

[23] Edwin Hubble (1889-1953), astrônomo que descobriu o processo de expansão do universo.

5. Considere que a extensão do sistema solar seja equivalente a uma esfera de raio igual ao raio da órbita do planeta anão mais distante (Plutão), isto é, igual a $R_P = 5{,}9 \times 10^9$ km, e que esta esfera fosse equivalente ao tamanho de um grão de areia de forma esférica de raio igual a 0,1mm. Avalie de quanto deverá ser o raio da esfera de Hubble, comparado ao grão de areia. (Veja a definição da esfera de Hubble no problema 3). Com essas considerações o sistema solar poderia ser considerado uma partícula?

6. Considere o comprimento de um carro de Fórmula-I igual a 3 m e o comprimento da trajetória de um circuito fechado de uma pista de corrida igual a 1500 m. Determine o número mínimo de voltas necessário em uma competição para que um carro de corrida possa ser considerado como partícula ($\delta = 0{,}001$).

7. Verifique se os objetos de interesse podem ser considerados como partícula nos experimentos seguintes (leia o texto do Exemplo 5, e considere $\delta = 0{,}01$):

- Ao determinar a posição de um avião de 15 m de comprimento, quando se movimenta em uma pista de 1 km de comprimento;
- Ao determinar o tempo que a Lua fica totalmente oculta durante um eclipse;
- Ao determinar a velocidade média de uma bola de futebol de diâmetro igual a 30 cm, ao descer rolando uma rampa inclinada de 200 m de comprimento;
- Ao analisar o período de oscilação dos braços de pessoas andando.

8. Uma criança, quando enche com a boca uma bexiga, está acrescentando matéria em seu interior que são as moléculas de ar. Defina o ar no interior da bexiga como um sistema físico e identifique na coluna da direita da Tabela 2 a variável de estado que caracteriza a propriedade física correspondente do sistema.

Identifique qual das propriedades físicas listadas na coluna da esquerda da Tabela 2 que não são modificadas quando:

a) A criança pressiona com os pés a bexiga apoiada no chão;

b) A bexiga é introduzida no interior de uma geladeira;

c) A bexiga é mantida próxima a uma lareira acesa;

d) A bexiga é colocada no interior de um elevador em queda livre;

e) A bexiga é levada do alto de um morro até o nível do mar;

f) Um pequeno orifício é feito na bexiga permitindo o vazamento do ar lentamente.

Tabela 2

Propriedade Física do Sistema	**Variável de estado**
extensão (tamanho)	Temperatura
agitação das moléculas	pressão
colisão das moléculas	mol
quantidade de matéria	volume interno da bexiga

9. Os sistemas físicos são constituídos de matéria e energia. A energia se apresenta nas formas de configuração, as quais dependem da posição relativa entre os elementos que compõem o sistema e do tipo de interação entre eles, e em energia de movimento, que aparece nos elementos que apresentam movimento de translação e/ou rotação. Identifique nos sistemas físicos abaixo quais tipos de energia de configuração e/ou de movimento estão sendo modificados:

a) Uma mola sendo deformada;

b) Uma nave pousando na Terra;

c) Um capacitor sendo carregado por cargas elétricas;

d) Uma porção de água sendo aquecida;

e) Uma porção de gelo fundindo.

10. Um homem come uma barra de chocolate (que contém energia armazenada) e sobe uma escada distanciando-se do centro da Terra. Em seguida permanece no alto da escada por muito tempo ficando com fome e fraco, e cai da escada até o chão. Explique, para cada etapa dos eventos, as transformações entre os diferentes tipos de energia.

11. Uma das propriedades da matéria é a sua resistência às mudanças do estado de seu movimento (inércia). Para que o estado de movimento de um objeto se modifique é necessário que haja alguma interação com a vizinhança. Essa interação pode ser de natureza gravitacional, elétrica, magnética ou nuclear.

Suponha que um astronauta esteja flutuando e em repouso com relação ao interior de uma nave espacial, que está em órbita estável em torno de um planeta, podemos afirmar que:

a) Apenas a nave está submetida à interação de natureza gravitacional;

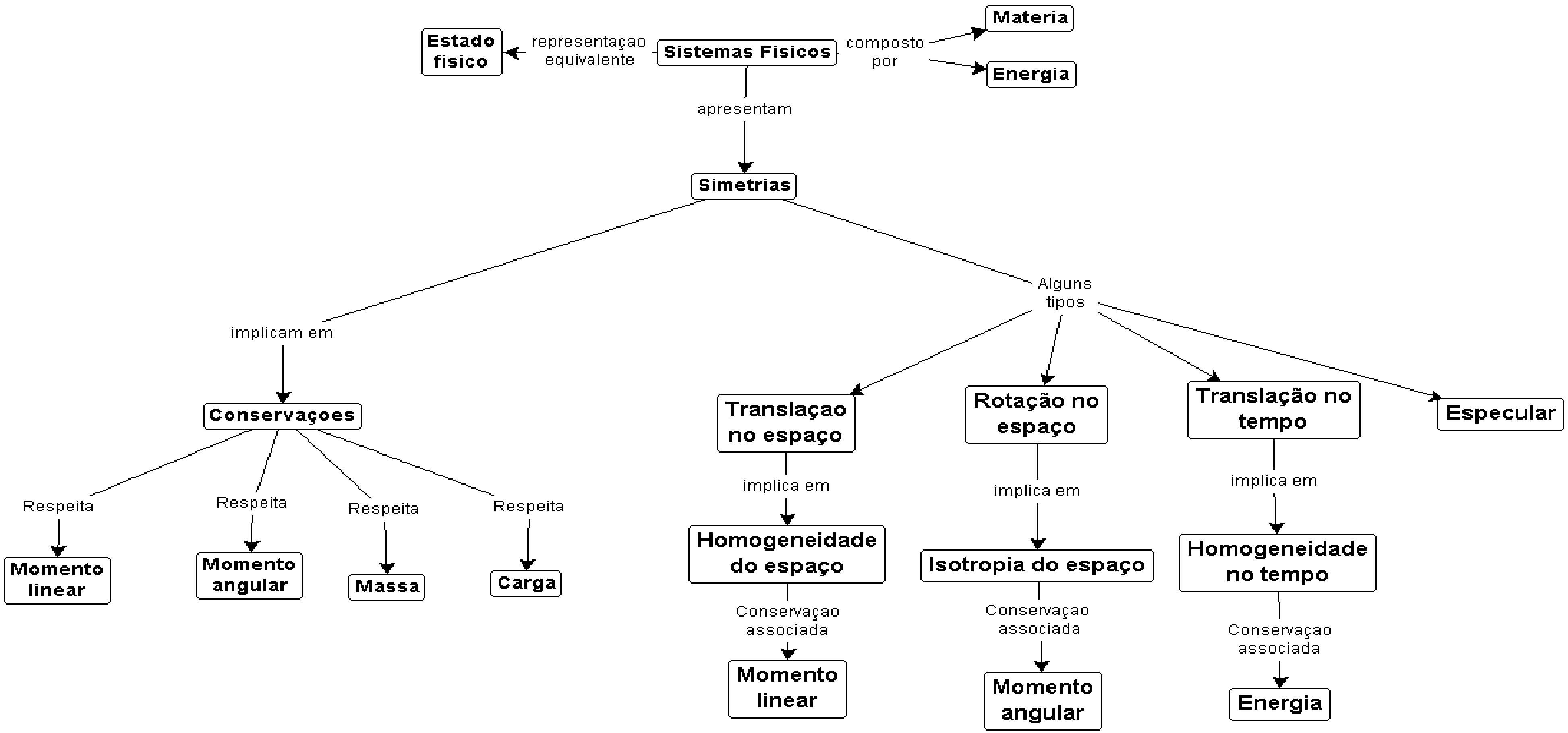
b) Nenhuma interação está ocorrendo entre o astronauta e a nave;

c) A nave e o astronauta estão submetidos à interação gravitacional.

d) Se os foguetes da nave forem acionados, acelerando-a, o astronauta ficará submetido a interações de natureza gravitacional e eletromagnética.

e) A interação sobre o astronauta flutuando é, predominantemente, de natureza gravitacional.

Capítulo II - Simetrias e Conservações



Mapa 4 - Submapa para o conceito de Simetria

É interessante observar nos jornais diários a necessidade que as pessoas têm de saber o futuro. Normalmente, a primeira seção lida é a do horóscopo. Mesmo grandes corporações recorrem hoje em dia a estes falsos videntes do futuro para definir estratégias de longo prazo e, por mais que pareça absurdo, mesmo para a contratação de pessoal.

No entanto, um conceito extremamente simples nos fornece, ao menos em princípio, os meios de prever o futuro: o conceito de **Simetria**.

Em Física, dizemos que temos uma simetria quando uma dada propriedade de um objeto é conservada ao realizarmos alguma operação sobre este objeto. Por exemplo, considere as esferas mostradas na Figura 19.

Suponhamos que a esfera da direita seja a obtida a partir da esfera da esquerda, fazendo-a girar de certo ângulo. Você saberia dizer qual o valor do ângulo que a esfera da esquerda foi girada para que obtivéssemos a esfera da direita?

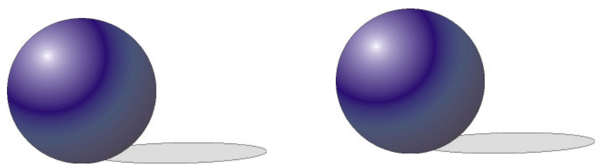


Figura 19 - Duas esferas

Uma simetria é justamente isto: uma *propriedade* de um objeto que não muda se realizarmos alguma *operação* sobre o objeto. No nosso exemplo, a propriedade é a aparência da esfera, o modo como a percebemos, e a operação é uma rotação sobre qualquer eixo que passe pelo centro da esfera.

Por que as simetrias são importantes? Porque a cada simetria que descobrimos no Universo podemos associar uma quantidade que se conserva, ou seja, uma quantidade que permanece constante, com o mesmo valor, à medida que a operação frente a qual o objeto possui a simetria é executada. Somente pela existência destas propriedades conservadas é que podemos fazer predições sobre o Universo.

Como definimos anteriormente, uma simetria é uma propriedade de um sistema físico que permanece inalterada ao realizarmos alguma operação específica sobre este sistema. Para exemplificar, imagine uma bola, perfeitamente esférica, sem marca alguma sobre a sua superfície. Agora, imagine que você fechou os olhos por um segundo. Durante este tempo, a bola pode ter sido submetida a um giro (rotação) ou não. Quando abrir os olhos, você não será capaz de dizer se a bola foi girada ou não. Neste caso dizemos que a esfera possui simetria frente à operação de rotação (giro), pois a sua aparência (a propriedade que estamos analisando) não muda ao executarmos uma rotação. Outro exemplo seria o de um cubo, sem nenhuma marca em seus lados. Se você fechar os olhos e alguém girar este cubo de 90° você não saberá dizer se isto aconteceu ou não. Neste segundo caso, dizemos que o cubo possui simetria frente a rotações de 90°.

Os sistemas físicos apresentam simetrias as mais diversas. Por exemplo, sob as mesmas condições um experimento deve produzir o mesmo resultado ontem, hoje ou amanhã. Dizemos então que temos simetria temporal: ao deslocarmos um sistema no tempo as propriedades do sistema ficam inalteradas. Dizemos então que temos uma simetria frente a uma translação (deslocamento) no tempo. Da mesma forma, se deslocarmos nosso equipamento para outra posição, com as mesmas características da posição inicial, o resultado de um experimento não deve mudar. Aqui falamos de simetria frente a uma translação (deslocamento) no espaço. A importância prática das simetrias vem do fato de que para cada simetria que encontramos em um sistema físico temos associada uma **lei de conservação**. Isto quer dizer o seguinte: uma dada grandeza do sistema (sua energia, por exemplo, no caso de simetria frente a uma translação no tempo) mantém seu valor quando realizamos a operação associada à simetria. Ou seja, o que era antes de operarmos (agirmos) sobre o sistema continua depois de realizarmos a operação. Assim, se hoje precisamos levar 1 litro de água ao fogo durante 10 minutos para que ela ferva, amanhã, mantidas as **mesmas** condições ambientes, precisaremos dos mesmos 10 minutos de fogo para obter o mesmo resultado.

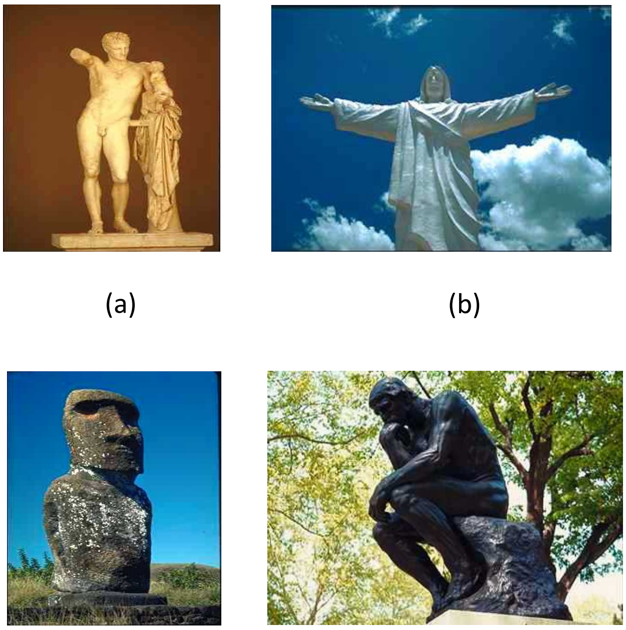
São as grandezas conservadas que nos permitem fazer previsões sobre o futuro. Isto somente é possível porque estas grandezas se relacionam a outras através das leis da Natureza. Se soubermos que uma grandeza se mantém (é conservada) e que esta grandeza se relaciona a outra, os valores da segunda grandeza não podem mais assumir um valor qualquer, mas somente podem assumir certos valores, e estes valores podem ser previstos, daí o nosso poder de previsão.

Imagine o seguinte exemplo: você recebe um salário de R$ 2.000,00 fixos. Este mês você vai a uma loja, compra um objeto e se compromete a pagar R$ 1.000,00 por mês. Como o seu salário é fixo, ou seja, conservado, você pode com antecedência prever que no final do mês que vem sobrarão R$ 1.000,00 do seu salário. O que nos permite prever isto é o fato de que o seu rendimento se conserva. Essa previsão não poderia ser feita se o seu salário fosse variável.

A Física pode prever, por exemplo, que daqui a 5 bilhões de anos o Sol vai explodir, engolindo todos os planetas interiores até a órbita de Marte, incluindo a Terra. Esta previsão é feita a partir da aplicação de princípios de conservação (energia e momento linear, basicamente) à análise do comportamento das estrelas. Do mesmo modo, são as quantidades conservadas na natureza que nos permitem fazer previsões sobre quando um dado cometa passará de novo perto da Terra e a que distância, quando ocorrerá o próximo eclipse total do Sol sobre o Brasil, como o processador de um computador se comportará, etc.

Se conhecêssemos todas as simetrias do Universo, conheceríamos todas as grandezas conservadas e, portanto, o sonho dos astrólogos (e de todos os seres humanos) de prever o futuro talvez se transformasse em realidade. Portanto, fica a sugestão àqueles que quiserem saber o futuro: estudem Física, tentem descobrir as simetrias ainda escondidas na natureza, e deixem a Astrologia para lá.

Os vários tipos de simetrias



(a) (b) (c) (d)

Figura 20 - (a) Estátua de Hermes (b) O Cristo Redentor (c) Estátua na Ilha da Páscoa. (d) “O pensador" de Rodin.

O conceito de simetria não é exclusivo da Física. Podemos encontrá-lo associado a várias atividades humanas e a vários conceitos como, por exemplo, o conceito de beleza. A nossa definição de belo é associada, e isto desde os tempos da Grécia antiga, à noção de simetria. Quanto mais simétrico um objeto mais belo ele nos parece. Veja as imagens mostradas na Figura 20.

O que todas têm em comum? Se você observar bem, verá que são estátuas possuidoras de um alto grau de simetria[24]. Imagine que fosse possível cortar estas estátuas ao meio, ao longo da direção vertical, através de um eixo que passe pelo

[24] A simetria aqui não é perfeita, naturalmente.

centro da estátua. É fácil imaginar que uma das metades assim obtida seria como a imagem refletida em um espelho da outra metade.

Por outro lado veja a Figura 21. Ela nos choca pela falta de simetria. Se realizarmos a mesma operação, não obteremos duas metades que sejam semelhantes às formadas por um espelho. Neste caso não temos mais simetria nesta imagem.

Simetria especular

Como vimos na seção anterior, uma simetria diz respeito a uma propriedade de um objeto (a sua aparência para nós, por exemplo) e a uma operação que realizamos sobre o objeto.

Figura 21 – Um quadro de Picasso.

As simetrias são classificadas segundo as operações frente às quais a propriedade se conserva. Considere o cubo mostrado na letra *a* da Figura 22. Imagine que colocássemos um espelho em frente ao cubo e olhássemos a imagem no espelho. O que observaríamos?

Não seríamos capazes de distinguir a imagem no espelho do objeto real. Neste caso, temos **simetria especular**, ou seja, a simetria existe através de um plano, como se este plano fosse um espelho.

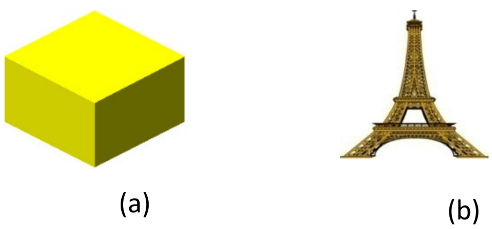


Figura 22 -(A) Um cubo sem marcas nas suas faces. (B) torre Eiffel.

Deve-se chamar a atenção para o fato de que um objeto que apresenta simetria especular frente a um plano pode não apresentar este mesmo tipo de simetria frente a outro. Veja a figura mostrada na letra *b* da Figura 22.

Observe que este objeto apresenta simetria frente a um plano perpendicular ao solo que passe pela base e pelo topo da torre, mas não frente a um plano horizontal paralelo à base.

Simetria frente às rotações[25]

Vimos antes que podemos ter uma simetria frente a um espelho, ou seja, que um objeto visto em um espelho apresenta a mesma propriedade. É a simetria especular. Mas será que esta é a única simetria que temos? Vamos reconsiderar o exemplo da esfera (Figura 19). Vimos que, se alguém girar a esfera de certo ângulo, seríamos incapazes de dizer, estando de olhos fechados, se a esfera foi girada ou não. Neste caso dizemos que temos simetria de tipo **rotacional**. Isto quer dizer que a propriedade do objeto, ou seja, como ela se apresenta aos nossos sentidos, permanece invariante frente à operação de rotação. Esta simetria está associada ao fato de que o espaço é **isotrópico**, ou seja, todas as direções são equivalentes.

Por outro lado, considere o cubo mostrado na Figura 23*a*. Para este cubo, a simetria não será para qualquer ângulo, mas somente para rotações de 90° (ou múltiplos deste valor) em torno de eixos que sejam perpendiculares às faces (Figura 23*b*). Nessa figura, vemos desenhado o eixo de rotação. Se girarmos o cubo por um ângulo de 90° (ou múltiplos deste valor) em torno deste eixo não observaremos mudança alguma na sua aparência. O mesmo acontece se girarmos do mesmo ângulo em torno de eixos similares, definidos em relação às outras faces.

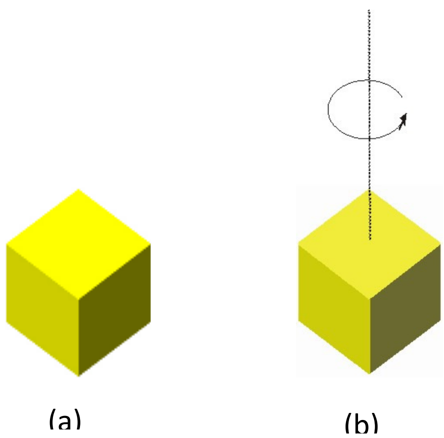


Figura 23 - Dois cubos.

A quantidade conservada associada à simetria rotacional é o **Momento Angular.**

[25] Também conhecida como simetria rotacional.

Simetria frente a translações espaciais[26]

Este tipo de simetria tem uma natureza um pouco diferente das simetrias que analisamos anteriormente, a simetria especular e a simetria frente a rotações.

A simetria frente às translações espaciais reflete um fato básico do Universo: em um Universo homogêneo, ou seja, onde todas as partes são iguais ou equivalentes entre si, o resultado de um experimento não deve depender da posição no universo na qual o experimento é realizado.

Como vimos anteriormente, quando discutimos o que é uma simetria, a cada simetria temos associada uma conservação. Então qual a quantidade conservada no caso da simetria espacial? A resposta é o **momento linear do sistema**, o qual será definido mais adiante. Demonstrar isto é um pouco complicado e foge dos nossos objetivos neste curso[27].

Exemplo 11

Na molécula de amônia (NH_3), os três átomos de hidrogênio (H) e o átomo de nitrogênio (N) formam uma pirâmide na qual o átomo de nitrogênio ocupa o vértice e a base é um triângulo eqüilátero formado pelos átomos de hidrogênio (Figura 24).

Na figura o ponto *O***,** corresponde à origem de um sistema de eixos ortogonais, cujos eixos *x* e *y* estão localizados na base da pirâmide, eqüidistante dos átomos de hidrogênio, e o eixo *z* é perpendicular a esta base.

Se girarmos a molécula em ângulos múltiplos de 120° com relação ao eixo *z*, não poderemos identificar pela sua aparência se a molécula foi girada ou não; portanto, ela possui uma simetria de rotação com relação ao eixo *z*. O mesmo não acontece com relação aos outros eixos.

---

[26] Esta simetria também é chamada de translacional.

[27] Aos interessados nesta demonstração, que possuam uma boa base matemática, sugerimos a leitura do livro **Mecânica** de *Landau* e *Lifshitz* (Landau, L. & Lifshitz, I. **Mecânica**. Editora Mir, Moscou). Você o encontrará em bibliotecas universitárias de Física.

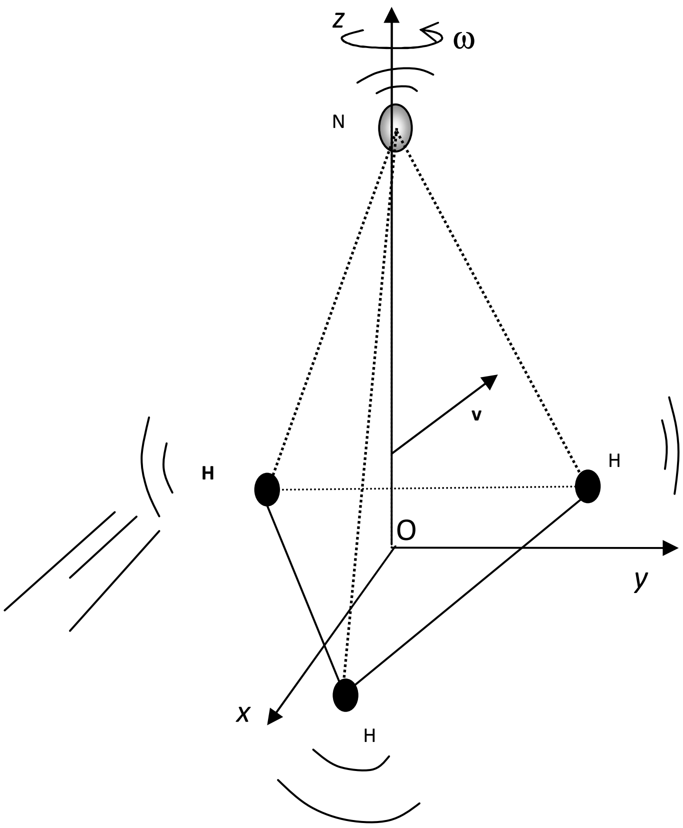


Figura 24 - A molécula de amônia.

Exemplo 12

Um haltere utilizado por atletas pode ser girado com relação a diversos eixos de rotação (veja a Figura 25):

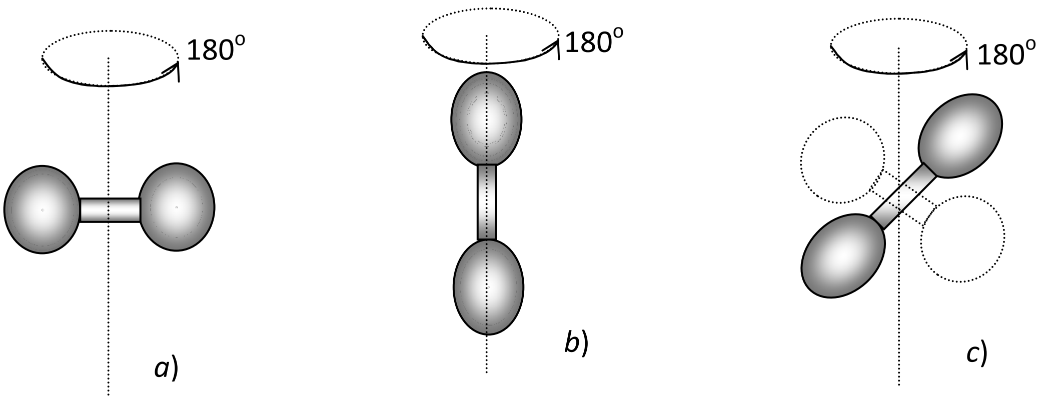


Figura 25 - Possíveis rotações para um haltere.

Nos casos *a* e *b*, após girar de 180°, não podemos identificar por aparência se o haltere foi girado ou não, o haltere possui uma simetria de rotação com relação a estes eixos.

Por outro lado, no caso *c*, quando giramos por qualquer quantidade angular, em torno do eixo vertical, observamos que a aparência não se mantém; nesse caso, o haltere não possui simetria de rotação com relação a este eixo. Veremos futuramente, em estudos da Dinâmica da Rotação, que sistemas mecânicos semelhantes ao caso *c* quando giram transmitem vibrações aos mancais que suportam o eixo de rotação. Na linguagem popular, diz-se que este sistema não está "balanceado". Esse fenômeno é muito freqüente em rodas de veículos que quando "desbalanceadas" vibram a direção quando o carro está em alta velocidade. O balanceamento nada mais é que acrescentar massas (pedaços de chumbo) em pontos estratégicos das rodas, adquirindo simetria de rotação de massas em torno do eixo que gira, desaparecendo os efeitos do "desbalanceamento". O "desbalanceamento" não acontece nos casos *a* e *b*.

Exemplo 13

Estudiosos da área de Meteorologia consideram a atmosfera terrestre formada por camadas (veja a Figura 26). A **Troposfera** contém o ar que respiramos e é onde se produz a chuva e a neve. Nela a pressão e a densidade do ar diminuem à medida que subimos.

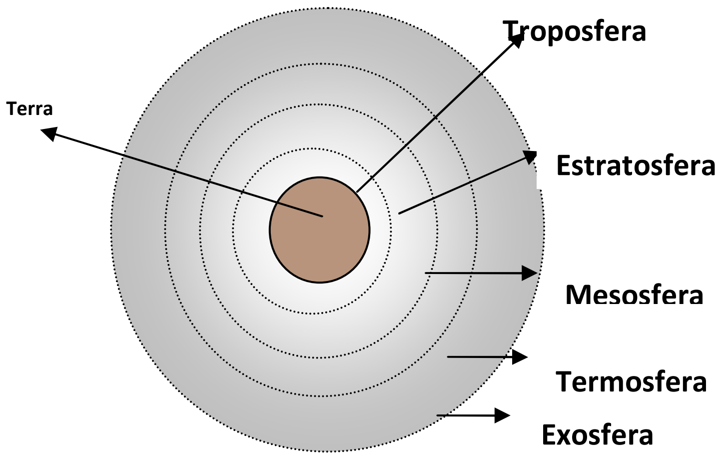


Figura 26 - Camadas da atmosfera.

A Estratosfera fica a cerca de 50 km de altura e é nela que se encontra a camada de ozônio. A **Mesosfera** contém uma camada de pó procedente da destruição de meteoritos. A **Termosfera** é a zona onde se destrói a maioria dos meteoritos que entram na atmosfera terrestre. A **Exosfera** é onde se produzem as belíssimas auroras boreais.

Se considerarmos a forma da Troposfera como uma casca esférica e coletarmos amostras de ar em diversos pontos, mas sempre nas mesmas altitudes, e estas amostras apresentarem as mesmas propriedades, poderemos afirmar que esta camada é homogênea com relação a estas propriedades em regiões de mesma altitude. Por outro lado, se coletarmos amostras em pontos que estão localizados em diferentes altitudes, veremos que estas amostras apresentarão propriedades diferentes, como por exemplo, pressão, densidade, ou sua constituição.

Assim, apesar de a Troposfera ser homogênea na mesma altitude, ela não o é como um todo e não constitui um sistema homogêneo. Lembremos que um sistema homogêneo é aquele que apresenta resultados de um experimento equivalentes em todas as posições. O resultado do experimento não pode depender da posição que na qual o experimento é realizado. A Troposfera pode ser considerada um sistema que possui simetria de translação espacial esférica, mas não possui simetria de translação radial.

Exemplo 14

A refração da luz é um fenômeno físico que está relacionado com o desvio da trajetória da luz, quando a luz atravessa a superfície que define meios de propriedades óticas diferentes.

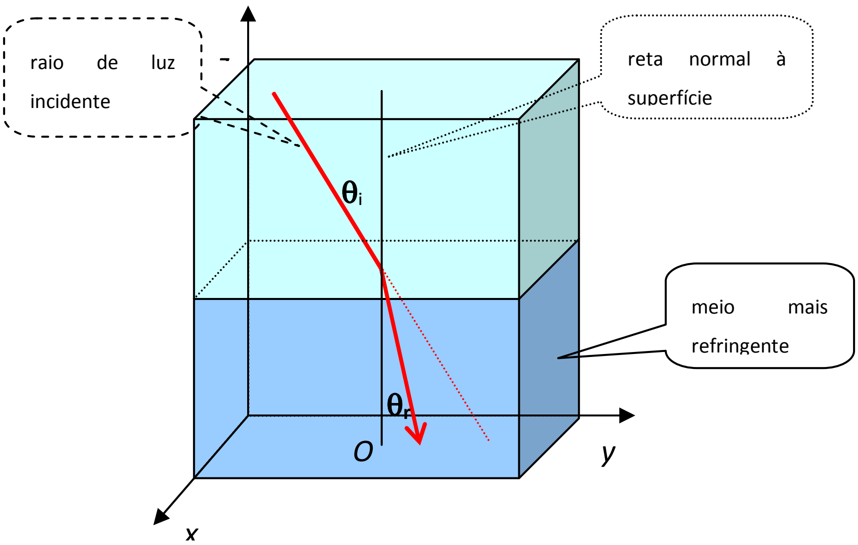


Figura 27 - Raio de luz atravessando a superfície de separação entre dois meios.

O raio de luz que foi desviado chama-se raio refratado, enquanto que o original no meio anterior chama-se raio incidente. O meio mais refringente é aquele no qual o raio de luz está mais próximo da reta normal à superfície, veja a Figura 27.

A Figura 27 mostra o raio de luz incidente e o raio de luz refratado contidos em um plano paralelo ao plano *yz*. Quando o meio que contém o raio incidente é o vácuo, define-se o índice de refração, n. O índice de refração é definido pela relação:

$$n = \text{sen}(\theta_i)/\text{sen}(\theta_r),$$

na qual θ_i e θ_r são os ângulos formados entre os raios incidente e refratados com a normal.

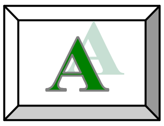


Figura 28

Se mudarmos o ângulo de incidência, mas o índice de refração não variar, dizemos que o meio refringente é homogêneo, isto é, o índice de refração se conserva. Agora, se neste mesmo meio mudarmos o plano que contém o raio incidente e o refratado, por exemplo, o plano *xz*, e a nova relação n for não for diferente da anterior, dizemos que o meio é isotrópico, caso contrário, isto é, se n depender do plano de incidência, dizemos que o meio refringente não é isotrópico para a propriedade ótica refração. É oportuno chamar a atenção que este meio pode ser isotrópico para outras propriedades como, por exemplo, a densidade. O cristal calcita apresenta esta propriedade e é dito que é um sistema birrefringente. Quando olhamos através deste cristal vemos duas imagens (como na Figura 28).

Simetria frente a translações temporais[28]

A simetria com respeito às translações temporais diz respeito às propriedades do tempo. Supomos em Física que o tempo seja homogêneo, ou seja, que dois intervalos de tempo sejam absolutamente iguais. Assim, se fizermos um experimento hoje, e este experimento durar cinco minutos para ser realizado (uma reação química, por exemplo) e o repetirmos amanhã, esse experimento tomará os mesmos cinco minutos e, sob condições idênticas, obteremos os mesmos resultados. Em outras palavras, o instante de tempo no qual realizamos nosso experimento não pode influir nos resultados obtidos por nós.

E qual é a conservação associada a essa simetria? É a conservação da **Energia**. É a simetria temporal que o universo apresenta que nos garante a conservação desta quantidade[29].

O que é uma conservação?

Basicamente, dizemos que algo é conservado se permanece constante frente a uma dada operação. Em outras palavras uma grandeza é conservada se o valor desta grandeza permanece constante quando realizamos esta operação. Como vimos quando estudamos as simetrias, a cada simetria temos uma grandeza conservada.

[28] Também chamada de simetria temporal.

[29] Novamente, sugerimos ao leitor interessado, possuidor de certa base matemática, a leitura de **Mecânica** de *Landau* e *Lifshitz* para um aprofundamento desta questão.

Tomemos um exemplo simples. Lembremos do nosso cubo e façamos um ponto bem no centro de cada face. O cubo original era liso. Agora em cada face teremos uma marca como a que mostramos Figura 29.

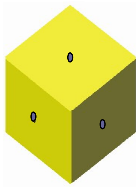


Figura 29 - O cubo com marcas nas faces.

Se girarmos o nosso cubo de 90 graus, em torno de um eixo que atravesse perpendicularmente duas faces opostas, então a face do cubo se parecerá como mostrado na Figura 30, ou seja, do mesmo modo que antes. O que se conservou neste caso? A posição do ponto que fizemos sobre o cubo.

Dando uma definição geral, dizemos que certa quantidade se conserva se ela permanece constante frente a uma dada operação. Por conservar entendemos manter o seu valor constante. Você deve observar que o caso mais simples é o caso da passagem do tempo. Quando o tempo passa, se uma dada grandeza mantém o seu valor dizemos simplesmente que ela é conservada. Dizer que uma propriedade é conservada nesta situação é fazer afirmações sobre a sua permanência no tempo.

Este é um dos principais tipos de conservação que interessa aos físicos. No fundo, trabalhar em Física profissionalmente é se perguntar a todo instante que grandezas se conservam no universo. São as grandezas conservadas que nos permitem fazer previsões sobre a evolução da natureza. São exemplos de grandezas que satisfazem a princípios de conservação: **Energia, Momento Linear, Momento Angular, massa** e **carga elétrica**. Estudaremos cada uma destas grandezas e as transformações a que elas obedecem a seguir.

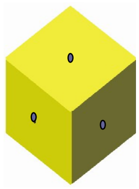


Figura 30 - Cubo após uma rotação de 90 graus.

Exemplo 15

Durante um jogo de cartas entre dois jogadores, se um deles conhecer todas as cartas que foram descartadas na mesa e se nesse momento não existirem mais cartas no "monte", este jogador poderá "adivinhar" as cartas que estão com seu adversário. O *baralho* como um todo é um *sistema* que possui simetria temporal com relação às cartas, pois, em qualquer tempo durante o jogo, o total de cartas (e o seu tipo) é conservado. A conservação de cartas possibilita ao jogador prever as cartas do adversário. Para que isso aconteça não poderá existir um terceiro jogador que retire ou coloque cartas no *baralho*, atuando como uma vizinhança desconhecida, que interage com o *sistema baralho*.[30]

Assim também acontece com determinadas propriedades de um sistema físico como, por exemplo: a energia, o momento linear, a massa, a carga elétrica etc. Essas quantidades poderão ser conservadas durante o tempo para um determinado sistema, ou por muito tempo, ou então até que algum experimento científico prove o contrário.

Energia

Definir o que é energia é difícil. O conceito de energia vem sendo construído pelos físicos ao longo de 2500 anos. Alguns livros definem a Energia como:

> Energia é a capacidade de realizar trabalho.[31]

Já outra definição possível seria:

> Propriedade de um sistema que lhe permite realizar trabalho. A energia pode ter várias formas (calorífica, cinética, elétrica, eletromagnética, mecânica, potencial, química, radiante), transformáveis umas nas outras, e cada uma capaz de provocar fenômenos bem determinados e característicos nos sistemas físicos. Em todas as transformações de energia há completa conservação dela, i. e., a energia não pode ser criada, mas apenas transformada (primeiro princípio da termodinâmica). A massa de

30 De fato, um jogador experiente poderá prever as cartas do adversário mesmo que no baralho ainda restem algumas cartas.

31 Alvarenga, B. & Máximo, A. Curso de Física - volume 2. São Paulo: Editora Harbra Ltda.

um corpo pode-se transformar em energia, e a energia sob forma radiante pode transformar-se em um corpúsculo com massa [32].

No entanto, estas definições não nos parecem adequadas, pois, como veremos mais adiante, o conceito de trabalho no sentido em que a Física usa este termo, é definido em função do conceito de energia o que tornaria as duas definições circulares: definimos uma em função da outra, ou seja, não definimos coisa alguma!

Então, o que é Energia? Vamos usar, provisoriamente, a seguinte definição:

Energia é uma propriedade dos sistemas físicos que permite a esses sistemas interagirem uns com os outros.

Tipos de energia

Se definir energia é difícil, definir os tipos de energia é uma tarefa bem mais fácil. Os vários tipos de energia são definidos em função das propriedades que os sistemas possuem. Temos, basicamente, dois tipos de energia: **cinética** e **potencial (ou de configuração)**.

O primeiro tipo, cinética, diz respeito a um tipo de energia associada ao movimento[33] enquanto que o segundo é um tipo de energia que depende das relações entre as partes de um sistema. A Energia Potencial é uma função, fundamentalmente, do tipo de interação que as várias partes de um sistema estabelecem entre si (posição relativa das partículas que compõem o sistema, tipo de campo existente, etc.). O importante é dar-se conta de que a energia potencial pertence ao sistema como um todo e não a uma parte do sistema em particular.

Energia Cinética

Como vimos na seção anterior, se é difícil definir, de uma forma simples, o que seja Energia, definir o que seja um determinado tipo de energia é uma tarefa bem mais fácil.

Em particular, definiremos aqui o que entendemos por **energia cinética**. Este tipo de energia é associado ao movimento. Sempre que tivermos um objeto em movimento teremos associada a

32 Dicionário Eletrônico Aurélio Século XXI, versão 3.0, 1999.

[33] No Capítulo III definiremos com precisão o que entendemos por movimento e velocidade.

este movimento certa quantidade de energia que chamaremos de cinética. Os vários tipos de classificação da energia cinética são função do tipo de movimento desenvolvido pelo objeto.

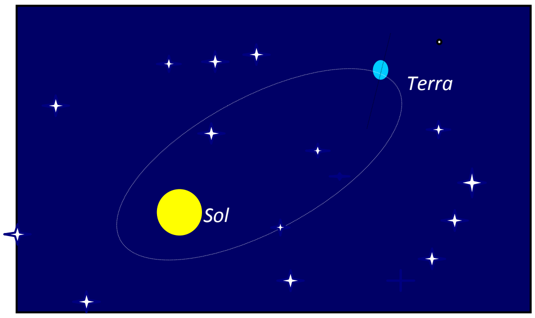


Figura 31 - Terra em seu movimento em torno do Sol.

Energia cinética de translação[34] (E_c)

Se tivermos um objeto que se move ao longo de certa trajetória, não fechada e sem rolar sobre si mesmo, temos o que, normalmente, é chamado de energia cinética, mas que aqui chamaremos de *energia cinética de translação*. A energia cinética de translação depende tanto da velocidade como da massa do objeto. Adiantando o que veremos nos próximos capítulos, podemos calcular a energia cinética de translação de uma partícula de massa m e velocidade $\mathbf{v}$ por:

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

Observe que a energia cinética depende apenas do **módulo** da velocidade.

As dimensões de Energia são expressas pelo produto das dimensões de massa e velocidade. No Sistema Internacional de Unidades a massa é medida em quilograma (kg), a velocidade em metros por segundo (m/s) e a energia é medida em Joules, cujo símbolo é J. Portanto, a energia cinética será expressa em Joules:

$$[\text{Energia}] = M\frac{L^2}{T^2} \xrightarrow[SI]{} [\text{Energia}] = \text{kg}.\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = \text{Joule}^{35}$$

Nessa expressão, os colchetes indicam que estamos falando da unidade da grandeza que se encontra entre eles.

---

[34] Alguns livros usam a letra K para indicar a Energia Cinética. A origem dessa notação está no inglês, língua na qual Energia Cinética se escreve Kinetic Energy, daí a letra K.

[35] James Joule, físico inglês que realizou vários estudos sobre as várias formas de energia e sua conversão umas nas outras (1818 – 1889).

Energia cinética de rotação (E_r)

Consideremos uma partícula que descreve um movimento de rotação em torno de um eixo. Um exemplo seria a Terra em seu movimento em torno do Sol, como mostrado na Figura 31. Associada a este movimento de rotação temos um tipo de energia cinética chamado de **Energia Cinética de Rotação.**

O cálculo da energia cinética de rotação é um pouco mais complicado que o cálculo da energia cinética de translação que vimos antes. Abordaremos o cálculo dessa quantidade mais adiante no Capítulo IV.

Portanto, a **energia cinética total** será dada pela soma das energias cinética (de translação e rotação) que temos no sistema que estivermos estudando.

Energia Potencial

A energia potencial é um tipo de energia que está relacionada com a configuração do sistema. Por configuração do sistema queremos nos referir ao modo como as diversas partes de um sistema se localizam umas em relação às outras e a maneira pela qual as partes de um sistema interagem entre si.

Suponha que o objeto mostrado Figura 32 se movimente radialmente em relação à superfície da Terra. A cada instante de tempo, a distância entre o objeto e a Terra é diferente (representamos isso pelas várias cópias do mesmo objeto mostradas na figura). Dizemos então que a energia potencial do sistema Terra - objeto está se modificando.

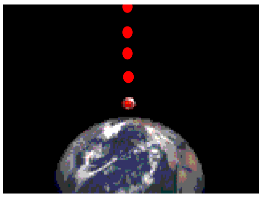


Figura 32 – Sistema Terra - partícula.

No fundo, a energia potencial é a energia armazenada pelo sistema no instante em que ele foi criado e que nele ficou armazenada. É importante, *muito importante*, que você compreenda que a energia potencial não "pertence" a nenhuma parte do sistema individualmente, mas ao sistema como um todo. No entanto, muitas vezes falamos da energia potencial como se ela pertencesse a uma parte do sistema somente. É o que acontece quando falamos de energia potencial de uma pedra. O correto seria falar de energia potencial do sistema Terra - pedra. Isso acontece apenas por economia de linguagem.

A maneira como calculamos a energia potencial é uma função do sistema com o qual estamos trabalhando. No Capítulo V abordaremos os vários tipos de energia potencial.

A Energia Total

Por **Energia Total** de um sistema entendemos a soma de todos os tipos de energia que este sistema possui. Normalmente, isto se traduz pela soma de suas energias cinéticas (de translação e de rotação) e de suas energias potenciais (gravitacional, elástica, elétrica, nuclear, etc.). Algumas vezes esta energia total é chamada de **Energia Interna**[36].

$$E_t \equiv E_i = E_c + E_p$$

Nesta expressão, os índices c e p indicam, respectivamente, as formas cinéticas e potenciais.

Conservação da Energia

Como vimos quando falamos de simetrias, a cada simetria temos associada uma quantidade que se conserva. No caso de termos simetria frente às translações temporais a quantidade conservada é a energia.

> O Princípio da Conservação da Energia estabelece que a Energia Total do Universo é constante. O mesmo é válido para qualquer sistema fechado. A Energia somente pode mudar de forma: energia cinética pode se transformar em potencial, energia potencial pode se transformar em energia cinética, energia interna pode se transformar em calor ou trabalho (definiremos estes termos mais adiante) e assim por diante. A energia não pode ser criada e não pode ser destruída, somente transformada. No caso de um sistema aberto o que se conserva é a soma da energia interna do sistema com a energia que entra ou sai do sistema.

[36] Isto acontece quando o sistema que estamos analisando não possui energia cinética total, ou seja, não está se movimentando em relação a um sistema de referência qualquer.

