Equação a Diferenças: Caso Linear

1 Propriedades Gerais

- uma equação a diferenças linear, com coeficientes constantes e de ordem n pode ser escrita como:

$$a_n x(k+n) + a_{n-1} x(k+n-1) + \cdots + a_1 x(k+1) + a_0 x(k) = u(t) \quad (1)$$

  onde $a_n \neq 0$ e $a_0 \neq 0$, e as condições iniciais são dadas por $x(0) = x_0$, $x(1) = x_1$, ..., $x(n-1) = x_{n-1}$.

- a equação (1) pode também ser expressa em uma forma condensada:

$$L_n[E]x(k) = u(k) \quad (2)$$

  onde $L_n[E]$ é um operador linear de deslocamento atuando sobre a função $x(k)$, e tendo a forma (E representa deslocamento à frente):

$$L_n[E] = a_n E^n + a_{n-1} E^{n-1} + \cdots + a_1 E^1 + a_0 \quad (3)$$

Propriedade 1

As soluções da equação homogênea $L_n[E]x(k) = 0$ têm a forma:

$$x(k) = c\lambda^k$$

onde λ é raiz da equação característica:

$$L_n[\lambda] = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda^1 + a_0 = 0.$$

- se a equação característica tiver uma raiz j com multiplicidade $p > 1$, então a solução devida a esta raiz terá a forma:

$$x_j(k) = c_j \left(\lambda_j^k + k\lambda_j^k + k^2 \lambda_j^k + \cdots + k^{p-1} \lambda_j^k \right).$$

- a solução geral da equação homogênea é obtida da combinação linear das soluções associadas às raízes distintas, ilustradas a seguir para o caso de n raízes com multiplicidade 1:

$$x_h(k) = c_1 \lambda_1^k + c_2 \lambda_2^k + \cdots + c_n \lambda_n^k$$

- no caso das raízes serem complexas conjugadas, $\lambda_1 = \rho e^{j\theta}$ e $\lambda_2 = \rho e^{-j\theta}$, resulta:

$$x(k) = c_1\lambda_1^k + c_2\lambda_2^k = \rho^k\left(c_1 e^{jk\theta} + c_2 e^{-jk\theta}\right) = c\rho^k \text{sen}(k\theta + \phi)$$

com $c = \dfrac{c_1 + c_2}{\text{sen}(\phi)}$ e $\cos(\phi) = j\dfrac{c_1 - c_2}{c}$.

Propriedade 2

A solução geral da equação não-homogênea $L_n[E]x(k) = u(k)$ é dada por:

$$x(k) = x_h(k) + x_p(k)$$

onde:

- $x_h(k)$ é a solução geral da equação homogênea associada;
- $x_p(k)$ é a solução particular da equação não-homogênea.

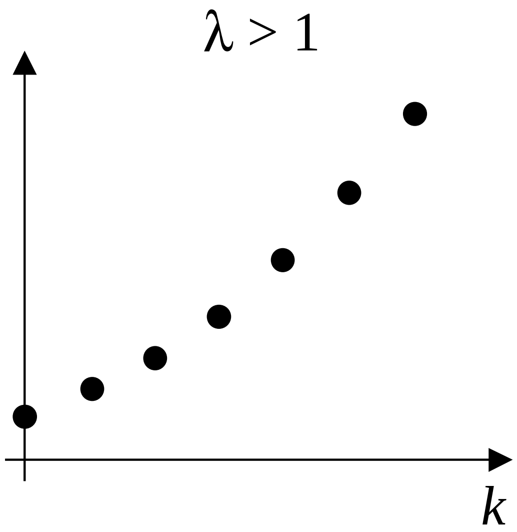
- a solução particular $x_p(k)$ pode ser obtida através do método dos coeficientes a determinar, utilizando funções parametrizadas, conforme indicado na tabela abaixo.

