# Exercício de Aplicação 3
# SME 301 - Métodos Numéricos para Engenharia I

Monitor João Paulo Casagrande Bertoldo
Prof. Dr. Eduardo Fontoura Costa

## 1 Introdução

No contexto do braço robótico de 3 graus de liberdade (GDL) visto no Exercício de Aplicação 2 (Figura 1), desenvolvemos uma maneira de saber quais deveriam ser os ângulos dos motores para que a garra atingisse uma posição e um ângulo desejado.

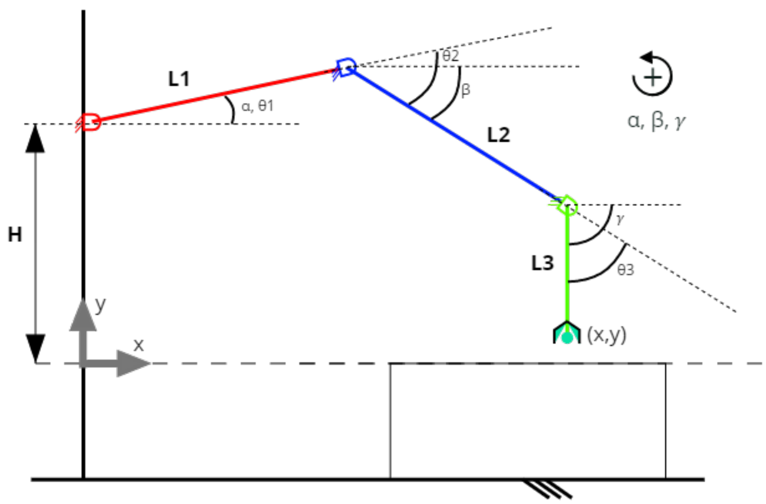


Figura 1: Desenho esquemático da geometria do braço robótico.

Desta vez, falaremos sobre o aspecto dinâmico do robô, visto que anteriormente tratamos apenas de sua geometria. No Exercício de Aplicação 2, nada dissemos a respeito de como fazer cada motor ter uma dada posição angular, apenas tomamos como verdade que "é possível fazer isso". Também não levamos em consideração o que acontece durante a transição de uma posição a outra.

Portanto, a pergunta a ser respondida é a seguinte:

**Dado um ângulo desejado em um dos motores, qual deve ser a tensão de entrada e como o sistema se comporta durante a transição?**

# 2 Modelo

Por simplicidade, vamos tratar da dinâmica de apenas um braço isolado e seu acoplamento com um motor de corrente contínua ("motor CC" ou "motor DC"). Também vamos considerar que cada braço pode ser considerado como uma barra rígida de faces retangulares feita de aço (Figura 2).