Considere um avião (veja a Figura 33) que se move a certa altitude em relação ao solo. Este avião possui dois tipos de energia. Como ele está se movendo com certa velocidade, possui energia cinética. Além da energia cinética, o avião possui ainda energia potencial gravitacional, pois se encontra a certa altura do solo. Portanto, a energia total deste avião é dada por:

Energia total = Energia cinética + Energia potencial gravitacional.

Figura 33 - Um avião.

Considere agora esta outra situação. Suponha que a mola mostrada na Figura 34 esteja fora da sua posição de equilíbrio e que esteja se movendo em uma dada direção. Neste caso, a mola possui tanto energia cinética, pois está se movendo, mas também energia potencial, que é elástica e não mais gravitacional[37].

Neste caso, a energia total será dada por:

Energia total = Energia cinética + Energia potencial elástica.

Deve sempre ser lembrado que o que se conserva é a energia total e não as formas individuais de energia.

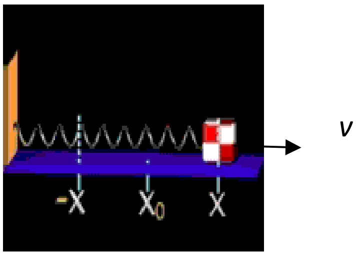


Figura 34 - Mola na posição x.

[37] Observe que a energia gravitacional está presente, mas como o objeto preso à mola se desloca em um plano a uma altura constante do solo, essa energia é constante e, como veremos mais adiante, podemos tomar seu valor sobre a direção de deslocamento como sendo zero.

O Princípio da Conservação da Energia é uma ferramenta extremamente poderosa e que nos permite calcular uma série de quantidades que não seriam facilmente calculadas de outro modo.

Se os sistemas físicos são constituídos, basicamente, de matéria e energia, poderemos afirmar que nestes sistemas, quando isolados de interações com a vizinhança, a quantidade de matéria e energia se conservará. Assim, diremos que estes sistemas possuem simetria temporal com relação a quantidade de energia e matéria e, com base nessa simetria, poderemos fazer previsões de possíveis situações que o sistema poderá atingir ao longo do tempo.

Exemplo 16

Um sistema massa - mola é constituído de um objeto de massa m preso na extremidade de uma mola de massa desprezível (Figura 35). A outra extremidade da mola está presa no teto, o qual pode ser interpretado como parte do planeta Terra. Se, de alguma maneira, for cedida certa quantidade de energia a este sistema ele oscilará e, se nenhuma outra vizinhança interagir com o sistema, esta quantidade de energia será conservada no tempo.

Durante as oscilações, uma parte desta energia estará armazenada na mola na forma de energia potencial elástica, E_{pe}**,** a qual depende da deformação da mola; outra parte, E_{pg}, também na forma de energia potencial, mas agora gravitacional, está armazenada nos componentes do objeto preso à mola e no planeta Terra. Essa parte da energia total depende da configuração espacial entre o objeto de massa m e o planeta Terra e varia no tempo à medida que o sistema oscila. O restante da energia está armazenada no objeto de massa m, na forma de energia de cinética de translação, E_c**,** e depende dos valores da massa e da velocidade do objeto.

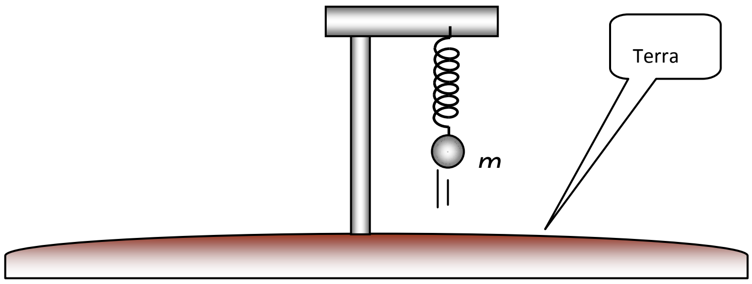


Figura 35 - Sistema objeto - mola – Terra.

Desprezaremos aqui, a energia cinética armazenada no planeta Terra, pois esta possui uma inércia extremamente superior que a do objeto preso à mola e o planeta praticamente não se movimenta enquanto o objeto oscila. Consideraremos ainda, que o objeto preso à extremidade da mola não possui movimento de rotação e também que o ar não oferece resistência ao movimento, ou seja, outras interações com a vizinhança são insignificantes.

A energia total do sistema, E**,** é igual à soma de todas as energias, isto é:

$$E = E_{pe} + E_{pg} + E_c \text{ (conservada no tempo)}$$

Como esta soma mantém-se constante no tempo, se conhecermos a quantidade E num dado instante bem como a soma de duas das três formas de energia presentes (por exemplo, E_{pe} + E_{pg}), poderemos determinar a quantidade da terceira, E_c. Esse conhecimento nos permitiria conhecer a velocidade do objeto preso à extremidade da mola neste instante. Isto somente é possível porque o sistema possui simetria temporal, ou seja, a energia total do sistema E é conservada no tempo. Cada uma das quantidades (E_{pe}, E_{pg} e E_c) poderá variar no tempo, acontecendo transformações de uma forma em outra. Por exemplo, quando E_c aumenta, a soma das outras duas deverá diminuir de maneira que a soma total permaneça constante no tempo. Se durante as oscilações interações externas ao sistema causarem perdas ou ganhos de quantidade **desconhecidas** ou não controláveis de energia, esta previsão não poderá ser realizada.

Exemplo 7 - O Plano inclinado

Um problema interessante e que pode ser resolvido facilmente usando o princípio da conservação da energia é o problema do plano inclinado (veja a Figura 36).

O problema geral do plano inclinado é descobrir qual será a velocidade com a qual o bloco que desliza ao longo do plano inclinado vai chegar até a base do plano.

Para solucionar esse problema devemos fazer duas hipóteses:

- Hipótese 1: não temos atrito;
- Hipótese 2: o bloco não rola.

A primeira hipótese nos diz que não temos dissipação (perda) de energia no problema. Como conseqüência, podemos aplicar o princípio da conservação da energia de uma forma simples, escrevendo a energia total como sendo a soma das energias cinética e potencial. A segunda hipótese nos diz que, ao calcularmos a energia cinética, podemos nos preocupar apenas com a energia cinética de translação, sem precisar a energia cinética de rotação da massa que desce o plano.

Dessa forma podemos escrever a energia total em qualquer ponto da trajetória como:

$$E_t = E_c + E_p \Rightarrow \begin{cases} E_c = \dfrac{1}{2}mv^2 \\ E_p = mgh \end{cases}$$

$$E_t = \frac{1}{2}mv^2 + mgh$$

Nessa expressão, h é a altura em relação à base do plano inclinado, v a velocidade do bloco, m a massa do bloco e g a aceleração da gravidade. Observe que essa expressão é válida para qualquer ponto da trajetória.

A estratégia geral de solução é calcular a energia total no topo do plano inclinado, de onde o bloco começa a deslizar e na base do plano inclinado, onde ele para. A seguir devemos igualar essas duas quantidades, já que a energia se conserva. O que nos motiva a escolher essa estratégia é o fato de que no topo do plano inclinado temos quantidades que, em princípio conhecemos e na base a energia potencial pode ser tomada como zero, uma vez que a altura em relação ao solo é nula.

Etapa 1 - Energia total no topo do plano inclinado

No topo do plano inclinado, que chamaremos de posição 1, podemos escrever:

$$E_{t1} = E_{c1} + E_{p1} = \frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1$$

Nessa expressão E_{t1}, E_{c1}, e E_{p1} são, respectivamente, a energia total, a energia cinética e a energia potencial no topo do plano inclinado, denotado pelo índice 1.

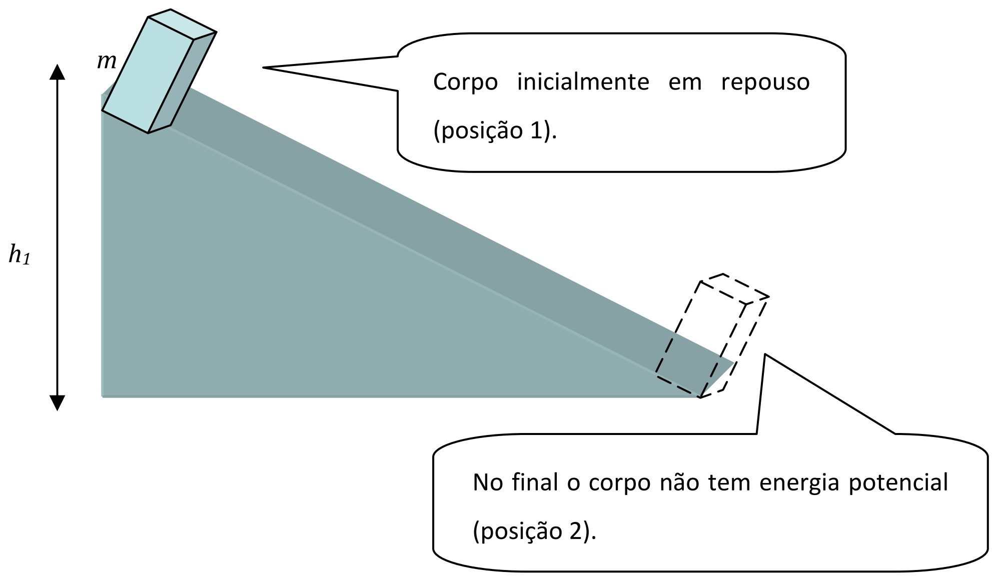


Figura 36 – O plano inclinado.

Etapa 2 – Energia total na base do plano inclinado

Na base do plano inclinado, que chamaremos de posição 2, podemos escrever:

$$E_{t2} = E_{c2} + E_{p2} = \frac{1}{2}mv_2^2 + 0$$

O zero que aparece no lado direito dessa expressão, vem do fato de que a altura da base foi tomada como zero. Conseqüentemente a energia potencial, que depende da altura também é zero.

Etapa 3 – Igualar as energias totais na base e no topo, isolando a variável desejada, a velocidade na base.

$$E_{t2} = E_{t1} \Rightarrow mgh_1 + \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 \Rightarrow \boxed{v_2 = \left(2gh_1 + v_1^2\right)^{1/2}}$$

Vamos agora realizar a análise dimensional do resultado, para termos indicação de que não cometemos nenhum erro durante o cálculo. Para isso devemos escrever as dimensões de cada uma das variáveis que aparece na expressão acima e operar com essas dimensões algebricamente. Se as dimensões do resultado forem as de velocidade, então, provavelmente, nosso resultado é correto. Veja a Tabela 3.

Tabela 3

Variável	**Dimensão**	**Símbolo**
Velocidade	Comprimento / Tempo	L/T
Aceleração	Comprimento/Tempo/Tempo	L/T^2
Altura	Comprimento	L

Usando essa informação podemos escrever as dimensões da velocidade v_2:

$$[v_2] = \left[2gh_1 + v_1^2\right]^{1/2} = \left[\frac{L}{T^2}L + \frac{L^2}{T^2}\right]^{1/2}$$

$$[v_2] = \left[\frac{L^2}{T^2} + \frac{L^2}{T^2}\right]^{1/2}$$

Aqui devemos ter cuidado. A analogia algébrica na análise dimensional tem o seu limite. Não podemos somar simplesmente as dimensões. O que a expressão acima nos diz é que as duas parcelas têm as mesmas dimensões e que, portanto, a dimensão dentro do colchete é simplesmente L^2/T^2. Portanto, a dimensão do resultado (a velocidade obtida na base do plano) é dada por:

$$[v_2]=\left[\frac{L^2}{T^2}\right]^{1/2} \Rightarrow [v_2]=\frac{L}{T}$$

Essa é a dimensão correta.

O momento linear[38]

Considere a seguinte situação: um ônibus se aproxima de uma plataforma a uma velocidade de 10 *km/h* e uma bicicleta se aproxima da mesma plataforma à mesma velocidade. Se fosse dado a você escolher qual dos dois você tentaria parar usando apenas as mãos (como faz o Super-Homem em alguns de seus filmes) qual você escolheria?

Provavelmente você escolheu a bicicleta (e com razão!). Mas, por quê? Ora, da nossa experiência do cotidiano sabemos que objetos com bastante massa são mais difíceis de parar que objetos com pouca massa (o ônibus e a bicicleta, respectivamente). Portanto, além da velocidade, outra quantidade é extremamente importante para caracterizar a **quantidade de movimento** de uma partícula: a sua massa. Você deve lembrar que massa não é uma medida da quantidade de matéria, mas uma medida de uma propriedade comum à matéria e à energia: a **inércia**.

Desde os tempos mais antigos, da época clássica da Grécia, as pessoas que se dedicaram a tentar compreender a Natureza se depararam com o seguinte problema: como quantificar o movimento adquirido por um corpo? Esta questão está intimamente ligada à outra questão, esta oriunda da Filosofia: a diversidade observada no mundo é uma diversidade real ou é uma ilusão dos sentidos?

O problema é que não se conseguia entender como o universo poderia apresentar o ser (as coisas que são) e o não ser (a ausência do ser). Esta questão tem a ver com o movimento da seguinte maneira: para que um objeto se mova é necessário que o espaço por onde se desloca esteja vazio, pois se sabia que dois corpos não poderiam ocupar o mesmo lugar no espaço. A filosofia aristotélica colocava a causa do movimento (o motor do movimento) como o principal objeto a ser estudado e não o movimento em si. Assim, a partir desta perspectiva, a análise operacional do movimento seria algo impensável e fora de propósito, pois o movimento não pertenceria aos corpos que se movem, mas ao motor do movimento.

Este problema persistiu sem solução até o início da idade moderna quando se chegou a uma definição operacional da quantidade de movimento de um objeto, graças ao trabalho de Galileu

[38] Se você ainda não o fez, revise as operações com vetores descritas nos Complementos de Matemática.

Galilei. Foi Galileu quem se deu conta de que o movimento pertencia realmente aos objetos e poderia ser quantificado, dando nascimento à **Cinemática**, que é o ramo da Física que estuda o movimento, tentando descrevê-lo matematicamente, sem se preocupar com as suas causas, questão esta que pertence ao campo da **Dinâmica**. Sabe-se que a quantidade de movimento de um corpo depende de dois fatores: a sua *massa* e a sua *velocidade*.

No que diz respeito à massa, lembremos que a massa de um objeto não é uma medida da sua quantidade de matéria, mas uma medida da sua inércia, ou seja, uma medida da dificuldade que temos de modificar o estado de movimento do objeto. Colocando de uma maneira simples, se um objeto possui certa quantidade de movimento, e este objeto possui certa massa então, modificar o sentido no qual este objeto se move ou o valor do módulo de sua velocidade é mais difícil que no caso em que a massa do objeto for menor. A associação entre massa e matéria vem do fato de que a inércia é uma propriedade da matéria (como da energia também) que é cumulativa: quanto mais matéria mais inércia e, por conseqüência, mais massa.

Quanto à velocidade, sabemos que objetos que se movem a velocidades muito altas são mais difíceis de serem desviados do que objetos que se movem a velocidades mais baixas.

No entanto, a quantidade de movimento não depende de um desses fatores somente, pois também observamos que objetos com pouca massa e altas velocidades (uma bala de revólver, por exemplo) são bastante difíceis de desviar, do mesmo modo que objetos com muita massa e baixas velocidades também o são (um ônibus que está chegando na estação rodoviária, por exemplo). Portanto, a quantidade de movimento de um objeto deve depender de alguma forma do produto destas duas quantidades.

A grandeza usada pelos Físicos para caracterizar o movimento é chamada de **momento linear**, simbolizado pela letra $\mathbf{p}$[39]. Essa grandeza é definida pelo produto da massa m pela velocidade da partícula $\mathbf{v}$[40]:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$$

---

[39] Essa grandeza é também chamada de **Quantidade de Movimento** em alguns textos básicos de Física.

[40] Usaremos a letra $\boldsymbol{p}$**,** a notação usual para o momento linear ou quantidade de movimento de uma única partícula, e a letra $\boldsymbol{P}$ para a quantidade de movimento total de um sistema de partículas. Em alguns textos é usada a letra **Q** para essa mesma quantidade. Na nossa notação, símbolos em **negrito** indicam quantidades vetoriais e símbolos em *itálico* indicam quantidades escalares.

Observe-se que o momento linear é um vetor. O importante a respeito do momento linear é que ela é uma propriedade dos objetos que se movem e ela é conservada. É esta propriedade do momento linear que analisaremos a seguir.

Momento linear de um sistema de partículas

Se tivermos um sistema de partículas, no qual cada partícula tem uma massa e uma velocidade que lhe são próprias, definimos o momento linear $\mathbf{P}$ do sistema como a soma dos *momenta* de cada partícula em separado:

> Momento linear do Sistema = Soma dos momenta de todas as partículas

Usando a notação matemática:

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \ldots + \mathbf{p}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{p}_n$$

O símbolo Σ[41] indica que estamos realizando uma soma sobre todas as partículas do sistema. Essa é uma soma vetorial.

Princípio da Conservação do momento linear

Se o sistema for um sistema fechado[42] então o **Princípio da Conservação do Momento Linear** nos diz que:

> O momento linear total P do sistema permanece constante, ou seja, os *momenta* de partículas individuais podem variar, mas não a soma total que permanece constante.

Vimos anteriormente, quando do nosso estudo das simetrias, que a toda conservação temos associada uma simetria. No caso do momento linear total de um sistema, qual será a simetria que temos associada? A resposta é a simetria frente a translações espaciais. Como já vimos anteriormente, esta simetria vem do fato de que, dadas as mesmas condições, todos os pontos do espaço são absolutamente equivalentes.

---

[41] Letra sigma, maiúscula, do alfabeto grego.

[42] Lembre que um sistema fechado é um sistema que não interage com a vizinhança,ou seja, está isolado da sua vizinhança.

Exemplo 17

Como exemplo de aplicação da conservação do momento linear de um sistema de partículas, vamos considerar um problema bastante importante na Física: o problema da colisão elástica entre duas esferas. Esse problema além de ser intrinsecamente interessante, possui utilidade no campo da pesquisa experimental e teórica. O processo básico para descobrirmos qual é a estrutura da matéria consiste em jogarmos uma partícula em direção a um obstáculo (superfície, núcleo atômico, partículas cuja estrutura interna queremos estudar, etc.) e estudarmos o resultado do choque. A esse tipo de colisão chamamos de **espalhamento**.

No nosso exemplo, vamos estudar o espalhamento de uma partícula que se desloca em linha reta por outra que está parada. O problema é ilustrado na Figura 37.

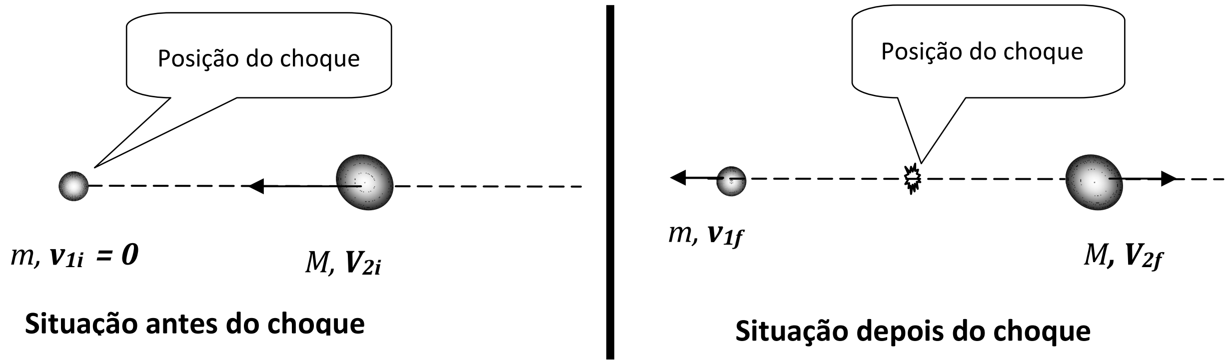


Figura 37 - Colisão elástica.

Nosso objetivo é calcular as velocidades das partículas após a colisão, indicadas por $\mathbf{v}_{1f}$ e $\mathbf{V}_{2f}$ na figura. O problema é simples: a partícula de massa M, com velocidade $\mathbf{V}_{2i}$ (supostamente conhecida), colide com a partícula de massa m (inicialmente em repouso). Após o choque as duas partículas adquirem velocidades $\mathbf{v}_{1f}$ e $\mathbf{V}_{2f}$, as quais são as quantidades que queremos conhecer. O problema é completamente unidimensional uma vez que o choque é frontal.

Esse tipo de colisão é chamado de espalhamento elástico (ou choque elástico) porque fazemos a hipótese de que não temos perda de energia por deformação, calor, som ou qualquer outra forma. Nesse tipo de espalhamento, temos apenas a transferência de energia cinética entre as partículas que sofrem o espalhamento. Quando essa hipótese não pode ser feita temos um espalhamento inelástico (ou choque inelástico).

Temos duas variáveis desconhecidas. Nossa estratégia de solução do problema é calcular o momento linear total antes do choque e o momento linear total após o choque e então usar a conservação da energia para eliminar uma das variáveis desconhecidas do problema pelo método da substituição.

Etapa 1 – Escrever o momento linear total antes da colisão

O momento linear total antes do choque é simplesmente o momento da partícula de massa M, uma vez que a partícula de massa m está em repouso:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{ti} &= \mathbf{p}_{1i} + \mathbf{p}_{2i} \\ \mathbf{P}_{ti} &= m\mathbf{v}_{1i} + M\mathbf{V}_{2i} \\ P_{ti} &= mv_{1i} + MV_{2i} = MV_{2i}\end{aligned}$$

Observe que na passagem da segunda para a terceira linha da equação anterior não temos mais as variáveis em negrito. Como o caso é unidimensional, a equação vetorial da linha 2 se reduz a uma equação escalar na linha 3.

Vamos agora escrever o momento linear total após a colisão. Em princípio as velocidades das partículas podem ser quaisquer:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{tf} &= \mathbf{p}_{1f} + \mathbf{p}_{2f} \\ \mathbf{P}_{tf} &= m\mathbf{v}_{1f} + M\mathbf{V}_{2f} \\ P_{tf} &= mv_{1f} + MV_{2f}\end{aligned}$$

Agora podemos igualar os valores do momento linear total antes e depois do choque:

$$\begin{aligned}P_{ti} &= P_{tf} \\ MV_{2i} &= mv_{1f} + MV_{2f} \\ MV_{2i} - MV_{2f} &= mv_{1f}\end{aligned}$$

$$\boxed{v_{1f} = \frac{M}{m}\left(V_{2i} - V_{2f}\right)} \qquad \text{eq. 3}$$

Obtivemos assim uma expressão que relaciona a velocidade após o choque da partícula que estava inicialmente em repouso em função das massas das partículas (em princípio conhecidas), da velocidade inicial da partícula que bateu (V_{2i}), supostamente também conhecida, e da velocidade final da partícula que bateu (V_{2f}), a outra incógnita do nosso problema. Para que possamos escrever a eq. 3 em termos de quantidades completamente conhecidas vamos usar o princípio da conservação da energia.

Etapa 2 – Aplicação do princípio da conservação da energia

A energia mecânica total se conserva nesse caso, já que estamos considerando um espalhamento de tipo elástico. Portanto, podemos escrever:

$$E_{ci} = E_{cf}$$
$$\frac{1}{2}MV_{2i}^2 = \frac{1}{2}mv_{1f}^2 + \frac{1}{2}MV_{2f}^2$$

Vamos isolar nessa equação a velocidade final da partícula que sofreu a colisão (v_{1f}) em função das outras quantidades e então substituir na eq. 3:

$$\frac{1}{2}MV_{2i}^2 = \frac{1}{2}mv_{1f}^2 + \frac{1}{2}MV_{2f}^2$$
$$\frac{1}{2}mv_{1f}^2 = \frac{1}{2}MV_{2i}^2 - \frac{1}{2}MV_{2f}^2$$
$$\frac{1}{2}mv_{1f}^2 = \frac{1}{2}M\left[V_{2i}^2 - V_{2f}^2\right]$$
$$\frac{m}{M}v_{1f}^2 = \left[V_{2i}^2 - V_{2f}^2\right]$$

$$v_{1f}^2 = \frac{M}{m}\left(V_{2i} + V_{2f}\right)\left(V_{2i} - V_{2f}\right) \qquad \text{eq. 4}$$

A eq. 4 relaciona a velocidade final da partícula que sofreu a colisão com grandezas conhecidas (V_{2i}, m e M) e com a grandeza V_{2f}. Vamos agora substituir o resultado mostrado na eq. 4 na eq. 3:

$$\left(V_{2i} + V_{2f}\right)\left(V_{2i} - V_{2f}\right) = \frac{m}{M}\left[\frac{M}{m}\left(V_{2i} - V_{2f}\right)\right]^2 \qquad \text{eq. 5}$$
$$\left(V_{2i} + V_{2f}\right)\left(V_{2i} - V_{2f}\right) = \frac{M}{m}\left(V_{2i} - V_{2f}\right)^2$$
$$V_{2i} + V_{2f} = \frac{M}{m}\left(V_{2i} - V_{2f}\right)$$
$$V_{2f}\left(1 + \frac{M}{m}\right) = V_{2i}\left(\frac{M}{m} - 1\right)$$
$$V_{2f}\frac{m+M}{m} = V_{2i}\frac{M-m}{m}$$
$$\boxed{V_{2f} = V_{2i}\frac{M-m}{M+m}}$$

Temos agora a expressão desejada para a velocidade da partícula que bateu escrita apenas em termos de variáveis conhecidas no problema: V_{2i}, m e M. Podemos agora usar esse resultado para obter a velocidade da partícula que sofreu o choque. Substituindo a expressão da velocidade da partícula que bateu na eq. 4 obtemos finalmente a velocidade da segunda partícula:

$$v_{1f} = \frac{M}{m}\left(V_{2i} - V_{2f}\right)$$
$$v_{1f} = \frac{M}{m}\left(V_{2i} - V_{2i}\frac{M-m}{M+m}\right)$$

$$v_{1f} = \frac{M}{m}V_{2i}\left(1 - \frac{M-m}{M+m}\right) \qquad \text{eq. 6}$$
$$v_{1f} = \frac{M}{m}V_{2i}\frac{M+m-M+m}{M+m} = V_{2i}\frac{M}{m}\frac{2m}{M+m}$$
$$\boxed{v_{1f} = 2V_{2i}\frac{M}{M+m}}$$

As eq. 5 e eq. 6 são as equações que procurávamos. Por inspeção, podemos ver que os resultados apresentam as dimensões corretas.

Vamos agora analisar alguns casos limites.

Limite 1 – As duas partículas têm a mesma massa $M = m$ (problema do jogador de sinuca)

Nessa situação podemos escrever:

$$v_{1f} = 2V_{2i}\frac{M}{M+m} = 2V_{2i}\frac{m}{m+m} = 2V_{2i}\frac{m}{2m} = V_{2i}$$
$$V_{2f} = V_{2i}\frac{M-m}{M+m} = V_{2i}\frac{m-m}{m+m} = 0$$

Vemos, então, que a partícula que bateu fica parada, enquanto a partícula que estava inicialmente parada passa a se movimentar com a mesma velocidade da que bateu.

Limite 2 - A partícula incidente tem massa muito maior do que a partícula que sofre choque:

$M >> m$ (problema do projétil massivo)

Como a massa do projétil incidente é muito maior que a massa do projétil que recebe o choque (partícula alvo), podemos desprezar a massa da partícula alvo (m) no denominador da eq. 5 e da eq. 6 e no numerador da equação eq. 6. Nesse caso temos que:

$$v_{1f} = 2V_{2i}\frac{M}{M+m} \cong 2V_{2i}\frac{M}{M} = 2V_{2i}$$
$$V_{2f} = V_{2i}\frac{M-m}{M+m} \cong V_{2i}$$

Podemos concluir, então, que nessa situação o projétil incidente praticamente não muda a sua velocidade enquanto que o projétil que recebe o choque sai com velocidade aproximadamente o dobro da velocidade do projétil incidente.

Limite 3 – A partícula incidente tem massa muito menor do que a da partícula alvo $M \ll m$ (problema do alvo massivo)

Nessa situação, vamos desprezar a massa da partícula incidente (*M*) nas equações eq. 5 e eq. 6, obtendo:

$$v_{1f} = 2V_{2i}\frac{M}{M+m} \cong 2V_{2i}\frac{M}{m} << 1$$
$$V_{2f} = V_{2i}\frac{M-m}{M+m} \cong -V_{2i}\frac{m}{m} = -V_{2i}$$

Vemos, então, que a partícula incidente simplesmente inverte o sentido da sua velocidade, enquanto a partícula alvo praticamente não se movimenta.

O momento angular

O **momento angular**, simbolizado pela letra **L**, é uma quantidade bastante semelhante ao momento linear (ou quantidade de movimento). Porém, enquanto esse diz respeito ao movimento de translação, o momento angular diz respeito ao movimento de rotação em torno de um eixo.

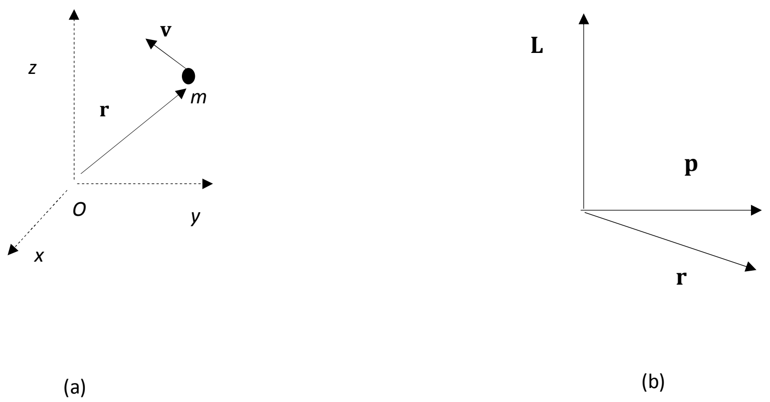


Figura 38 – Visão geométrica do momento angular.

Definimos o momento angular em função do momento linear de uma partícula que descreve um movimento em torno de um eixo. Veja a Figura 38.*a*.

Nessa figura, mostramos uma partícula de massa m localizada pelo vetor $\mathbf{r}$. Portanto, essa partícula possui **momento linear** dado por:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$$

Definimos o momento angular **L** da partícula **em relação à origem** como:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

Do que vimos sobre o produto vetorial[43] o vetor momento angular é perpendicular ao plano que contém os vetores $\mathbf{r}$ e $\mathbf{p}$ (Figura 38.*b*).

Figura 39 – Um helicóptero.

O momento angular está associado a uma simetria, da mesma forma que as outras quantidades conservadas, no caso a simetria frente às rotações, ou seja, a propriedade do sistema permanecer inalterado frente à rotação em torno de um eixo. Um exemplo de aplicação deste tipo de conservação é encontrado no projeto de helicópteros. Você já se perguntou por que este tipo de veículo possui duas hélices ao invés de uma? Bem, a resposta se encontra na necessidade de conservar o momento angular. Observe que, ao girar uma das hélices, o helicóptero passa a ter certa quantidade de momento angular, pois agora os pontos da hélice giram em torno do seu eixo. Como o momento angular total era nulo antes de a hélice começar a girar, para manter o momento conservado o resto do helicóptero deveria girar no sentido oposto. Para evitar que isto ocorra é adicionada a segunda hélice que cria certa quantidade de momento na direção oposta de modo a compensar o momento introduzido pela primeira e, assim, estabilizar o aparelho.

Como no caso do momento linear, o momento angular é uma grandeza vetorial, mas não nos preocuparemos com isso por enquanto. O que importa é que, do mesmo modo que o momento linear, o momento angular é conservado, ou seja, para que um corpo gire em um sentido é necessário que outro gire em outro sentido.

[43] Ver Complementos de Matemática.

Podemos então expressar um teorema para a conservação do momento angular como fizemos para o momento linear:

O momento angular total de um sistema fechado de partículas é constante.

A simetria associada nesse caso é a simetria frente às rotações.

Exemplo 18

A conservação do momento angular é utilizada em naves espaciais e satélites artificiais para fazer correções no direcionamento das baterias solares com relação à direção dos feixes de luz emitidos pelo Sol (veja a Figura 40).

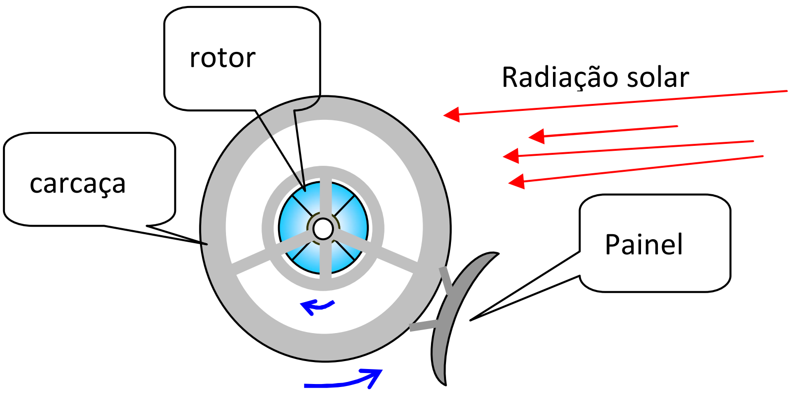


Figura 40 - Esquema do sistema de posicionamento da antena coletora em um satélite.

Para mudar a direção dos painéis solares que estão fixos na parte externa da nave, grandes rotores fixos na carcaça da nave são acionados girando em um dado sentido. Para que o momento angular do sistema permaneça nulo, nesse momento a carcaça da nave começa girar em sentido contrário, indo até uma posição desejada para direcionamento dos painéis. Quando a posição desejada é atingida, o rotor central é freado e a carcaça, como todo o sistema, para de girar.

Exemplo 19

O momento linear (**P**) e a energia cinética de translação ($\mathbf{E_c}$) estão relacionados ao movimento de translação e dependem da massa (inércia) e da velocidade **v**. Por outro lado, a quantidade de momento angular (**L**) e a energia cinética de rotação ($\mathbf{E_r}$) de um sistema dependem da velocidade angular (**ω**) em torno de um eixo e da forma como a massa do sistema está distribuída em torno do eixo, isto é cilíndrica, esférica ou alguma outra forma.

Um ventilador de teto que gira em torno de um eixo sem transladar possui apenas energia de rotação e momento angular enquanto uma hélice de um avião que voa possui energia de rotação e translação, momento linear e angular. A energia cinética de translação e o momento linear de um sistema dependem do referencial nos quais foram medidos

Por outro lado, um ventilador de teto dentro de um trem em movimento possui apenas energia de rotação e momento angular para o passageiro, mas para um observador fora do trem possui energias de rotação e translação, momento linear e angular.

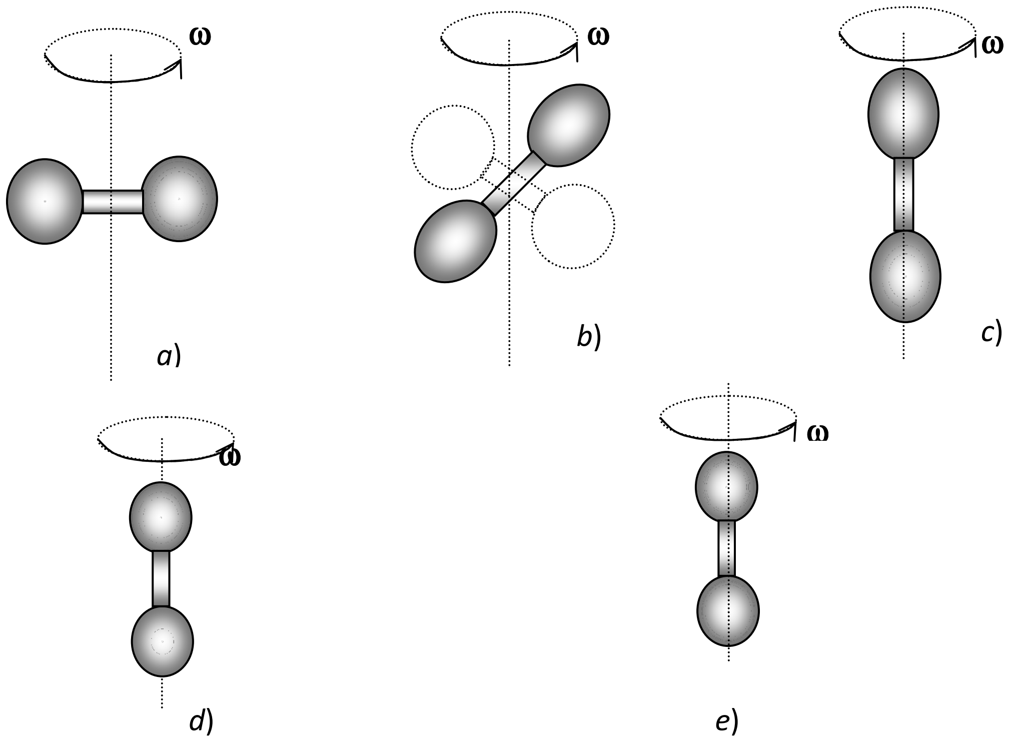


Figura 41 - Diferentes tipos de movimento para o haltere.

A Figura 41 mostra um altere que gira em torno de diferentes eixos. Nos casos *a, b* e *c* o haltere gira em torno de eixos **fixos,** com diferentes direções com relação ao eixo do haltere, mas com a mesma velocidade angular ω. Nos três casos, o haltere possui apenas energia de rotação e momento angular. Observe que, no caso *a,* a massa do haltere está distribuída mais distante do eixo que nos casos *b* e *c*. Portanto, no caso *a*, o haltere possui maior energia de rotação e maior momento angular. A energia de rotação e o momento angular são maiores que no caso *b*, que por sua vez é maior que no caso *c*.

Já nos casos *d* e *e,* vemos dois halteres de massas diferentes, também girando com a mesma velocidade angular ω. Como no caso *e*, temos uma quantidade maior de massa girando e, portanto, este haltere possui maior momento angular e maior energia cinética de rotação.

Outros tipos de conservações

Além das conservações discutidas acima temos duas outras quantidades que são conservadas em processos físicos: a massa e a carga elétrica. Podemos expressar esses dois princípios da seguinte forma:

1. Em todos os processos físicos, a massa total permanece constante.
2. Em todos os processos físicos, a carga elétrica total permanece constante.

Análise de equilíbrio e estabilidade

Um tipo de gráfico bastante interessante e ilustrativo é mostrado na Figura 42. Nele é mostrada a energia potencial de uma partícula em função d posição *x,* para vários pontos assinalados ao longo da trajetória da partícula. Na figura, também são mostrados vários valores para a energia total E da partícula. Naturalmente, em certo instante de tempo, a partícula somente pode ter um dentre os vários valores de energia total mostrados.

Para compreender esse tipo de gráfico devemos ter em mente que a energia total da partícula, sendo a soma da sua energia potencial e de sua energia cinética, deve sempre ser maior que (ou no máximo igual) a qualquer uma das parcelas que a compõe.

Analisando a topologia do gráfico da Energia Potencial, a primeira coisa que chama a nossa atenção são os valores mínimos da energia potencial observados nos pontos rotulados por x_4 e x_8. Esses pontos são chamados de pontos de mínimo na energia potencial. O ponto localizado na posição x_4 é o que chamamos de mínimo absoluto da energia potencial, uma vez que nenhum outro ponto do gráfico apresenta valor da energia potencial inferior ao valor mostrado nesse ponto. Por sua vez, a posição x_8 é chamada de mínimo local, pois no entorno desse ponto não há nenhum outro ponto que tenha a energia potencial menor que a dele. Naturalmente, se nos afastarmos o suficiente essa afirmação não é mais verdadeira.

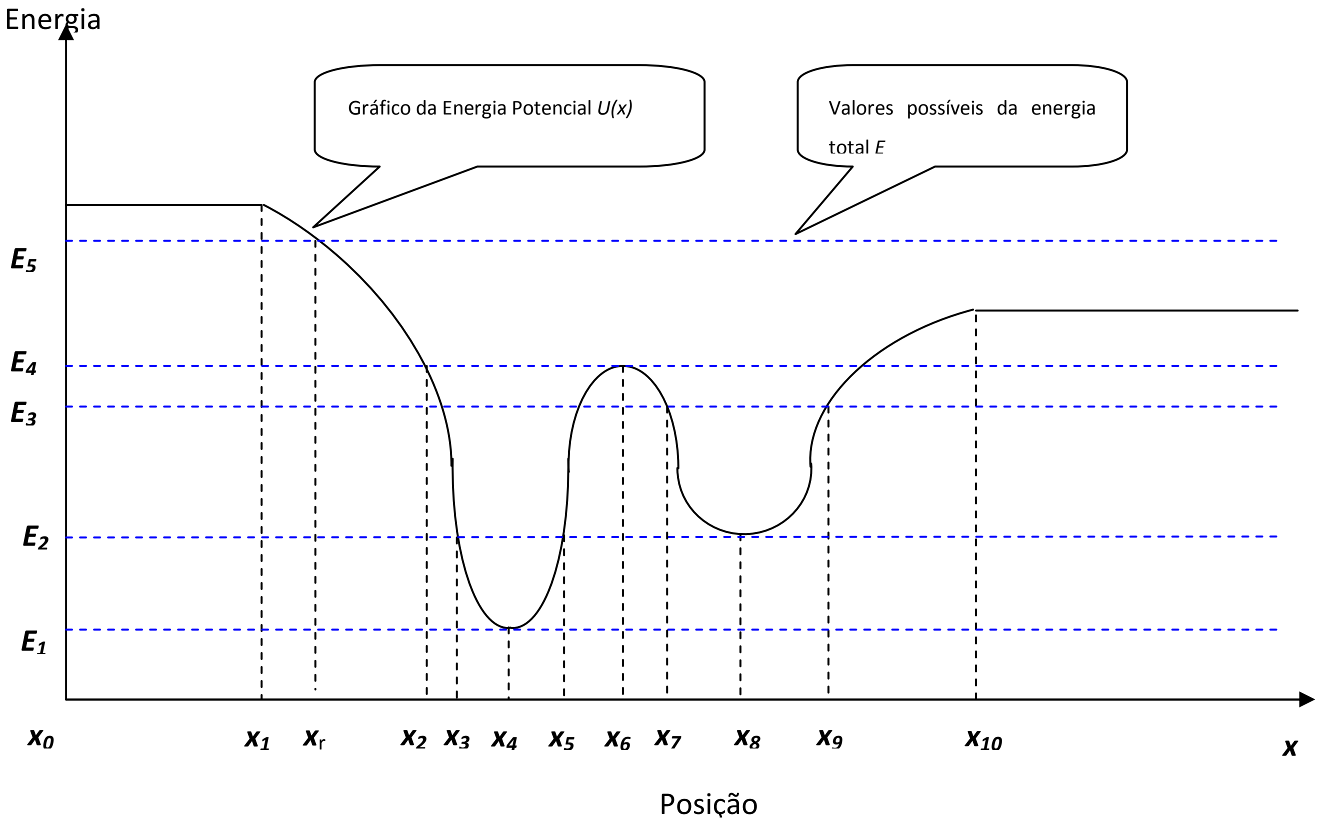


Figura 42 - Gráfico da energia potencial para vários valores de x. Também são mostrados vários valores possíveis para a energia total da partícula.

Por sua vez, os pontos localizados entre as posições x_0 e x_1, o ponto x_6 e os pontos à direita da posição x_{10} são chamados de máximos da energia potencial. Os pontos no intervalo $[x_0, x_1]$ são chamados de máximos globais da Energia Potencial, uma vez que nenhum outro ponto no gráfico apresenta valores de energia potencial superior à energia desses pontos. Os demais são chamados de máximos locais, pois são os maiores valores que podemos ter se tomarmos uma vizinhança adequada desses pontos.

Tendo isso em mente, podemos analisar o comportamento da partícula conforme a energia total (E) que possui. Para fins de raciocínio, vamos supor que a variável *x* denote posição. Contudo o raciocínio desenvolvido abaixo é geral, bastando que a variável *x* seja a variável do sistema físico da qual a energia potencial dependa.

Caso 1 – Partícula com energia E_1

Nesse caso, vemos que temos apenas um ponto onde a energia total é igual à energia potencial: o ponto x_4. Em virtude disso, todos os outros pontos não são acessíveis à partícula. Se olharmos para qualquer lado, teremos sempre a energia potencial maior que a energia total da partícula. A conseqüência disso é que a partícula somente pode ficar parada nessa posição.

Caso 2 – Partícula com energia E_2

Nesse caso, a partícula tem duas regiões nas quais a sua energia total é maior ou pelo menos igual à sua energia potencial.

A primeira região de acessibilidade é compreendida pelo intervalo $[x_3, x_5]$ e pelo ponto x_8. Se a partícula for solta em qualquer ponto entre as posições do intervalo $[x_3, x_5]$, o ponto x_3 por exemplo, ela começará a se movimentar em direção à região de menor energia potencial, transformando energia potencial em cinética na descida e cinética em potencial na subida. Se desprezarmos o atrito, então a partícula executará um movimento de oscilação, indo e voltando entre as posições x_3 e x_5.