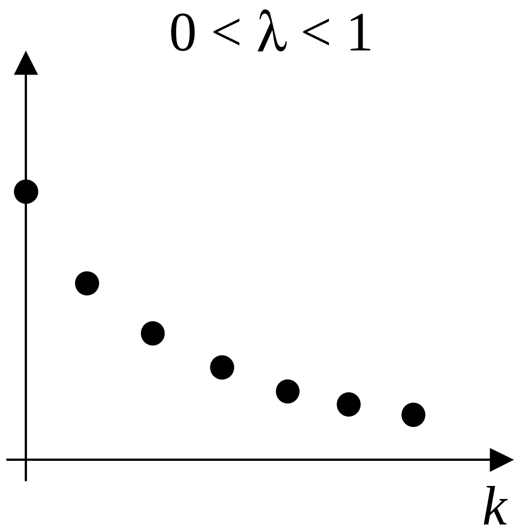
$u(k)$	$x_p(k)$
b (cte)	d (cte)
bk^m, m inteiro	$d_0 + d_1 k + d_2 k^2 + \cdots + d_m k^m$
$b\gamma^k$	$d\gamma^k$
$b\cos(\gamma k)$	$d_1\cos(\gamma k) + d_2\text{sen}(\gamma k)$
$b\text{sen}(\gamma k)$	$d_1\cos(\gamma k) + d_2\text{sen}(\gamma k)$

- se a forma da solução contiver termos iguais aos contidos na solução da equação homogênea, a duplicidade deve ser eliminada através da multiplicação pela menor potência de k que remova a duplicidade.
- somas e produtos de $u(k)$'s levam a somas e produtos de $x_p(k)$'s
- as n constantes da solução da equação homogênea devem ser determinadas a partir das n condições iniciais.

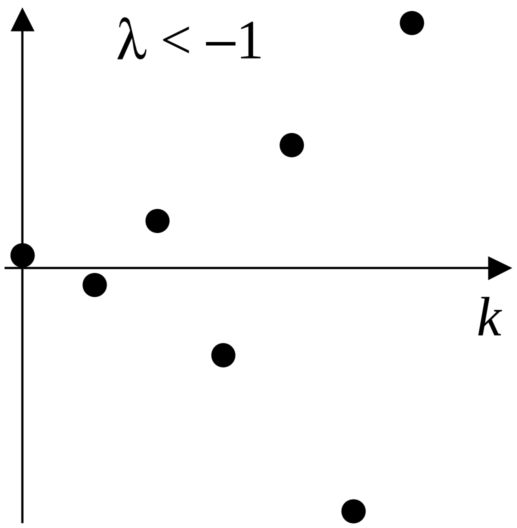
2 Casos importantes para $x(k) = c\lambda^k$