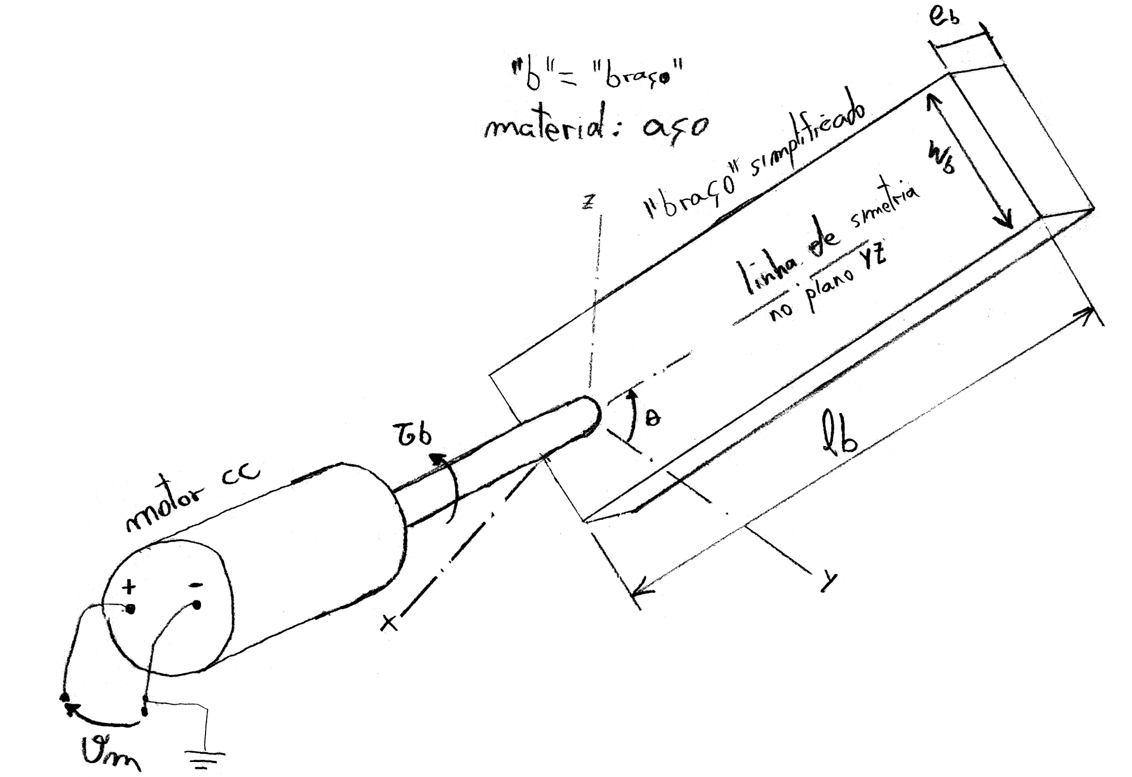


Figura 2: Desenho de um braço simplificado.

O modelo mecânico deste sistema resulta em uma inércia equivalente $J_{eq}$ e um coeficiente de atrito equivalente $f_{eq}$. Sob a inércia $J_{eq}$ é aplicado o torque gerado pelo motor DC, criando uma aceleração angular $\ddot{\theta}_b$, conforme a Equação 1 (veja a Figura 3).

$$\tau_m = J_{eq}\ddot{\theta}_b + f_{eq}\dot{\theta}_b \tag{1}$$

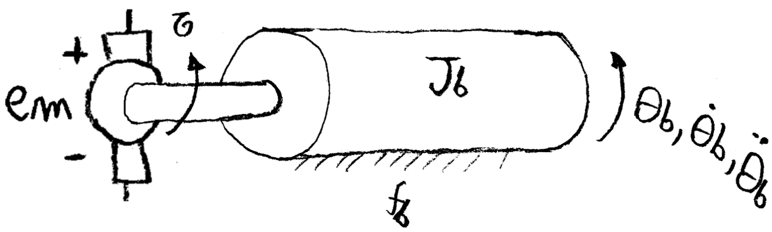


Figura 3: Modelo mecânico.

O sistema elétrico é composto por uma fonte ideal, uma resistência, uma indutância e uma força eletromotriz; todos em série, resultando na Equação 2 (veja a Figura 4). O acoplamento eletromecânico é modelado com relações lineares entre o torque e a corrente do circuito ($\tau_m = K_m i_m$) e entre a velocidade de rotação do braço e a força eletromotriz ($e_m = \frac{K_m}{r_e}\dot{\theta}_b$).

$$v_m = R_m i_m + L_m \frac{di_m}{dt} + \frac{K_m}{r_e}\dot{\theta}_b \tag{2}$$

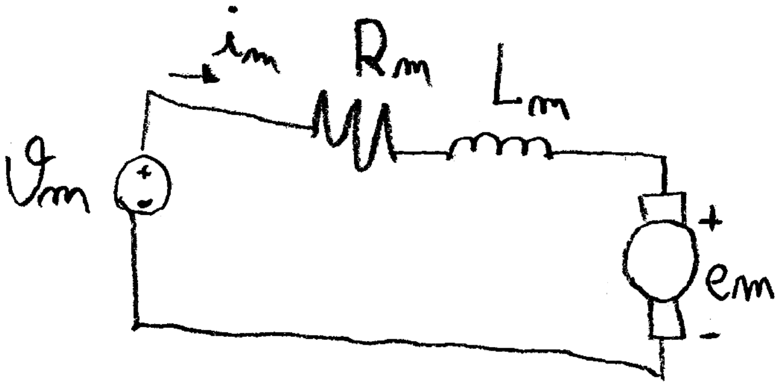


Figura 4: Modelo elétrico.