O outro ponto acessível à partícula é o ponto x_8. Como no Caso 1, se colocada nessa posição, a partícula vai aí permanecer, já que não há na vizinhança ponto com energia potencial menor que a energia total da partícula.

Observe que as duas regiões não se comunicam, pois para ir do intervalo $[x_3, x_5]$ para a posição x_7, ou vice-versa, a partícula precisaria atravessar regiões nas quais a energia potencia é maior que a energia E_2, o que não é permitido pela conservação da energia.

Caso 3 – Partícula com energia E_3

Agora a partícula tem duas regiões nas quais sua energia é maior ou pelo menos igual a sua energia potencial: os intervalos $[x_2, x_6]$ e $[x_7, x_9]$. Agora, se colocada a oscilar, sem atrito, entre os limites de cada um dos intervalos a partícula aí vai permanecer oscilando entre os pontos extremos do intervalo.

Novamente, vemos que as duas regiões não se comunicam, pois para ir de uma até a outra a partícula deveria atravessar regiões nas quais a energia potencial supera a sua energia total.

Caso 4 – Partícula com energia E_4

Essa situação é similar a do caso anterior. Porém agora a energia total da partícula tem o mesmo valor que a energia potencial no ponto x_6. Portanto, agora temos duas possibilidades novas: *i*) A partícula se colocada a oscilar pode passar de uma região para a outra, pois agora ela pode passar pela posição x_6; *ii*) Se colocada exatamente na posição x_6 a partícula aí vai permanecer. Contudo qualquer perturbação fará com que ela se desloque para uma das duas regiões que lhe são acessíveis.

Caso 5 – Partícula com energia E_5

Nesse caso a energia da partícula é maior do que a energia potencial, exceto pela região a esquerda do ponto x_r. A direita desse ponto, todas as posições são acessíveis a partícula, pois teremos a energia potencial sempre menor do que a energia total.

Nessa posição a energia da partícula fica igual a sua energia potencial. Esse ponto é chamado de ponto de retorno, pois uma partícula que se movimente da direita para a esquerda (em direção à origem) ao chegar nesse ponto terá o sentido da sua velocidade invertido, passando a mover-se da esquerda para a direita (no sentido de $x \rightarrow \infty$).

Podemos ainda obter outras informações bastante interessantes de um gráfico desse tipo. O que aconteceria se colocássemos a partícula para oscilar em torno dos pontos de mínimo do gráfico da energia potencial? Como vimos a partícula desenvolveria um movimento de oscilação em torno desse ponto de mínimo. Se levarmos em conta o atrito, a medida que o tempo passa a partícula perderia energia para a vizinhança e retornaria a esse ponto de mínimo da energia potencial. Esses pontos são chamados de pontos de **equilíbrio estável** do sistema. Toda vez que deslocamos o sistema de um ponto de equilíbrio estável o sistema tende a voltar para esse ponto. Basta um pouco de dissipação de energia (atrito no caso da partícula) para que depois de algum tempo recuperemos a situação inicial.

Analisemos agora o que acontece nos pontos de máximo. Comecemos analisando o que acontece no máximo local, localizado na posição x_6. Se colocarmos a partícula nessa posição ela ficará ali. Contudo, qualquer perturbação na energia da partícula fará com que ela vá para os dois vales (regiões de mínimo da energia potencial) localizados a direita e a esquerda desse ponto. Havendo qualquer processo dissipativo (perda de energia por atrito, por exemplo), a partícula não mais retornará a esse ponto. Esse ponto é chamado de ponto de **equilíbrio instável**: uma vez que a partícula seja perturbada ela não mais voltará a esse ponto.

Por outro lado, os pontos nas regiões $[x_0, x_1]$ e a direita da posição x_1 apresentam características diferentes. Nesses pontos, se deslocarmos levemente a partícula da posição onde ela se encontra a partícula permanece exatamente onde a colocarmos, já que, em cada intervalo considerado, esses pontos têm a mesma energia potencial. A esses pontos chamamos de pontos de **equilíbrio indiferente**.

Pontos com o ponto x_2 são chamados pontos de não equilíbrio: a partícula quando colocada nesse ponto não permanece nele.

Esse tipo de análise é chamada de **Análise de Equilíbrio e Estabilidade**. De fato o problema consiste em responder a duas perguntas:

1. Em quais pontos a partícula permanecerá se colocada lá? A resposta a essa pergunta é o que chamamos de **Análise das Condições de Equilíbrio** do sistema;
2. Quando colocada em uma posição de equilíbrio (resposta da questão anterior), se o sistema for perturbado levemente ele retorna para a posição de equilíbrio original ou vai para um novo estado de equilíbrio? Essa análise é o que chamamos de **Análise de Estabilidade**.

A Análise de Equilíbrio e Estabilidade dos sistemas físicos em geral é extremamente poderosa e útil. Quando estudamos um sistema físico qualquer, esse sistema será descrito por um conjunto de variáveis de estado. Assim, representamos o estado do sistema em certo instante de tempo, $S(t)$, por certo conjunto de valores das variáveis de estado:

$$S(t) = \{V_1, V_2, V_3, \dots, V_n\}$$

Determinar o equilíbrio do sistema significa descobrir para qual conjunto de valores das variáveis de estado o sistema estará no mínimo da sua energia potencial (equilíbrio estável), no máximo da sua energia potencial (equilíbrio instável) e em regiões nas quais o valor da energia potencial do sistema não varia se mudarmos o valor das variáveis de estado. Determinar se os pontos de equilíbrio são instáveis ou estáveis envolve verificar se o sistema volta ou não para o estado original ao mudarmos o valor das variáveis de estado do sistema por uma quantidade pequena. Esquematicamente podemos representar essa situação como na Figura 43.

Sumário

Neste capítulo estudamos as principais simetrias que nos interessam em Física. Como vimos, as simetrias são extremamente importantes em Física pelo fato de que podemos associar a cada simetria que encontramos no Universo uma quantidade conservada. Como veremos no próximo capítulo, são as quantidades conservadas que nos permitem fazer previsões sobre o universo.

As simetrias que estudamos foram as seguintes:

Simetria especular

É a simetria que algum objeto apresenta frente a uma reflexão em um espelho. Generalizando esta idéia, dizemos que um objeto apresenta simetria especular quando se apresenta inalterado quando projetado em algum plano.

Simetria frente a rotações

É a simetria que um objeto apresenta frente a rotações em torno de um eixo. Os ângulos para os quais os objetos apresentam este tipo de simetria variam de objeto para objeto. A esfera, por exemplo, apresenta simetria frente a qualquer eixo passando pelo seu centro, não importando qual o ângulo frente ao qual ela é girada. Já um cubo apresenta simetria frente a rotações em torno de eixos perpendiculares às suas faces frente a ângulos múltiplos de 90°. Temos a conservação do momento angular associada a essa simetria.

Simetria frente a translações espaciais

Dizemos que um sistema tem simetria frente a translações espaciais quando o resultado de um experimento é independente da posição no espaço onde o experimento é realizado. Esta é uma propriedade fundamental do Universo, pois, sem ela, um experimento feito na Índia talvez não reproduzisse o mesmo resultado de outro feito no Brasil e, conseqüentemente, as conclusões que retiramos dos experimentos perderiam o caráter de generalidade. Temos a conservação do momento linear associada a essa simetria.

Simetria frente às translações temporais

Temos simetria frente a translações espaciais se, para um dado sistema físico, o instante no tempo no qual um experimento acontece não influencia o seu resultado. Assim, se fizermos um experimento hoje e repetirmos o mesmo experimento amanhã obteremos, sob as mesmas condições, o mesmo resultado. Temos a conservação da energia associada a essa simetria.

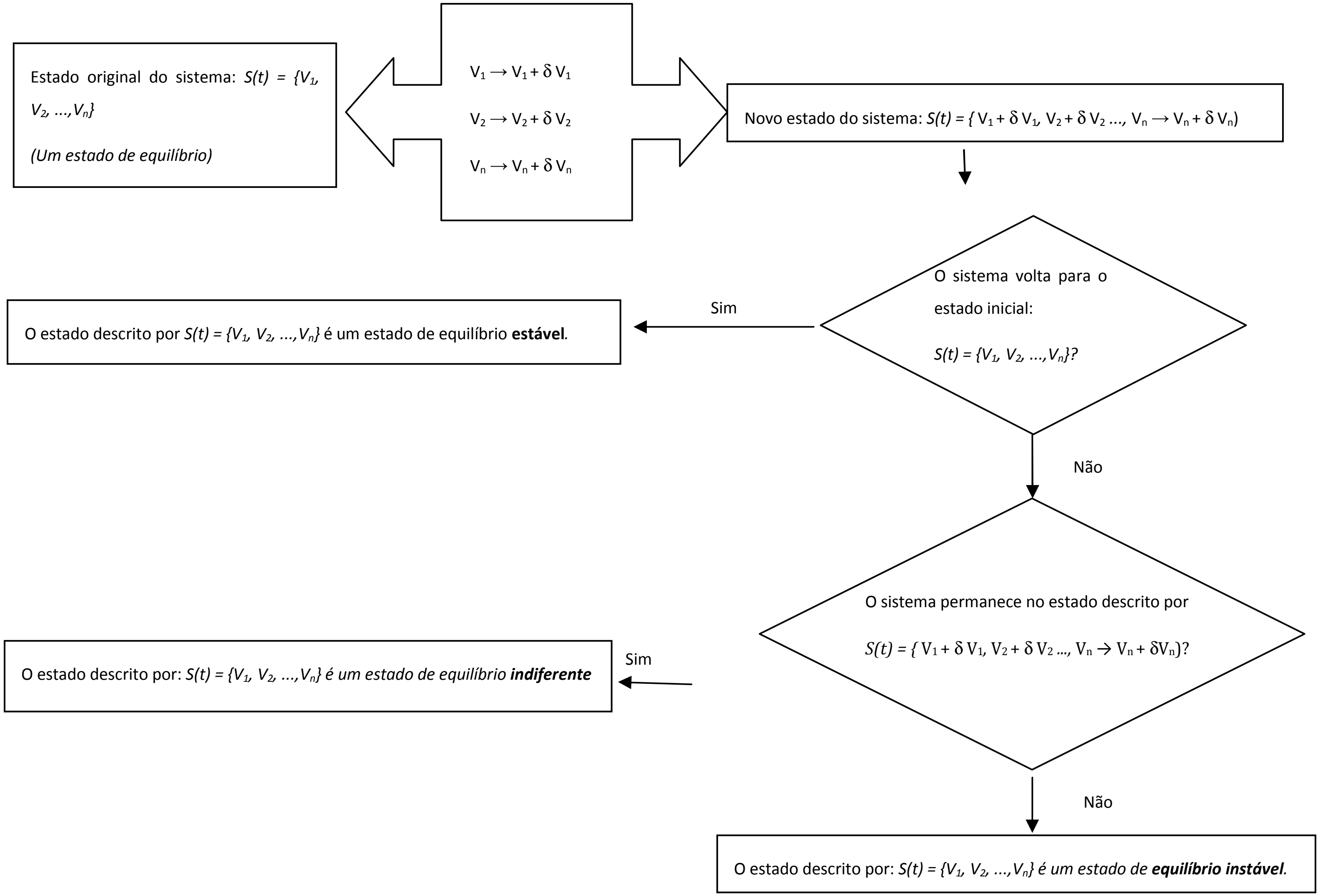
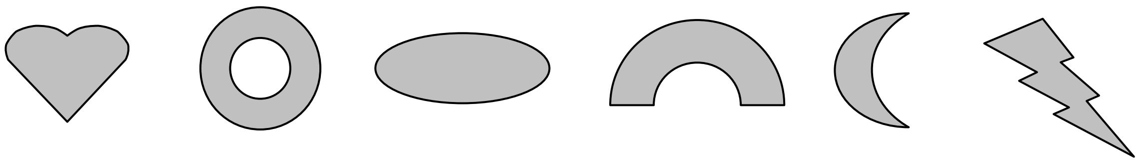


Figura 43 - Esquema para a análise de equilíbrio e estabilidade.

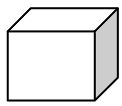
Problemas

1 Dos números e figuras abaixo identifique aqueles (as) que possuem simetria de rotação, seu respectivo eixo de simetria e qual o ângulo de simetria.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 11



2 a) Qual o maior número de cores diferentes poderiam ter as faces de um cubo de maneira que o cubo possua simetria de rotação quando girado de 180°?



b) Quais os eixos e ângulos de simetria da carta de baralho mostrada na Figura 44 frente a rotações? Como deveria ser uma carta de baralho (Ás de ouro) para apresentar simetria de rotação de 90°?

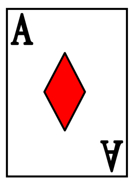


Figura 44 – Carta de baralho

3 Discuta as formas de energia, e as transformações envolvidas, ao disparar um projétil através de uma arma, desde puxar do gatilho até o projétil atingir o solo (Figura 45). Leve em consideração: a pólvora, o ar, o som, a luz, etc.

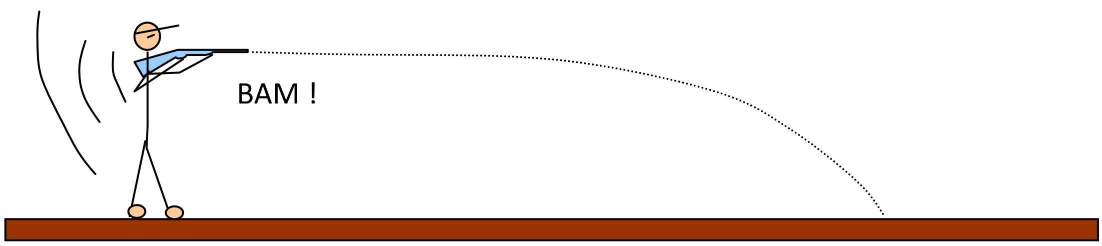


Figura 45

4 Discuta as formas de energia e as transformações envolvidas nas seguintes ações:

a) Iluminar um quarto escuro através de uma lâmpada (considere a energia elétrica produzida por uma usina hidrelétrica). Faça um diagrama reverso identificando em cada passo as fontes de energias, reservatórios e as transformações envolvidas;

b) Colidir um carro contra um muro;

c) Bombear água para o alto de um edifício;

d) Disparar fogos de artifício (rojões).

5 Discuta em que condições um sistema físico estaria completamente isolado de interações com a vizinhança.

6 Uma esfera é solta em duas rampas de mesma geometria. Em uma das rampas a superfície é lisa e na outra a superfície é áspera (Figura 46). Discuta em qual dos casos a esfera chega na base da rampa com maior velocidade.

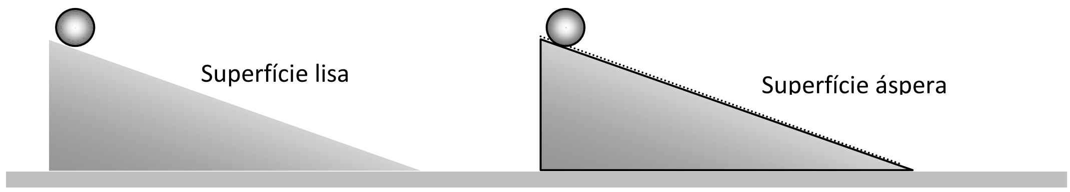


Figura 46

7 Se o momento linear de um objeto é dado por $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, m é a massa do objeto e $\mathbf{v}$ sua velocidade de translação, determine qual deveria ser a velocidade de um foguete de massa 100 toneladas para que seu momento linear fosse igual ao momento linear da Terra devido ao movimento de translação em torno do Sol.

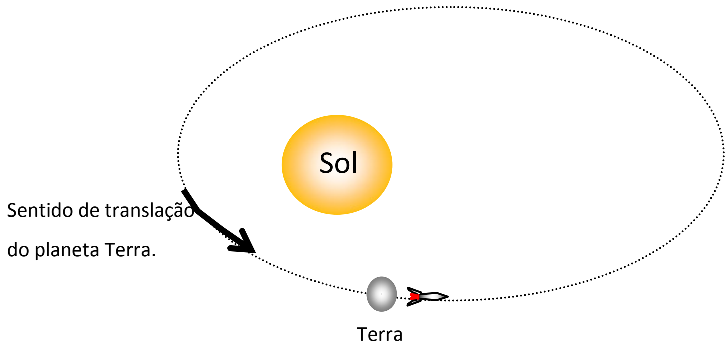


Figura 47

a) Pesquise e relacione os dados necessários para responder esta questão;

b) O que aconteceria com o planeta Terra se este foguete fosse lançado da Terra com esta velocidade no mesmo sentido que a Terra translada em torno do Sol?

8 Considere o momento do *strike* no jogo de Boliche. Se o momento linear é uma grandeza que se conserva, que direção terá a soma de todos os momentos lineares das garrafas, após terem sido atingidas por uma bola de boliche? Considere que a bola de boliche, devido a sua grande inércia, não muda a direção de seu movimento após a colisão.

9 Uma granada inicialmente em repouso explode em um solo plano, partindo-se em três pedaços iguais. Depois da explosão dois pedaços são localizados em posições separadas, descreva um procedimento para encontrar o terceiro pedaço, faça ilustrações.

10 Considerando a época de crise de energia que estamos vivendo, discuta como esta crise poderia ser amenizada em uma academia de musculação?

11 Explique porque um carro com rodas leves economiza mais combustível no tráfego que outro carro idêntico, mas de rodas pesadas?

12 Explique a função dos grandes volantes existentes nos motores de combustão (e também nas máquinas para quebrar pedras, veja a Figura 48).

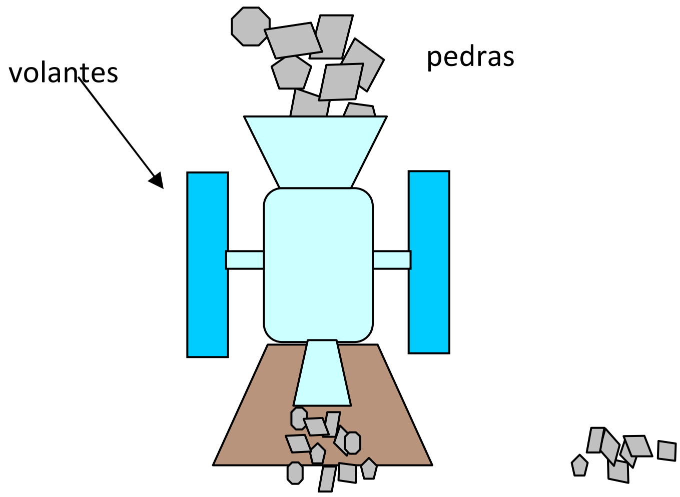
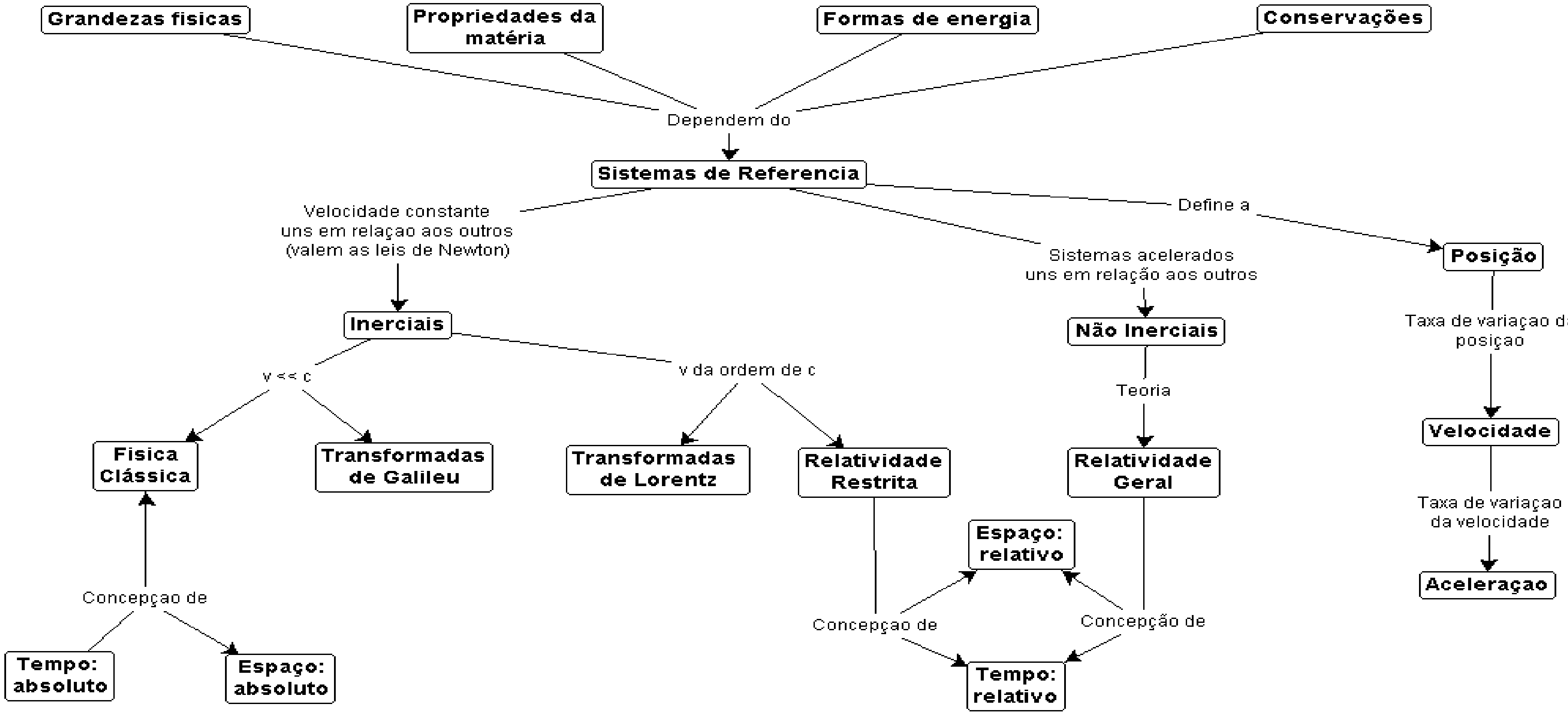


Figura 48

Capítulo III - Sistemas de referência e movimento



Mapa 7 - Submapa para o conceito de Sistemas de Referencia

A natureza do espaço e do tempo é uma das mais antigas preocupações do Homem. Essa preocupação já aparece na Grécia antiga, nos mitos sobre a origem dos deuses. Para relembrar, em uma de suas formas, esse mito afirma que na origem era o Caos e do Caos surgiram a Terra (Gaia) e o Céu (Urano). Mal nascido do Caos, Urano começa a fecundar Gaia, gerando filho após filho, dentre os quais Cronos, o tempo. Cansado de tanto ver sua mãe fecundada, Cronos assassina Urano e casa-se com sua irmã, Réia. Temendo, como seu pai, ser destituído por um de seus filhos, Cronos os devora logo que nascem. Usando de um artifício, Réia engana Cronos e salva um de seus filhos, Zeus, que viria mais tarde a matar o pai, tomando o lugar de rei dos deuses no Olimpo.

Nesse mito, vemos claramente a percepção de que o tempo ao mesmo tempo em que engendra todas as coisas, as devora, ou seja, as coisas existem no tempo e sua existência é destruída pelo tempo. No entanto, essa destruição pelo tempo acaba quando entra em cena, simbolizada por Zeus, a razão humana. É o fim do reino da desordem e o início da sociedade organizada.

O leitor que se dedicar a estudar um pouco mais de mitologia verá que nesses mitos o tempo e o espaço são dados *a priori*, o que quer dizer que antes de todos os deuses, o tempo e o espaço já são.

Outros mitos sobre a criação do mundo podem ser encontrados nos seguintes endereços eletrônicos:

http://www.geocities.com/Athens/Olympus/7866/index.html.

http://www.pegue.com/

http://www.geocities.com/Athens/Parthenon/8445/index.htm

http://www.geocities.com/Athens/Acropolis/2093/main.html

http://www.terravista.pt/ilhadomel/2359/mito2.htm

Leia agora a transcrição abaixo:

> O tempo absoluto, verdadeiro e matemático, flui sempre igual por si mesmo e por sua natureza, sem relação com qualquer coisa externa, chamando-se com outro nome "duração"; o tempo relativo, aparente e vulgar é certa medida sensível e externa de duração por meio do movimento (seja exata, seja desigual) a qual

> vulgarmente se usa em vez do tempo verdadeiro, como são a hora, o dia, o mês, o ano.
>
> O espaço absoluto, por sua natureza, sem nenhuma relação com algo externo, permanece sempre semelhante e imóvel; o relativo é certa medida ou dimensão móvel desse espaço, a qual nossos sentidos definem por sua situação relativamente aos corpos, e que a plebe emprega em vez do espaço imóvel, como é a dimensão do espaço subterrâneo, aéreo ou celeste, definida por sua situação relativamente a terra. Na figura e na grandeza, o tempo absoluto e o relativo são a mesma coisa, mas não permanecem sempre numericamente os mesmos. Assim, p. ex., se a terra se move, um espaço do nosso ar que permanece sempre o mesmo relativamente, e com respeito a terra, ora será uma parte do espaço absoluto no qual passa o ar, ora outra parte, e nesse sentido mudar-se-á sempre absolutamente.[44]

Estas duas citações balizaram a Física Clássica e definiram o plano de fundo sobre o qual as concepções de Universo foram construídas por duzentos anos. No contexto da Física Clássica, o espaço e o tempo são dados *a priori*. Eles formam o palco no qual as ações se desenvolvem. Nesse contexto, o espaço e o tempo contêm tudo o que acontece no universo.

Um aspecto importante dessa concepção de espaço e de tempo é que todos os entes do Universo percebem o mesmo espaço e o mesmo tempo (a duração de que fala Newton). Essa concepção é a que está por trás das transformações de Galileu e é no momento em que essa concepção é abandonada que ocorre a passagem da Física Relativística Clássica para a Física Relativística Contemporânea. Mas antes de analisarmos mais detidamente isto, precisamos definir o que se entende por um sistema de referência em Física.

[44] NEWTON, Isaac. **Princípios Matemáticos da Filosofia Natural**. Trad. Carlos Lopes de Mattos e Pablo Rubén Mariconda. IN: Os Pensadores, Abril Cultural, São Paulo, 1978.

Sistemas de referência

Definimos como sistema de referência a um conjunto de pontos que usamos para localizar todos os outros pontos do espaço. É claro que os pontos desse conjunto devem estar em repouso relativo uns em relação aos outros.

Tomemos as paredes de uma sala como exemplo. Vamos tomar duas paredes laterais e o piso como mostra a Figura 49.*a*. Podemos localizar qualquer ponto dentro da sala a partir da sua distância às paredes laterais e ao solo. Por exemplo, consideremos um lustre que estivesse pendurado no teto como mostra a Figura 49.*b*. Se quiséssemos indicar a alguém qual a posição em que a base do ventilador está, como faríamos? Vamos esquematizar a situação mostrada nessa figura da seguinte maneira. Olhemos somente para as arestas[45] entre as paredes e entre estas e o solo (as linhas pontilhadas na figura). Se desenharmos apenas estas linhas e simbolizarmos por um ponto a posição onde a base do ventilador está assentada, obteríamos a Figura 49.*c*. Nessa figura, batizamos a aresta entre as duas paredes de z e as arestas entre as paredes e o solo por x *e* y. Chamaremos de P o ponto onde o ventilador é preso ao teto. A cada uma das arestas chamamos de **eixo do nosso sistema de referência**. Deve ser observado que os nomes dados às linhas definem um sistema com rotação à direita: se executarmos uma rotação à direita (contra o sentido de movimento dos ponteiros do relógio) sobre o eixo z, o eixo x será levado sobre o eixo y. O ponto onde as três linhas se encontram chamamos de **origem** do nosso sistema de referência, normalmente assinalada pela letra O.

Como podemos localizar o ponto da base do ventilador em relação às paredes? Uma solução é a seguinte: vamos medir a distância do ponto a cada uma das paredes e em relação ao solo. Essa medida deve ser feita segundo o procedimento a seguir: medimos a distância perpendicular a cada parede e ao solo, como na Figura 49.*d*. Se medirmos os segmentos de reta desenhados na figura, saberemos dizer com certeza qual é a posição da base do ventilador. Se os números que se encontram sobre as linhas indicarem o comprimento de cada segmento de reta então poderemos dizer que a base do ventilador se encontra a 2 m da parede definida pelas arestas que chamamos de x e z, a 2 metros da parede definida pelas arestas y e z e a 4 m do solo (definido pelas arestas x e y). De modo a simplificar a maneira de comunicarmos essa informação poderíamos convencionar um modo de indicar a posição dos vários pontos do espaço em relação às paredes e

[45] Uma aresta é por definição o conjunto de pontos comuns a dois planos que se cruzam ou, em outras palavras, a linha comum aos dois planos.

ao solo. Indicaremos as posições de objetos no espaço por um conjunto de três números sempre na seguinte ordem:

- Primeiro a distância da parede formada pelas arestas *y* e *z*;
- A seguir, a distância da parede formada pelas arestas *x* e *z;*
- Por último, a distância ao solo (definida pelas arestas *x* e *y*).

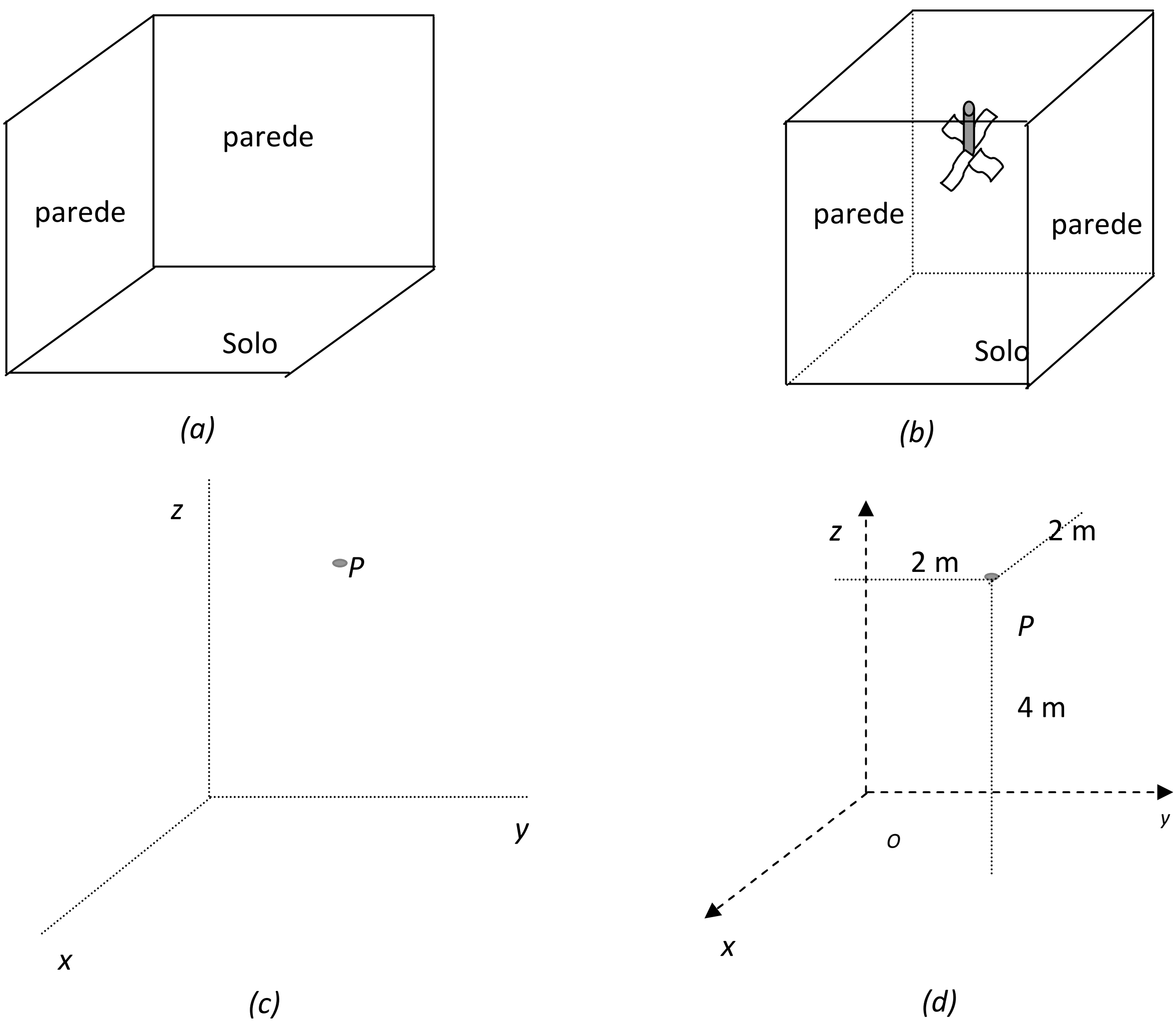
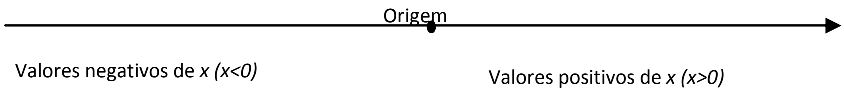


Figura 49 - Localização de um ponto no espaço.

Com isso, a posição da base do ventilador no exemplo será denotada por (2, 2, 4). Observe que essas distâncias correspondem à distância ao longo de cada uma das arestas até a origem. Denotaremos esses números por um terno ordenado composto pelas distâncias até a origem ao longo das arestas *x, y* e z. Dizemos então que a coordenada *x* vale 2, que a coordenada *y* vale 2 e que a coordenada *z* vale 4. Todos os outros pontos do espaço podem ser referenciados da mesma maneira, através dos valores das suas coordenadas (*x, y, z*).

Mas como fazer para indicar pontos que estão fora da sala, em uma sala ao lado, por exemplo? Uma forma de resolver esse problema é definindo uma **orientação** para o nosso sistema de eixos. Indicaremos um sentido de crescimento para os valores indicados em cada eixo. Assim, pontos sobre um eixo que estão após a origem, no sentido definido como positivo terão valores positivos e pontos que se encontram antes da origem terão valores negativos. Por exemplo, para o eixo *x* teremos a situação mostrada na figura abaixo:



Nos outros eixos teremos algo semelhante. O eixo *y* terá valores positivos à direita da origem e negativos à esquerda e o eixo *z* terá valores positivos acima da origem e negativos abaixo da origem. Com os segmentos orientados dessa maneira, nosso sistema de coordenadas fica como mostrado na Figura 50.

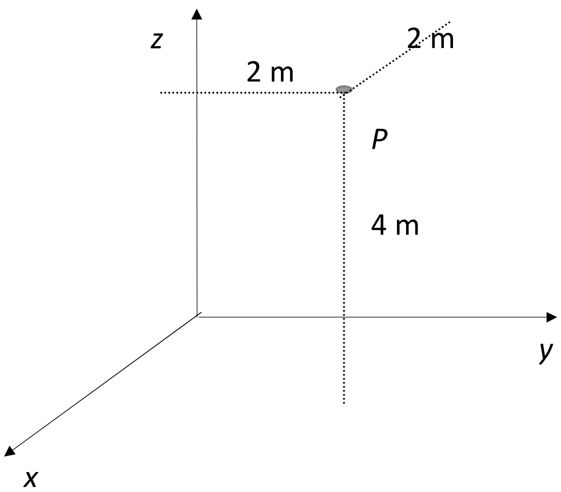


Figura 50 - Sistema de Coordenadas Cartesiano.

Esta forma de definir os números associados a cada um dos pontos do espaço recebe o nome de **Sistema Cartesiano de Coordenadas**. Observe-se que as grandezas *x, y* e *z* podem assumir valores nos intervalos[46]:

$$-\infty < x < +\infty;$$

$$-\infty < y < +\infty;$$

$$-\infty < z < +\infty$$

[46] ∞ : este símbolo, chamado de infinito, indica uma quantidade infinitamente grande, sem limite, que pode crescer sem limite.

No entanto, esta não é a única maneira de indicarmos os diferentes pontos do espaço. Podemos definir várias outras *receitas* de como associar números a pontos no espaço. Por exemplo, veja a Figura 51. Veja que nessa figura introduzimos duas novas quantidades: os ângulos ϕ e θ. O primeiro é o ângulo entre o eixo *x* e o segmento de reta que vai da origem até o ponto onde a projeção perpendicular do ponto *P* encontra o plano *xy*. O segundo é o ângulo entre o vetor $\mathbf{r}$, que localiza o ponto *P*, e o eixo *z.* Estas quantidades também definem univocamente o ponto *P* se impusermos algumas condições.

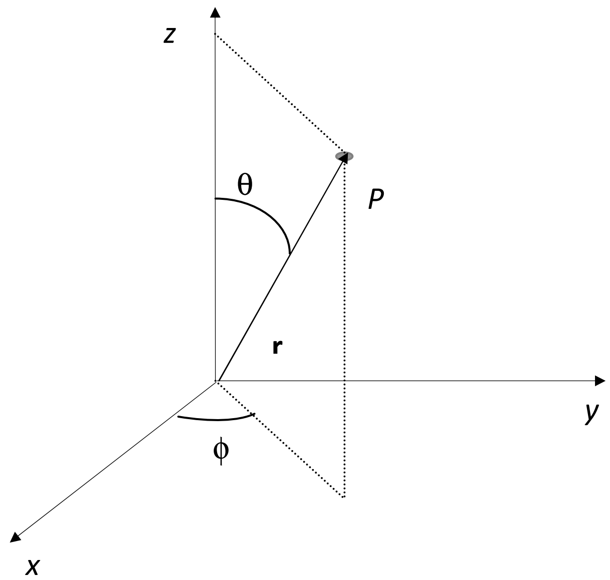


Figura 51 - Sistema de Coordenadas Esférico.

1) O vetor $\mathbf{r}$ tem módulo[47] que pode ser 0 (zero), quando o ponto *P* é a própria origem, e pode crescer indefinidamente, para pontos que estão afastados da origem. Então o intervalo de variação do módulo de **r**, que simbolizaremos por *r*, será dado por:

$$0 < r < \infty$$

O estudante deve observar que o valor de *r* deve ser maior do que zero. Isto acontece porque para este valor particular de *r* poderíamos ter qualquer ângulo, o que levaria a uma múltipla atribuição de valores para a origem. Por essa razão, a origem, correspondendo a *r = 0* é indicada por $\mathbf{r}=(0,0,0)$.

[47] O módulo de um vetor é uma medida da sua intensidade. Graficamente, é representado pelo tamanho do segmento de reta orientado que o representa: quanto maior é o segmento de reta maior é a intensidade do vetor.

2) Os ângulos θ e ϕ merecem uma análise mais detalhada. Ambos podem, em princípio, ter qualquer valor. No entanto, queremos uma forma de atribuir a cada ponto do espaço apenas um conjunto de números que o identifique, e que cada conjunto de números identifique apenas um ponto no espaço. Para fazermos isto imporemos que os ângulos variem da seguinte maneira:

$$0 \leq \phi < 2\pi$$

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

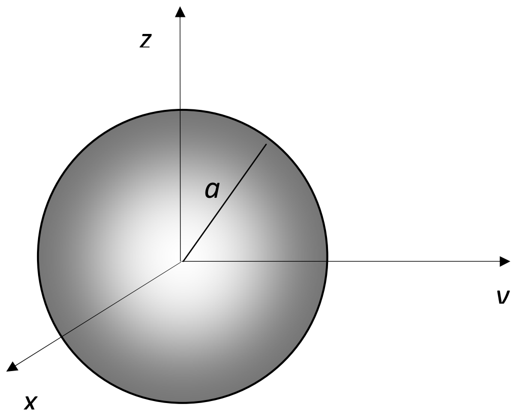


Figura 52 - Esfera definida pela variação das coordenadas θ e ϕ (r = a, a constante).

Desta maneira, qualquer ponto no espaço será definido pelo terno **ordenado** de números (r,θ,ϕ). Este sistema de coordenadas recebe o nome de **Sistema de Coordenadas Esférico***.* O nome vem da observação de que se tomarmos um valor constante para a coordenada r a variação das coordenadas θ e ϕ desenha uma esfera no espaço, como mostrado na Figura 52.

Além das duas maneiras descritas acima, podemos ainda localizar os pontos no espaço através de outra *receita*. Observe a Figura 53.

Novamente, o ponto que queremos localizar no espaço está indicado pelo vetor **r.** Agora, no entanto, usamos as seguintes grandezas para caracterizar esse ponto:

1. A distância perpendicular do ponto ao eixo *z.* A essa distância damos o nome de ρ;
2. O próprio valor da coordenada *z;*
3. E, por fim, o ângulo entre o eixo *x* e o segmento de reta obtido ligando-se a origem do sistema de referência ao ponto onde a projeção perpendicular do ponto sobre o plano *xy* intercepta esse plano.

As coordenadas variam da seguinte maneira:

- Como no Sistema Cartesiano, a variação da coordenada *z* é dada por:

$$-\infty < z < +\infty;$$

- A coordenada ρ tem valor mínimo 0 (zero) quando o ponto se encontra sobre o eixo *z* e pode crescer indefinidamente para pontos que estão muito distantes do eixo *z*. Da mesma forma que a coordenada *r* no Sistema Esférico de Coordenadas, a coordenada ρ varia da seguinte maneira:

$$0 < \rho < \infty;$$

- Por fim a coordenada θ pode variar entre 0 e 2π: $0 \leq \theta < 2\pi$.

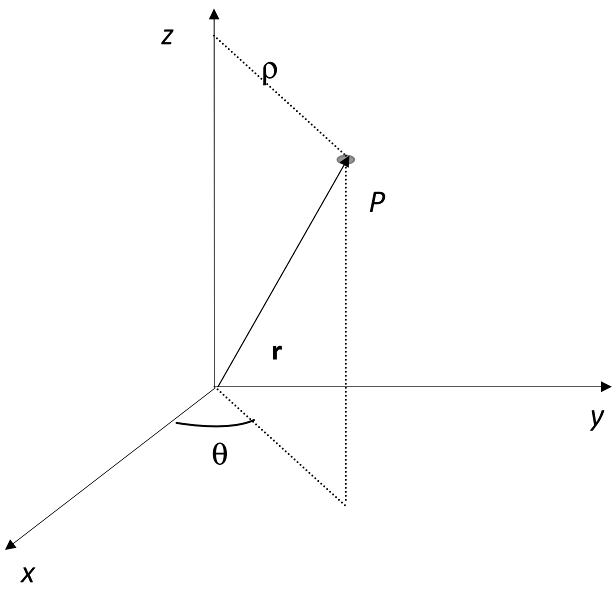


Figura 53 - O Sistema de Coordenadas Cilíndrico.

Observe que, da mesma forma que no Sistema Esférico de Coordenadas a variável *r* é definida positivamente, com a origem tendo um tratamento especial, no Sistema Cilíndrico de Coordenadas a variável ρ é definida maior do que zero. A razão é a mesma pela qual a variável *r* é definida positivamente no Sistema Esférico: se permitíssemos que a variável ρ fosse igual a zero, tomando pontos sobre o eixo *z*, ao mesmo tempo em que permitimos a variação do ângulo θ, teríamos uma indeterminação para os pontos sobre o eixo *z.* Por essa razão, para pontos sobre o eixo *z*, correspondentes a ρ = 0 corresponde, obrigatoriamente, a $\mathbf{r} = (0,0,z)$. Dessa maneira, não teremos indeterminação para pontos sobre o eixo *z.*

A exemplo do Sistema Esférico de Coordenadas, no qual ao mantermos constante o valor da coordenada r obtínhamos uma esfera pela variação das coordenadas θ e ϕ, o que dá o nome àquele sistema de coordenadas, aqui se fixarmos o valor da coordenada ρ obtemos um cilindro pela variação das coordenadas *z* e θ (Figura 54), daí o nome **Sistema de Coordenadas Cilíndrico**.

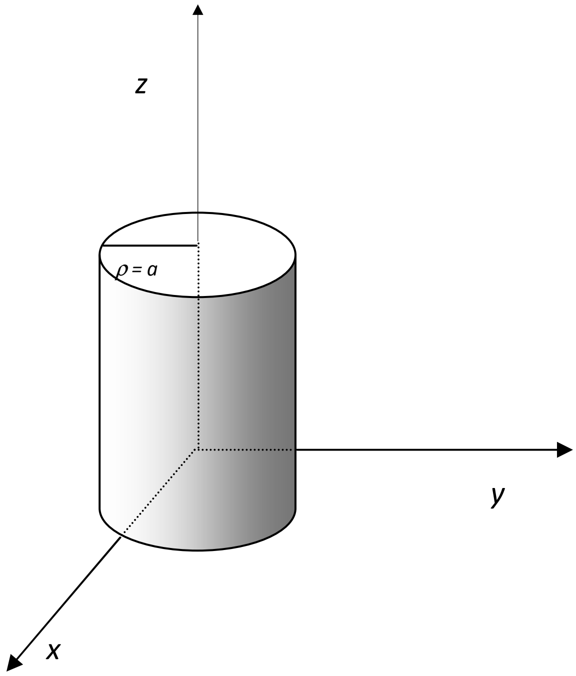


Figura 54 – Cilindro definido pela variação das coordenadas θ e z (ρ = a).

Exemplo 20

A Figura 55 representa uma sala de dimensões 3m x 4m x 5m, em um sistema de coordenadas cartesianas *xyz*.

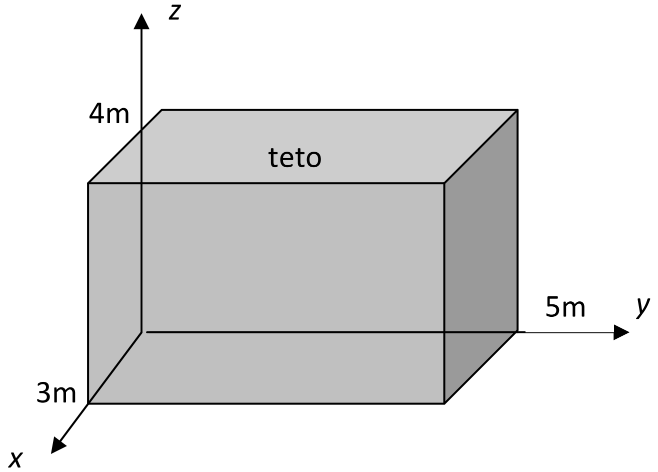


Figura 55 - Exemplo 19.

Identifique o intervalo de variação destas coordenadas para obter os seguintes lugares geométricos:

a) Teto da sala;
b) Piso da sala;
c) Todos os pontos contidos no interior da sala.

Solução:

a) $z = 4$; $0 \leq x \leq 3$ e $0 \leq y \leq 5$.
b) $z = 0$; $0 \leq x \leq 3$ e $0 \leq y \leq 5$
c) $0 < x < 3$; $0 < y < 5$ e $0 < z < 4$

Exemplo 21

Considere a forma da Terra esférica de raio R = 6400 km.

a) Represente o Globo Terrestre centrado na origem de um sistema cartesiano *O* (*xyz*) com o eixo Sul – Norte da Terra coincidente com o eixo *Oz* do sistema cartesiano. O plano equatorial coincide com o plano formado pelos eixos *Ox* e *Oy*, e o plano que contem o meridiano de Greenwich coincide com o plano formado pelos eixos *Ox* e *Oz*. O sentido Oeste para Leste coincide com o sentido crescente do eixo *Oy*.

b) Na condição anterior identifique e represente o sentido em que a Terra gira, como visto por um observador que olha na direção do eixo *Oz* no sentido decrescente, isto é, "de cima para baixo".

c) Localize sobre o Globo Terrestre um ponto **P** cuja posição é: 30^{o} de latitude Norte; 15^{o} de longitude Leste m ao nível do mar, e escreva a posição de P em coordenadas cartesianas.

d) Escreva a posição de P, agora em coordenas esféricas.

Solução

a) Veja a Figura 56.

b) Sentido anti-horário, veja a seta na figura, pois o Sol nasce ao leste.

c) P(*x,y,z*) ou P(5354km; 1434km; 3200km), pois: $x = R$ senϕ cosθ; y = R senϕ senθ ; z = R senϕ.

d) P(ϕ,θ ,R) ou P(π/3 rad; π/12 rad; 6400 km)

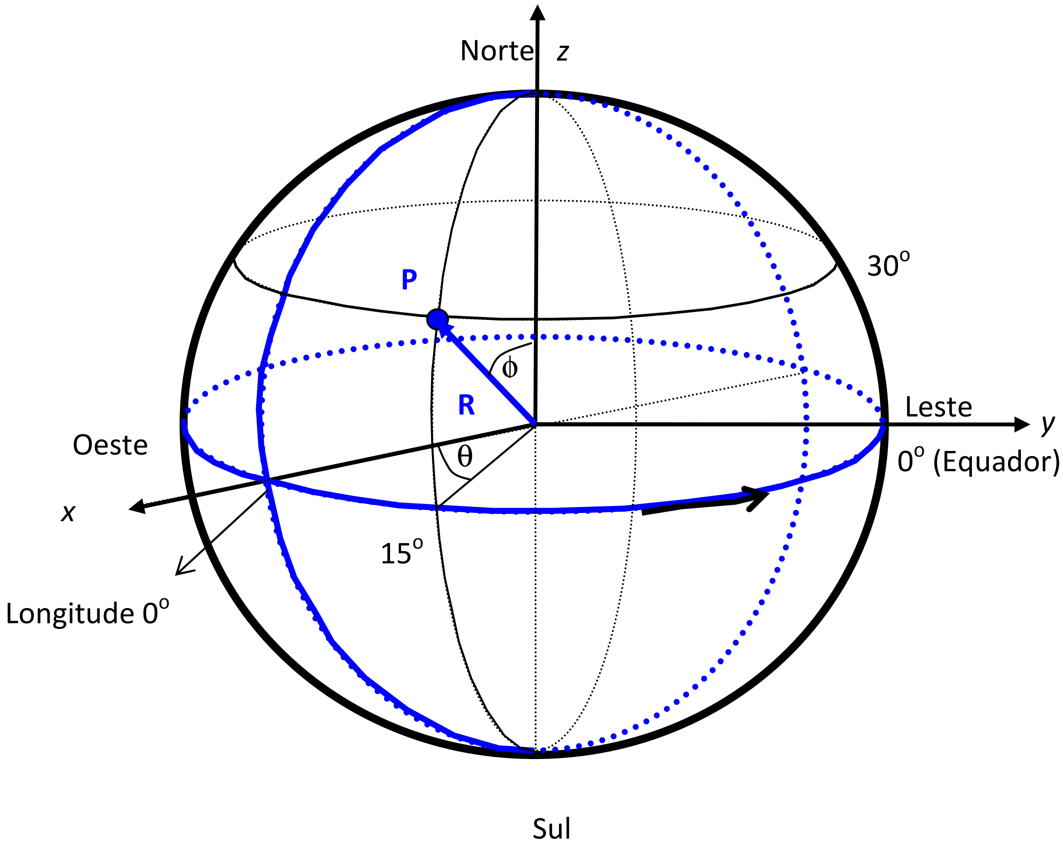


Figura 56 - Exemplo 21.

Sistemas de Coordenadas e Simetrias

Mas quando usar um ou outro sistema de coordenadas? A resposta a essa pergunta passa pela análise das simetrias envolvidas no problema. Se o problema apresenta simetria tipo translação espacial, então o Sistema Cartesiano de coordenadas é o mais apropriado. Por exemplo, considere um automóvel que se move ao longo de uma linha reta como mostrado na Figura 57.

Figura 57 - Carro na estrada.

Nesse caso, é muito conveniente chamar a direção da estrada como direção *x* e as direções perpendiculares a ela de *y* e *z*, como demonstrado esquematicamente na Figura 58.

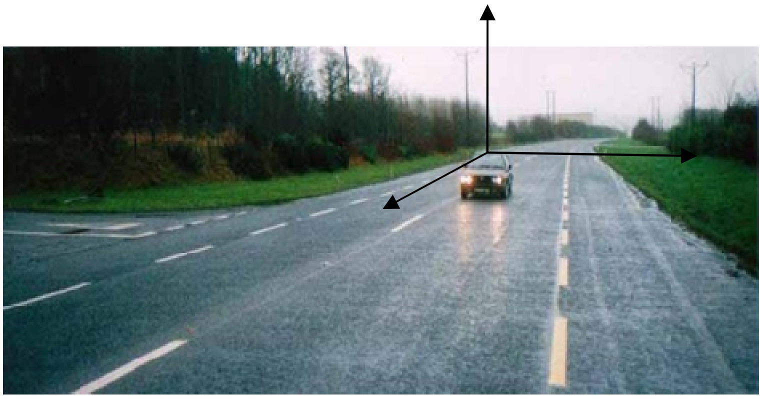


Figura 58 - Carro na estrada com Sistema Cartesiano de Coordenadas.

Por outro lado, se o problema envolve simetria esférica, o sistema de coordenadas mais apropriado é o Sistema Esférico de Coordenadas.

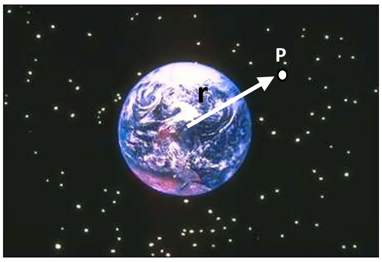


Figura 59 - Exemplo de simetria esférica.

Um exemplo bastante comum em Física desse tipo de situação acontece quando o campo (ou força) é do tipo central. Nesse tipo de campo, o valor do campo (módulo) em um ponto do espaço depende somente da distância do ponto à partícula geradora do campo. São exemplos desse tipo de campo o campo gravitacional ($\mathbf{g}$) e o campo elétrico ($\mathbf{E}$) de uma partícula pontual ou de distribuições esféricas de carga e massa para pontos fora da distribuição. Em ambos os casos o campo depende do inverso do quadrado da distância à fonte do campo:

$$g, E \propto \frac{1}{r^2}$$

g e E são, respectivamente*,* o módulo do campo gravitacional e do campo elétrico; r é a distância entre *fonte do campo* (a massa ou carga que cria o campo) e o ponto onde o campo está sendo calculado. Como mostrado na Figura 59, para o caso gravitacional, o valor do campo depende apenas da distância entre o centro da Terra e o ponto *P* mostrado na figura.

Por fim, se o problema com o qual nos deparamos envolve simetrias tipo cilindro, onde o que importa é a distância a certa direção do espaço, então o sistema de coordenadas mais conveniente é o Sistema Cilíndrico de Coordenadas. Um exemplo desse tipo de situação acontece quando temos uma corrente elétrica em um fio reto e longo e queremos calcular o campo magnético a certa distância do fio (veja a Figura 60).

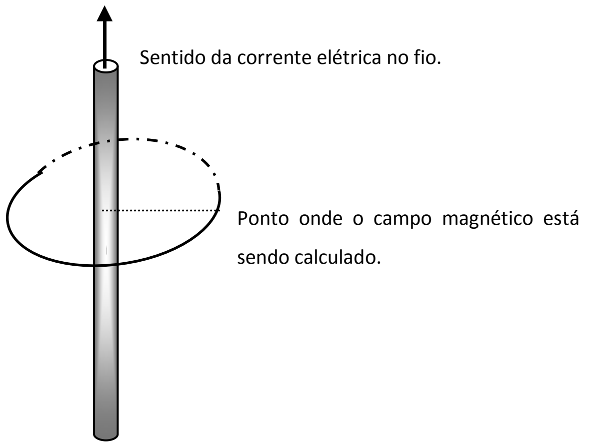


Figura 60 - Exemplo de situação com simetria cilíndrica.

Neste caso, vemos claramente que a variável que realmente importa no problema é a distância do ponto onde o campo magnético está sendo calculado e o fio onde flui a corrente que cria o campo magnético.

Mudanças de sistemas de coordenadas

Muitas vezes sabemos as coordenadas de um ponto em um dado sistema de coordenadas, mas a simetria do problema sugere que trabalhemos em outro. Por exemplo, conhecemos as coordenadas cartesianas de um ponto em um problema para o qual a simetria esférica é mais adequada. Surge aqui um problema: como obter as coordenadas dadas em um sistema em outro sistema de coordenadas? A esta operação damos o nome de **transformação entre sistemas de coordenadas.**

O sistema mais simples, até porque é o sistema que normalmente usamos no nosso dia a dia é o sistema cartesiano. O usaremos como base para obtermos os valores das coordenadas de um ponto no espaço nos outros sistemas de coordenadas.

Começaremos pelo sistema de coordenadas esféricas. Veja a Figura 61. Nessa figura podemos distinguir dois triângulos retângulos: o triângulo *OBC* e o triângulo *OAP*[48].

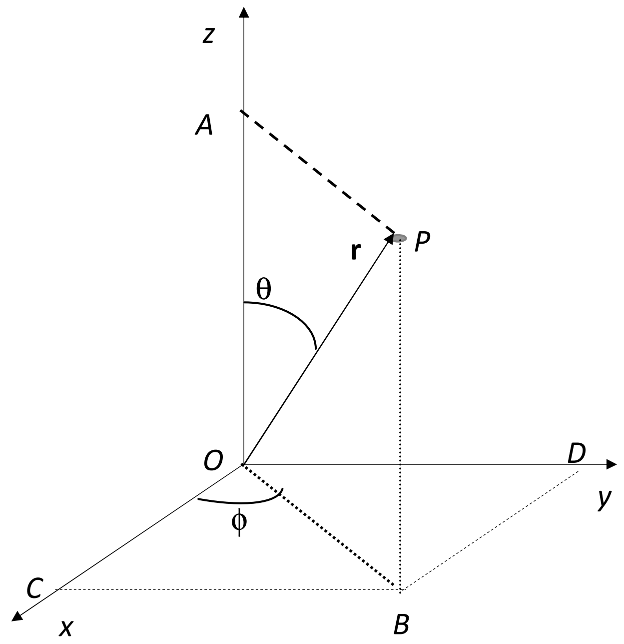


Figura 61 - Relação entre o sistema de coordenadas cartesiano e o sistema de coordenadas esférico.

No triângulo *OAP* um dos catetos é justamente a coordenada *z* no sistema cartesiano de coordenadas e o vetor $\mathbf{r}$ que localiza o ponto *P* é a hipotenusa desse triângulo. Logo, da definição de co-seno do ângulo θ temos que:

$$z = r\cos(\theta)$$

Olhando agora para o triângulo *OBP* vemos que a projeção do ponto *P* no plano *xy* (segmento de reta *OB*) é um dos catetos desse triângulo retângulo, dado simplesmente por:

$$OB = r\,\mathrm{sen}(\theta)$$

O comprimento da coordenada *x* é então obtido observando-se que esta coordenada é dada pelo segmento de reta *OC* que por sua vez é o cateto do triângulo *OBC*[49]:

$$OC \equiv x = OB\cos(\phi) = r\,\mathrm{sen}(\theta)\cos(\phi)\,.$$

[48] Ver Complementos de Matemática.

[49] O símbolo "≡"Lê-se *identicamente igual* e indica que estamos dando um nome a essa quantidade.

A coordenada *y*, dada pelo segmento de reta *OD* é obtida por raciocínio semelhante:

$$OD \equiv y = OB\cos(\phi) = r\,\mathrm{sen}(\theta)\mathrm{sen}(\phi).$$

Isto completa o conjunto de relações entre o sistema cartesiano e o sistema esférico.

Resumindo:

$$\begin{aligned} x &= r\,\mathrm{sen}(\theta)\cos(\phi) \\ y &= r\,\mathrm{sen}(\theta)\mathrm{sen}(\phi) \\ z &= r\cos(\theta) \end{aligned} \qquad \text{eq. 7}$$

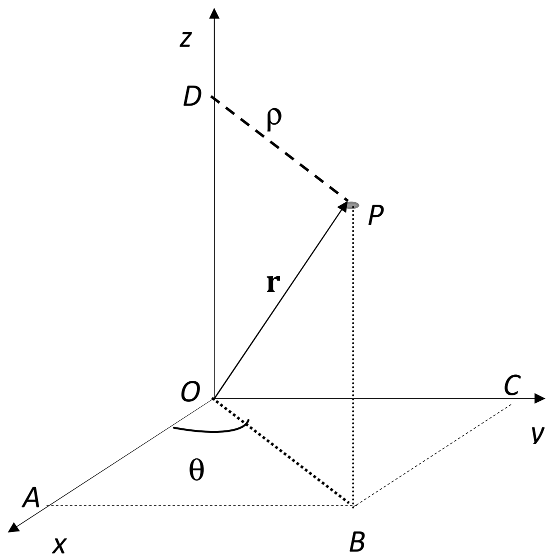


Figura 62 – Relação entre o sistema de coordenadas cartesiano e o sistema de coordenadas cilíndrico.

Vamos agora obter as equações de transformação de coordenadas entre os sistemas cartesiano e cilíndrico. Observe a Figura 62.

Neste caso a relação entre as coordenadas (*x,y,z*) e as coordenadas (ρ, *θ,z*) é mais simples. Observando os triângulos *OAB e ODP* vemos diretamente que:

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos(\theta) \\ y &= \rho\,\mathrm{sen}(\theta) \\ z &= z \end{aligned} \qquad \text{eq. 8}$$

O conjunto de equações acima (eq. 7 e eq. 8) define as transformações entre os três sistemas de coordenadas (cartesianas, esféricas e cilíndricas)[50].

Movimento e velocidade

Vimos o que é um sistema de referência: é um conjunto de pontos que usamos para localizar todos os demais pontos no espaço. Esse conjunto de pontos pode ou não ser ocupado por partículas. Para que possamos avançar é necessário que definamos a noção de estado de movimento de uma partícula de um modo preciso, o que passa pela definição de movimento.

A velocidade linear de translação

Considere a Figura 63. Nela vemos uma partícula que é localizada pelo vetor posição $\mathbf{r}_0$ em certo instante de tempo que chamaremos de t_0.

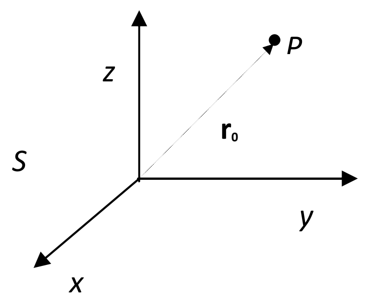


Figura 63 – Posição da partícula no instante de tempo T_0 como vista no sistema de referência S.

À medida que o tempo passa a posição da partícula, como vista no sistema de referência mostrado na Figura 63, pode ser a mesma ou não. Caso ocorra a última dessas possibilidades (a posição da partícula se modificou) dizemos que a partícula se movimentou em relação ao sistema de referência mostrado o qual, por simplicidade, chamaremos apenas de S. Se ocorreu movimento, então em um instante de tempo posterior, digamos t, a situação seria como a mostrada na Figura 64.

[50] Observe que não escrevemos as equações de transformação dos sistemas cilíndrico e esférico para o cartesiano.

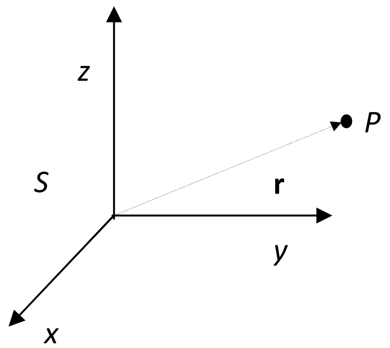


Figura 64 - Posição da partícula em um instante de tempo t (t posterior a t_0).

Agora a posição da partícula será dada não mais pelo vetor $\mathbf{r}_0$, mas pelo vetor $\mathbf{r}$. De modo a podermos definir mais precisamente o movimento, daremos nomes a algumas grandezas importantes que aparecem no nosso problema.

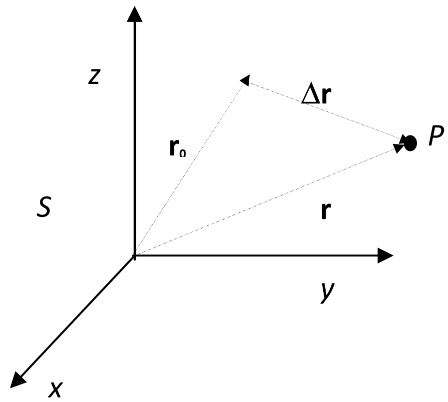


Figura 65 - O vetor deslocamento.

Em Física é usual indicarmos pela letra delta maiúsculo do alfabeto grego (Δ) a variação de uma grandeza. Assim, indicaremos a variação do tempo simplesmente por Δt. No nosso caso a variação transcorrida entre o momento no qual a posição da partícula era indicada pelo vetor $\mathbf{r}_0$ (instante de tempo ao qual demos o nome de t_0) e o momento no qual a posição da partícula é indicada pelo vetor $\mathbf{r}$ (instante ao qual demos o nome de t) é indicada por: $\Delta t \equiv t - t_0$.

Podemos fazer coisa semelhante com a variação da posição (indicada pelos vetores $\mathbf{r}$ e $\mathbf{r}_0$, quantidade que chamaremos de **vetor deslocamento,** a qual indicaremos apenas por $\Delta\mathbf{r}$**:**

$$\Delta\mathbf{r} \equiv \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$$

Observe que não estamos introduzindo nenhuma informação nova, apenas dando nomes a estas quantidades. No caso da variação da posição é apenas um pouco mais complicado, pois estamos lidando com grandezas vetoriais[51]. A Figura 65 mostra o vetor $\Delta\mathbf{r}$[52].

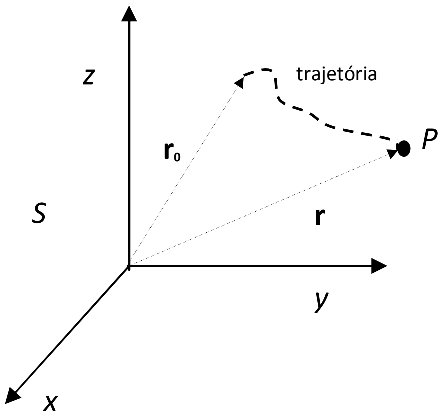


Figura 66 - Trajetória entre os instantes inicial e final.

Outro termo que precisamos definir com precisão é o termo **trajetória**. Ao sair da posição ocupada no instante de tempo t_0, a partícula não desaparece simplesmente para reaparecer na posição indicada pelo vetor $\mathbf{r}$ no instante de tempo t. Ao contrário, a partícula vai ocupando posições intermediárias nos instantes de tempo intermediários a t_0 e t. A Figura 66 mostra alguns desses pontos hipotéticos.

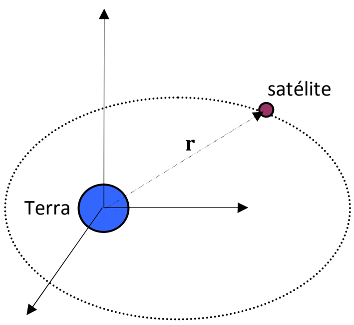


Figura 67 - Satélite orbitando em torno da Terra.

Chamamos de **trajetória** à linha que une os pontos ocupados pela partícula entre os instantes de tempo t_0 e t. Observe que deslocamento e trajetória são dois conceitos diferentes: a trajetória é simplesmente a linha que une todos os pontos pelos quais a partícula passou entre os dois

[51] Para uma revisão sobre vetores, ver Complementos de Matemática.

[52] Observe o sentido do vetor $\Delta\mathbf{r}$.

instantes de tempo considerados enquanto que o deslocamento é o vetor que une as duas posições diretamente. A falta de clareza sobre esse ponto pode nos levar a contradições.

Observe o exemplo mostrado na Figura 67. Ao completar uma volta, o satélite retorna à posição inicial. A trajetória nesse caso é a elipse mostrada na figura, mas o vetor deslocamento é nulo, pois os vetores $\mathbf{r}$ e $\mathbf{r}_0$ são iguais. Podemos calcular o comprimento da trajetória, que indicaremos por ΔS[53], usando a equação para o comprimento de uma elipse[54]:

$$S = 2\pi\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \text{ (aproximado)}$$

(a e b são os dois semi-eixos da elipse). No entanto, o vetor deslocamento é nulo (pois $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$):

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = 0.$$

Ligado ao conceito de trajetória podemos definir o que chamamos de **velocidade escalar média** **(v_m)**. Na Figura 66, ao ir da posição indicada pelo vetor $\mathbf{r}_0$ até a posição indicada pelo vetor $\mathbf{r}$, a partícula gastou certo tempo Δt. Definimos a velocidade escalar média da partícula como sendo a razão entre o comprimento da trajetória (indicado por ΔS) e o tempo gasto para percorrê-la (Δt):

$$v_m \equiv \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

Qual a interpretação dessa quantidade? A resposta é simples: ela nos diz a quantidade de espaço percorrido por unidade de tempo. Naturalmente, isso é função das unidades que estamos usando para medir espaço e tempo. Nesse texto, utilizamos o Sistema Internacional de Unidades e, portanto, a velocidade escalar média será dada em m/s. Contudo, no dia a dia, outras unidades costumam ser utilizadas, tais como o km/h e o cm/s.

A velocidade escalar média é uma grandeza um tanto quanto "enganadora". Pode ser que a partícula nunca tenha se movimentado a essa velocidade. Por exemplo, a distância de Campo Grande a Corumbá é de aproximadamente 450 km. Suponha que um carro saia de Campo Grande a meia-noite em direção à Corumbá. Chegando a Miranda, o motorista resolve descansar durante 3 horas, retomando a viagem após esse descanso, chegando a Corumbá por volta das 10 horas da

[53] Manteremos neste texto a nomenclatura padrão dos demais textos de Física, nos quais, em sua maior parte, tem origem na língua inglesa. Assim, o *S* de nossa definição vem da palavra *space*, equivalente na língua inglesa a espaço em português.

[54] Ver Complementos de Matemática.

manhã seguinte. Portanto, para percorrer os 450 km que separam Campo Grande de Corumbá o motorista precisou de 10 h. Se calcularmos a velocidade escalar média desenvolvida, obteremos:

$$v_m \equiv \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{450}{10}\frac{\text{km}}{\text{h}} = 45\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Mas, exceção feita a alguns instantes, na maior parte do tempo a velocidade desenvolvida pelo motorista foi diferente desta.

Embora útil como uma primeira aproximação, o conceito de velocidade escalar média não é satisfatório para a maior parte das situações abordadas em Física. Para atender às exigências desses casos temos que apelar para o conceito de **velocidade instantânea (v).** Mas antes vamos definir o que entendemos por **velocidade média**.

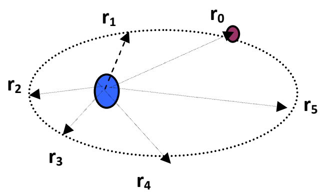


Figura 68 - Posições do satélite em órbita.

Imagine que tomemos intervalos de tempo cada vez menores ao olharmos o movimento de um objeto ao longo da sua trajetória. Tomemos, para exemplificar, o caso do satélite em torno da Terra mostrado na Figura 67. Vamos acompanhar o movimento do satélite assinalando alguns pontos ao longo da sua trajetória. Veja a Figura 68. Nessa figura, os índices nos vetores indicam as posições ocupadas pelo satélite em instantes de tempo sucessivos: t_0, t_1, ..., t_5.

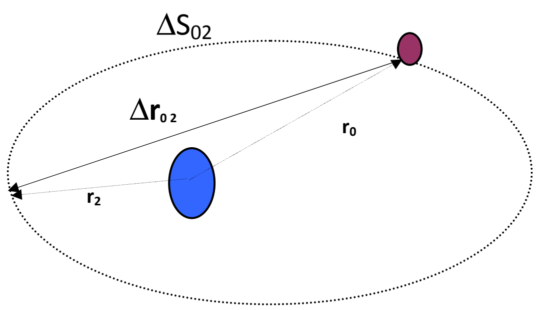


Figura 69 - Vetor deslocamento e a trajetória percorrida entre dois instantes de tempo t_0 e t_2.

Se tomarmos o vetor deslocamento entre dois instantes de tempo quaisquer observaremos o seguinte: quanto mais próximos forem os instantes de tempo tomados mais o vetor deslocamento se aproxima da trajetória da partícula.

Por exemplo, se tomarmos os instantes t_0 e t_2, o vetor deslocamento (o qual chamaremos de $\Delta\mathbf{r}_{02}$**)** é bastante diferente da trajetória seguida pela partícula entre esses dois instantes de tempo. Na Figura 69, mostramos uma ampliação da Figura 68 com apenas essas quantidades representadas.

No entanto, se tomarmos apenas os instantes t_0 e t_1, obteremos, após ampliar a Figura 68, a Figura 70.

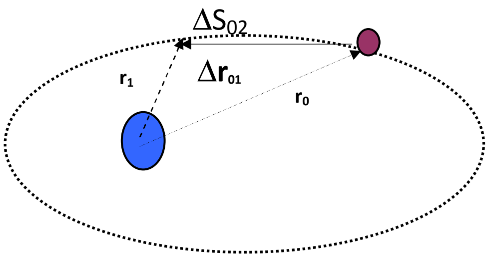


Figura 70 - Vetor deslocamento e a trajetória percorrida entre os instantes t_0 e t_1.

Podemos definir a **velocidade média** desenvolvida entre os instantes t_0 e t_1 como a razão entre o vetor deslocamento e o tempo gasto para ir da posição $\mathbf{r_0}$ à posição $\mathbf{r_1}$:

$$\mathbf{v}_m = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0}{t_1 - t_0}$$

Observe que essa é uma grandeza vetorial. Não confunda a velocidade média com a velocidade escalar média. Imagine uma viagem hipotética de ida e volta entre Campo Grande (MS) e São Paulo (SP). A velocidade escalar média nos fornece um valor diferente de zero, mas a velocidade média é zero, pois o vetor deslocamento é nulo (pontos inicial e final iguais).

Levando esse processo ao limite do intervalo de tempo indo a zero ($\Delta t \to 0$) teremos a velocidade da partícula em um instante de tempo t, a **velocidade instantânea da partícula**, simbolizada por $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}.$$

Essa é a definição de derivada da posição. Portanto, a expressão para a velocidade instantânea, $\mathbf{v}$**,** pode ser escrita simplesmente como:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

O vetor velocidade instantânea, $\mathbf{v}$, ou simplesmente velocidade, por ser expresso em termos da derivada do vetor posição é tangente à trajetória da partícula em todos os pontos.

Novamente surge a questão: qual a interpretação dessa quantidade? Ao tomarmos intervalos de tempo cada vez menores nos aproximamos da situação na qual temos apenas um ponto. Em outras palavras a velocidade instantânea é a velocidade em um dado momento e deve ser entendida da seguinte maneira: se a partícula mantiver esta velocidade durante certo intervalo de tempo ela percorrerá então certa quantidade de espaço ao longo da trajetória dada pelo produto dessa velocidade pelo tempo transcorrido. Naturalmente que as unidades de medida dessa quantidade são as mesmas da velocidade média.

A velocidade de uma partícula é normalmente uma função do tempo: em diferentes instantes de tempo a partícula tem velocidades diferentes. Indicamos isto ao escrever: $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$. Ao nos referirmos à velocidade ao longo desse texto estaremos nos referindo à velocidade instantânea. Quando formos utilizar o conceito de velocidade média isso será explicitamente dito.

Velocidade angular

Consideremos agora uma partícula que descreve um movimento de rotação em torno de um eixo. Um exemplo seria a Terra em seu movimento em torno do Sol, como mostrado na Figura 71.

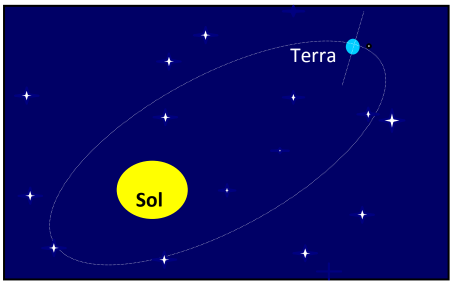


Figura 71 - Terra em seu movimento em torno do Sol

Para podermos estudar o movimento de rotação, vamos definir outro tipo de velocidade mais apropriado a esse tipo de problema: a **velocidade angular**, que simbolizaremos pela letra grega ω. Para fazer isso, precisamos escrever a distância percorrida por uma partícula ao longo da sua trajetória. Veja a Figura 72.

Nessa figura, temos representado o movimento de uma partícula que descreve uma órbita circular em torno de um ponto (o centro da circunferência de raio r). Os pontos *a* e *b* definem um segmento de arco, que denotaremos por *ab*. Ao percorrer o segmento de arco *ab* a partícula percorre certa distância, que na figura é simbolizada por ΔS. Para percorrer essa distância a partícula gasta certo tempo, que denotaremos por Δt.

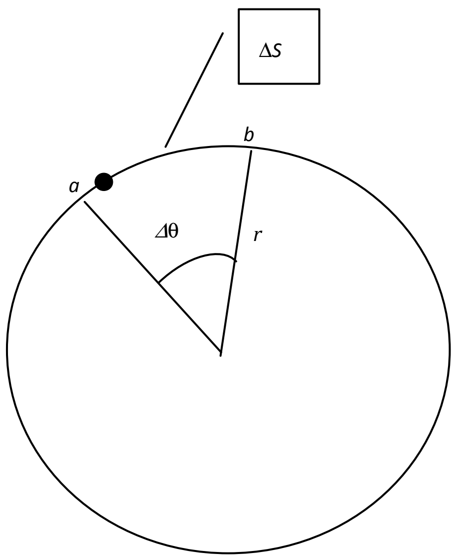


Figura 72 - Partícula em movimento circular.

Portanto, a velocidade escalar média da partícula será dada por:

$$v_m = \frac{\Delta S}{\Delta t} \qquad \text{eq. 9}$$

Essa é a noção de velocidade com a qual estamos acostumados. Como estamos analisando o caso de uma trajetória circular[55], ao comprimento ΔS corresponde certo deslocamento angular, denotado na figura pelo ângulo $\Delta\theta$, quando a partícula vai do ponto *a* até o ponto *b*. Lembremos que o comprimento de arco *ab* tem uma extensão (denotada por ΔS) dada por:

$$\Delta S = r\Delta\theta \qquad \text{eq. 10}$$

Nessa expressão, r é o raio da circunferência[56]. Substituindo a eq. 10 na eq. 9, para a velocidade escalar média obtemos:

---

[55] Embora estejamos analisando o movimento circular, o argumento é geral e válido para qualquer outro tipo de movimento em torno de um eixo.

[56] Com base nesse argumento você saberia explicar porque o comprimento de uma circunferência é dado por $2\pi r$?

$$v_m = \frac{r\Delta\theta}{\Delta t}$$

Tomando o limite Δt tendendo a zero, essa expressão pode ser rescrita do seguinte modo:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r\Delta\theta}{\Delta t} = r \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

Chamando:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\theta(t+\Delta t) - \theta(t)}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

A quantidade ω é chamada **módulo da velocidade angular** e denota o número de unidades de ângulo que o objeto percorre por unidade de tempo. Então:

$$v = r\omega$$

De uma forma mais geral, a velocidade linear será escrita como o **produto vetorial** da velocidade angular e do vetor posição:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \qquad \text{eq. 11}$$

A demonstração dessa relação está além do que pretendemos nesse texto. Vamos, contudo, examinar esse conceito mais de perto. Por exemplo, qual a direção do vetor velocidade angular (**ω**)? Essa direção é um tanto arbitrária. Por convenção, a direção do vetor **ω** é definida em termos da trajetória instantânea da partícula: a direção de **ω** é perpendicular ao plano que contém a trajetória instantânea da partícula. O seu sentido é obtido a partir da observação da trajetória da partícula pela regra da mão direita: se colocarmos os dedos, exceto o polegar, na direção da velocidade **v**, o polegar nos dá o sentido de **ω.**

Para uma órbita circular a direção da velocidade angular é a mostrada na Figura 73. Observe que a velocidade angular e o vetor velocidade são sempre perpendiculares entre si.

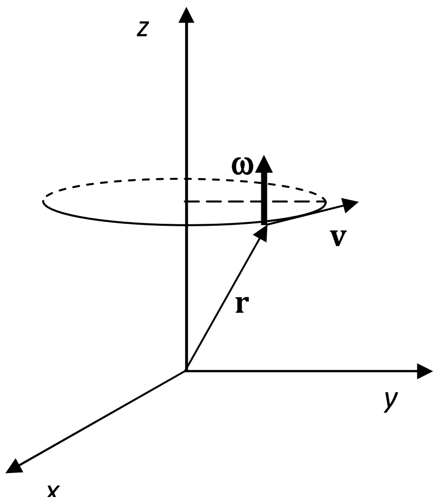


Figura 73 – Direção da velocidade angular.

Isto é uma consequência da definição apresentada na eq. 11: o vetor resultante de um produto vetorial sempre é perpendicular ao plano que contém os dois vetores sendo multiplicados. Se colocarmos a origem do sistema de referências no centro da órbita da partícula, o vetor **r** será perpendicular também aos outros dois vetores (veja a Figura 74).

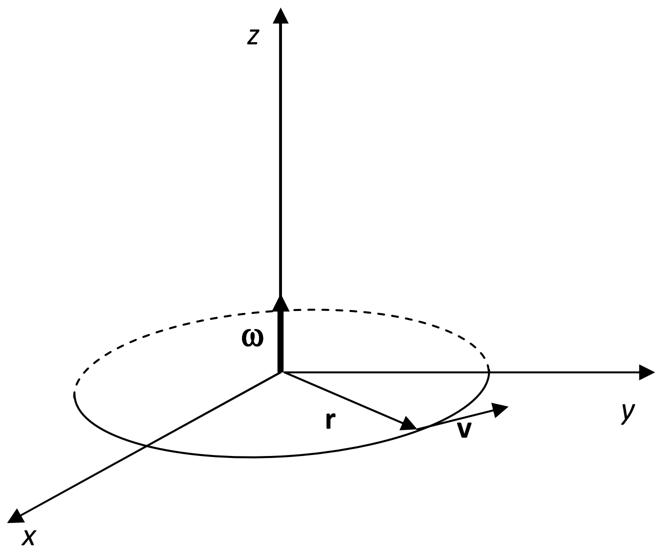


Figura 74

Exemplo 22

Um avião voa com velocidade horizontal **v** constante no sentido de Oeste para Leste. Um observador dispara um cronômetro no instante em que o avião passa sobre sua cabeça. Após um intervalo de tempo Δt de observação o ângulo de visada do avião com relação à vertical é como mostrado na Figura 75.

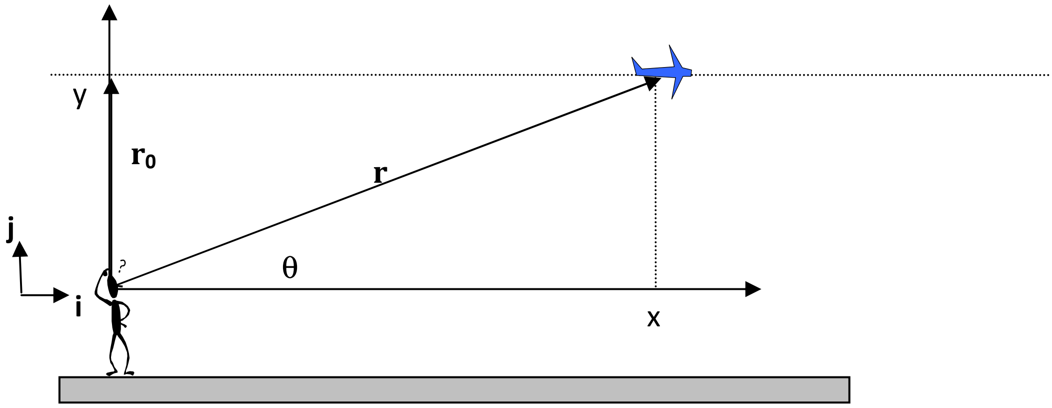


Figura 75 - Exemplo 3.

a) Escreva o vetor posição **r** do avião em função de t, θ e **v**.

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \Rightarrow d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$$

$$\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} d\mathbf{r} = \int_0^t \mathbf{v}dt$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t$$

Nessa expressão:

$$tg\theta = y/x$$

$$\mathbf{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$$\mathbf{r}_0 = 0\mathbf{e}_x + x(tg\theta)\mathbf{e}_y$$

$$\mathbf{v} = v\mathbf{e}_x + 0\mathbf{e}_y$$

Portanto:

$$\boxed{\mathbf{r} = vt\mathbf{e}_x + x\tan(\theta)\mathbf{e}_y}$$

O momento linear e Sistemas de Referência Inerciais

Estado dinâmico de uma partícula

Como vimos na seção anterior, velocidade é um conceito muito útil para falarmos do movimento, mas não basta se quisermos quantificar o movimento. A quantidade que melhor descreve o estado de movimento de um objeto é o momento linear, definido anteriormente:

$$\mathbf{p} \equiv m\,\mathbf{v}$$ eq. 12

Esta expressão indica claramente que o momento linear depende, ao mesmo tempo, das duas quantidades: a massa e a velocidade. É o momento linear que caracteriza o que chamamos de **estado de movimento** de uma partícula. Quando falamos em modificar o estado de movimento de uma partícula, estamos querendo afirmar algo a respeito da variação no tempo dessa quantidade.

Precisamos introduzir agora a definição do que entendemos por **estado dinâmico** da partícula (simbolizaremos por E_d). Para caracterizar completamente uma partícula, identificá-la sem qualquer dúvida, precisamos especificar duas coisas: onde ela está e qual o seu momento linear. A localização da partícula, como já vimos, é dada pelo vetor posição $\mathbf{r}$ enquanto que o momento depende do produto da sua massa pela sua velocidade (eq. 12). Logo, o estado dinâmico da partícula será dado pelo conjunto:

$$E_d = \{\mathbf{r},\mathbf{p}\}$$

Portanto, cada partícula, para ser completamente identificada, deve ter um *rótulo* com 6 números: as três coordenadas de posição (x, y, z) e três referentes às componentes do momento (p_x, p_y, p_z).

Há uma estreita relação entre a quantidade de movimento e a Energia Cinética. Vamos tomar o módulo ao quadrado do momento linear. Usando a eq. 12, podemos escrever:

$$\mathbf{p}.\mathbf{p} = p^2 = (m\mathbf{v}).m\mathbf{v}) = m^2.v^2$$ eq. 13

Vamos reescrever essa equação, dividindo ambos os lados por $2m$:

$$\frac{p^2}{2m} = \frac{m^2.v^2}{2m} = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow \boxed{E_c = \frac{p^2}{2m}}$$ eq. 14

Essa expressão nos mostra que a energia cinética da partícula é igual ao módulo ao quadrado do momento linear dividido por duas vezes a massa da partícula.

Variação do momento linear e a definição de força

O estudante deve observar que a variação do momento linear pode acontecer tanto pela variação da massa (pela variação da inércia da partícula) como pela variação da velocidade da partícula.

Comecemos analisando a variação da massa da partícula. Aqui nos referimos à variação que pode ocorrer com a quantidade de inércia, que é medida pela massa. Não nos referimos a uma perda de matéria (como ocorre em um foguete, por exemplo), mas sim a uma variação nessa propriedade intrínseca da matéria (e também da energia). No entanto, essa variação somente é significativa a grandes velocidades[57] e, na maior parte dos problemas, estaremos no domínio dos fenômenos a baixas velocidades (**Física Clássica**) e poderemos considerar as massas das partículas como constantes. Quando a variação da massa se torna importante estamos no domínio da **Física Relativística**.

Portanto, na maior parte do tempo estaremos analisando situações nas quais a quantidade de movimento varia pela variação da velocidade da partícula. Olhando para a variação da quantidade de movimento, e na forma com ela ocorre, podemos dividir os sistemas de referência em dois grandes grupos. Se em um dado sistema de referência a quantidade de movimento de uma partícula variar se e somente pela ação de algo externo a ela, dizemos que temos um **Sistema de Referência Inercial**. Em outras palavras, se nenhum agente externo à partícula atuar esta não modificará a sua quantidade de movimento e, por conseqüência: $\mathbf{p}$ = constante. Por outro lado, se o sistema de referência ao qual nos referimos estiver acelerado em relação a um dado sistema de referência inercial então o sistema de referência acelerado é chamado de **Sistema de Referência Não Inercial**. Por incrível que possa parecer os sistemas não inerciais são os mais comuns de serem encontrados na Natureza, os sistemas inerciais sendo bastante raros, quase uma abstração teórica. Um exemplo típico desse tipo de sistema é a própria Terra no seu movimento de rotação em torno do seu eixo e no seu movimento de rotação (incorretamente chamado de translação) em torno do Sol.

Interessaremo-nos aqui apenas pelos sistemas de referência inerciais. Nesse tipo de sistema, damos aos agentes capazes de modificar a quantidade de movimento de uma partícula o nome de **Força**, normalmente simbolizada pela letra $\mathbf{F}$. À ação combinada de vários desses agentes damos o nome de **Força Resultante** (indicada pelo símbolo $\mathbf{F_r}$):

$$\mathbf{F}_r = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots + \mathbf{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i$$

Numericamente, a força resultante atuando em uma partícula é igual à variação temporal do momento da partícula:

[57] Velocidades da ordem da velocidade da luz.

$$\mathbf{F}_r = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

Naturalmente, se somente um desses agentes atuar na partícula a força resultante é a própria força.

Primeira Lei de Newton – Lei da Inércia

Podemos retirar algumas conseqüências dessa definição de força resultante. Aqui citaremos duas delas e uma terceira será demonstrada mais adiante, quando discutirmos a conservação do momento linear relacionada às colisões elásticas.