# 3 Espaço de estados

!ATENÇÃO! A partir daqui até o final da Seção 4, trata-se de uma explicação simplificada da elaboração matemática do problema. ESTAS PARTES SÃO OPCIONAIS! Se você quiser ir direto para o exercício de implementação do método numérico, vá para a Seção Exercício (5). Caso você queira entender como o problema foi formulado (altamente recomendado), leia tudo (não é muito).

Definimos um espaço de estados de dimensão três da seguinte maneira:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \theta_b \\ \dot{\theta}_b \\ i_m \end{bmatrix} \implies \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_b \\ \ddot{\theta}_b \\ \frac{di_m}{dt} \end{bmatrix}$$

A partir das Equações 1 e 2, obtemos a seguinte expressão para o vetor $\dot{\mathbf{x}}$:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_b \\ -\frac{f_{eq}}{J_{eq}}\dot{\theta}_b + \frac{K_m}{J_{eq}} i_m \\ -\frac{K_m}{r_e L_m}\dot{\theta}_b - \frac{R_m}{L_m} i_m + \frac{1}{L_m} v_m \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{f_{eq}}{J_{eq}} & \frac{K_m}{J_{eq}} \\ 0 & -\frac{K_m}{r_e L_m} & -\frac{R_m}{L_m} \end{bmatrix}}_{\text{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} \theta_b \\ \dot{\theta}_b \\ \frac{di_m}{dt} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_m} \end{bmatrix}}_{\text{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} v_m \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}}$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\,\boldsymbol{u}(t) \tag{3}$$

Ou seja, conforme mostra a Equação 3, obtemos uma expressão para a derivada do espaço de estados com termos lineares que dependem do próprio espaço de estados ($\mathbf{x} = [\theta_b \quad \dot{\theta}_b \quad i_m]^T$) e do vetor de comando ($\boldsymbol{u} = [v_m]$).

O vetor comando é o *input* do sistema; isto significa que ele é a única coisa que podemos controlar diretamente - todo o resto apenas reage às mudanças do *input*. Esta equação é continua no tempo, o que exige a resolução de uma equação diferencial. Porém, podemos discretizar o sistema no tempo e obter uma equação diferença.

A discretização temporal é feita com intervalos de $T_s$ segundos ("$s$"de "sampling", que significa "amostragem"em inglês). Isso significa que passaremos a analisar o sistema apenas nos em instantes de tempo $t = k\,T_s$, para $k = 0, 1, ..., K$. Ou seja:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(k\,T_s), \quad k = 0, 1, ..., K \tag{4}$$

Desta forma descrevemos o sistema em instantes de tempo discretos e em um intervalo finito. Para simplificar um pouco a escrita, usaremos a seguinte notação:

$$\mathbf{x}(k\,T_s) = \mathbf{x}_k$$

$$\boldsymbol{u}(k\,T_s) = \boldsymbol{u}_k$$

Então, discretizando a Equação 3:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathrm{a}\,\mathbf{x}_k + \mathrm{b}\,\boldsymbol{u}_k \tag{5}$$

Usando a formulação discreta, em vez de resolver a Equação 3, calcularemos os valores numéricos da Equação 5 em $k = 0, 1, ..., K$, onde as matriz a e b serão obtidas usando uma função de discretização do MATLAB (função "c2d").

# 4 Sistema linear

Ok, vamos ao que interessa...

Conhecemos, por suposição, os valores iniciais de $\theta_b$, $\dot{\theta}_b$ e $i_m$; portanto conhecemos $\mathbf{x}_0$. No instante de tempo $t = K\,T_s$, queremos que $\theta_b = \theta_F$, $\dot{\theta}_b = 0$ e $i_m = 0$. A corrente deve ser nula para que o torque seja nulo ($\tau_m = K_m\,i_m$). Então também conhecemos $\mathbf{x}_K = [\theta_F\ 0\ 0]^T$.