A primeira das conseqüências que retiraremos dessa equação é que quando o momento não varia no tempo então a força resultante é nula. Isso vem diretamente de nossa definição de força resultante:

$$\mathbf{F}_r = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \Rightarrow \mathbf{F}_r = 0 \text{ se } \frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0.$$

O estudante deve observar que o que estamos afirmando é que a força resultante é nula. Isso pode acontecer em duas situações:

1. Não existem forças atuando sobre a partícula (caso *a* da Figura 76);
2. As forças que atuam sobre a partícula se cancelam exatamente (caso *b* da Figura 76).

a) Não atuam forças sobre a partícula.

b) As forças que atuam sobre a partícula se cancelam.

Figura 76 - Forças atuando em uma partícula.

Sob a hipótese da Física Clássica de que a massa da partícula não varia no tempo e usando a definição de momento, podemos escrever:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = 0$$

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0 \;(m \neq 0)$$

Esta última igualdade nos mostra que a velocidade da partícula (que é um vetor) não varia no tempo se a resultante das forças que atuam na partícula for nula. Mas qual tipo de movimento uma partícula sob essas condições poderia descrever? Temos duas possibilidades novamente:

1. A posição da partícula não se altera no tempo e, por conseqüência, a partícula está parada no sistema de referência considerado (sua velocidade é, portanto, nula);
2. A velocidade da partícula é uma constante. Como a velocidade é um vetor isto quer dizer que este vetor é constante em módulo, direção e sentido. Em outros termos, a partícula se move ao longo de uma linha reta (mantendo a mesma direção e o mesmo sentido de movimento) percorrendo espaços iguais em tempos iguais (mesmo módulo). Esse tipo de movimento recebe o nome de **Movimento Retilíneo Uniforme** (**MRU**).

Esse enunciado é conhecido com Primeira Lei de Newton (Lei da Inércia):

> Todo corpo cuja resultante das forças que agem sobre ele é nula mantém seu estado de movimento58..

Algumas observações importantes:

1. Em sistemas de referência inerciais somente a ação de algum outro sistema no Universo pode mudar o estado de movimento de uma partícula;
2. De fato, essa não é uma lei no sentido em que a Física usa esse termo, para expressar uma relação de causalidade entre dois eventos: o evento *A* antecede e o identifico como causa (o que provoca) o evento *B*. Poderíamos dizer que a Primeira Lei de Newton expressa um modo de identificar quando a força resultante que age em uma partícula é nula: se a quantidade de movimento não varia no tempo então não há força resultante agindo sobre a partícula.

Segunda Lei de Newton

Uma segunda conseqüência que podemos retirar de nossa definição de força resultante, ainda sob a hipótese de que a massa da partícula é constante, é que a força resultante é proporcional à **variação da velocidade:**

[58] O enunciado que apresentamos aqui difere ligeiramente da forma encontrada em outros textos de Física.

$$\mathbf{F}_r = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

A quantidade $d\mathbf{v}/dt$, que expressa a variação temporal da velocidade, aparece tão freqüentemente em Física que recebe um nome especial: **aceleração.**

$$\mathbf{a} \equiv \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

Em termos da aceleração, a força resultante é igual ao produto da massa pela aceleração a qual a partícula está submetida:

$$\mathbf{F}_r = m\mathbf{a} \qquad \text{eq. 15}$$

Essa é a definição usual encontrada em textos de Física. Contudo, o estudante deve se conscientizar que a força resultante é igual ao produto da massa pela aceleração somente sob duas hipóteses:

1. Estamos em um Sistema de Referência Inercial;
2. A massa não varia no tempo.

A igualdade expressa pela eq. 15 é conhecida como **Segunda Lei de Newton**, em alguns textos referenciada como **Lei da Massa**. Uma análise mais detida, todavia, nos mostrará que esta também não é uma lei no sentido que discutimos acima. Diferentemente da Primeira Lei de Newton, que não o é porque não estabelece uma relação de causalidade, nesse caso temos um problema de natureza diferente: não sabemos ainda *calcular a massa*. O leitor deve observar que estamos falando em massa (e por tabela em inércia) sem definir precisamente como, experimentalmente, esta quantidade pode ser medida.

Um pouco de reflexão sobre os procedimentos da Física mostrará que somente duas quantidades podem ser realmente medidas diretamente pelos Físicos: posição e tempo[59]. Todas as outras grandezas, aí inclusa a massa, são derivadas dessas. A Terceira Lei de Newton, cuja análise postergaremos para um momento mais apropriado é a chave do problema: é ela que nos permitirá definir de forma unívoca a massa de uma partícula. Historicamente, a Primeira e a Segunda lei já eram conhecidas antes de Newton. É a Terceira Lei que confere ao conjunto o nome de Leis de Newton.

---

[59] Aqui cabe uma pergunta: o que realmente significa medir o tempo?

Os Sistemas de Referência Inercial possuem uma característica que os torna interessantes: uma vez que tenhamos identificado um Sistema de Referência Inercial, todo sistema de referência que se mover com velocidade constante em relação a este sistema também será um Sistema de Referência Inercial. Demonstraremos isso mais adiante quando discutirmos as Transformações de Galileu.

O problema básico da Dinâmica

Estamos em condições, agora, de discutir o problema básico da **Dinâmica**. Chamamos por este nome ao ramo da Física que tenta entender que tipo de movimento é seguido por uma partícula sujeita a ação de forças externas a ela. Observe que podemos escrever a Segunda Lei de Newton (eq. 15) da seguinte forma:

$$\mathbf{F}_r = m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$

Esta equação estabelece que a segunda derivada da posição é proporcional à força resultante atuando em uma partícula.

As forças que atuam na partícula dependem do tipo de sistema físico que estamos considerando: podem ser gravitacionais, elétricas, nucleares, etc. A sua forma particular será estudada mais adiante, no Capítulo V. O que importa aqui é que, se soubermos escrever as forças atuando sobre a partícula, e por conseqüência a força resultante, saberemos qual é a trajetória seguida pela partícula, descrita pelo vetor posição $\mathbf{r}(t)$.

Esse é o problema básico da dinâmica:

> Qual será a trajetória seguida por uma partícula se soubermos escrever as forças que sobre ela atuam?

As duas leis anteriores foram obtidas a partir da definição de força, entendida como o agente responsável pela mudança do estado de movimento de uma partícula. Da observação que se o estado de movimento não é modificado então não deve estar agindo nenhuma força resultante sobre o sistema, obtivemos a Primeira Lei de Newton, a Lei da Inércia. Observando a seguir que a média da variação do momento no tempo se reduz, sob a hipótese de que a massa seja constante, ao produto da massa pela aceleração e que este produto deve ser igual à força resultante que está agindo sobre a partícula obtivemos a Segunda Lei de Newton, algumas vezes chamada de equação fundamental da dinâmica.

No entanto, pelas observações acima, podemos ver que na verdade essas duas leis nada mais são do que conseqüências naturais da definição de força. Nessa situação, não faz muito sentido chamá-las de leis, entendidas como relações causais entre observáveis[60].

No Sistema Internacional de Unidades a unidade de medida da força é o Newton (símbolo: N):

$$[\mathbf{F}]=[m][\mathbf{a}]=M\frac{L}{T^2}\xrightarrow[SI]{}[\mathbf{F}]=kg.\frac{m}{s^2}\equiv N$$

Exemplo 23

Desenhe o vetor que representa a variação da quantidade de movimento de uma bolinha de pingue-pongue solta em queda livre sobre um piso rígido. Analise o que acontece em todas as fases do movimento, isto é: durante a queda, durante a colisão e durante a subida.

Solução

A Figura 77 mostra as três situações. Os vetores em vermelho mostram a variação do momento linear, indicada pela 2ª lei de Newton:

$$\mathbf{F}=\frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

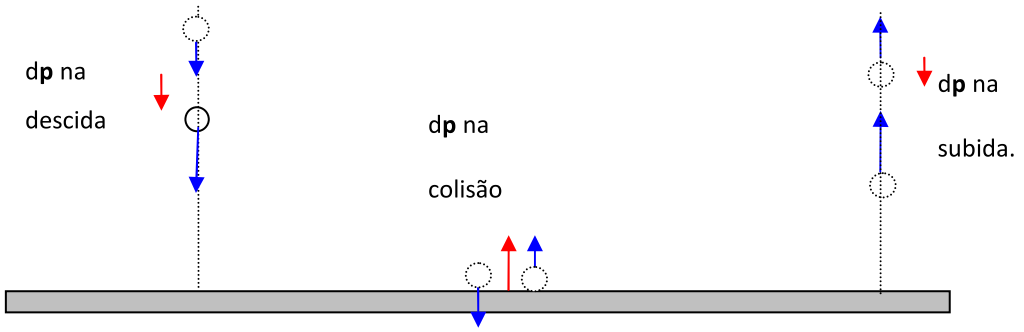


Figura 77 - Exemplo 22.

Na descida e na subida existe uma força resultante vertical para baixo, chamada de força peso, aplicada na bolinha. Durante a colisão, no entanto, além da força peso, atuou uma força média, mais intensa, vertical para cima (aplicada pelo solo) e que faz com que a bolinha inverta seu sentido de movimento.

[60] Veja o Capítulo I para uma discussão sobre o que é uma lei física.

O momento angular

Como vimos no Capítulo 2, o *momento angular* é uma quantidade bastante semelhante ao momento linear (ou quantidade de movimento). Porém, enquanto esse diz respeito ao movimento de translação, o momento angular diz respeito ao movimento de rotação em torno de um eixo.

Definimos anteriormente o momento angular de uma partícula em termos do seu momento linear e da sua distância ao eixo de rotação. No momento não temos ainda condições de justificar essa definição, pois ainda não analisamos o conceito de **Trabalho**, o que faremos mais adiante. Considere a situação mostrada na Figura 78.

Nessa figura tomamos por conveniência o eixo de rotação como sendo o próprio eixo *z.* Definimos o momento angular da partícula como:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \qquad \text{eq. 16}$$

Nessa expressão, $\mathbf{r}$ é o vetor que localiza a partícula e $\mathbf{p}$ é o momento linear da partícula. O momento angular $\mathbf{L}$ desempenha no movimento de rotação o mesmo papel que o momento linear desempenha no movimento de translação: indica a quantidade de movimento de rotação que a partícula possui. Como já observamos antes, o momento angular é conservado, ou seja, para que um corpo gire em um sentido é necessário que outro gire em outro sentido.

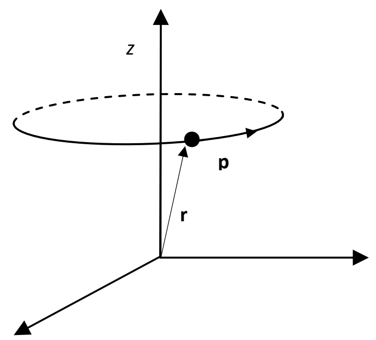


Figura 78 – Partícula movimentando-se em torno de um eixo.

A variação do momento angular e o torque

Para alterar essa quantidade de movimento de rotação é necessário que alguma coisa atue sobre a partícula. Do mesmo modo que o momento linear de uma partícula somente pode ser alterado se algo externo estiver atuando (nossa definição de força), algo semelhante acontece no movimento de rotação: ao agente externo capaz de modificar a quantidade de movimento de rotação chamamos de **torque** (que simbolizaremos pela letra grega $\boldsymbol{\tau}$). Observe que o torque faz o mesmo papel nas rotações que a força no movimento linear.

Definiremos o torque simplesmente como a variação por unidade de tempo do momento angular:

$$\boldsymbol{\tau} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{L}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{L}(t+\Delta t) - \mathbf{L}(t)}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \qquad \text{eq. 17}$$

Usando a definição que demos mais acima para o momento angular (eq. 16):

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d(\mathbf{r} \times \mathbf{p})}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

A primeira parcela do lado direito pode ser reescrita como:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} = \mathbf{v} \times (m\mathbf{v}) = 0$$

Uma vez que o produto vetorial de dois vetores paralelos é nulo[61]. Conseqüentemente, o torque pode ser escrito como:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \qquad \text{eq. 18}$$

F sendo a força resultante sobre a partícula. O estudante deve observar que o torque é perpendicular ao plano que contém a força resultante sobre a partícula e o vetor posição (Figura 79).

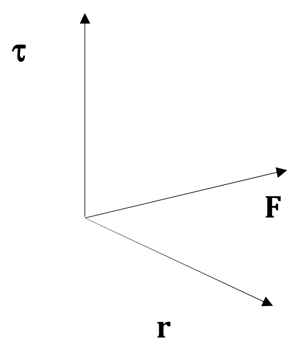


Figura 79

[61] Lembre que, da definição de produto vetorial, o produto vetorial de um vetor por ele mesmo (e por qualquer vetor que lhe seja paralelo) é nulo, pois depende do seno do ângulo entre os dois vetores que, no caso de vetores paralelos, vale zero.

Vimos que o torque pode ser escrito como $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$. Vamos agora obter uma expressão geral para o torque em função da velocidade angular e da aceleração angular. Tendo obtido a expressão geral, vamos aplicá-la ao caso particular de uma partícula que executa um movimento de rotação em torno da origem do sistema de coordenadas (veja a Figura 80)

Para começar, escreveremos a força que aparece na expressão para o torque em termos da derivada do momento:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \frac{d}{dt}\mathbf{p} = m\mathbf{r} \times \frac{d}{dt}\mathbf{v}$$

Vamos agora expressar a velocidade $\mathbf{v}$ que aparece na expressão acima em termos da velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$:

$$\begin{aligned} &\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \Rightarrow \boldsymbol{\tau} = m\mathbf{r} \times \frac{d}{dt}\mathbf{v} = m\mathbf{r} \times \frac{d}{dt}[\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}] \\ &\boldsymbol{\tau} = m\mathbf{r} \times \left[\frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega}) \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d}{dt}(\mathbf{r})\right] = m\mathbf{r} \times [\alpha \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}] \end{aligned} \qquad \text{eq. 19}$$

Na expressão anterior introduzimos a aceleração angular:

$$\boldsymbol{\alpha} \equiv \frac{d}{dt}\boldsymbol{\omega}\ . \qquad \text{eq. 20}$$

Esta expressão é geral, válida para qualquer sistema de referência.

Vamos agora particularizar para a situação na qual a partícula descreve um movimento circular em torno da origem (veja a Figura 80). Nesse caso, temos as seguintes relações:

$$\boldsymbol{\omega} \perp \mathbf{r} \perp \mathbf{v}$$

Vamos calcular cada um dos produtos vetoriais que aparecem na equação eq. 19, começando pela segunda parcela. Como os vetores são perpendiculares entre si, o produto vetorial da velocidade angular pela velocidade da partícula resulta em um vetor que é paralelo ao vetor $\mathbf{r}$: $(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) \,||\, \mathbf{r}$. Portanto, o produto vetorial desse vetor pelo vetor posição é nulo. Vamos agora abrir a primeira parcela da eq. 19:

$$m\mathbf{r} \times (\alpha \times \mathbf{r}) = m[(\mathbf{r}.\mathbf{r})\boldsymbol{\alpha} - (\mathbf{r}.\boldsymbol{\alpha})\mathbf{r}] = m\left[r^2\boldsymbol{\alpha} - \left(\mathbf{r}.\frac{d}{dt}\boldsymbol{\omega}\right)\mathbf{r}\right] \qquad \text{eq. 21}$$

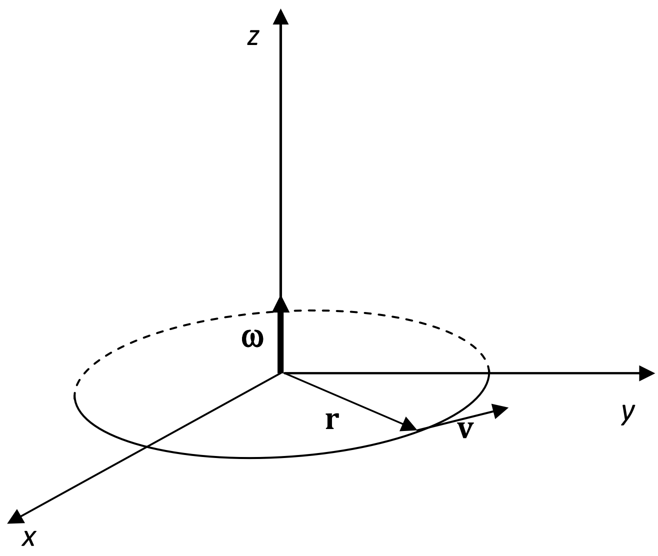


Figura 80

Nessa expressão usamos a identidade vetorial:. $\mathbf{a}\times\mathbf{b}\times\mathbf{c}=(\mathbf{a.c})\mathbf{b}-(\mathbf{a.b})\mathbf{c}$ Observando que: $\frac{d}{dt}(\mathbf{r.\omega})=0$, pois $\mathbf{r.\omega}=0$, a segunda parcela da eq. 21 pode ser reescrita como:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r.\omega})=0\Rightarrow\mathbf{r}.\frac{d}{dt}\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\omega}.\frac{d}{dt}\mathbf{r}=\mathbf{r.\alpha}+\boldsymbol{\omega}.\mathbf{v}\underset{\omega\perp v}{=}0\Rightarrow\mathbf{r.\alpha}=0$$

A última igualdade seguindo do fato de que os vetores posição, velocidade e velocidade angular são perpendiculares entre si. Logo, a eq. 21 pode ser reescrita simplesmente como:

$$m\mathbf{r}\times(\alpha\times\mathbf{r})=mr^2\boldsymbol{\alpha}$$

E o torque (eq. 19) como:

$$\boldsymbol{\tau}=m\mathbf{r}\times[\boldsymbol{\alpha}\times\mathbf{r}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}]$$
$$\boxed{\boldsymbol{\tau}=mr^2\boldsymbol{\alpha}} \qquad \text{eq. 22}$$

Essa expressão é formalmente igual à expressão da força resultante que age em uma partícula, se identificarmos o produto mr^2 como um análogo da massa da partícula no movimento de rotação.

Aceleração tangencial e aceleração radial no movimento circular

Estamos agora em condições de calcular a aceleração no movimento circular. Observe que definimos claramente, em termos da direção perpendicular ao plano da trajetória, a direção e o sentido da velocidade angular. Mas qual a direção e o sentido da aceleração angular (α)? Vamos analisar o caso do movimento circular. Sabemos que nessa situação os vetores posição, velocidade angular e velocidade linear são perpendiculares entre si.

Outro ponto que devemos considerar é a direção da força $\mathbf{F}$ que atua sobre a partícula. Como o movimento da partícula nesse caso é confinado ao plano (*x,y*) a força somente pode ter componentes nesse plano. Se assim não fosse, a partícula teria uma aceleração na direção *z* e sairia do plano. Vamos escrever as componentes dessa força como: $\mathbf{F} = F_r\ \mathbf{e}_r + F_\theta\ \mathbf{e}_\theta$. Nessa expressão, os índices *r* e θ denotam, em coordenadas cilíndricas as direções do vetor posição $\mathbf{r}$ e do vetor tangente à trajetória da partícula que, no caso, é a mesma direção do vetor velocidade $\mathbf{v}$. O sentido da força na direção radial é oposto ao sentido do vetor unitário nessa direção ($\mathbf{e}_r$).

Usando essa informação podemos dizer que o torque, dado pela eq. 18:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

deve ser na direção *z*, perpendicular ao vetor $\mathbf{F}$ e ao vetor $\mathbf{r}$, na direção do vetor velocidade angular, portanto.

Por outro lado, da eq. 22 vemos que, para o movimento circular o torque é colinear com a aceleração angular $\boldsymbol{\alpha}$. A conclusão que podemos tirar é que a aceleração angular está na direção *z*, a mesma do torque.

Vamos agora usar essa informação para calcular a aceleração linear experimentada pela partícula. Partimos da expressão da velocidade linear escrita em termos da velocidade angular e do vetor posição (eq. 11):

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \qquad \text{eq. 23}$$

Derivando essa expressão obtemos:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \Leftrightarrow \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega}) \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d}{dt}(\mathbf{r})$$
$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}; \quad \left[\boldsymbol{\alpha} \equiv \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega})\right]$$

Vamos agora analisar as componentes dessa equação vetorial ao longo da direção do vetor posição (direção radial) e ao longo do vetor tangente à trajetória da partícula (direção tangencial):

1) Componente radial da aceleração

Tomando a componente radial da aceleração temos:

$$\mathbf{a}_r = (\boldsymbol{\alpha}\times\mathbf{r})_r + (\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v})_r = 0 + (\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v})_r \Rightarrow a_r = \omega v = \frac{v}{r}v$$

O zero que aparece na expressão acima, na segunda igualdade vem do fato de que o produto vetorial entre os vetores $\boldsymbol{\alpha}$ e $\mathbf{r}$ gera um vetor que é perpendicular aos dois, na direção $\mathbf{e}_\theta$ e que, portanto, não pode ter componente na direção radial.

$$a_r = \frac{v^2}{r} \Rightarrow \boxed{\mathbf{a}_r = -\frac{v^2}{r}\mathbf{e}_r} \qquad \text{eq. 24}$$

A componente da aceleração, cujo módulo é dado pela primeira igualdade da eq. 24, é chamada de **aceleração centrípeta**. Observe que o vetor aceleração centrípeta tem a direção do vetor $\mathbf{r}$**,** mas aponta em direção ao centro da órbita da partícula, daí o sinal de menos.

2) Componente tangencial da aceleração

Tomando da componente tangencial da aceleração temos:

$$\mathbf{a}_t = (\boldsymbol{\alpha}\times\mathbf{r})_t + (\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v})_t = (\boldsymbol{\alpha}\times\mathbf{r})_t + 0$$

O zero no lado direito vem do fato de que o produto vetorial entre a velocidade angular e o vetor velocidade, no movimento circular gerar um vetor na direção do vetor $\mathbf{r}$ e que, portanto, não tem componente tangencial.

O módulo da **aceleração tangencial** sendo dado por:

$$a_t = \alpha r \qquad \text{eq. 25}$$

Usando as equações eq. 24 e eq. 25 podemos escrever a força que age sobre a partícula no movimento circular como:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = -m\frac{v^2}{r}\mathbf{e}_r + \alpha r\,\mathbf{e}_\theta$$

Se a partícula descreve um movimento circular no qual o módulo de sua velocidade não muda, então a velocidade angular também é constante ($v = \omega r$, com v e r constantes a velocidade angular ω também será constante) e a aceleração angular é nula. Nesse caso, a aceleração $\mathbf{a}$ da partícula terá apenas a componente radial, assim como a força:

$$\mathbf{a}_r = -\frac{v^2}{r}\mathbf{e}_r \Rightarrow \boxed{\mathbf{F} = -m\frac{v^2}{r}\mathbf{e}_r}$$

"Leis de Newton" para o movimento de rotação

Podemos escrever um conjunto de leis que desempenham o papel das leis de Newton para o movimento de rotação. São elas:

1. **Na ausência de torques externos o movimento de rotação de um objeto se mantém inalterado.**

   Essa afirmação é conseqüência direta da definição de torque que vimos antes. Se o torque é nulo (veja a eq. 17), então:

   $$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \mathbf{L} = \text{ constante}$$

   Como o momento angular expressa a quantidade de movimento de rotação da partícula, sendo $\mathbf{L}$ constante a quantidade de movimento de rotação também o será.

2. **A variação da quantidade do momento angular é proporcional ao torque e ao intervalo de tempo durante o qual esse torque é exercido.**

   Essa afirmação nada mais é que a definição do torque que apresentamos antes:

   $$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$$

Energia cinética no movimento de rotação

Vamos agora calcular a energia cinética de uma partícula que executa um movimento de rotação. Vimos que a energia cinética é dada por:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 .$$

Usando a expressão da velocidade em termos da velocidade angular (eq. 23), podemos escrever o módulo ao quadrado da velocidade que aparece nessa equação, para o caso particular do movimento circular, com a origem do sistema de referência no centro da trajetória circular, como:

$$v^2 = \mathbf{v}.\mathbf{v} = (\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}).(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) = |\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}|^2 = (\omega r)^2$$

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\omega r)^2 \Rightarrow E_c = \frac{1}{2}(mr^2)\omega^2 \Rightarrow \boxed{E_c = \frac{1}{2}I\omega^2}; \quad [I \equiv mr^2]$$

Como já vimos, I é o momento de inércia da partícula. Embora tenhamos obtido esse resultado para o movimento de rotação específico de uma partícula em trajetória circular esse resultado é geral e podemos expressar a energia cinética de um objeto em rotação por:

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}I\omega^2} \qquad \text{eq. 26}$$

O cálculo do momento de inércia de um corpo rígido é mais complicado, pois envolve integração sobre o corpo, como veremos nas seções a seguir.

Sistemas de partículas: o centro de massa e o momento de inércia

O que vimos até agora se aplica a uma partícula. Mas, e se tivermos um sistema com muitas partículas?

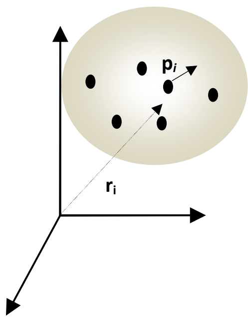


Figura 81 - Sistema de muitas partículas.

Vamos analisar a seguinte situação: temos um sistema composto por N partículas (veja a Figura 81). Cada uma dessas partículas de massa m_i é localizada por um vetor $\mathbf{r}_i$ e possui uma velocidade $\mathbf{v}_i$. Portanto, cada partícula será portadora de certa quantidade de momento linear dada por:

$$\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i \qquad \text{eq. 27}$$

Definiremos a quantidade total de movimento do sistema, que indicaremos pela letra **P,** à soma das quantidades dos *momenta* individuais das partículas:

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i$$

Substituindo nessa expressão a definição dos momenta de cada partícula (eq. 27), obteremos:

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}_i$$

Vamos tomar a derivada temporal do momento total do sistema:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_r$$

O que essa equação nos diz é que a força resultante agindo sobre um sistema de partículas é igual à variação do momento linear total do sistema. Deve ser observado que estamos falando de forças externas ao sistema de partículas. Como veremos mais adiante, após derivarmos a Terceira Lei de Newton, as forças internas entre as partículas se cancelam exatamente e não contribuem para a soma.

Por analogia com a Segunda Lei de Newton, poderíamos tentar escrever a variação do momento total como sendo o produto de uma massa (M) por uma aceleração ($\mathbf{a}_{\text{cm}}$), definidas de forma conveniente:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = M\mathbf{a}_{cm}$$

Para isso, devemos definir a massa total do sistema da seguinte maneira: $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$.

Para definir a aceleração, vamos primeiro definir um vetor $\mathbf{R}$ calculado como uma média ponderada da posição de cada partícula (levando em conta a sua massa):

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i \qquad \text{eq. 28}$$

Este vetor, como o estudante poderá verificar imediatamente, tem dimensões de posição. Mas posição do quê? Imaginemos um ponto que se movimentasse como se toda massa do sistema estivesse concentrada nele. Esse é o ponto localizado pelo vetor $\mathbf{R}$, o qual é chamado de **Centro de Massa** do sistema de partículas.

O estudante deve observar que o Centro de Massa não é um ponto físico no sentido de que necessariamente tenhamos uma partícula nessa posição, é um ponto no espaço como outro qualquer. À medida que as partículas mudam suas posições (ou seja, que os vetores $\mathbf{r}_i$ variam) a posição localizada pelo vetor $\mathbf{R}$ mudará também, o que implica que o podemos associar uma velocidade ao ponto definido pelo vetor $\mathbf{R}$. Com que velocidade esse ponto se move? Para responder a essa questão tomemos a segunda derivada da expressão que define $\mathbf{R}$:

$$\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2}$$

(O estudante deve lembrar que a massa total M e as massas das partículas individuais são constantes). Lembrando que a derivada segunda da posição é a aceleração, a expressão acima pode ser reescrita na forma:

$$M\mathbf{a}_{cm} = \sum_{i=1}^{N} m_i\mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_r$$

Portanto, a força resultante sobre o sistema de partículas (produzida por agentes externos ao sistema) é igual ao produto $M\mathbf{a}_{cm}$. Mas vimos anteriormente que a força resultante sobre o sistema de partículas é a variação do momento linear total do sistema de partículas. Logo:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = M\mathbf{a}_{cm}$$

É muito importante que o estudante analise a derivação acima e se convença de que o centro de massa é um ponto imaginário. Para falarmos em centro de massa não precisamos ter partícula alguma nessa posição. Uma conseqüência interessante da expressão acima é que se as forças externas forem nulas o centro de massa se move com velocidade constante.

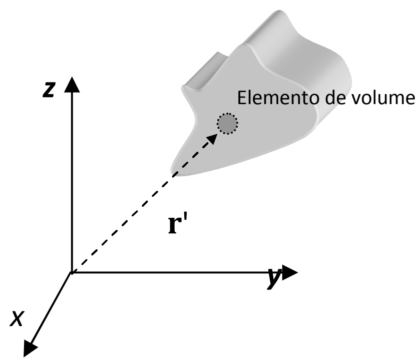


Figura 82 - Cálculo do Centro de massa para corpos extensos.

Quando temos corpos extensos, a soma na eq. 28 deve ser substituída por uma integral sobre o volume do objeto. Chamando de ρ à densidade de partículas e por $\mathbf{r}'$ ao vetor que localiza certo elemento de volume do objeto, então o centro de massa será dado pela expressão:

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M}\int \rho(\mathbf{r}')\,\mathbf{r}'\,d^3r'$$

A integral está sendo tomada sobre todo o volume do objeto[62] (veja a Figura 82).

Consideremos agora o movimento de rotação. Nesse tipo de movimento quem faz o papel do momento linear é o momento angular. Vamos, do mesmo modo que fizemos antes, definir o momento angular total de um sistema de partículas por:

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{l}_i$$

Nessa expressão, $\mathbf{l}_i$ são os *momenta* angulares de cada partícula individual. Usando a definição do momento de cada partícula:

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$$
$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \times (m_i \mathbf{v}_i) \qquad \text{eq. 29}$$

Vamos, novamente, tentar escrever uma expressão para a variação do momento angular do sistema de partículas semelhante à expressão para uma partícula individual (eq. 17)[63] [64]

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \times \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$$

Ou seja, a variação do momento angular total (que chamaremos de $\mathbf{T}$) é igual à soma dos torques que agem nas partículas que compõem o sistema:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} \equiv \mathbf{T} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\tau}_i$$

Da mesma maneira que escrevemos uma lei de Newton para o torque escrevendo o torque sobre uma partícula como sendo uma aceleração angular vezes um termo que representa uma massa

[62] Em alguns textos o estudante encontrará na definição de centro de massa a integral escrita em termos de um elemento diferencial de massa $dm = \rho\, d^3r$.

[63] O estudante deve observar que a primeira parcela da derivada do produto vetorial é nula. Por quê?

[64] Observe que: $\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \times \mathbf{p}_i = \mathbf{v}_i \times \mathbf{p}_i = 0$ pois $\mathbf{v}_i \,||\, \mathbf{p}_i$.

efetiva (eq. 22) vamos tentar escrever algo semelhante para o momento angular total do sistema. Para isso, retomamos a equação para o momento angular total (eq. 29):

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \times (m_i \mathbf{v}_i)$$

Vamos reescrever essa equação, mudando a velocidade linear para velocidade angular. Lembrando que (eq. 11):

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

Podemos reescrever a expressão para o momento angular total na forma:

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \times (m_i \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_i)$$

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_i)$$

O triplo produto vetorial que aparece nessa expressão pode ser escrito como[65]:

$$\mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_i) = \boldsymbol{\omega}_i (\mathbf{r}_i . \mathbf{r}_i) - \mathbf{r}_i (\boldsymbol{\omega}_i . \mathbf{r}_i)$$

O ponto nessa equação indica o produto escalar[66]. A segunda parcela do lado direito é nula, pois os vetores $\boldsymbol{\omega}$ e **r** são perpendiculares entre si. Logo podemos escrever o momento angular como:

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 \boldsymbol{\omega}_i$$

Vamos supor que o sistema de partículas seja um corpo rígido[67]. Um corpo rígido é um objeto para o qual as suas partes mantêm a mesma distância relativa quando o objeto se movimenta. Nesse caso, todas as partículas se movimentam com a mesma velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ e, portanto:

$$\mathbf{L} = \left(\sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 \right) \boldsymbol{\omega}$$

---

[65] Veja, por exemplo, a equação 22.37 na página 120 em: Spiegel, M. R. **Manual de fórmulas e tabelas matemáticas**. São Paulo: McGraw-Hill, 1973.

[66] Veja o Apêndice Complementos de Matemática.

[67] Falar em corpo rígido é uma abstração, pois pressupõe que a informação entre um ponto e outro do objeto viaje com velocidade infinita, o que não é permitido pela relatividade restrita.

Temos agora o momento angular total do sistema escrito como uma velocidade angular vezes uma quantidade que faz o papel da massa no momento linear. Essa quantidade recebe o nome de **Momento de Inércia** do corpo (simbolizado pela letra I):

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 \qquad \text{eq. 30}$$

Para corpos extensos, o momento de inércia, a exemplo do centro de massa, é escrito em termos de uma integral:

$$I = \int \rho(\mathbf{r}')\, r'^2\, d^3 r' \qquad \text{eq. 31}$$

Como no caso do centro de massa, ρ é a densidade de massa localizada na posição $\mathbf{r}'$ (veja a Figura 82).

A energia cinética para um sistema de partículas em rotação em torno de um eixo também pode ser obtida pela soma da energia cinética de cada partícula:

$$E_c = \sum_{i=1}^{n} E_{ci} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_i).(\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_i)$$

Nessa expressão usamos a expressão da velocidade em termos da velocidade angular e do vetor posição.

Vamos fazer agora a hipótese de que todas as partículas descrevem um movimento circular em torno de um mesmo ponto, origem do sistema de referência. Além disso, vamos supor que todas as partículas tenham a mesma velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ (aproximação de corpo rígido). Nessa situação, podemos escrever a expressão para a energia cinética do sistema de partículas como:

$$E_c = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_i).(\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \omega^2 r_i^2$$

$$E_c = \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2\right]\omega^2$$

A expressão que aparece entre colchetes é o Momento de Inércia do sistema de partículas, I. Portanto:

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2} I \omega^2}$$

Teorema dos eixos paralelos

Vimos na seção anterior que, para o movimento de rotação, tanto o momento angular como a energia cinética de um sistema de partículas são escritos em termos da quantidade Momento de Inércia, a qual desempenha no movimento de rotação o mesmo papel da massa no movimento de translação.

Na situação em que podemos considerar um número finito de partículas o momento de inércia será dado pela eq. 30 e, no caso de um corpo extenso, pela eq. 31. O cálculo do momento de inércia nessa última equação não é simples na maioria dos casos. É importante também salientar que, como a definição do momento de inércia depende do vetor que localiza o ponto em relação ao ponto ou eixo em torno do qual as partículas executam seu movimento de rotação, o vetor $\mathbf{r}$ que aparece nessas equações, o resultado obtido depende de qual o eixo considerado.

Uma pergunta que podemos considerar é a seguinte: se soubermos o momento de inércia em relação a um dado eixo poderemos saber o momento de inércia em relação a outro eixo? A resposta a essa questão não é geral, sendo sim apenas para eixos paralelos ao eixo em relação ao qual conhecemos o Momento de Inércia e que passam pelo centro de massa do corpo. Esse teorema é chamado **Teorema dos eixos paralelos:**

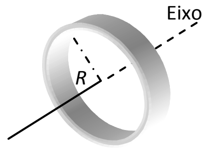
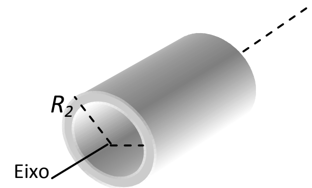
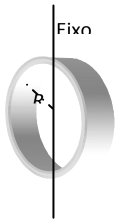
> O Momento de Inércia (I_p) de um corpo de massa M em relação a qualquer eixo paralelo a um eixo que passe pelo centro de massa do corpo (I_{CM}), localizado a uma distância h tomada ao longo da reta que é perpendicular aos dois eixos, será dado por:

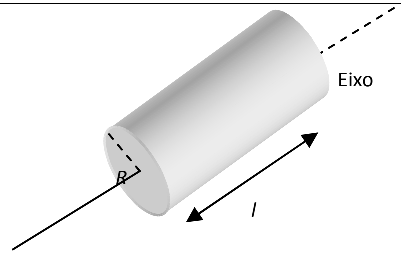
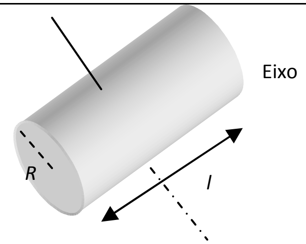
$$I_p = I_{CM} + Mh^2 \qquad \text{eq. 32}$$

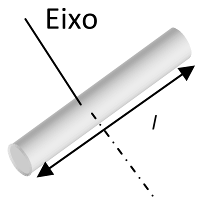
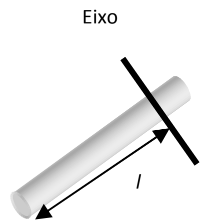
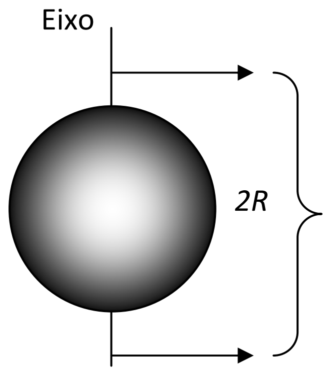
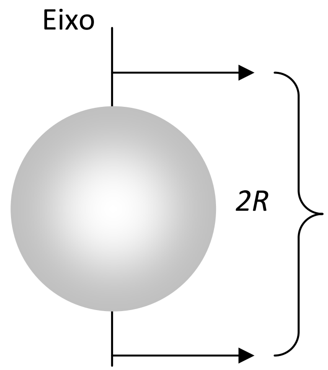
A segunda parcela no lado direito da eq. 32 nada mais é do que o Momento de Inércia do corpo, calculado em relação ao eixo considerado, considerando que toda a massa do corpo estivesse no seu centro de massa.

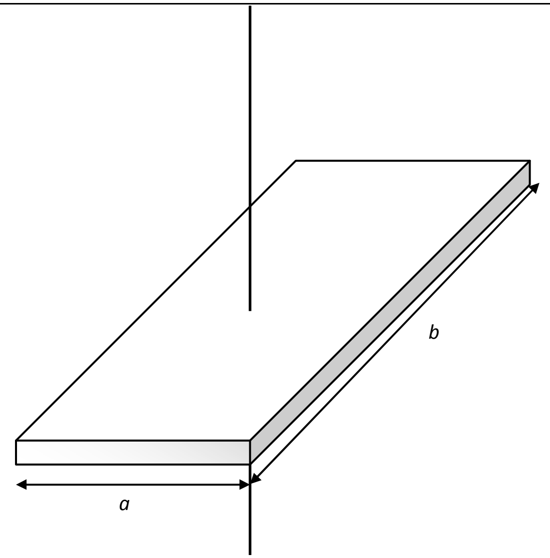
A Tabela 4 traz o momento de Inércia para vários tipos de objetos.

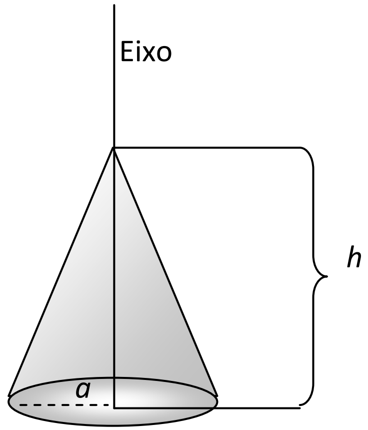
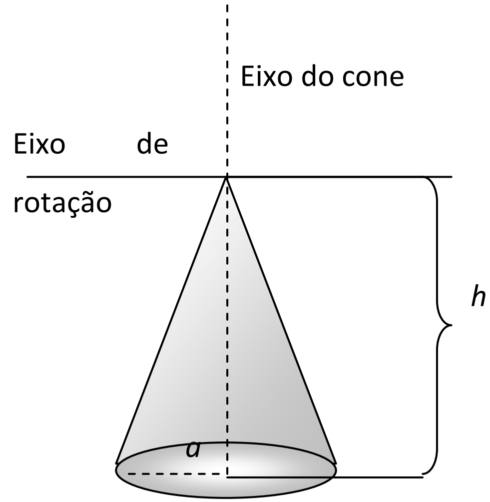
Tabela 4 – Expressões para o momento de inércia para diversos tipos de corpos

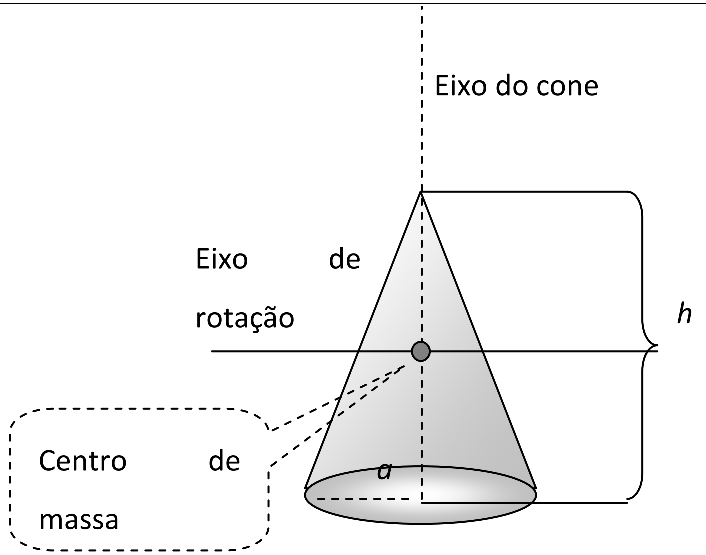
Corpos com Simetria cilíndrica	**Anel de raio R; Eixo coincidente com o eixo do anel.**	**Cilindro de espessura $dr = R_1 - R_2$;** **Eixo coincidente com o eixo do cilindro.**
		
	$I = MR^2$	$I = \frac{M}{2}\left(R_1^2 + R_2^2\right)$
	Aro fino em torno de qualquer diâmetro	
		

	$I=\frac{MR^2}{2}$	
	Cilindro sólido ou disco; Eixo coincidente com o eixo do cilindro	**Cilindro sólido; Eixo de rotação perpendicular ao cilindro passando pelo centro.**
		
	$I=\frac{MR^2}{2}$	$I=\frac{MR^2}{4}+\frac{Ml^2}{12}$
	Vareta delgada; Eixo perpendicular ao centro da vareta	**Vareta delgada; Eixo perpendicular à extremidade da vareta**

		
	$I = \frac{Ml^2}{12}$	$I = \frac{Ml^2}{3}$
	Esfera sólida em torno de qualquer diâmetro.	**Casca esférica delgada em torno de qualquer diâmetro.**
Corpos com simetria esférica		

	$I=\frac{2}{5}MR^2$	$I=\frac{2}{3}MR^2$
	Placa em torno de um eixo perpendicular passando pelo centro	
Corpos com simetria tipo caixa		
	$I=\frac{M}{12}\left(a^2+b^2\right)$	
	Cone circular de raio *a* e altura *h*; eixo alinhado com o eixo do cone.	**Cone circular de raio *a* e altura *h*; eixo perpendicular ao eixo do cone passando por um vértice.**

		
	$I = \frac{3}{10} M a^2$	$I = \frac{3}{20} M \left[a^2 + 4h^2 \right]$
Corpos com simetria tipo	**Cone circular de raio *a* e altura *h*; eixo perpendicular ao eixo do cone passando pelo centro de massa.**	

<table>
<tr><td rowspan="2">cone.</td><td>
</td><td></td></tr>
<tr><td>$I=\frac{3}{80}M\left[4a^2+h^2\right]$</td><td></td></tr>
</table>

A Terceira Lei de Newton e a definição operacional de massa

Estamos agora em condições de derivar a Terceira Lei de Newton, chamada de **Lei da Ação e Reação.** Essa lei é diferente das outras duas discutidas nas seções anteriores. Essa lei não pode ser derivada da definição de força, mas é o resultado da observação experimental. Entretanto, podemos derivar a Terceira Lei de Newton a partir da conservação do momento linear para um sistema de duas partículas que sofrem uma colisão elástica. Nesse tipo de colisão, a forma das partículas não se altera e após a colisão as partículas permanecem separadas.

Consideremos duas partículas que se chocam. Chamemos as partículas de *a* e de *b.* Em um dado instante t as duas partículas colidem. Antes do choque chamemos de m_a e v_{ai}, respectivamente, a massa e a velocidade da partícula *a* antes do choque e de m_b e v_{bi} a massa e a velocidade da partícula *b* antes do choque (Figura 83).

Após o choque, as velocidades das partículas mudam para v_{af} e v_{bf}(Figura 83). Chamaremos de Δt o intervalo de tempo durante o qual as partículas interagem. Observe que, fisicamente, o intervalo de tempo no qual a interação entre as duas partículas acontece pode ser pequeno, mas não é nulo.

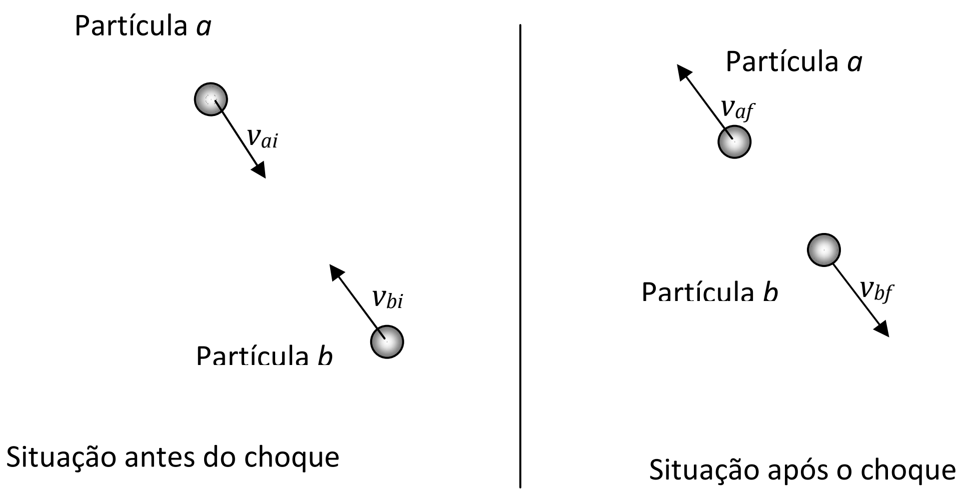


Figura 83

Apliquemos o princípio da conservação do momento linear a essa interação. Por esse princípio, a quantidade de momento total deve ser conservada, ou seja, a quantidade total de momento antes do choque deve ser igual à quantidade de momento após o choque:

$$\mathbf{P}_{antes} = \mathbf{P}_{depois}$$

A quantidade de momento linear antes do choque pode ser escrita como:

$$\mathbf{P}_{antes} = m_a \mathbf{v}_{ai} + m_b \mathbf{v}_{bi} .$$

A quantidade de momento após o choque pode ser escrita como:

$$\mathbf{P}_{depois} = m_a \mathbf{v}_{af} + m_b \mathbf{v}_{bf} .$$

Igualando essas duas quantidades:

$$m_a \mathbf{v}_{ai} + m_b \mathbf{v}_{bi} = m_a \mathbf{v}_{af} + m_b \mathbf{v}_{bf} .$$

Isolando as quantidades referentes à partícula *a* no lado esquerdo e as quantidades referentes à partícula *b* no lado direito:

$$m_a (\mathbf{v}_{ai} - \mathbf{v}_{af}) = m_b (\mathbf{v}_{bf} - \mathbf{v}_{bi}) .$$

Invertendo a ordem da subtração no lado esquerdo:

$$-m_a (\mathbf{v}_{af} - \mathbf{v}_{ai}) = m_b (\mathbf{v}_{bf} - \mathbf{v}_{bi})$$

Usando a notação definida anteriormente para a variação da velocidade:

$$-m_a \Delta\mathbf{v}_a = m_b \Delta\mathbf{v}_b .$$

No entanto, o choque não acontece instantaneamente. Há certo intervalo de tempo durante o qual as partículas estão interagindo. Dividindo pelo intervalo de tempo em que ocorreu a variação da velocidade:

$$-m_a \frac{\Delta\mathbf{v}_a}{\Delta t} = m_b \frac{\Delta\mathbf{v}_b}{\Delta t}$$

Tomando o limite $\Delta t \to 0$ e usando a definição de aceleração (variação da velocidade por unidade de tempo) podemos escrever a equação acima como:

$$\lim_{\Delta t \to 0}\left[-m_a \frac{\Delta v_a}{\Delta t} \right] = \lim_{\Delta t \to 0}\left[m_b \frac{\Delta v_b}{\Delta t} \right]$$
$$-m_a \lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{\Delta v_a}{\Delta t} \right] = m_b \lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{\Delta v_b}{\Delta t} \right]$$
$$-m_a a_a = m_b a_b$$

No lado esquerdo da equação anterior temos a força resultante (massa vezes aceleração) atuando sobre a partícula *a* devido à partícula *b*, $\mathbf{F}_a$, enquanto no lado direito a força resultante agindo sobre a partícula *b* devido à partícula *a*, $\mathbf{F}_b$. Logo, podemos reescrever esta expressão como:

$$\mathbf{F}_a = -\mathbf{F}_b \qquad \text{eq. 33}$$

Vemos dessa equação que a força de uma partícula sobre a outra é respondida com uma força de mesma intensidade, mas de sentido contrário (isso é indicado pelo sinal menos). Chamamos a essas forças de ação e reação. Esse resultado é geral, e é conhecido como **Terceira Lei de Newton** ou **Lei da Ação e Reação:**

A toda força aplicada (ação) corresponde uma força oposta em sentido (reação) e de mesma intensidade aplicada pelo corpo que recebeu a ação sobre o corpo que aplicou a ação (chamado de agente da ação).

Dissemos antes que a Terceira Lei de Newton tem sua origem no experimento. Aparentemente a derivação que fizemos acima vai contra essa afirmação. O estudante, no entanto, deve se lembrar que o princípio da conservação do momento linear tem sua origem na experiência e que a generalização dessa lei como um princípio é uma questão de fé, boa fé, mas sempre fé.

Em problemas envolvendo a aplicação da lei da ação e reação, devemos sempre nos lembrar que os pares de ação e reação agem em corpos diferentes. Não é possível a um par ação e reação agir sobre um mesmo objeto.

Podemos agora abordar uma questão que esboçamos antes ao discutirmos as Primeira e Segunda Leis de Newton: como determinar a massa de um objeto? Consideremos duas partículas, de massas m_1 e m_2, uma agindo sobre a outra. Portanto, temos um par de forças de ação e reação de modo que (em módulo):

$$F_{12} = F_{21}$$

Mas, pela Segunda Lei de Newton a força sobre a partícula *2* (F_{21}) causa uma aceleração nessa partícula dada por a_2 e a força sobre a partícula *1* (F_{12}) causa uma aceleração a_1 sobre a partícula com massa m_1. Desse modo, podemos escrever:

$$m_1 a_1 = m_2 a_2 \Rightarrow m_1 = m_2 \frac{a_2}{a_1}$$

Vamos supor que definamos a massa da partícula 2 como a unidade de massa de nosso sistema de medida. Isso por certo é arbitrário, mas vamos **convencionar** que: m_2 = 1. Desse modo, todas as partículas terão suas massas expressas como múltiplos ou submúltiplos da massa da partícula 2. Logo:

$$m_1 = \frac{a_2}{a_1}$$

Temos agora uma maneira de medir a massa dos diversos objetos, em função da massa unitária, simplesmente medindo as acelerações das partículas *1* e *2.*

Podemos demonstrar que o torque obedece a uma lei de ação e reação como a derivada para as forças no movimento de translação:

> A toda ação de um torque corresponde um torque de reação de mesma intensidade e direção, porém de sentido oposto.

Chamando de $\boldsymbol{\tau}_1$ e $\boldsymbol{\tau}_2$ aos torques de ação e reação: $\boldsymbol{\tau}_1 = -\boldsymbol{\tau}_2$. A interpretação dessa lei e a sua aplicação a problemas seguem a mesma lógica da lei de Newton de ação e reação para o movimento linear.

Exemplos de aplicação das Leis de Newton

Naturalmente que a solução de problemas envolvendo a Segunda Lei de Newton não é simples, exigindo às vezes ferramentas matemáticas bastante elaboradas. O estudante deve se conscientizar que a Segunda Lei de Newton é uma equação vetorial: para cada componente temos uma equação a ser satisfeita. Assim, se chamarmos por f_x, f_y e f_z às componentes da força resultante e por a_x, a_y e a_z às componentes da aceleração ao longo de cada eixo do sistema de coordenadas cartesianas, poderemos escrever:

$$\mathbf{f} = m\mathbf{a} \Rightarrow \begin{cases} f_x = ma_x = m\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} \\ f_y = ma_y = m\dfrac{d^2y(t)}{dt^2} \\ f_z = ma_z = m\dfrac{d^2z(t)}{dt^2} \end{cases}$$

Os passos para a solução de problemas usando a Segunda Lei de Newton são os seguintes:

- Escolha um referencial para descrever o problema;
- Escreva todas as forças atuando sobre a partícula;

- Calcule a força resultante;
- Escreva as componentes da força resultante em cada uma das direções *x, y* e *z*;
- Solucione as equações em cada uma das direções;
- Escreva o vetor posição na forma[68]: $\mathbf{r}(t) = x\,\mathbf{e_x} + y\,\mathbf{e_y} + z\,\mathbf{e_z}$.

Vamos agora resolver alguns exemplos de aplicação da Segunda Lei de Newton.

Exemplo 24 - Partícula sobre a qual atua uma única força na direção da velocidade da partícula[69].

A situação é mostrada esquematicamente na Figura 84, na qual mostramos o caso de uma partícula sobre a qual atua uma força de mesma direção e sentido da velocidade da partícula.

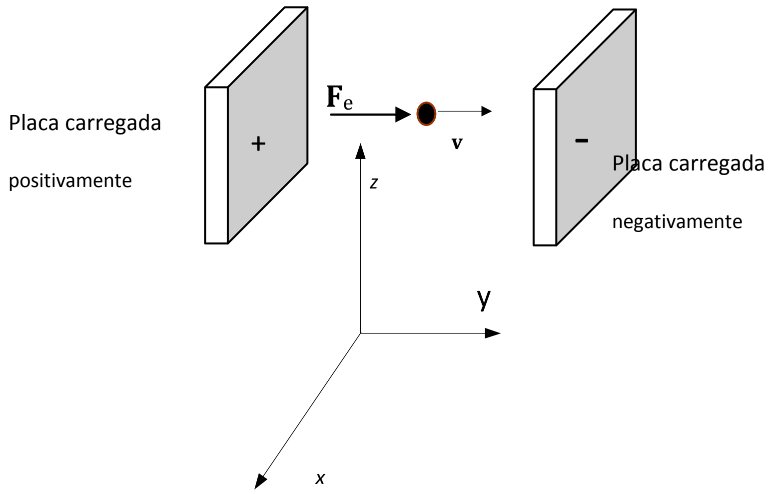


Figura 84 - Partícula sobre a qual atua uma única força.

O estudante deve observar que os sinais (positivos ou negativos) das componentes da velocidade e da força são dados pela orientação de nosso sistema de eixos: no exemplo, tanto a força mostrada como a velocidade da partícula, estão na direção *y*, possuindo a mesma orientação (sentido) de *y* e, portanto, têm sinais positivos.

Esta situação não é puramente acadêmica. Considere um próton que se encontre entre as placas paralelas de um capacitor como mostrado na Figura 84. Um capacitor de placas paralelas, como o próprio nome diz, consiste de duas placas paralelas uma a outra, carregadas com cargas de sinais contrários: uma placa é carregada positivamente e outra é carregada negativamente. Como será

---

[68] **i, j** e **k** são os vetores unitários nas direções *x, y* e *z* respectivamente.

[69] O estudante deve observar que essa força pode ter o mesmo sentido ou o sentido oposto ao da velocidade da partícula.

visto mais adiante, na região central entre as duas placas, a força elétrica sobre uma partícula positiva aponta no sentido da placa negativa e é, aproximadamente, constante.

Outro exemplo é o de uma partícula perto da superfície da Terra. Como o estudante sabe, todos os corpos são atraídos para o centro da Terra por uma força chamada de **força gravitacional**. Esta força é aproximadamente constante perto da superfície da Terra. A Figura 85 ilustra esse tipo de situação.

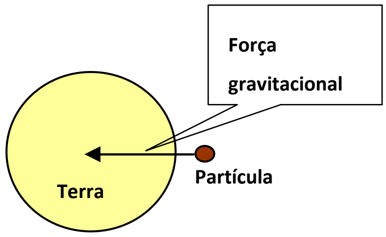


Figura 85 - Força gravitacional.

Vamos proceder seguindo as etapas apontadas acima.

Etapa 1 – forças que atuam sobre a partícula

Nesse caso temos apenas uma única força, a força que chamamos de **F**.

Etapa 2 - Calcule a força resultante

Como temos apenas uma força atuando na partícula essa é a própria força resultante:

$$\mathbf{F_r = F}$$

Etapa 3 - Escreva as componentes da força resultante em cada uma das direções *x, y* e *z*;

Ao escolhermos um sistema de referências temos a liberdade de escolher a orientação dos eixos do sistema. Por isso, vamos escolher que o eixo *y* aponte na direção da força aplicada e da velocidade da partícula. Com essa escolha as componentes *x* e *z* são nulas tanto para a força como para a velocidade:

$$v_x = v_z = f_x = f_z = 0$$

Enquanto que a componente da força se escreve:

$$f_y = F$$

Etapa 4 - Solucione as equações em cada uma das direções

Na direção *y* a Segunda Lei de Newton se escreve:

$$f_y = F = ma_y$$

a_y é a componente da aceleração na direção *y*.

Como a força atuando na partícula é uma constante então a aceleração também o será:

$$a = F/m = \text{constante}$$

Escrevemos agora a aceleração como a segunda derivada da posição:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = a$$

Para descobrir a função que descreve a posição na direção *y* vamos integrar duas vezes a equação acima:

$$\frac{dy}{dt} \equiv v_y = \int a_y dt \Rightarrow \boxed{v_y(t) = a_y t + C} \qquad \text{eq. 34}$$

$$y(t) = \int a_y t dt + \int C dt \Rightarrow \boxed{y(t) = \frac{1}{2}a_y t^2 + Ct + C_0} \qquad \text{eq. 35}$$

Nestas equações C e C_0 são duas constantes de integração a serem determinadas. Para descobrir essas constantes, vamos fazer a seguinte hipótese: no instante de tempo zero ($t = 0$) a partícula tinha uma velocidade v_0 e ocupava a posição y_0. Fazendo $t = 0$ na eq. 34 para a velocidade e na eq. 35 para a posição:

$$v_0 = a.0 + C \rightarrow C = v_0$$

e

$$y_0 = \frac{1}{2}a.0 + v_0.0 + C_0 \rightarrow C_0 = y_0$$

Portanto, as equações que descrevem a posição e a velocidade da partícula nessa situação se escrevem, respectivamente:

$$y(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + y_0$$
$$v(t) = at + v_0$$

Etapa 5 - Escreva o vetor posição na forma[70]: $\mathbf{r}(t) = x\,\boldsymbol{i} + y\,\boldsymbol{j} + z\,\boldsymbol{k}$.

Neste exemplo, esta etapa é muito simples, pois as componentes *x* e *z* são constantes:

$$\mathbf{r}(t) = x_0\mathbf{i} + \left[\frac{1}{2}at^2 + v_0 t + y_0\right]\mathbf{j} + z_0\mathbf{k}$$

Podemos simplificar um pouco essa expressão usando da nossa liberdade de escolha do sistema de referência utilizado. Como temos essa liberdade, podemos escolher que a partícula se move ao longo do eixo *y*. Com isso: x_0 e z_0 são nulos e a expressão para o vetor posição se simplifica:

$$\mathbf{r}(t) = \left[\frac{1}{2}at^2 + v_0 t + y_0\right]\mathbf{j}$$

O estudante deve observar que a trajetória da partícula no espaço é uma linha reta, mas que a equação que descreve as posições ocupadas pela partícula no tempo é uma parábola na variável tempo. Esse tipo de movimento é chamado **Movimento Retilíneo Uniformemente Acelerado** (MRUA). Os gráficos deste tipo de movimento estão na Figura 86 e na Figura 87.

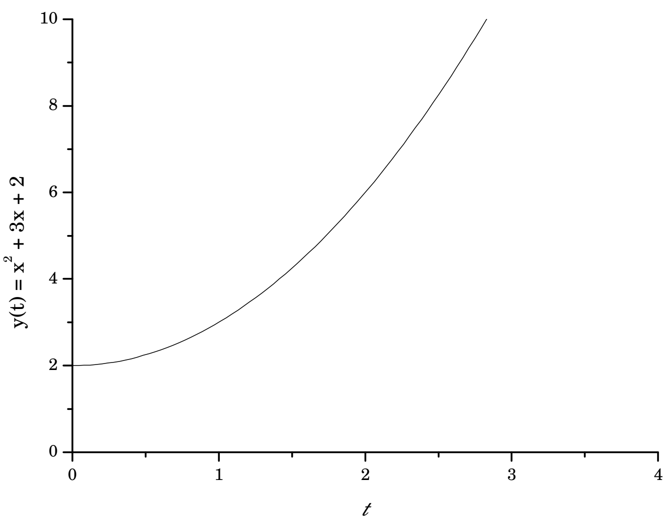


Figura 86 - Gráfico da posição em função do tempo para o MRUA ($a = 2$ m/s^2, $v_0 = 3$ m/s e $y_0 = 2$ m).

O estudante deve observar que se a força resultante for nula (caso especial da força constante) as equações de movimento são bastante simplificadas, pois neste caso a aceleração também é nula.

[70] **i, j, k** são os vetores unitários nas direções *x,y,z* respectivamente.

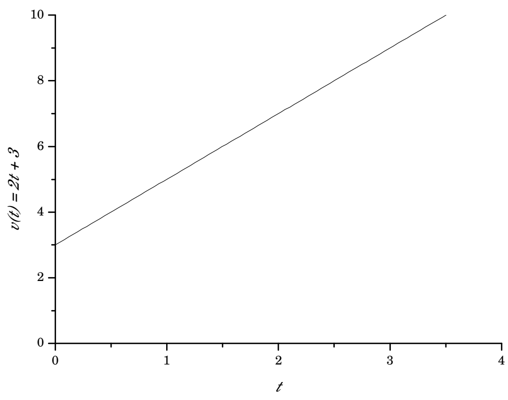


Figura 87 - Gráfico da velocidade em função do tempo para o movimento mostrado na figura anterior.

Teremos então:

$$y(t) = v_0 t + y_0$$
$$v(t) = v_0$$

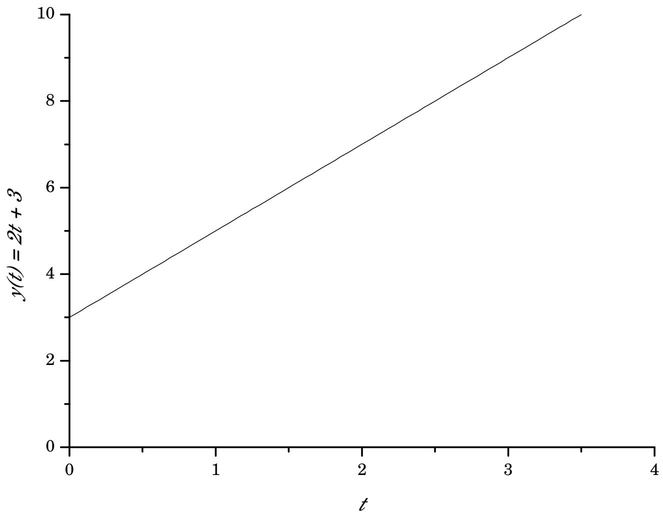


Figura 88 - Gráfico da posição em função do tempo para o MRU (v = 2 m/s).

Esse tipo de movimento, que apresenta uma relação linear entre o tempo e a posição é chamado de **Movimento Retilíneo Uniforme** (MRU).

O gráfico da posição em função do tempo para esse tipo de movimento é mostrado na Figura 88. Para esse tipo de movimento a velocidade é constante no tempo. Naturalmente se a velocidade inicial é nula o objeto não muda a sua posição.

Exemplo 25 – Partícula com velocidade inicial em uma direção e força constante atuando em direção diferente da direção da velocidade.

O problema é ilustrado na Figura 89. Por conveniência, tomamos o plano *(z,y)* como o plano que contém tanto a força aplicada ($\mathbf{F}$) como a velocidade inicial da partícula ($\mathbf{v_0}$).

Não escreveremos explicitamente, como fizemos no caso anterior, as etapas da solução. O estudante deverá procurar identificá-las nos procedimentos a seguir.

Novamente, temos uma única força agindo sobre a partícula. Portanto, essa força é a própria força resultante. No entanto, diferentemente do caso anterior, essa força possui duas componentes: uma componente na direção *y* e outra na direção *z* (f_y e f_z, respectivamente). Teremos, portanto, duas equações para resolver:

$$\frac{f_y}{m} = a_y = \frac{d^2 y}{dt^2}$$
$$\frac{f_z}{m} = a_z = \frac{d^2 z}{dt^2}$$

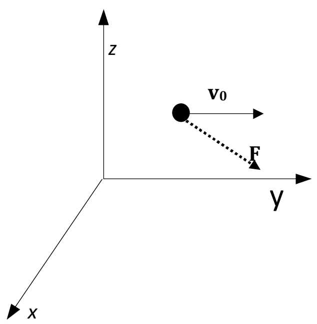


Figura 89 - Partícula sujeita a uma força constante em direção diferente da direção da velocidade.

Como a força é constante, temos duas equações semelhantes àquelas que solucionamos no Exemplo 24, cuja solução já conhecemos:

$$z(t) = \frac{1}{2} a_z t^2 + v_{0z} t + z_0$$
$$y(t) = \frac{1}{2} a_y t^2 + v_{0y} t + y_0$$

Um caso de particular interesse é o da partícula lançada obliquamente e sujeita apenas à força gravitacional terrestre (Figura 90). Se chamarmos de direção *z* a direção perpendicular à superfície, a força gravitacional atua somente nessa direção. Portanto, somente teremos aceleração na direção *z* e as equações acima se reduzem a:

$$z(t) = \frac{1}{2}a_z t^2 + v_{0z}t + z_0$$
$$y(t) = v_{0y}t + y_0$$

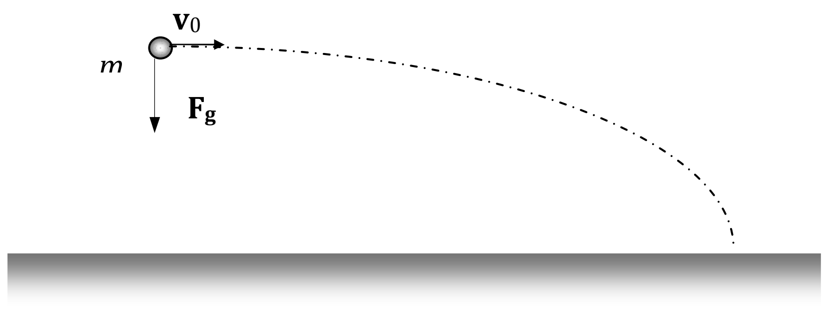


Figura 90 – Partícula lançada obliquamente perto da superfície da Terra.

Na direção *z* teremos um movimento uniformemente acelerado enquanto na direção *y* teremos um movimento uniforme.

Exemplo 26 - O plano inclinado

Consideremos o seguinte problema. Um bloco de madeira se encontra sobre um plano que faz um ângulo θ com uma superfície horizontal. Veja a Figura 91.

Devemos definir um sistema de coordenadas. O mais conveniente nesse caso é tomar um sistema com o eixo *x* paralelo ao plano, apontando para a base do plano e o eixo *y,* perpendicular ao plano, apontando para cima. Este é um problema bi-dimensional e, portanto, não necessitaremos do eixo *z* e, por essa razão, não o indicaremos na Figura 91.

Na Figura 92, vemos representadas as três forças que atuam sobre o bloco de madeira. Primeiro, temos o peso do bloco, que é a força com que a Terra atrai todos os objetos. Simbolizamos esta força pela letra **P**. A força peso aponta sempre em direção ao solo. Lembrando que a Terra acelera todos os objetos na proximidade da superfície com uma aceleração constante **g**[71], a força peso se escreve:

$$\mathbf{P} = m\mathbf{g}.$$

---

[71] Aproximadamente igual a 9,81 m/s^2. Veremos no Capítulo 5 mais detalhadamente as características do campo gravitacional.

A segunda força atuando no bloco é a força normal, indicada pela letra **N.** Essa força é a força com que o plano inclinado empurra o bloco de madeira. Sua origem é a repulsão de natureza elétrica entre as duas superfícies e é sempre perpendicular à superfície.

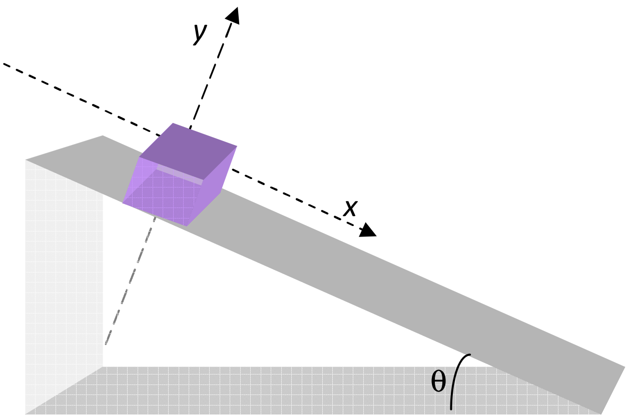


Figura 91 – O plano inclinado e a disposição dos eixos do Sistema de Referência no plano inclinado.

A terceira força que atua sobre o bloco é a força de atrito, indicada por $\mathbf{F_a}$, oposta à direção de movimento nesse caso. Na maior parte dos casos a força de atrito é proporcional à força normal:

$$\mathbf{F_a} = \mu\, \mathbf{N}$$

A letra grega μ representa o coeficiente de atrito.

A força resultante que age no bloco é dada pela soma dessas três forças:

$$\mathbf{F_r} = \mathbf{F_a} + \mathbf{P} + \mathbf{N} = m\,\mathbf{a} \qquad \text{eq. 36}$$

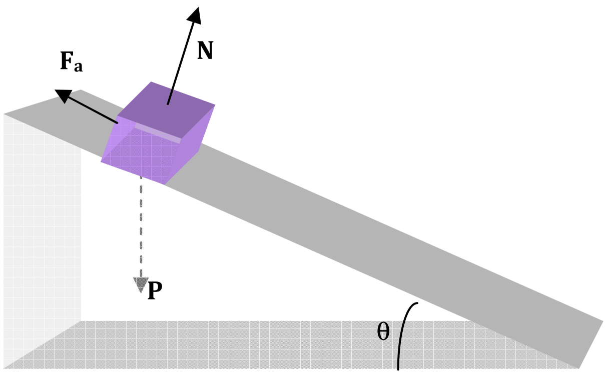


Figura 92 - O plano inclinado e as forças atuando sobre o bloco que desliza.

Devemos escrever as componentes *x* e *y* da Segunda Lei de Newton (eq. 36). O estudante pode ver da figura que a força de atrito ($\mathbf{F_a}$) atua somente na direção *x* enquanto que a força normal atua somente na direção *y*. A força peso, por outro lado, pode ser decomposta em duas partes: uma atuando ao longo da direção *x*, $\mathbf{P_x}$, e outra atuando ao longo da direção *y*, $\mathbf{P_y}$. Temos então:

Direção *x:* $P_x - F_a = m\ a_x$

Direção *y:* $N - P_y = m\ a_y$

Como o bloco não se desloca na direção *y* também não possui aceleração nessa direção, o que implica na igualdade:

$$N - P_y = 0 \Rightarrow N = P_y$$

Um pouco de trigonometria nos mostra que o ângulo entre o eixo *y* e a força peso ($\mathbf{P}$) é o mesmo ângulo entre o plano inclinado e a superfície horizontal (θ). Portanto:

$$P_y = P \cos(\theta)$$

$$P_x = P \text{ sen } (\theta).$$

Usando esse resultado, podemos escrever:

$$N = P \cos(\theta)$$

O estudante deve observar que, à medida que o plano inclinado for deslocado em direção à horizontal, teremos:

$$\cos(\theta) \rightarrow 1 \Rightarrow N = P$$

Por outro lado, se aumentarmos o ângulo θ, teremos no limite do plano inclinado perpendicular à horizontal:

$$\cos(\theta) \rightarrow 0 \Rightarrow N = 0.$$

Equacionando na direção *x*:

$$P \text{ sen } (\theta) - F_a = m\ a_x$$

$$P \text{ sen}(\theta) - \mu\ N = m\ a_x$$

$$P \text{ sen}(\theta) - \mu\ P \cos(\theta) = m\ a_x$$

Isolando a aceleração na direção x, a_x:

$$a_x = \frac{P}{m}\left[\text{sen}(\theta) - \mu \cos(\theta)\right]$$

Usando a definição de força peso: $P = mg$, a expressão acima pode ser simplificada:

$$a_x = g[\mathrm{sen}(\theta) - \mu\cos(\theta)]$$

Uma consequência dessa expressão é que a aceleração do bloco não depende de sua massa, apenas do ângulo do plano inclinado e do coeficiente de atrito, o qual depende da natureza das superfícies do bloco e do plano inclinado sobre o qual o bloco desliza.

No limite da força de atrito nula ($\mu \to 0$) temos que:

$$a_x = g\,\mathrm{sen}(\theta).$$

Exemplo 27 – O plano inclinado com contrapeso.

Outro problema clássico de aplicação da Segunda Lei de Newton está mostrado na Figura 93.

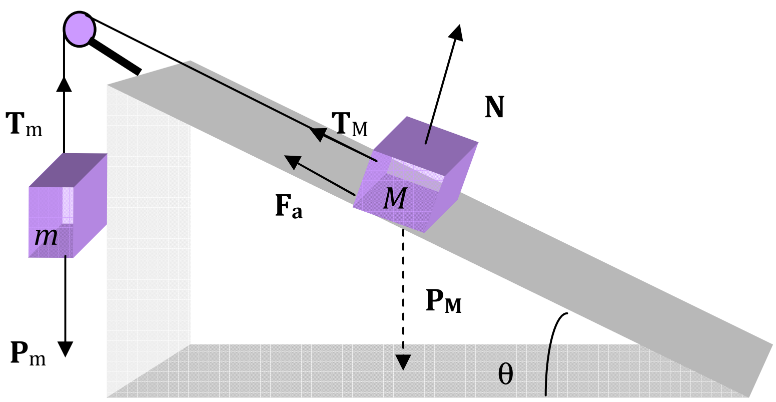


Figura 93 – O plano inclinado com contrapeso.

Esse problema é semelhante ao anterior. Agora, no entanto, temos duas massas, M e m, e queremos saber se a massa M que está sobre o plano inclinado descerá ou subirá. Por hipótese, inicialmente os dois blocos estão em repouso.

Sobre a massa M que está sobre o plano inclinado, agem as seguintes forças:

1. A força peso, indicada na figura por $\mathbf{P_M}$;
2. A força de atrito entre a massa M e o plano inclinado, indicada por $\mathbf{F_a}$;
3. A tensão na corda, indicada por $\mathbf{T_M}$;
4. E, finalmente, a força normal, indicada por $\mathbf{N}$.

Portanto, a massa M está sujeita à ação de uma força resultante dada por:

$$\mathbf{F_M} = \mathbf{P} + \mathbf{F_a} + \mathbf{N} + \mathbf{T_M}$$

Sobre a massa que está suspensa, m, agem as seguintes forças:

1. A força peso, indicada por $\mathbf{P_m}$;
2. A tensão na corda, indicada por $\mathbf{T_m}$.

As forças de tensão formam um par de ação e reação. Equacionando como antes as forças que atuam sobre a massa M:

$$ma_x = Mg\,\text{sen}(\theta) - T_M - \mu Mg\cos(\theta)$$

Para chegar nessa equação usamos o resultado do problema anterior que relaciona a normal à componente da força peso na direção *y*:

$$F_a = \mu N = \mu g\cos(\theta)\,.$$

Então:

$$Ma_x = Mg\left[\text{sen}(\theta) - \mu\cos(\theta)\right] - T_M$$
$$a_x = g\left[\text{sen}(\theta) - \mu\cos(\theta)\right] - \frac{T_M}{M}$$

Precisamos agora calcular a tensão $\mathbf{T}_{\mathrm{M}}$. Para isso, vamos calcular o que acontece com a massa m. A força resultante sobre a massa suspensa é dada por:

$$\mathbf{P} + \mathbf{T_m} = m\,\mathbf{a_m}$$

Onde $\mathbf{a_m}$ é a aceleração experimentada pela massa suspensa. Escrevendo explicitamente a força peso:

$$mg - T_m = ma_m \Rightarrow T_m = m(g - a_m)$$

Como as forças $\mathbf{T_M}$ e $\mathbf{T_m}$ formam um par de ação e reação, podemos fazer a seguinte hipótese: a corda permanece sempre esticada. Isto implica que os módulos das duas tensões são iguais e que as acelerações das duas massas são iguais:

$$|\mathbf{T}_M| = |\mathbf{T}_m| = T \;\text{ e }\; |\mathbf{a}_M| = |\mathbf{a}_m| = a$$

Então a aceleração sobre o bloco de massa M será dada por:

$$a = g\left[\text{sen}(\theta) - \mu\cos(\theta)\right] - \frac{m}{M}(g - a)$$

Isolando a aceleração:

$$a = \frac{M}{M+m} g \left[\operatorname{sen}(\theta) - \mu \cos(\theta) - \frac{m}{M} \right]$$

Vamos analisar essa expressão. Por hipótese, suponhamos que inicialmente as duas massas estejam em repouso (velocidade inicial nula). Temos três possibilidades para o sinal da aceleração:

1. A aceleração é nula: |a| *= 0*.

Para que isso aconteça o termo entre colchetes deve ser nulo, já que tanto g como m e M são diferentes de zero:

$$\operatorname{sen}(\theta) - \mu \cos(\theta) - \frac{m}{M} = 0 \Rightarrow \frac{m}{M} = \operatorname{sen}(\theta) - \mu \cos(\theta)$$

Esta é a situação de equilíbrio: os blocos permanecem exatamente na posição.

2. A aceleração é positiva: |a| > 0*.*

Isto indica que a massa M se move em direção à base do plano inclinado[72]. A condição a ser satisfeita nesse caso é:

$$\operatorname{sen}(\theta) - \mu \cos(\theta) - \frac{m}{M} > 0 \Rightarrow \frac{m}{M} < \operatorname{sen}(\theta) - \mu \cos(\theta)$$

3. A aceleração é negativa: |a| < 0*.*

Nesse caso, a massa M se moverá em direção ao topo do plano inclinado. A condição a ser satisfeita nesse caso é:

$$\operatorname{sen}(\theta) - \mu \cos(\theta) - \frac{m}{M} < 0 \Rightarrow \frac{m}{M} > \operatorname{sen}(\theta) - \mu \cos(\theta).$$

Exemplo 28 –

Um carro de massa m descreve uma trajetória circular de raio r, em uma pista plana horizontal, com velocidade $\mathbf{v}$ constante em módulo.

a) Demonstre que o carro está submetido a uma força $\mathbf{F}_r$ resultante, cujo módulo é dado por[73]:

[72] Naturalmente que a massa *m* se moverá verticalmente para cima.

$$F_r = m\frac{v^2}{r}$$

b) Que natureza possui a força $\mathbf{F}_r$ acima e qual vizinhança que a produz?

c) Sendo o momento linear $\mathbf{p}$ do carro um vetor, quais características desse vetor a força $\mathbf{F}_r$ modifica? O módulo, a direção ou o sentido?

d) Com base nas respostas dos itens *a* e *c*, explique porque não é seguro fazer curvas *fechadas* em grande módulo de velocidade?

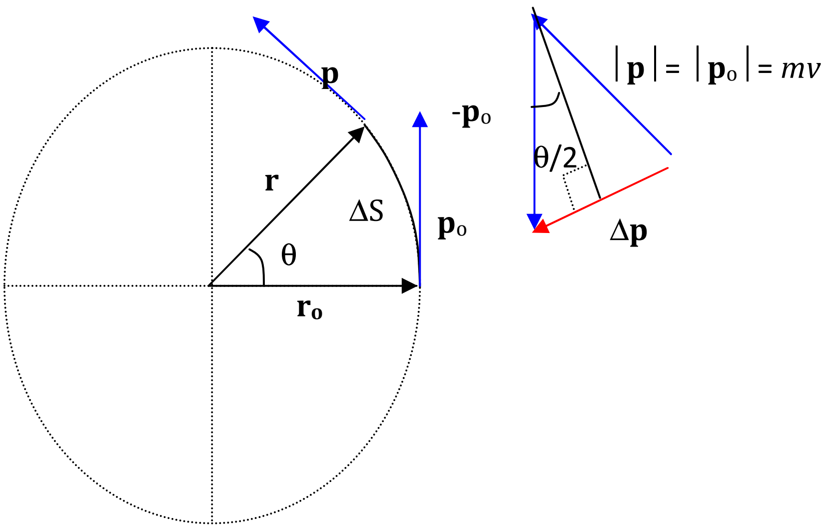


Figura 94 - Exemplo 27.

a) A força que atua sobre o carro é dada por:

$$\mathbf{F} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t}.$$

Nessa expressão:

$$\Delta t = \frac{\Delta S}{v} = \frac{r\theta}{v}$$

Do triângulo isósceles mostrado na Figura 94 podemos escrever:

$$|\Delta \mathbf{p}| = 2p\sin\frac{\theta}{2}$$

73 O estudante deve observar que já obtivemos esta expressão por outro caminho.

Assim:

$$F = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta p}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2pv \sin \theta/2}{r\theta} \underset{p=mv}{=} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2mv^2 \sin \theta/2}{r\theta}$$
$$F = \frac{2mv^2}{r} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\sin \theta/2}{\theta} = \frac{mv^2}{r} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\sin \theta/2}{\theta/2}$$

Mas, se $\Delta t \to 0$ implica que o ângulo θ tende a zero também e o limite (use a regra de L'Hôpital, que você aprendeu no curso de Cálculo[74]):

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\text{sen}\left(\theta/2\right)}{\theta/2} = \lim_{\theta \to 0} \frac{\text{sen}\left(\theta/2\right)}{\theta/2} \underset{L'Hôpital}{=} \lim_{\theta \to 0} \frac{\cos\left(\theta/2\right)}{\theta/2} = \frac{1}{1} = 1$$

Portanto:

$$F = \frac{mv^2}{r}$$

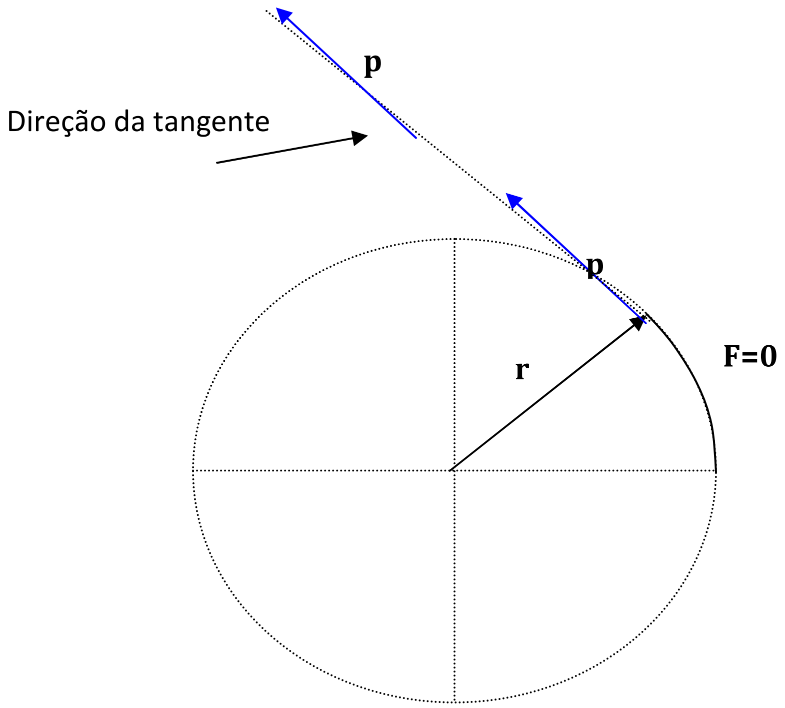


Figura 95 - Direção da trajetória do carro no item d do Exemplo 28.

b) Como a força resultante tem a direção e sentido de $d\mathbf{P}$, e $d\mathbf{P}$ tem direção radial e voltado para o centro da curvatura, concluímos que a força resultante $\mathbf{F}_r$ também é radial e voltada para o centro da trajetória. As únicas vizinhanças que interagem com o carro são: a Terra, atraindo o

[74] Caso você não tenha estudado ainda esta regra, consulte os Complementos de Matemática.

carro para seu centro, e a superfície do solo interagindo com os pneus do carro. A primeira, o peso do carro, não possui componentes contidas no plano da trajetória, logo a vizinhança que aplica a força resultante $\mathbf{F}_r$, é o solo, isto é uma força de aderência entre o solo e os pneus de natureza elétrica.

c) Como o módulo de $\mathbf{p}$ é constante, sua variação é devida apenas a uma mudança em sua direção, logo a força resultante $\mathbf{F}_r$ causa uma mudança apenas na direção de $\mathbf{p}$.

d) O item *a* mostra que a força resultante ($\mathbf{F}_r$) é proporcional a v^2. O item *c* justifica que esta força causa uma mudança de direção de $\mathbf{p}$, causando uma mudança de direção no movimento do carro. Por outro lado, a coesão entre o solo e os pneus, devida a interações elétricas, possui um limite. Assim, a força $\mathbf{F}_{\text{limite}}$ será aquela que romperá a coesão entre os pneus e o solo e, para esta força limite, teremos uma velocidade v_{limite}. Valores do módulo da velocidade acima desse valor farão com que o carro derrape: a força de coesão se anularia e a direção do momento linear $\mathbf{p}$ do carro não sofreria mudanças.

Daí para frente o movimento do carro seria retilíneo e, conseqüentemente o carro sairia na direção da tangente nesse ponto da trajetória, veja a Figura 95.

Capítulo IV - O Princípio da Relatividade

Uma questão que se impõe é a seguinte:

> Se soubermos as coordenadas de uma partícula em um dado sistema de referências inercial, poderíamos saber **sem usar qualquer processo de medição** as coordenadas daquela partícula em outro sistema de referência inercial?

A resposta a esta questão não é simples e é o divisor de águas entre a Física Clássica e a Física Moderna. Antes de entrarmos nessa questão, devemos fazer uma pequena digressão e discutir o que se entende por **relatividade.**

O termo relatividade expressa o fato de que diferentes pessoas (chamadas **observadores)** percebem os eventos que acontecem no seu meio ambiente de formas diferentes. Tomemos um exemplo simples: em um terminal de ônibus duas pessoas observam um coletivo que manobra para sair do pátio de estacionamento. Uma delas está em pé em um bar tomando um café. A outra é passageira no ônibus que manobra. Do ponto de vista da pessoa que está tomando café na plataforma, é o ônibus que se movimenta. O terminal (suas construções) está parado. No entanto, da perspectiva do nosso passageiro no ônibus, não é isso que está acontecendo. Para o passageiro, o ônibus está em repouso, pois a posição dele em relação aos outros passageiros, ao motorista e a todo o resto dos objetos que se encontram no ônibus não muda. Todavia, ao olhar pela janela, o passageiro vê que todas as outras pessoas e objetos da estação se movimentam. Qual dos dois observadores está com a razão? O passageiro no ônibus ou a pessoa que se encontra na estação tomando seu café? Ambas estão certas, simplesmente estão usando dois sistemas de referência diferentes. Isto é o que o termo relatividade significa em Física: o movimento existe ou não, com tais e quais características, dependendo do observador e do sistema de referência que ele escolhe.

Esquematicamente, os dois sistemas de referência do nosso exemplo são mostrados na Figura 96. Nela, o sistema de referência escolhido pelo observador que toma café na estação é representado por S e o sistema de referência escolhido pelo observador no ônibus é representado por S'. O sistema S' se move com certa velocidade $\mathbf{v}$ quando visto do sistema S. Naturalmente, o sistema S, quando visto do sistema S', se move com velocidade $-\mathbf{v}$, no sentido oposto.

Cada sistema de referência tem seu próprio sistema de eixos: (x,y,z) no sistema S e (x',y',z') no sistema S'.

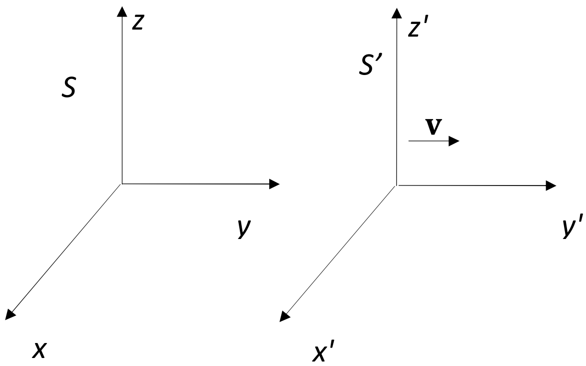


Figura 96 - Representação esquemática dos dois sistemas de coordenadas do exemplo da estação de ônibus.