Rearranjando os termos da Equação 5 obtemos:

$$\mathbf{x}_1 - \mathrm{b}\,\boldsymbol{u}_0 = \mathrm{a}\,\mathbf{x}_0 \tag{6}$$

$$\mathbf{x}_k - \mathrm{a}\,\mathbf{x}_{k-1} - \mathrm{b}\,\boldsymbol{u}_{k-1} = 0 \tag{7}$$

$$-\,\mathrm{a}\,\mathbf{x}_{K-1} - \mathrm{b}\,\boldsymbol{u}_{K-1} = -\mathbf{x}_K \tag{8}$$

Vamos usar as Equações 6, 7 e 8 avaliada em $k = 1, \ldots, K$ para montar um sistema linear onde as incógnitas são $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_{K-1}, \mathbf{x}_K$ e $\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_{K-1}$.

Neste mesmo sistema linear, também incluiremos equações de restrições quanto aos valores numéricos de $\boldsymbol{u}_k$, sendo que, na metade do pecurso, este deve inverter de sinal (a primeira parte é a aceleração e a segunda é a desaceleração).

Assim, podemos escrever um sistema linear com o seguinte formato:

$$\left[\begin{array}{cccccc|ccccccc}
I & & & \cdots & & & -b & & & \cdots & & & \\
-a & I & & \cdots & & & & -b & & \cdots & & & \\
 & -a & I & \cdots & & & & & -b & \cdots & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & & \cdots & I & & & & & \cdots & -b & & \\
 & & & \cdots & -a & I & & & & \cdots & & -b & \\
 & & & \cdots & & -a & & & & \cdots & & & -b \\
\hline
 & & & \cdots & & & & 1 & -1 & \cdots & & & \\
 & & & \cdots & & & & & 1 & \cdots & & & \\
 & & & \cdots & & & & & & \cdots & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & & \cdots & & & & & & \cdots & -1 & & \\
 & & & \cdots & & & & & & \cdots & 1 & -1 &
\end{array}\right] * \left[\begin{array}{c}
\mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{K-3} \\ \mathbf{x}_{K-2} \\ \mathbf{x}_{K-1} \\ \hline \boldsymbol{u}_0 \\ \boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{u}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}_{K-3} \\ \boldsymbol{u}_{K-2} \\ \boldsymbol{u}_{K-1}
\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c}
\mathrm{a}\,\mathbf{x}_0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ -\mathbf{x}_K \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0
\end{array}\right] \tag{9}$$

Chamaremos a matriz deste sistema de $M$, o vetor independente de $vet$ e o vetor de variáves de $Sol$ (de "Solução"). Assim,

$$M \ * \ Sol = vet \tag{10}$$

# 5 Exercício

O objetivo do exercício é apenas um: implementar uma função em MATLAB (uma "function") que resolva o sistema linear $M\,Sol = vet$.

A matriz $M$ é quadrada e você pode consultar qualquer material que achar conveniente para encontrar um algoritmo de resolução de sistemas lineares.

Os scripts pré-prontos do MATLAB podem ser encontrados neste link. Você deve baixá-los, abrir o script “MotorDC.m” e executá-lo para ver qual é o resultado esperado.

No código, na seção “Solução do sistema linear”, a linha “Sol = M\vet;” deve ser posteriormente comentada - esta é a linha que chama o resolvedor de sistemas lineares do MATLAB. Você deve implementar o seu método no arquivo “resolveSistema.m”, que é uma função do MATLAB cujas entradas são $M$ e $vet$ e a saída é $Sol$. Após isto, basta descomentar a linha “Sol = resolveSistema(M,vet);” do script principal e testar sua função.

Dica: teste a função anteriormente com exemplos mais simples e conhecidos. Quando ela funcionar corretamente, tente usá-la no script do motor DC.

Envie seu arquivo de código para **joao.bertoldo@usp.br** com cópia para **efcosta@icmc.usp.br** com o assunto "Exercício Adicional 3 - xx", onde "xx"é o seu nome.

Boa sorte!