Podemos agora endereçar a questão que nos propusemos antes: sabendo as coordenadas de um ponto no sistema S (isto é, sabemos quais são os valores dos números x, y e z) como saber as coordenadas do ponto no sistema S' (isto é, quais são os valores dos números x', y' e z')? A forma de fazer isto, as equações que levarão a descobrir estes números são chamadas de **equações de transformação de coordenadas**[75]. A maneira como as construímos obedece a um **Princípio de Relatividade**. Esse princípio indica como essas equações devem ser construídas ao estabelecerem como observadores em diferentes sistemas de referência percebem o tempo e o espaço. Dois desses princípios nos interessam aqui.

O primeiro, devido a Galileu, chamado de **Princípio da Relatividade Clássico** diz que todos observadores observam os **mesmos tempo e espaço**. Desse princípio derivam as equações de transformação de coordenadas conhecidas pelo nome de **Transformações de Galileu**.

O segundo desses princípios, devido a Einstein, diz que os tempo e espaço percebidos pelos observadores em diferentes sistemas de referência inerciais serão diferentes. Por esse princípio, o que é comum a todos os observadores baseados nesses diferentes sistemas de referência é a

75 O estudante não deve confundir com as equações apresentadas anteriormente para a mudança entre os sistemas de coordenadas cartesianas, esféricas e cilíndricas.

velocidade da luz[76]. Desse princípio são retiradas as equações de transformação de coordenadas chamadas de **Transformações de Lorentz**. A teoria que trata desse tipo de situação é a **Teoria da Relatividade Restrita.** O adjetivo *restrita* vem do fato de que essa teoria é válida apenas para transformações de coordenadas entre sistemas de referência inerciais. Para sistemas de referência não inerciais uma generalização é necessária e também foi desenvolvida por Einstein e recebe o nome de **Teoria da Relatividade Geral**. Essa teoria está bastante longe do nosso objetivo e não será abordada nesse texto.

Antes de prosseguirmos, é importante que o estudante reflita sobre a diferença entre *mudanças de coordenadas* e *mudanças de sistemas de referência.* Quando falamos em *mudanças de sistemas de coordenadas* apenas mudamos a “receita” pela qual associamos números a pontos no espaço usando o **mesmo** sistema de referência: sistema cartesiano, sistema cilíndrico ou sistema esférico. Por outro lado, quando usamos as transformadas de Galileu ou Lorentz, mudamos efetivamente de sistema de referência. Normalmente, essas transformações de sistema de referência são realizadas usando coordenadas cartesianas em **ambos** os sistemas de referência.

Transformações de Galileu

Já sabemos referenciar todos os pontos do espaço se tivermos um sistema de referência e um sistema de coordenadas, as paredes e o piso de nossa sala hipotética[77].

Uma pergunta colocada por Galileu, que apresentamos anteriormente, é a seguinte: se soubermos as coordenadas de um ponto em um sistema de referência seríamos capazes de descobrir as coordenadas desse mesmo ponto em outro sistema de referência que se mova com certa velocidade constante em relação ao primeiro? A situação é esquematizada na Figura 96. Nessa figura, o sistema de referência no qual sabemos as coordenadas do ponto *P* é chamado de *S* e o sistema de referência que se move em relação ao sistema *S* é chamado de *S’*.

76 Em verdade, a imposição de que essa velocidade seja a velocidade da luz não é fundamental. Pode-se obter um princípio de relatividade apenas exigindo que exista uma velocidade máxima permitida e mostra-se então que essa velocidade é a velocidade para partículas sem massa de repouso, os fótons (partículas que compõe a luz).

77 Veja a página 99.

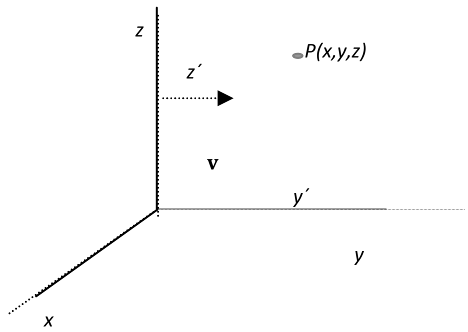


Figura 97

Para responder a essa pergunta, devemos fazer duas hipóteses:

A) Os observadores nos dois sistemas de referências medem os mesmos intervalos de tempo;

B) Os observadores nos dois sistemas de referências medem as mesmas distâncias.

Chamaremos por *P(x,y,z)* as coordenadas do ponto no sistema de referência S. Além disso, **v** é a velocidade do segundo sistema de referência, *S'*, medida no sistema de referência *S*. Para trabalharmos, podemos imaginar que um sistema de referência seja o sistema de referência a que nos referimos antes, a sala de aula, e o outro seja uma outra sala idêntica à primeira que se mova com velocidade constante para a direita. Outra visualização possível é a de um carro no qual estejamos sentados (sistema *S*) e outro que se movimente com velocidade constante em relação ao nosso.

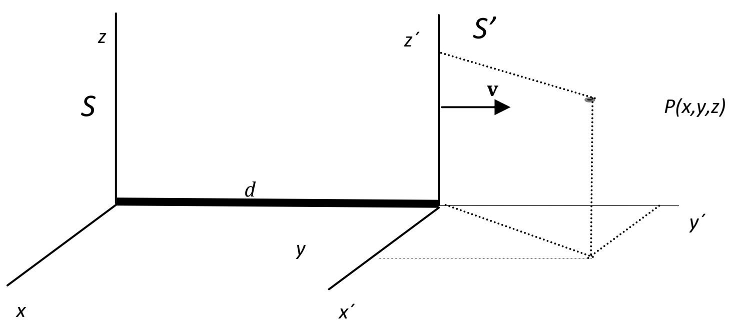


Figura 98 - Os sistemas S e S' no instante t.

A pergunta que queremos responder é se é possível saber as coordenadas **do mesmo ponto** no sistema *S′* se soubermos as coordenadas do ponto no sistema *S*. Vamos supor que em um dado instante de tempo os dois conjuntos de eixos fossem coincidentes, ou seja, os eixos do sistema *S′* (*x′,y′,z′*) estavam perfeitamente alinhados aos eixos do sistema *S* (*x,y,z*), como na Figura 97. Chamemos o instante de tempo em que isso aconteceu de instante de tempo zero[78].

Nessa figura, $\mathbf{v}$ é a velocidade com que o sistema *S′* se move em relação ao sistema de referência *S,* a qual, por simplicidade, é na direção *y*. Após algum tempo, os dois sistemas de referência se encontram na situação mostrada na Figura 98.

A letra d indica a distância percorrida pelo sistema *S′* desde o instante zero até o instante de tempo t. Claramente, a distância *d* é dada por ($v = |\mathbf{v}|$ é o módulo da velocidade):

$$d = vt,$$

uma vez que o sistema *S′* move-se com velocidade constante em relação ao sistema *S*. Da figura vemos que a coordenada *y* no sistema *S* é dada pela soma da coordenada y', medida no sistema *S′*, com a distância d:

$$y = y' + d.$$

Usando a expressão para d:

$$y = y' + vt \qquad \text{eq. 37}$$

Isolando y', que é o que nos interessa:

$$y' = y - v\,t \qquad \text{eq. 38}$$

$$y' = y - v\,t' \qquad \text{eq. 39}$$

Ou seja, podemos saber a coordenada y' se soubermos a coordenada y, medida no sistema *S*, e o tempo t' medido no sistema *S′*, suposto igual ao tempo *t* medido no sistema *S*: $t' = t$.

As demais coordenadas ficam inalteradas:

$$x' = x \qquad \text{eq. 40}$$

[78] Naturalmente que isso é arbitrário. Contudo, o valor dado a este instante de tempo é irrelevante, uma vez que somente diferenças de tempo (duração) são importantes.

$$z' = z$$

Esse conjunto de equações, as quais relacionam as coordenadas no sistema de referência *S* com as coordenadas no sistema de referência S', são chamadas de **Transformações de Galileu** (eq. 39 e eq. 40). Na derivação dessas equações, as duas hipóteses feitas anteriormente foram aplicadas ao admitirmos que os dois observadores medem os mesmos tempos t e t' e ao usarmos o fato que a distância d é a mesma tanto para o observador no sistema *S* como para o observador no sistema *S'*. Essas duas hipóteses estão por trás da igualdade que obtivemos ao substituir t por t', na passagem da eq. 38 para a eq. 39 na derivação acima. Essas hipóteses parecem naturais a um primeiro olhar. No entanto, como iremos ver mais adiante, elas não se sustentam.

Podemos agora demonstrar a afirmação que fizemos antes que se um sistema de referência é inercial todos os outros sistemas de referência que se movem com velocidade constante em relação a ele serão igualmente inerciais.

A força resultante sobre a partícula no sistema *S* é dada por:

$$\mathbf{F_r} = m\mathbf{a}$$

($\mathbf{a}$ é a aceleração medida no sistema *S*). Esta aceleração pode ser escrita como:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}.$$

Se o sistema de referência for inercial então, se a força resultante for nula, a aceleração também o será e a velocidade da partícula será constante. Vamos ver o que acontece no sistema de referência *S'*. Nesse sistema de referência, a aceleração sobre a partícula se escreve:

$$\mathbf{a}' = \frac{d\mathbf{v}'}{dt} = \frac{d^2 y'}{dt^2}\mathbf{e}_{y'}.$$

Nesta última expressão escrevemos a velocidade da partícula no sistema *S'* como a derivada da coordenada *y'* uma vez que as outras coordenadas são iguais em ambos os sistemas de referência. Usando agora a eq. 39, a aceleração medida no sistema *S'* pode ser reescrita como (em módulo):

$$a' = \frac{d^2(y - vt')}{dt^2}.$$

Como, por hipótese, o tempo é medido do mesmo modo nos dois sistemas de referência o tempo *t'* medido no sistema de referência *S'* que aparece no numerador dessa expressão pode ser substituído pelo tempo *t* medido no sistema de referência *S*:

$$a' = \frac{d^2(y - vt)}{dt^2}.$$

Executando agora as derivadas, obtemos que:

$$a' = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt} - v\right)$$

$$\boxed{a' = \frac{d^2 y}{dt^2} = a}$$

Ou seja, a aceleração observada no sistema *S'* é a mesma observada no sistema *S.*

Com esse resultado, podemos afirmar que a lei que governa os fenômenos nos dois sistemas de referência é a mesma (os subscritos S e S' indicam quantidades medidas nos sistemas S e S', respectivamente):

$$\mathbf{F}_S = m\mathbf{a}_S = m\mathbf{a}_{S'} = \mathbf{F}_{S'} \qquad \text{eq. 41}$$

Portanto, se não há forças atuando no sistema *S* a aceleração é nula e por conseqüência também será nula no sistema de referências *S'.* Neste caso, o sistema de referência *S'* será também um sistema de referência inercial.

Podemos também inferir uma regra de transformação das velocidades entre os dois sistemas de referências. A partir da eq. 37, tomando a derivada em relação ao tempo de *y* obtemos a velocidade da partícula no sistema *S:*

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(y' + vt) = \frac{dy'}{dt} + \frac{d}{dt}(vt) \Rightarrow \boxed{v_s = v_{S'} + v} \qquad \text{eq. 42}$$

Essa é a regra para a adição de velocidades: a velocidade medida no sistema *S* é a velocidade com a qual o sistema *S'* se movimenta em relação ao sistema *S* adicionada à velocidade com a qual a partícula se movimenta em relação a um observador no sistema *S'*. De uma forma mais geral, podemos escrever a relação vetorial:

$$\boxed{\mathbf{v}_s = \mathbf{v}_{S'} + \mathbf{v}} \qquad \text{eq. 43}$$

Outras propriedades clássicas do espaço e do tempo

Além das propriedades acima, existem três outras propriedades do espaço e do tempo que são extremamente importantes. Essas propriedades estão relacionadas com a conservação de propriedades físicas como energia, quantidade de momento linear e quantidade de momento angular. Não derivaremos aqui essas conservações, mas nos deteremos somente nas propriedades do espaço e do tempo que levam a elas.

Homogeneidade do espaço

O espaço clássico é um espaço homogêneo. Isso significa que, na ausência de matéria e de campos, todos os pontos do espaço são equivalentes entre si. Não há uma porção do espaço privilegiada em relação às demais. Essa propriedade do espaço está relacionada com a conservação do momento linear e é extremamente importante para a generalidade das equações da Física: não importa o lugar do espaço que escolhamos para realizar um experimento obteremos sempre, sob as mesmas condições, o mesmo resultado.

Isotropia do espaço

O espaço clássico é isotrópico. Essa propriedade do espaço indica que todas as direções no espaço são equivalentes. Para a Física essa propriedade indica que não importa a direção na qual orientamos nosso aparato experimental o resultado do experimento será o mesmo. Associada a essa propriedade, temos a conservação do momento angular.

Homogeneidade do tempo

Nesse caso, essa homogeneidade expressa o fato de que a duração, ou intervalo de tempo, não depende dos instantes inicial e final, ou seja, todos os intervalos de tempo são equivalentes. Associada a essa propriedade do tempo, temos a conservação da energia.

Resumindo, podemos relacionar as propriedades do espaço e do tempo com as conservações na forma do esquema mostrado na Figura 99.

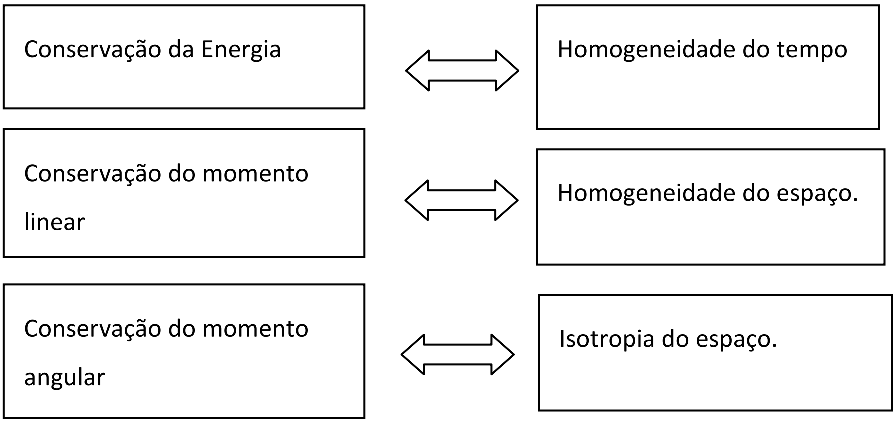


Figura 99 – Conservações e simetrias associadas.

Transformações de Lorentz

Vimos que, baseados no princípio da existência de um espaço e de um tempo absolutos, homogêneos e, no caso do espaço, isotrópico, fomos levados a um conjunto de transformações entre dois sistemas de referência, chamado de Transformações de Galileu (equações eq. 38, eq. 39 e eq. 40).

Esse conjunto de equações foi usado durante bastante tempo, devido a um fato extremamente importante, relacionado com a estrutura lógica da Física. Suponhamos que tenhamos feito o seguinte experimento. Parados em uma estação de ônibus deixamos cair uma maçã no chão. Observamos que a fruta caiu de certa forma, que não vem ao caso aqui qual seja, que a fez rachar. A seguir, tomamos um ônibus que anda com velocidade constante em relação à estação e, dentro do ônibus, tomamos outra maçã que, desastradamente, deixamos cair também. O que você esperaria que acontecesse com essa segunda maçã: que caísse do mesmo modo que a primeira que deixamos cair na estação e rachasse ao tocar o solo ou que acontecesse algo diferente, por exemplo, a maçã subisse em direção ao teto do ônibus? É claro que a primeira hipótese é a mais provável de acontecer. Esse exercício de imaginação apresenta o essencial quando falamos da aplicação das leis da Física a dois sistemas de referência que se movem um em relação ao outro: as leis da Física devem ser escritas de um mesmo modo nos dois sistemas de referência, pois, caso contrário, o universo se comportaria de duas maneiras diferentes nos dois sistemas, o que claramente não pode ser.

Dentro do contexto da Física Clássica as Transformações de Galileu dão conta de explicar isto ao levarem à mesma lei de força nos dois sistemas de referência inerciais analisados em nosso exemplo. É esta invariância das leis físicas quando mudamos de sistema de referência inercial que é expressa pela eq. 41. Se tomarmos dois sistemas de referência e escrevermos a Lei Fundamental da Dinâmica (a Segunda Lei de Newton) em um deles, aquele no qual estamos parados, e, a seguir, fizermos uma transformação nas variáveis que entram nessa lei, para o segundo sistema de referência, veremos que no segundo sistema de referência a Segunda Lei de Newton se escreve do mesmo modo. Ou seja, a força que age sobre um objeto continua sendo dada pelo produto da massa pela aceleração, com a massa e a aceleração sendo medidas do mesmo modo por dois observadores diferentes, um em cada sistema de referência.

O experimento de Michelson - Morley

Por volta de 1870, aproximadamente, Maxwell[79] apresentou à comunidade científica um conjunto de equações que leva o seu nome e que descreve o comportamento das ondas eletromagnéticas no vácuo (luz, ondas de rádio, microondas, etc.).

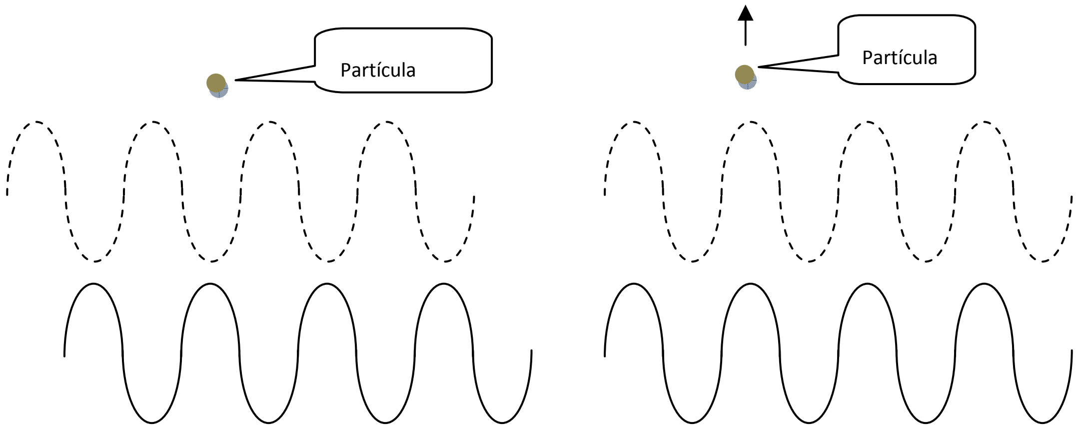
Essas equações previam que a luz deveria ser uma onda que se propaga no vácuo. O sucesso dessas equações foi espantoso e a crença de que esse conjunto de equações fosse o conjunto adequado de equações para a descrição dos fenômenos da luz ficou clara. Entretanto, havia um problema com as equações de Maxwell: elas não obedeciam ao preceito de serem invariantes (não mudarem) frente às Transformações de Galileu, como a Segunda Lei de Newton discutida antes.

Além disso, os físicos desse período acreditavam que, para que uma onda se propague, seria necessária a presença de um meio físico, suporte para a propagação das ondas. Por exemplo, ao jogarmos pedras na água vemos uma onda (a perturbação provocada pela pedra jogada) que se propaga a partir do ponto de contato das pedras com a água. Do mesmo modo, o som é uma perturbação no ar que se propaga a partir da sua fonte.

Contudo, não há matéria entre o Sol e a Terra, por exemplo. Como então a luz, sendo uma onda, poderia se propagar do Sol até a Terra? Classicamente deveria haver um meio entre o Sol e a Terra que, mesmo não sendo visível, deveria servir de suporte a essas ondas. Qual seria esse meio que preencheria o espaço e que seria responsável pelo suporte das ondas de luz? Os físicos imaginaram uma substância que preencheria todo o espaço chamada **éter**. A Terra em seu movimento de rotação em torno do Sol deveria apresentar um movimento relativo em relação ao

[79] James Clerk Mawell (1831 – 1879) - Físico escocês. Ver http://www.ifi.unicamp.br/~accosta/maxwell.html (página consultada em 26 de fevereiro de 2004).

éter. Foi proposto então, primeiro por Michelson (em 1881) e após por Morley (1887), um experimento de modo a detectar esse movimento relativo da Terra em relação ao éter.



(a) Caso de interferência destrutiva.

(b) Caso de interferência construtiva.

Figura 100 – interferência entre ondas.

Esse experimento bastante engenhoso explorava uma característica das ondas em geral (e das ondas luminosas em particular) chamada de **interferência**. Quando duas ondas chegam a um ponto do espaço elas podem somar seus efeitos, caso em que temos interferência construtiva, ou podem cancelar seus efeitos, caso em que temos interferência destrutiva.

Considere duas ondas se propagando na mesma região do espaço (veja a Figura 100). As duas ondas atuam sobre a partícula mostrada na figura.

No caso da Figura 100.a, temos o que chamamos de interferência destrutiva entre as duas ondas. Observe que o vale de uma onda coincide com o pico da outra onda. Desse modo, a ação de uma onda sobre a partícula cancela exatamente a ação da outra onda sobre a partícula e a partícula permanece em repouso. Por outro lado, na Figura 100.b o efeito contrário acontece: as duas ondas têm picos coincidentes e a partícula se move.

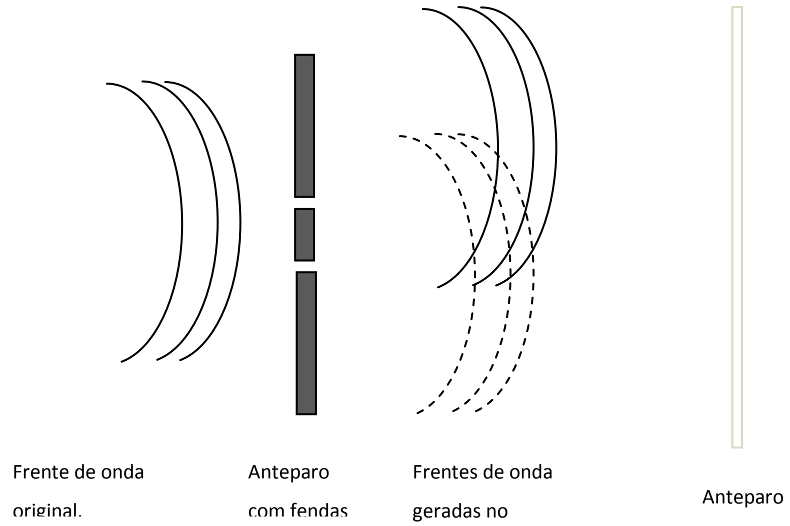


Figura 101 – fenômeno de interferência

No caso da luz, podemos construir a interferência de um raio luminoso com ele mesmo, fazendo com que o raio passe por um anteparo que possua duas aberturas como mostrado na Figura 100.

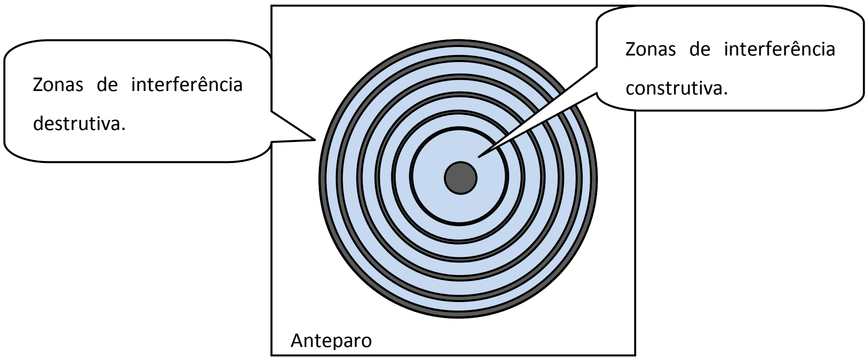


Figura 102 – Padrão de interferência típico.

Para fazer isto acontecer, nos aproveitamos de outro fenômeno, a **difração**. Considere a situação mostrada na figura. Uma onda luminosa se propaga para a direita e encontra um anteparo com dois orifícios.

Ao encontrar esses orifícios, cada um deles passa a atuar como uma nova fonte luminosa, gerando desse modo duas outras frentes de onda. Essas duas frentes de onda vão encontrar um novo anteparo e provocarão na superfície desse segundo anteparo pontos luminosos (onde a interferência for construtiva) e pontos de escuridão (onde a interferência for destrutiva).

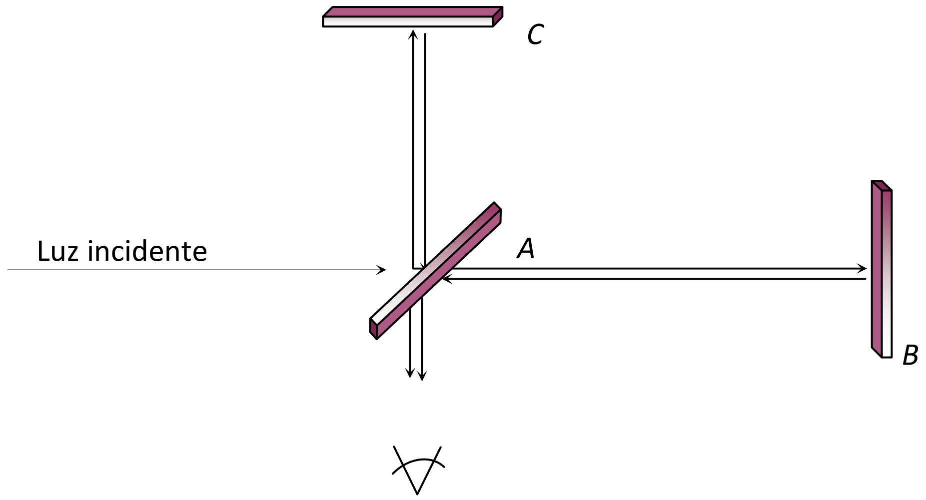


Figura 103- Esquema básico do experimento de Michelson - Morley.

Uma figura típica de interferência formada no segundo anteparo é mostrada na Figura 102. Nela, os aros escuros representam regiões nas quais a interferência é destrutiva enquanto que os aros coloridos representam regiões nas quais a interferência entre as duas frentes de onda geradas no anteparo foi construtiva. Como veremos mais adiante, este fenômeno depende da largura das fendas e do comprimento de onda da luz.

A idéia de Michelson e Morley (veja a Figura 103) era usar esse fato para fazer um raio luminoso interferir com ele mesmo. Um raio proveniente de uma fonte à esquerda da página (o raio incidente mostrado na figura) é dividido em duas partes através do uso de um espelho semitransparente *A*, o qual faz um ângulo de 45° com a direção de incidência do raio luminoso. Ao chegar nesse espelho parte do raio de luz é transmitida em direção a *B* e parte é refletida em direção a *C*. Parte do raio incidente passa e vai até o espelho B, onde é totalmente refletida em direção ao espelho *A.* A parte do raio que foi refletida pelo espelho *A* vai até o espelho *C* e, então, é refletida totalmente de volta ao espelho A. As distâncias *AC* e *AB* são exatamente iguais.

Como na primeira divisão do raio de luz as duas metades seguiam trajetórias perpendiculares entre si, voltando ao ponto de divisão por essa mesma trajetória, esperava-se que, se os tempos necessários para percorrer as trajetórias fossem diferentes, sendo uma das trajetórias paralela à trajetória da Terra pelo éter e a outra perpendicular a essa trajetória, ao chegarem no ponto de encontro os dois estivessem defasados o suficiente para produzir um padrão de interferência[80] bem definido.

Se a Terra tivesse algum movimento em relação ao éter, então obteríamos certo padrão de interferência e se, depois de algum tempo virássemos o aparato de 90° deveríamos obter outro padrão de interferência.

Podemos calcular o tempo que os dois raios levam para percorrer essas trajetórias. Para isso, vamos chamar de L_1 a distância entre os espelhos *A* e *B* e de L_2 a distância entre os espelhos *A* e *C*.

Vamos analisar o problema a partir de um sistema de referências no qual o Éter está em repouso e o conjunto de espelhos se movimenta para a direita com velocidade constante *v*. Chamaremos de *y* a direção dos espelhos *A* e *C* e de *x* a direção dos espelhos *A* e *B*. Vamos chamar de c a velocidade da luz medida nesse sistema de referências e de c' a velocidade da luz medida no sistema de referências em que o sistema de espelhos está em repouso. Assim, c_x' é a velocidade da luz na direção *x* e c_y' é a velocidade da luz na direção *y*. Observe que essa duas velocidades podem ou não ser iguais. Veja a Figura 104.

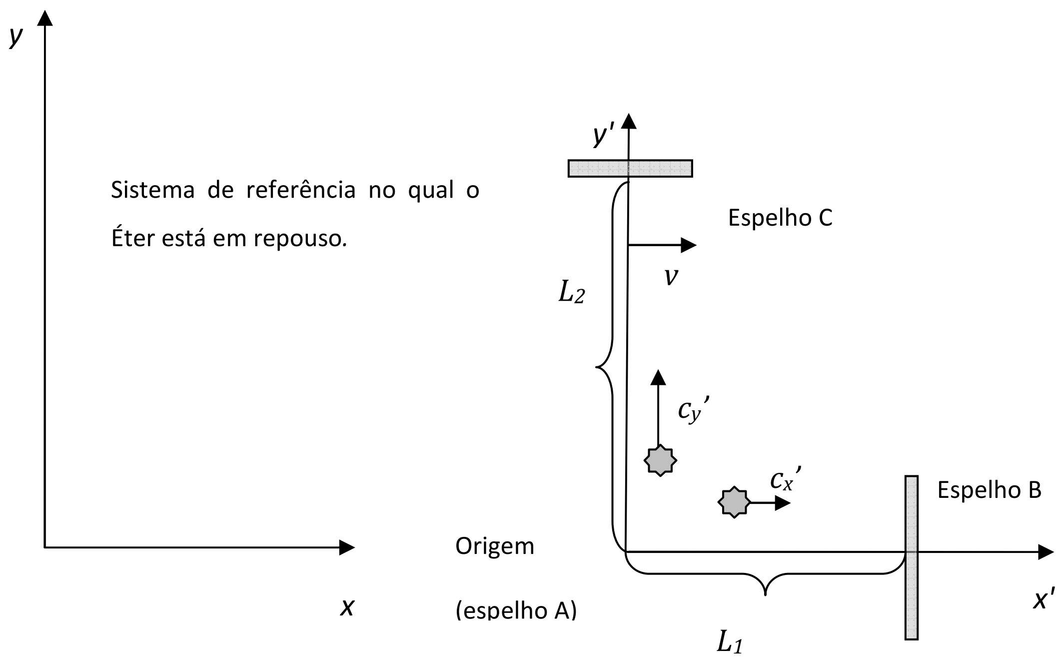


Figura 104 – Referencial para o experimento de Michelson – Morley.

Consideremos primeiro o raio que, refletido no espelho percorre o caminho *AC* de comprimento L_2. Considerando que esse seja o caminho perpendicular à direção na qual a Terra se move em

[80] Ao interferirem uma com a outra as ondas criam figuras típicas e conhecidas.

relação ao éter, o tempo medido no sistema *S'* (sistema no qual os espelhos estão em repouso), necessário para que o raio vá do espelho *A* até o espelho *C,* será dado por:

$$t_2 = 2\frac{L_2}{c_y'} \qquad \text{eq. 44}$$

Nessa expressão, c_y' é a velocidade da luz na direção *y,* medida no sistema em que os espelhos estão em repouso (*S'*) e o fator 2 vem do fato de que o caminho *AC* é percorrido duas vezes no trajeto de ida e volta.

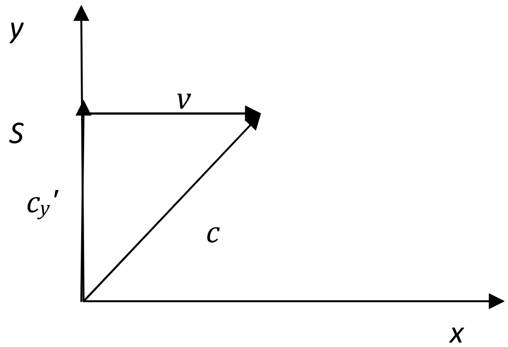


Figura 105 – Composição de velocidades no experimento de Michelson – Morley.

No sistema de referência no qual o éter está em repouso, a velocidade na direção vertical é dada pela composição de velocidades dada pela eq. 43. A geometria do problema é mostrada na Figura 105.

Dessa figura podemos ver que a velocidade na direção *y*, c_y' é dada por:

$$c_y'^2 = c^2 - v^2$$

Logo, o tempo que o fóton gasta para percorrer a distância L_2 é dado por:

$$t_2 = 2\frac{L_2}{c_y'} \Rightarrow t_2 = 2\frac{L_2}{\left(c^2 - v^2\right)^{1/2}} \qquad \text{eq. 45}$$

Vamos analisar agora o tempo que o raio que atravessa o espelho *A* leva para ir e voltar até o espelho *B*. Nesse caso, as velocidades *c, v* e c_x' estão na mesma direção. Na ida, temos que a velocidade c_x' é dada por: $c_x' = c - v$ e na volta esta velocidade é dada por $c_x' = c + v$. Logo, o tempo t_1 que será gasto pelo fóton que percorre o caminho entre o espelho *A* até o espelho *B* e volta ao espelho *A* será dado por:

$$t_1 = 2\frac{L_1}{c_x^{'}} = \frac{L_1}{c-v} + \frac{L_1}{c+v} \Rightarrow \boxed{t_1 = \frac{2cL_1}{\left(c^2 - v^2\right)}}$$ eq. 46

Comparando as expressões dadas pelas eq. 45 e eq. 46 vemos que, claramente elas são diferentes e que, portanto, os tempos t_1 e t_2 são diferentes.

A conseqüência dessa diferença é que os dois raios que estavam em fase quando foram separados deveriam retornar ao espelho *A* fora de fase, provocando certo padrão de interferência. Se todo o aparato fosse girado, invertendo-se a orientação dos dois braços do aparelho esse padrão de interferência deveria mudar.

No entanto, nada foi encontrado. Nenhuma mudança no padrão de interferência foi vista. A conclusão lógica disso é que a velocidade relativa da Terra em relação ao Éter deveria ser nula: $v = 0$. Nesse caso, os dois tempos deveriam ser iguais e os dois raios deveriam sempre interferir do mesmo modo.

Isto colocava em dúvida a hipótese do éter. Para solucionar o problema, Lorentz[81] propôs que houvesse uma contração dos comprimentos na direção do movimento do éter, mas essa era uma hipótese colocada “à mão” para explicar o experimento que não tinha sentido dentro da teoria da Física Clássica. Com essa hipótese, como os tempos deveriam ser iguais (como implicava a não modificação dos padrões de interferência) poderíamos escrever que os comprimentos reais dos braços do aparato se relacionam por:

$$t_1 = t_2 \Rightarrow \frac{2cL_1}{(c^2 - v^2)} = 2\frac{L_2}{(c^2 - v^2)^{1/2}} \Rightarrow \boxed{L_2 = \frac{L_1}{\left(1 - v^2/c^2\right)^{1/2}}}$$

Ou seja, deveria haver uma contração dos braços na direção do movimento da Terra paralela ao Éter (comprimento L_1)[82]. Pode-se mostrar, não o faremos aqui, que o fato de os dois tempos serem iguais também aponta para a necessidade de considerar que o tempo dilata a medida que o aparato se move, fazendo com que o tempo medido no braço que está se movendo na direção paralela ao movimento do éter (direção *x*) seja maior do que o tempo que é medido na direção perpendicular a esse movimento.

---

[81] Hendrik Antoon Lorentz (1853 – 1928) - Físico-matemático holandês nascido em Arnhem, Holanda

[82] O estudante deve lembrar que, inicialmente, supusemos que as duas distâncias L_1 e L_2 eram iguais.

O problema foi finalmente resolvido com o trabalho de Einstein e os dois postulados da Relatividade Restrita.

Os postulados da Relatividade Restrita e as Transformações de Lorentz

O primeiro postulado nos diz que:

> Existe uma velocidade limite no universo, a qual não pode ser ultrapassada e é a mesma para todos os observadores em todos os sistemas de referência inerciais.

O segundo postulado nos diz que:

> Todas as leis físicas devem ser escritas do mesmo modo em todos os sistemas de referência inerciais.

Observe-se que o primeiro postulado não diz que a velocidade limite deva ser a velocidade da luz. Essa é uma conseqüência da teoria, quando esta prevê que a velocidade limite é a velocidade das partículas com massa de repouso nula, como veremos mais adiante (veja a eq. 63 e a discussão que leva a ela).

Usando essas hipóteses, podemos encontrar as equações que descrevem corretamente as transformações de coordenadas entre dois sistemas de referência inerciais, as **Transformações de Lorentz**. O estudante deve observar que, ao contrário do que foi feito para o caso clássico, não há aqui nenhuma hipótese feita *a priori* sobre a natureza do tempo e do espaço. Dito de outra maneira, nada estamos afirmando sobre a maneira como dois observadores em sistemas de referencia inerciais distintos medem o tempo e o espaço.

Suponha dois sistemas S e S' como mostrados na Figura 106. Certo evento acontece no instante 0 (quando os dois sistemas coincidiam, Figura 97), emitindo uma partícula de luz (chamada fóton) para a direita. Esse evento é percebido no sistema de referência S e no sistema de referência S'. Em S as coordenadas do evento são dadas por (x,y,z,t) enquanto no sistema S' as coordenadas são (x',y',z',t'). Por hipótese, vamos supor que a origem do sistema S' se mova ao longo do eixo y. No instante de tempo inicial os dois sistemas eram coincidentes de forma que a posição da origem do sistema S' no sistema S será dada simplesmente por (Figura 106):

$$y = vt$$

t é o tempo percebido por um relógio em repouso no sistema S e v é o módulo da velocidade com a qual o sistema S' se move para a direita.

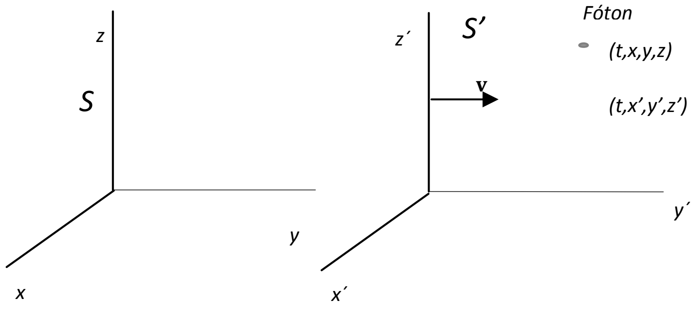


Figura 106

A forma mais geral pela qual podemos obter as coordenadas no sistema S' é escrevendo-as como uma combinação linear das coordenadas (incluindo o tempo) no sistema S:

$$x'_\nu = A_\nu x + B_\nu y + C_\nu z + D_\nu t + E_\nu$$

Nesta expressão, o índice ν ($\nu = 1,2,3,4$) indica respectivamente as coordenadas x',y',z',t'[83]. Para obtermos os coeficiente das coordenadas y' e z' vamos aplicar a condição de que, por hipótese:

$$x = 0 \Rightarrow x' = 0 \text{ e } z = 0 \Rightarrow z' = 0.$$

Uma vez que as coordenadas são independentes, para que essas condições sejam verdadeiras os coeficientes devem ser todos nulos exceto o coeficiente da própria coordenada:

$$x' = Bx$$

$$z' = Cz$$

Por simplicidade os índices foram omitidos. Quando a velocidade com que o sistema S se move vai a zero deveríamos ter: $x = x'$ e $z = z'$. Portanto, as constantes B e C devem ser ambas iguais a 1. Logo, recuperamos a mesma equação de transformação obtida classicamente por Galileu:

$$x' = x$$

$$z' = z$$

[83] É usual quando tratamos das coordenadas incluindo o tempo o uso de índices gregos e o uso de índices latinos quando nos referimos apenas às coordenadas espaciais.

Vamos agora analisar o que acontece com a coordenada *y.* Para esta coordenada vamos escrever a equação de transformação na forma:

$$y' = Ax + \gamma y + Cz + Dt + E$$

Nesta expressão, o coeficiente da coordenada *y* foi escrito como γ por razões históricas. Para a coordenada *y* temos a condição que quando *y = vt* a coordenada *y'* = 0.

Isto impõe que:

$$0 = Ax + \gamma vt + Cz + Dt + E$$

Novamente, como as coordenadas no lado direito são independentes entre si, todos os coeficientes devem se anular:

$$D + \gamma v = B = C = E = 0.$$

Portanto, o coeficiente D deve ser igual a $-\gamma v$:

$$D = -\gamma v$$

Podemos agora escrever a expressão para a coordenada *y'* como:

$$y' = \gamma y - \gamma vt \Rightarrow y' = \gamma(y - vt)$$

Devido à simetria do problema a coordenada *y* se escreve (em termos de *y'* e *t*):

$$y = \gamma(y' + vt')$$

Para obtermos a expressão para γ vamos usar a hipótese básica da Relatividade Restrita: o sinal luminoso que indica que o evento aconteceu viaja com a mesma velocidade nos dois sistemas de referência na direção dos eixos *y* e *y'*. Com esta hipótese as coordenadas *y* e *y'* são dadas por:

$$y = ct$$

$$y' = ct'$$

Substituindo estas expressões nas expressões para *y* e *y'* obtidas anteriormente:

$$ct' = \gamma(ct - vt) = t\gamma(c - v)$$
$$ct = \gamma(ct' + vt') = t'\gamma(c + v)$$

Multiplicando uma equação pela outra:

$$c^2tt' = tt'\gamma^2(c-v)(c+v)$$
$$c^2 = \gamma^2(c^2 - v^2)$$

Isolando o fator γ, temos finalmente:

$$\gamma = \frac{1}{\left(1 - v^2/c^2\right)^{1/2}} \quad \text{eq. 47}$$

Este fator é conhecido como **fator de Lorentz**. Voltando agora às equações para y e y', e eliminando y' dessas equações obtemos a expressão que relaciona t e t':

$$t' = \gamma(t - vy/c^2)$$

Resumindo, agora as nossas equações de transformação de coordenadas são dadas por:

$$\begin{aligned} x' &= x \\ z' &= z \\ y' &= \gamma(y - vt) \\ t' &= \gamma(t - vy/c^2) \end{aligned} \quad \text{eq. 48}$$

Equivalentemente, podemos escrever as equações de transformação do sistema *S'* para o sistema *S* como (trocando $\mathbf{v}$ por – $\mathbf{v}$):

$$\begin{aligned} x &= x' \\ z &= z' \\ y &= \gamma(y' + vt') \\ t &= \gamma(t' + vy'/c^2) \end{aligned} \quad \text{eq. 49}$$

Esse conjunto de equações recebe o nome de **Transformações de Lorentz**. O estudante deve observar que as equações de Lorentz exercem a mesma função das Transformações de Galileu. No entanto, enquanto as equações do eletromagnetismo não são invariantes frente às Transformações de Galileu, elas o são frente às Transformações de Lorentz, recuperando assim o postulado de que as leis físicas devem ter a mesma forma, não importa o sistema de referência que utilizemos.

Quando falamos de intervalos de tempo e distância infinitesimais, podemos obter as equações de transformação tomando as diferenciais da eq. 49:

S → S' **S' → S**

$$dx' = dx \qquad dx = dx' \qquad \text{eq. 50}$$
$$dz' = dz \qquad dz = dz'$$
$$dy' = \gamma(dy - vdt) \qquad dy = \gamma(dy' + vdt')$$
$$dt' = \gamma(dt - vdy / c^2) \qquad dt = \gamma(dt' + vdy' / c^2)$$

Derivamos aqui as equações de transformação para as coordenadas puras. E quanto aos intervalos (no espaço e no tempo)? Vamos analisar cada caso em separado.

Caso 1 – Intervalos de tempo

Quando falamos de intervalos de tempo, devemos nos dar conta de que contamos o tempo em uma **dada posição do espaço**. Ou seja, se estamos no sistema *S* e observamos uma partícula se movimentar durante certo instante de tempo, não nos movemos e, portanto, o intervalo de posição para nós é nulo. Com isso, $dy = dy' = 0$ nas equações eq. 50 e podemos escrever (trocando dt por Δt e dt' por Δt) que:

S → S' **S' → S**

$$\Delta t' = \gamma \Delta t \qquad \Delta t = \gamma \Delta t'$$

Caso 2 – Medidas de comprimento

O que significa medir um comprimento? Significa saber **no mesmo instante de tempo** quais são as coordenadas inicial e final de um objeto, sendo o comprimento a diferença entre as duas. Nesse caso, os intervalos de tempo que aparecem nas eq. 50 é que são nulos e podemos então escrever:

S → S' **S' → S**

$$\Delta y' = \gamma \Delta y \qquad \Delta y = \gamma \Delta y'$$

Assim, podemos escrever para as equações de transformação dos comprimentos e dos intervalos de tempo:

S' → S	**S → S'**	
$\Delta x = \Delta x'$	$\Delta x' = \Delta x$	eq. 51
$\Delta z = \Delta z'$	$\Delta z' = \Delta z$	
$\Delta y = \gamma \Delta y'$	$\Delta y' = \gamma \Delta y$	
$\Delta t = \gamma \Delta t'$	$\Delta t' = \gamma \Delta t$	

A regra de adição de velocidades na relatividade restrita: cinemática relativística

Consideremos uma partícula que se move tanto em relação ao sistema *S* como em relação ao sistema *S'*. Vamos chamar de $\mathbf{u}$ a velocidade da partícula medida por um observador em repouso no sistema *S* e por $\mathbf{u}'$ a velocidade medida por um observador em repouso em relação ao sistema *S'*. Medida a partir do sistema *S*, a velocidade do sistema *S'* é $\mathbf{v}$, suposta constante. Observe que as velocidades $\mathbf{u}$ e $\mathbf{u}'$ não são necessariamente constantes.

Na Física Clássica, a regra de adição de velocidades é obtida a partir das transformações de Galileu:

$$y = y' + vt \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} y' + v \Rightarrow \boxed{u = u' + v} \qquad \text{eq. 52}$$

Nessa expressão, v e v' são as velocidades da partícula nos sistemas *S* e *S'* respectivamente e u é a velocidade relativa entre os dois sistemas, medida no sistema de referências *S.*

Na Relatividade restrita, contudo, a regra de adição de velocidades é um pouco mais complicada, pois, pelos postulados da Relatividade Restrita, não podemos ter velocidades superiores à velocidade da luz, o que seria permitido pela eq. 52.

Para obter a regra de adição de velocidades relativística, partimos das equações de transformação para os intervalos infinitesimais de tempo e distância (eq. 50) escritas na forma diferencial. Como as coordenadas *z* e *x* não sofrem alteração ao passarmos do sistema *S* para o sistema *S'* nos preocuparemos apenas com as coordenadas y e t:

$$dy' = \gamma(dy - vdt)$$

$$dt' = \gamma\left(dt - \frac{vdy}{c^2}\right)$$

Vamos dividir uma equação pela outra:

$$\frac{dy'}{dt'} = \frac{\gamma(dy - vdt)}{\gamma\left(dt - \frac{vdy}{c^2}\right)} = \frac{dt\left(\frac{dy}{dt} - v\right)}{dt\left(1 - \frac{v}{c^2}\frac{dy}{dt}\right)}$$

Identificando $\frac{dy'}{dt'} \equiv u'$, a velocidade da partícula medida no sistema S' e $\frac{dy}{dt} \equiv u$, a velocidade da partícula medida no sistema S, podemos então escrever:

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}} \Rightarrow \boxed{u' = c^2 \frac{u - v}{c^2 - uv}} \qquad \text{eq. 53}$$

Essa expressão nos dá a velocidade medida por um observado no sistema *S'* em função da velocidade medida no sistema *S* e da velocidade relativa nos dois sistemas de referência.

Vamos agora analisar o que acontece em dois limites: o limite de baixas velocidades (*u << c e v<< c)* e o limite de altas velocidades (*u = c*).

Caso 1 – Limite não relativístico (*u << c e v<< c*)

Nesse caso, podemos colocar o termo c^2 em evidência na equação eq. 53:

$$u' = c^2 \frac{u - v}{c^2 - uv} = \frac{c^2}{c^2} \frac{u - v}{1 - uv/c^2} \underset{uv/c^2 \approx 0}{\Rightarrow} \boxed{u' = u - v}$$

Essa é a mesma equação obtida a partir das transformações de Galileu (eq. 52). Ou seja, no limite de baixas velocidades a regra de adição de velocidades relativística se reduz à regra clássica de adição de velocidades.

Caso 2- Limite totalmente relativístico (*u=c*)

Novamente, vamos partir da eq. 53, fazendo agora *u = c*:

$$u' = c^2 \frac{u - v}{c^2 - uv} = c^2 \frac{c - v}{c^2 - cv} = \frac{c^2}{c} \frac{c - v}{c - v} \Rightarrow \boxed{u' = c}$$

Nesse limite, a velocidade da partícula no sistema *S'* deverá ser também *c.* De certo modo, esse resultado já seria de esperar, uma vez que as equações de Lorentz foram obtidas a partir da hipótese de que a velocidade da luz c é a mesma para todos os observadores. A derivação acima apenas serve como verificação da correção da equação eq. 53.

A Dinâmica Relativística da partícula

Vimos até agora o que acontece com a cinemática de uma partícula, ou seja, como as velocidades se transformam. Vamos agora, derivar o que acontece com as propriedades dinâmicas de uma partícula.

A massa e o momento relativísticos

Não vamos demonstrar aqui, mas a massa m de uma partícula, medida em um sistema de referências *S,* no qual a partícula se move com velocidade *v,* passa agora a ser função da velocidade medida no sistema *S*[84].

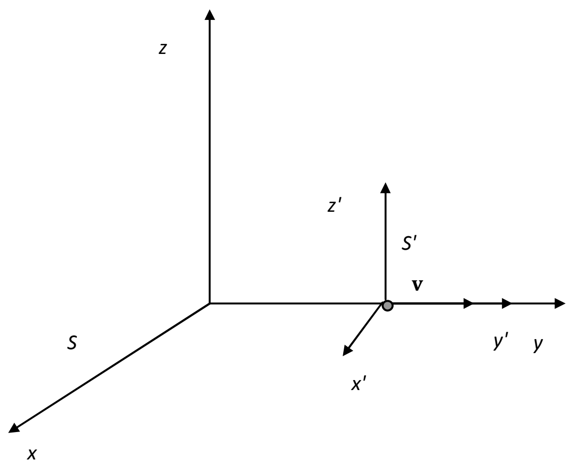


Figura 107 – Sistema de referências centrado na partícula.

Seja *S'* o sistema de referências no qual a partícula está em repouso (veja a Figura 107). Este sistema é chamado de *Sistema Próprio* da partícula. Então, relativamente ao sistema de referências S, o Sistema Próprio da partícula se move com velocidade *v*, a velocidade da partícula medida no sistema de referências *S*.

[84] Essa relação pode ser obtida a partir da aplicação da conservação do momento linear. Uma demonstração bastante clara dessa relação pode ser obtida em NUSSENZVEIG, volume 4, página 208 e seguintes.

Denotaremos por m_0 e t_0, respectivamente, à massa da partícula e o tempo medidos no Sistema de Referência Próprio. Então, podemos mostrar que a massa medida nos dois sistemas de referências S e S', m e m_0 respectivamente, são relacionadas por:

$$m = \gamma m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad \text{eq. 54}$$

Ou seja, a massa m medida no sistema de referências *S,* é sempre maior do que a massa medida no sistema de referências próprio da partícula. Observe que na eq. 54 se a velocidade da partícula medida no sistema S se aproxima da velocidade da luz c temos uma divergência no denominador[85]. Essa é a razão pela qual nenhuma partícula com massa de repouso diferente de zero pode ter a velocidade da luz.

E como fica a nossa definição do momento linear e da energia de uma partícula? Veja que classicamente os dois observadores medem o mesmo momento, já que ambos medem a mesma massa. Contudo, se levarmos em conta a variação relativística da massa da partícula então o momento, escrito no sistema de referência no qual a partícula se move, será dado por:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \gamma m_0 \mathbf{v} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad \text{eq. 55}$$

A expressão da força na Relatividade Restrita

Para obtermos uma expressão relativística para a força atuando em uma partícula, devemos fazer uso de um dos postulados da Relatividade Restrita: as leis físicas mantêm a mesma forma em qualquer sistema de referências inercial. Portanto, a Segunda Lei de Newton ainda se escreve:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}.$$

Logo, podemos escrever:

[85] Temos uma divergência porque o denominador se aproxima de zero, e a fração vai para o infinito.

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt} m_0 \gamma \mathbf{v} = \frac{d}{dt} \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \mathbf{v}\,. \qquad \text{eq. 56}$$

Essa expressão é mais complicada que o caso clássico, pois agora a massa depende da velocidade. A questão que se coloca é: a exemplo do caso clássico, no qual a força resultante e a aceleração estão sempre na mesma direção e sentido, na Relatividade Restrita, qual a orientação entre a força resultante e a aceleração da partícula?

Para responder a essa questão, vamos analisar primeiro dois casos limites e a partir deles vamos construir a situação mais geral. O primeiro caso limite é quando a força é paralela (ou antiparalela) à velocidade, situação em que a aceleração impressa pela força resultante modifica o módulo da velocidade da partícula, e o segundo quando a força resultante é perpendicular à velocidade, caso em que a força resultante não modifica o módulo da velocidade. O caso geral é o caso da força aplicada formar um ângulo qualquer com a velocidade da partícula.

Caso 1 – Força na mesma direção da velocidade da partícula

Nesse caso, podemos escrever:

$$\mathbf{F}_{\|} = \frac{d}{dt} \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \mathbf{v} = m_0 \left\{ \gamma \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{v} \frac{d\gamma}{dt} \right\} = m_0 \left\{ \gamma \mathbf{a} + \mathbf{v} \frac{v^2}{c^2} \gamma^3 \frac{dv}{dt} \right\}$$

$$\mathbf{F}_{\|} = m_0 \gamma \left\{ \mathbf{a} + a \frac{v^2}{c^2} \gamma^2 \mathbf{v} \right\}$$

Dessa expressão, $\mathbf{a}$ é a aceleração da partícula e o símbolo || indica que a força aplicada e na direção paralela à da velocidade. Podemos ver que a força resultante e a aceleração estão na mesma direção e sentido. Em módulo, podemos escrever que:

$$F_{||} = m_0 \gamma^3 a_{||}$$

Desse modo, recuperamos para o caso relativístico, com a força na mesma direção da velocidade o mesmo resultado clássico: a força e a aceleração estão na mesma direção e possuem o mesmo sentido.

Caso 2 – Força na direção perpendicular à direção da velocidade

Esse caso é mais simples que o caso anterior, já que agora a força modifica apenas a direção e o sentido da velocidade, mas não o seu módulo. Sendo assim, o fator γ na eq. 56 é constante. Logo:

$$\mathbf{F}_{\perp} = \frac{d}{dt} m_0 \gamma \mathbf{v} = m_0 \gamma \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$
$$\mathbf{F}_{\perp} = m_0 \gamma \mathbf{a}_{\perp}$$

Novamente, recuperamos o caso clássico, com a aceleração e a força paralelas. Nessa expressão, o símbolo $\perp$ indica que estamos calculando a aceleração no caso em que a força é perpendicular à velocidade da partícula.

Caso geral – Força e velocidade formam um ângulo qualquer

Nessa situação, sempre podemos escrever a força aplicada como sendo a soma de uma componente na direção paralela à direção da velocidade da partícula e outra componente na direção perpendicular. Indicaremos essas duas direções pelos vetores unitários $\mathbf{e}_{||}$ e $\mathbf{e}_{\perp}$. Desse modo:

$$\mathbf{F} = F_{||}\mathbf{e}_{||} + F_{\perp}\mathbf{e}_{\perp}$$

Essas componentes, contudo, são justamente as forças calculadas nos casos 1 e 2. Portanto, podemos usar os resultados acima e escrever:

$$\mathbf{F} = m_0 \gamma^3 a_{||}\mathbf{e}_{||} + m_0 \gamma a_{\perp}\mathbf{e}_{\perp}$$

Colocando o fator $m_0\gamma$ em evidência, podemos escrever que a força que age na partícula é dada por:

$$\mathbf{F} = m_0 \gamma \left(\gamma^2 a_{||}\mathbf{e}_{||} + a_{\perp}\mathbf{e}_{\perp} \right)$$

O que essa expressão nos aponta é que, no caso geral, a força resultante e a aceleração não são mais na mesma direção, pois, temos o fator γ^2 multiplicando a componente paralela da aceleração enquanto o mesmo fator não aparece multiplicando a componente perpendicular da aceleração. Desse modo, não podemos escrever, como no caso clássico, que a força é uma constante multiplicando a aceleração ou, equivalentemente (e mais correto), que a aceleração é um número vezes a força aplicada: $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$.

A expressão da energia na Relatividade Restrita

Lembrando que a energia cinética de uma partícula se escreve como:

$$E_c = \frac{p^2}{2m}.$$

Podemos escrever que a derivada temporal da energia cinética é dada por:

$$\frac{d}{dt}E_c = \frac{d}{dt}\left(\frac{p^2}{2m}\right) = \frac{1}{m}\mathbf{p}.\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{v}.\frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

O cálculo da derivada do momento (dado pela eq. 55) é um tanto tedioso e pode ser encontrado em NUSSENZVEIG[86]. O resultado final é:

$$\frac{d}{dt}E_c = \frac{d}{dt}\left[\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right] = \frac{d}{dt}\left(mc^2\right) \qquad \text{eq. 57}$$

O termo que aparece entre colchetes é a energia total da partícula E (isso será demonstrado mais adiante):

$$E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = mc^2 \qquad \text{eq. 58}$$

A constante m_0c^2 é chamada de *energia de repouso da partícula.*

Podemos agora integrar a eq. 57 para obter a energia cinética da partícula:

$$E_c = \int \frac{d}{dt}E_c = \int \frac{d}{dt}E = E + \text{constante} = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \text{constante}$$

A constante de integração é obtida ao impor-se a condição de que a energia cinética da partícula deve anular-se quando a partícula está em repouso (no *Sistema Próprio*, portanto):

$$E_c(v=0) = 0 \Rightarrow \frac{m_0c^2}{\sqrt{1}} + \text{constante} = 0 \Rightarrow \text{constante} = -m_0c^2$$

Concluindo, a energia cinética relativística da partícula será dada por:

$$E_c = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - m_0c^2 \Rightarrow \boxed{E_c = m_0c^2(\gamma - 1)} \qquad \text{eq. 59}$$

[86] Volume 4, página 213 (veja a lista de referências bibliográficas).

Podemos agora relacionar a quantidade E com a energia total, observando que (comparando a eq. 58 com a eq. 59):

$$E = E_c + m_0 c^2 \qquad \text{eq. 60}$$

A relação entre energia e o momento é obtida comparando a expressão do momento relativístico (eq. 55) com a expressão para a energia total (eq. 58). Resulta que:

$$\boxed{\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{p} = \frac{E}{c^2}\mathbf{v}} \qquad \text{eq. 61}$$

Vamos analisar o que acontece com uma partícula que cuja massa de repouso é nula ($m_0 = 0$). Vamos primeiro tomar o quadrado da expressão para o momento (eq. 55):

$$p^2 = \mathbf{p}.\mathbf{p} = \left[\frac{m_0}{\sqrt{1 - {v^2}/{c^2}}}\right]^2 v^2 =$$

$$p^2 = \frac{m_0^2}{1 - v^2/c^2} v^2 \Rightarrow \frac{p^2}{c^2} = \frac{m_0^2}{1 - v^2/c^2}\frac{v^2}{c^2} = \frac{m_0^2}{1 - v^2/c^2}\left[\frac{v^2}{c^2} - 1 + 1\right]$$

$$\frac{p^2}{c^2} = \left[\frac{m_0^2}{1 - v^2/c^2}\right] - \frac{m_0^2}{1 - v^2/c^2}\left[1 - v^2/c^2\right]$$

$$\frac{p^2}{c^2} = \left(\frac{E}{c^2}\right)^2 - m_0^2$$

$$\boxed{p^2 - \frac{E^2}{c^2} = -m_0^2 c^2} \qquad \text{eq. 62}$$

Na obtenção da eq. 62 foi usada a eq. 58. Portanto, se $m_0 = 0$ essa expressão nos diz que $p = E/c$. usando esse resultado na equação eq. 61 obtemos que:

$$|\mathbf{p}| = p = \frac{Ev}{c^2} = \frac{E}{c} \Rightarrow \boxed{v = c} \qquad \text{eq. 63}$$

Portanto, partículas cuja massa de repouso é nula devem ter velocidade igual à velocidade da luz. A partícula padrão desse tipo é o *fóton*, a partícula de luz.

Para finalizar, vamos analisar mais detidamente a eq. 58. Essa é a famosa equação de Einstein. De fato a forma correta de escrever essa equação seria:

$$m = \frac{E}{c^2} \qquad \text{eq. 64}$$

O que essa equação expressa é o fato de que a energia possui inércia (a qual é medida pela massa m) e que a medida desta inércia é dada pela energia dividida por c^2. Portanto, não é correto dizer-se que temos transformação de energia em massa ou vice-versa. O que acontece, de fato, é que se em um processo qualquer o sistema perder certa quantidade de energia E, essa energia que é liberada pelo sistema carrega consigo parte da inércia do sistema, medida pela massa m dada pela eq. 64.

Problemas

1 Em um sistema de coordenadas cilíndricas um ponto no espaço é localizado pelas coordenas cilíndricas ρ, z e θ, veja a Figura 108.

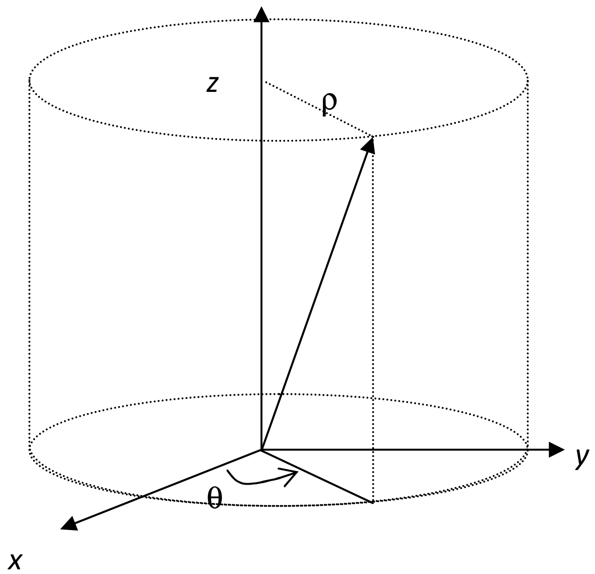


Figura 108- Problema 1.

a) Identifique o intervalo de variação destas coordenadas para obter os seguintes lugares geométricos:

a.1) Uma fina casca cilíndrica de raio R e altura L;

a.2) Um cilindro maciço de raio R e altura L;

a.3) Uma casca cilíndrica de espessura e, comprimento L e raio externo R.

2 Em um sistema de coordenadas esféricas um ponto no espaço é localizado pelas coordenadas polares **P** (r,θ,ϕ), veja a Figura 51. Identifique os intervalos de variação destas coordenadas para obter os seguintes lugares geométricos:

a) Uma fina casca esférica de raio R;

b) Uma esfera maciça de raio R;

c) Uma casca esférica de espessura Δr e raio externo R.

3 O GPS (sigla em inglês para o Sistema de Posicionamento Global, *Global Positioning System*), é um instrumento que, usando satélites, fornece as coordenadas que permitem localizar qualquer pessoa ou objeto sobre o Globo Terrestre.

A posição é fornecida em função de três parâmetros: Longitude, Latitude e Altitude. Para isso, 24 satélites foram colocados em órbitas geoestacionárias, a uma altitude em torno de 20.200 m. Esses satélites são estrategicamente posicionados, de maneira que em qualquer região do Globo Terrestre, pelo menos seis deles são "visíveis" pelo GPS. Cinco estações de rastreio estão espalhadas pelo Globo Terrestre, para captarem os sinais enviados por eles, e remetem estes sinais para outra estação Central, atualmente localizada em Colorado-EUA. O sistema cobre 93% de toda a área do Globo Terrestre. Apenas as regiões dos pólos da Terra não são totalmente cobertas.

São necessários pelo menos dados de três satélites para que os computadores do sistema GPS determinem uma posição no Globo.

a) Imagine que você foi seqüestrado quando o seu GPS marcava a seguinte posição: Latitude = 19,35 ^{o} Sul; Longitude = 54,23^o Oeste e Altitude = 520 m. Ao chegar ao cativeiro dos seqüestradores, o GPS marcava: Latitude = 23^o ; Longitude = 30^o Oeste e Altitude = 1000 m. Determine a distância aproximada em linha reta que você se encontra de onde você foi seqüestrado. Utilize a representação do Globo Terrestre do problema anterior e o raio da Terra igual a R_T = 6400 km.

4 O comprimento da trajetória de uma viagem aérea, entre duas cidades A e B, sempre na mesma altitude e paralelo 23^o Sul, é de 1000 km, aproximadamente. O fuso horário entre estas duas cidades é igual a 36 minutos.

Determine a altitude de vôo do avião. Para isso considere a Terra como uma esfera, de raio igual a 6400 km e as duas cidades localizadas sobre o mesmo paralelo.

5 Um registrador de temperatura indica que a temperatura aumentou linearmente das 8:00 h até 12:00h de 20 ^{o}C até 30 ^{o}C. A superfície sobre a qual a ponta da caneta registra as variações de temperatura é cilíndrica de raio $R = 5$ cm e completa uma volta a cada 24 horas. Veja a Figura 109.

a) Determine a taxa T que fornece a variação da temperatura por cada cm do risco deixado pela caneta, isto é T=____^{o}C/cm

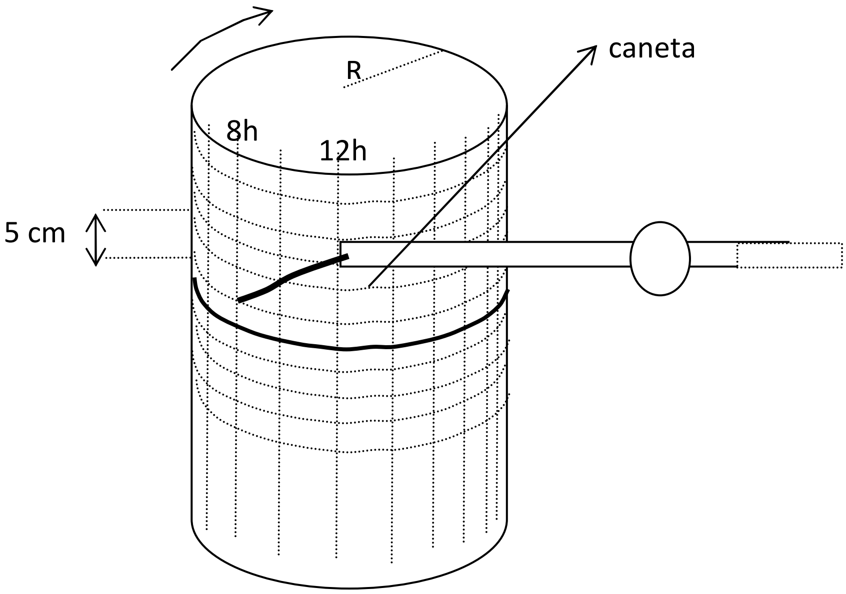


Figura 109 - Problema 5.

6 Uma formiga caminha com velocidade v constante a partir do centro de um disco de raio R igual a 15 cm. O objetivo da formiga é alcançar no menor tempo possível um grão de açúcar que está na borda do disco, veja a Figura 110. No instante em que a formiga inicia o movimento, o disco começa a girar com velocidade angular, ω, constante e igual a 33 rotações por minuto (rpm) no sentido anti-horário, visto de cima. A formiga alcança o grão de açúcar após um tempo de caminhada igual a 45s.

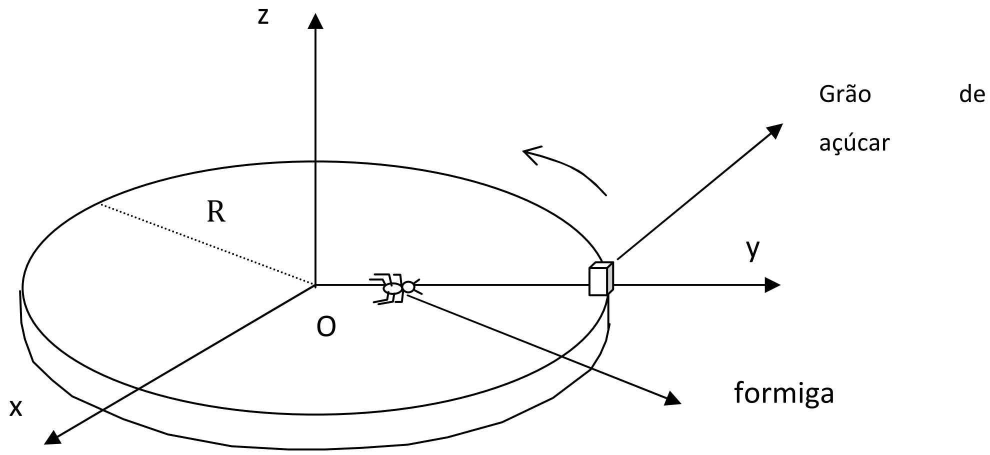


Figura 110 - Problema 6.

a) Faça um esboço da trajetória da formiga vista de fora do disco;
b) Escreva as coordenadas inicial e final da formiga em um sistema de coordenadas cilíndricas. Utilize a representação na Figura 53 como sugestão;

c) Escreva as coordenadas inicial e final da formiga em um sistema de coordenadas cartesianas, utilize a Figura 51;

d) Determine o deslocamento da formiga neste intervalo de tempo, com relação ao disco;

e) Determine o deslocamento da formiga com relação ao chão;

f) Determine a velocidade V da formiga, com relação ao disco;

g) Determine a velocidade da formiga no instante que ela chega na borda do disco, com relação ao chão;

h) Determine a velocidade escalar média da formiga com relação ao chão.

7 Na eq. 10, $\Delta S = r\,\Delta\theta$, r é o raio da circunferência e ΔS é o comprimento do arco correspondente a certo deslocamento angular $\Delta\theta$. Poderia a quantidade $\Delta\theta$ nessa expressão ser expresso em graus? Explique.

8 O *dia solar* é, por definição, o intervalo de tempo necessário para a Terra completar uma volta em torno de seu próprio eixo, tendo a posição do Sol por referência, enquanto que o *dia sideral* é, por definição, o intervalo de tempo necessário para a Terra completar uma volta em torno de seu próprio eixo, tendo uma estrela muito distante da Terra como ponto de referência. Considere a órbita da Terra em torno do Sol um círculo, com o Sol em seu centro, veja a Figura 111. Determine a diferença em *segundos solar*, entre o *dia solar* e o *dia sideral*.

Figura 111 - Problema 8.

9 Um vidro de amônia é aberto em um dos vértices de uma sala retangular cujas dimensões: são: 4 m x 5 m para o piso e 3 m de altura. Um detector de moléculas de amônia está instalado no vértice diametralmente oposto ao vértice no qual o vidro está localizado. Após 10 s da abertura do vidro o detector acusa a presença de moléculas de amônia, veja a Figura 112.

a) Determine o vetor deslocamento $\Delta\mathbf{r}$ da molécula que chegou até o detector (módulo, direção e sentido);

a) Se as moléculas de amônia possuem uma velocidade média de 500 m/s, explique porque levou tanto tempo (10s) para chegar até o detector;

b) Faça uma estimativa do comprimento da trajetória percorrida pela molécula até atingir o detector;

c) Determine a velocidade vetorial média $\mathbf{V_m} = \Delta\mathbf{r}/\Delta\mathbf{t}$ da molécula que chegou até o detector, escrita em termos das componentes vetoriais no referencial sugerido na Figura 50.

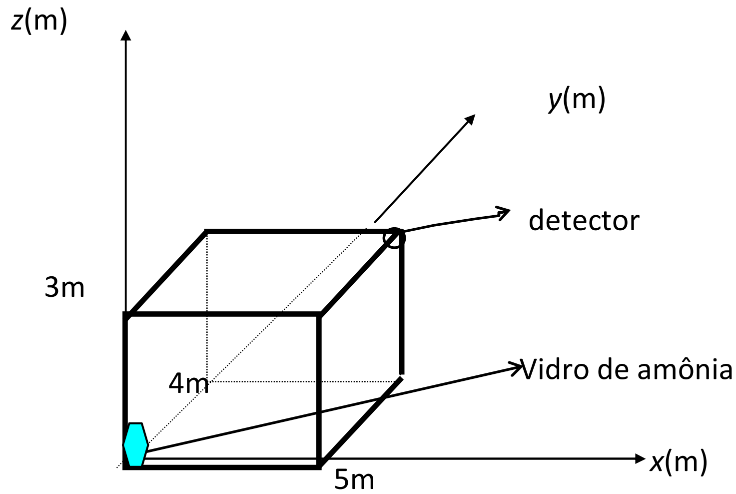


Figura 112 - Problema 9.

10 A Figura 113 representa um edifício com 9 andares. Nessa figura, um esboço da planta do 5º andar se encontra a direita. Este edifício possui 4 apartamentos iguais por andar e o poço do elevador no centro.

Um visitante toma o elevador no térreo e após 25 s chega até o 5º andar, em seguida caminha em linha reta com velocidade constante até o ponto B do apartamento 504 levando para isso mais 5s.

a) Escreva o vetor deslocamento $\Delta\mathbf{r}$ do visitante, desde o instante em que tomou o elevador no térreo, até o instante no qual chegou no ponto B, em função das componentes nos eixos O_x, O_y e O_z e dos respectivos vetores unitários $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ e $\mathbf{e}_z$;

b) Qual a direção que este vetor faz com o plano O_{xy}? (dê a resposta em graus)

c) Determine a velocidade vetorial média $\mathbf{V_m} = \Delta\mathbf{r}/\Delta\mathbf{t}$ do visitante. Escreva em termos das componentes O_x, O_y e O_z e dos respectivos vetores unitários $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ e $\mathbf{e}_z$. Determine o seu módulo.

d) Determine a velocidade escalar média do visitante.

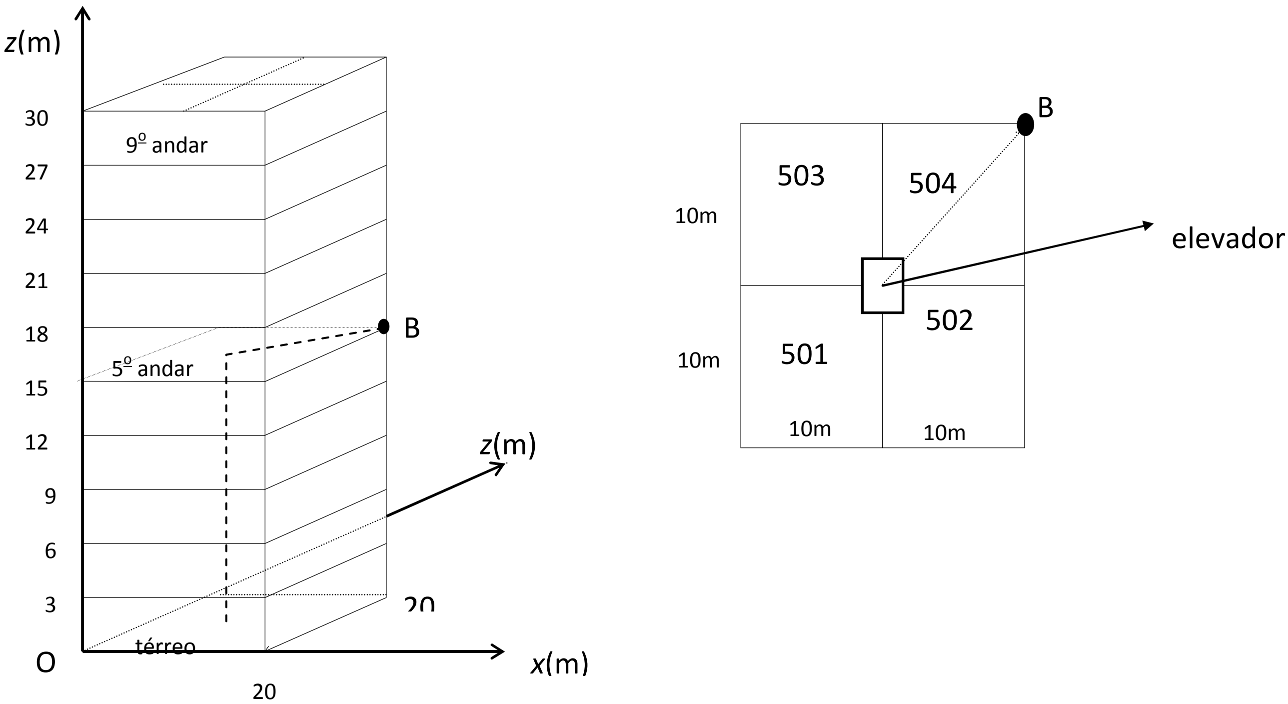


Figura 113 – Problema 10.

11 Um avião, após atingir a velocidade de 300 km/h em uma pista horizontal, decola subindo 100 m a cada 15 s.

a) Escreva no mesmo referencial o vetor velocidade do avião antes e depois da decolagem;

b) Demonstre que a trajetória do avião é retilínea. Que ângulo a trajetória do avião faz com a pista horizontal? Faça ilustrações.

c) Determine, em função do tempo, o vetor posição que localiza o avião em relação ao ponto de decolagem. Faça ilustrações.

12 Um satélite orbita a Terra a uma altura constante de 10.000 m do solo, com uma velocidade angular ω, constante, completando 1 volta a cada 24 horas no sentido de Oeste para Leste. A trajetória do satélite está contida sempre no plano formado pela linha do equador. O tempo começa a ser medido a partir do instante que o satélite passa sobre o meridiano de Greenwich, isto é meridiano correspondente a 0^{o}. Escreva a posição do satélite em função do tempo, em sistemas de coordenadas cartesianas, cilíndricas e esféricas, faça ilustrações.

13 Represente nos segmentos de trajetórias assinalados na Figura 114, a força média que deve ser aplicada na partícula e que resulta na trajetória seguida pela partícula. Os vetores azuis representam os momentos lineares nas extremidades dos respectivos intervalos das trajetórias.

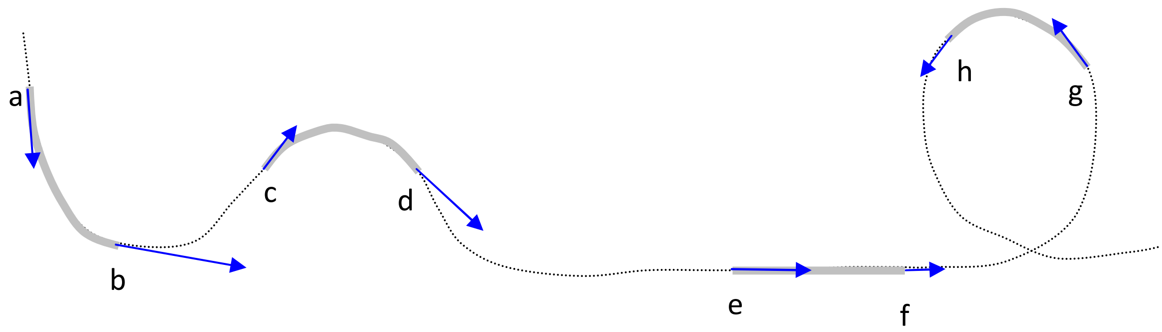


Figura 114 – Problema 13.

14 Represente, vetorialmente, a força média aplica em um segmento da trajetória nos seguintes sistemas em movimento, faça ilustrações.

a) Uma mosca nas pás de um ventilador preso no teto girando com velocidade angular constante;
b) Uma mosca nas pás de um ventilador que desprendeu em queda livre do teto girando com velocidade angular constante.
c) Uma mosca presa nas pás de uma hélice de avião que voa horizontalmente com velocidade constante.

15 Dois carros A e B possuem massas m_A e m_B, respectivamente. Ambos descrevem trajetórias circulares de raios $R_B = 2R_A$ (veja a Figura 115). Nas situações a seguir, verifique qual dos carros ficou submetido a maior interação com a vizinhança, durante o mesmo intervalo de tempo.

a) Quando os dois possuem a mesma velocidade $V_A = V_B$ e $m_A = m_B$;
b) Quando os dois possuem a mesma velocidade angular $\omega_A = \omega_B$ e $m_A = m_B$;
c) Qual a relação entre as massas dos dois carros para que os dois sejam submetidos à mesma força média, mas com velocidades $\omega_A = \omega_B$?
d) Qual a relação entre as massas dos dois carros para que os dois sejam submetidos à mesma força média, mas com velocidades $V_A = V_B$?

Obs.: represente na figura as respectivas forças médias para cada caso.

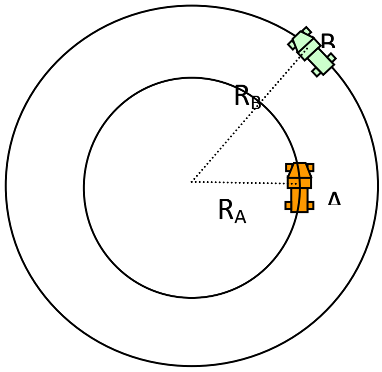


Figura 115 - Problema 15.

16 A trajetória mostrada na Figura 116 corresponde ao lançamento de um projétil, próximo à superfície da Terra, sob influência apenas do campo gravitacional, considerado constante. Represente o vetor momento angular em escala correta nos pontos assinalados. As linhas tracejadas possuem a direção da reta tangente a cada ponto.

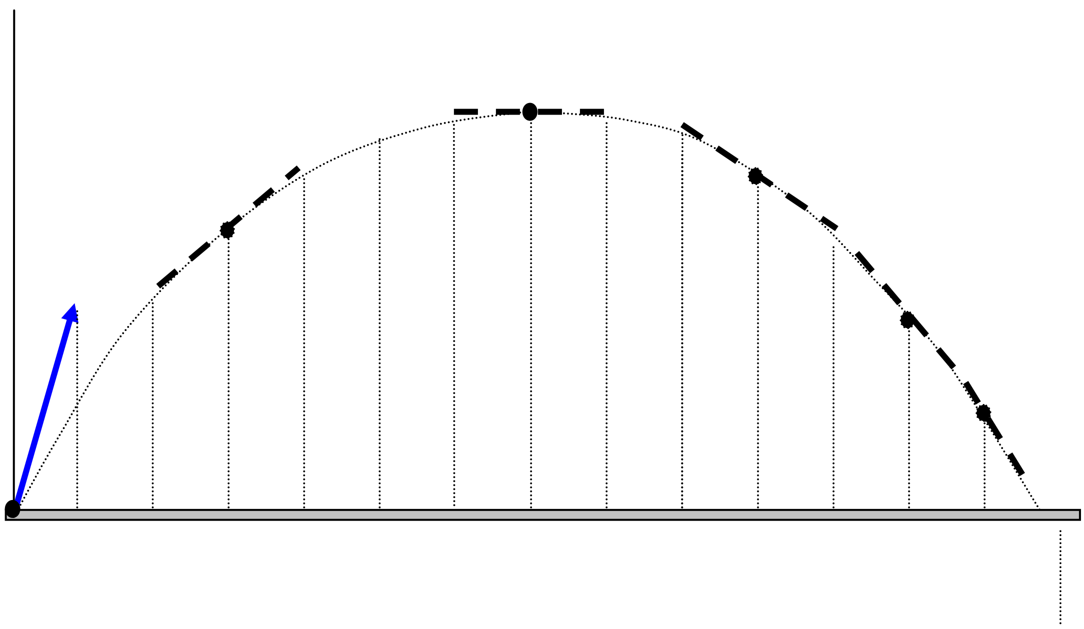


Figura 116 - Problema 16.

17 - A figura abaixo representa, em vários pontos ao longo da trajetória, o vetor momento linear de um avião que fez um *looping* no ar. Represente o vetor força resultante média em cada intervalo da trajetória. Use dois esquadros para fazer as diferenças entre o momento linear em uma dada posição e o momento linear na posição consecutiva, obedecendo a seus módulos. Considere os intervalos de tempo em cada intervalo da trajetória diferentes, pois a velocidade do avião diminui ao subir e depois aumenta ao descer, e os pontos estão distanciados em comprimentos de trajetórias iguais.

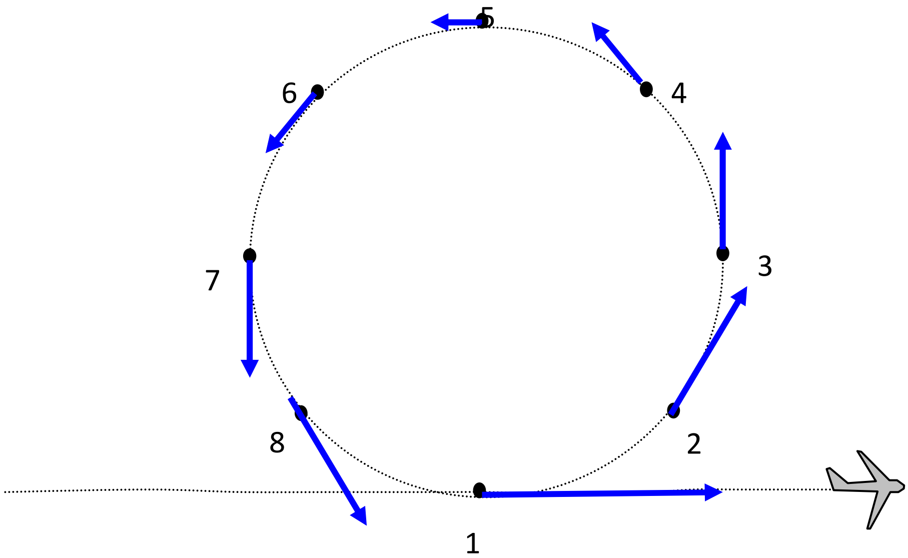


Figura 117 - Problema 17.

18 Uma granada em repouso explode em três pedaços com inércia iguais. Dois dos pedaços saem com velocidades iguais e perpendiculares entre si. Represente este movimento e desenhe a direção da velocidade do terceiro pedaço.

a) Qual o momento linear da granada antes de explodir?
b) Qual o momento linear da granada depois que explodiu?
c) Qual o momento linear, em módulo, do terceiro pedaço?

19 A massa da Terra é 10^{27} vezes a massa de uma pedra. Considere o plano formado pelo equador contido no plano da órbita da Terra em torno do Sol.

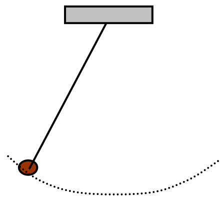
a) O que acontece com a Terra quando você joga a pedra para cima, na região do equador, ao meio dia?
b) O que acontece com a Terra quando a pedra está descendo?
c) E após colidir com o solo?
d) Se a pedra estava no seu bolso antes de ser lançada para cima, depois que caiu no chão a trajetória da Terra em torno do Sol será a mesma que seria se você não a tivesse jogado? Explique e faça ilustrações.

20 Nos movimentos abaixo identifique as vizinhanças que causam a variação do módulo da velocidade e da direção da velocidade, e represente as respectivas forças no desenho, discutindo o local em que são aplicadas.

Vizinhanças:

1) Terra 2) Fio 3) Superfície (solo) 4) Ar 5) Trilhos 6) Areia

a) Pêndulo simples oscilando próximo da superfície da Terra



Módulo da velocidade: ( ) ( ) ( )

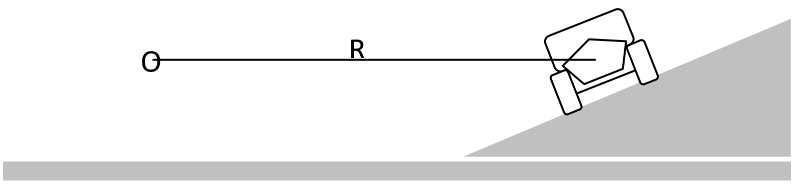
Direção da velocidade: ( ) ( ) ( )

b) Um carro descrevendo uma curva de raio R em pista inclinada, com velocidade constante.

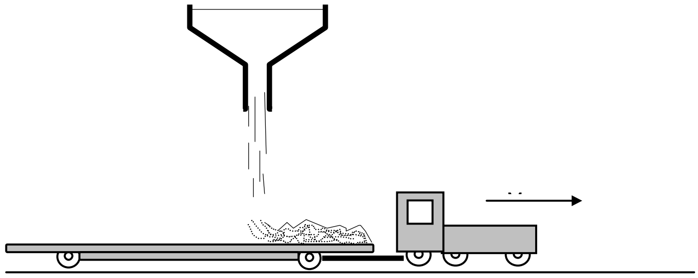
Módulo da velocidade: ( ) ( ) ( )

Direção da velocidade: ( ) ( ) ( )

OBS: Sua resposta depende da velocidade do carro? Discuta!



c) Um vagão em movimento sobre um trilho horizontal sem atrito sendo carregado com areia



Módulo da velocidade: ( ) ( ) ( )

Direção da velocidade: ( ) ( ) ( )