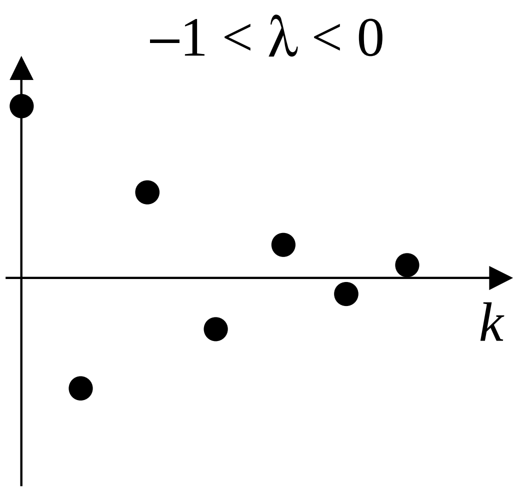
2.1 Caso 1: λ é real





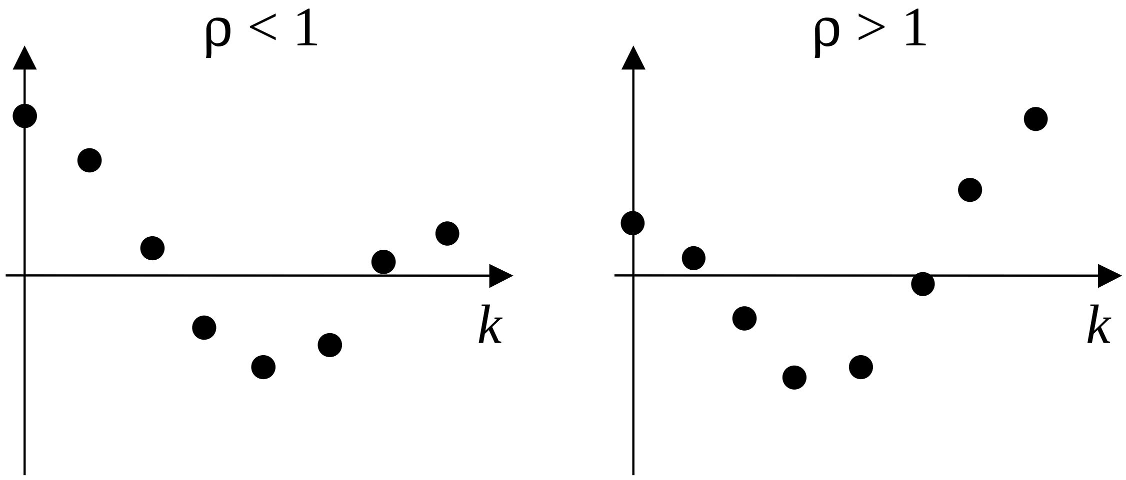
EA616 – Prof. Von Zuben
DCA/FEEC/Unicamp





2.2 Caso 2: λ_1 e λ_2 são complexos conjugados

- $\lambda_1 = \rho e^{j\theta}$ e $\lambda_2 = \rho e^{-j\theta}$, implica em solução do tipo $x(k) = c\rho^k \text{sen}(k\theta + \phi)$.



3 Estabilidade de sistemas discretos no tempo

- a seguir, iremos definir estabilidade em função da localização das raízes da equação característica no plano complexo.

- um sistema linear discreto no tempo, descrito por uma equação a diferenças linear (ou um conjunto de equações a diferenças lineares) é estável se todas as raízes da equação característica têm módulo menor ou igual a 1 e não existem raízes repetidas com módulo igual a 1, ou seja, $\left|\lambda_j\right| \leq 1$, j=1, ..., n.
- um sistema linear discreto no tempo, descrito por uma equação a diferenças linear (ou um conjunto de equações a diferenças lineares) é assintoticamente estável se todas as raízes da equação característica têm módulo menor que 1, ou seja, $\left|\lambda_j\right| < 1$, j=1, ..., n.
- um sistema linear discreto no tempo, descrito por uma equação a diferenças linear (ou um conjunto de equações a diferenças lineares) é instável se existir uma raiz da equação característica com módulo maior que 1, ou seja, $\left|\lambda_j\right| > 1$, para algum $j \in \{1,\dots,n\}$, ou então se existirem raízes repetidas com módulo igual a 1.

4 Exemplo de solução geral de equações a diferenças

Empréstimo com juros e pagamento mensal

- $D(k+1)-(1+r)D(k)=-P$, com $D(0)=D_0$ e $D(n)=0$
- $L_1[E]D(k)=\left[E-(1+r)\right]D(k)=-P$
- equação característica: $L_1[\lambda]=\lambda-(1+r)=0 \Rightarrow \lambda=1+r$
- solução da equação homogênea: $D_h(k)=c\lambda^k=c(1+r)^k$
- solução particular: $D_p(k)=d$
- observação: $D_p(k)=d_1+d_2k$ se $r = 0$.
- Cálculo de d por substituição na equação original:

$$d-(1+r)d=-P \Rightarrow d=\frac{P}{r} \Rightarrow D_p(k)=\frac{P}{r}$$

- solução geral com incógnitas: $D(k)=c(1+r)^k+\dfrac{P}{r}$

- Cálculo de c: $D(0)=c+\dfrac{P}{r}=D_0 \Rightarrow c=D_0-\dfrac{P}{r}$
- solução geral: $D(k)=\left(D_0-\dfrac{P}{r}\right)(1+r)^k+\dfrac{P}{r}$
- Cálculo de P: $D(n)=\left(D_0-\dfrac{P}{r}\right)(1+r)^n+\dfrac{P}{r}=0 \Rightarrow \left[\dfrac{(1+r)^n}{r}-\dfrac{1}{r}\right]P=D_0(1+r)^n$

$$P=D_0\frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n-1} \Rightarrow P=D_0\frac{r}{1-\dfrac{1}{(1+r)^n}}$$

Exemplo 1: D_0 = 100; n = 10; r = 0,1 $\Rightarrow$ P = 16,2745 ...

Pagamento Total: 162,745 ...

Exemplo 2: D_0 = 100; n = 20; r = 0,1 $\Rightarrow$ P = 11,7459 ...

Pagamento Total: 234,919 ...

5 Solução geral da representação por espaço de estados

- a forma discreta da representação por espaço de estados é análoga à forma contínua. A representação por espaço de estados mais geral para sistemas lineares de tempo discreto e invariantes no tempo é dada por:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases} \tag{4}$$

onde:

- ✓ $x(k) \in \Re^n$ é o vetor de estados no instante k;
- ✓ $u(k) \in \Re^m$ é o vetor de entradas no instante k; e
- ✓ $y(k) \in \Re^r$ é o vetor de saídas no instante k.

- deste modo, as dimensões das matrizes são $A \in \Re^{n \times n}$, $B \in \Re^{n \times m}$ e $C \in \Re^{r \times n}$.

- os estados nos instantes (k+2), (k+3), ..., (k+n) podem ser obtidos na forma:

- ❑ $x(k+2) = Ax(k+1) + Bu(k+1) = A^2x(k) + ABu(k) + Bu(k+1)$
- ❑ $x(k+3) = Ax(k+2) + Bu(k+2) = A^3x(k) + A^2Bu(k) + ABu(k+1) + Bu(k+2)$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

- ❑ $x(k+n) = Ax(k+n-1) + Bu(k+n-1) = A^n x(k) + A^{n-1}Bu(k) + A^{n-2}Bu(k+1) + + \cdots + ABu(k+n-2) + Bu(k+n-1)$

- a solução geral para a equação de estados pode então ser escrita como:

$$x(k) = A^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-j-1} Bu(j),\ k = 1,2,3,...$$

- é possível verificar que $x(k)$ consiste de duas partes, uma representando a contribuição do estado inicial $x(0)$, e a outra a contribuição da entrada $u(j)$, j=0,1,2,...,k–1.
- já para a equação de saída, a solução assume a forma:

$$y(k) = CA^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} CA^{k-j-1} Bu(j),\ k = 1,2,3,...$$

6 Discretização de Equações de Estado de Tempo Contínuo

- além da existência de processos inerentemente de tempo discreto, cuja representação na forma de espaço de estados é adequadamente descrita pela equação (4), o tratamento via computador digital de processos de tempo contínuo requer a conversão das equações de estado de tempo contínuo para tempo discreto.
- portanto, é interessante apresentar um método de discretização que permita a obtenção de um equivalente de tempo discreto para representações por espaço de estados de tempo contínuo.
- a aplicação de computadores digitais no tratamento de processos físicos de tempo contínuo requer apenas uma descrição do processo em instantes de amostragem.
- o computador vai receber informações e atuar sobre um processo sempre em instantes discretos de tempo. Assim, o objetivo é desenvolver um modelo do processo de tempo contínuo que descreva seu comportamento apenas nos instantes

de amostragem, sem considerar o comportamento entre duas amostras consecutivas.

- este procedimento de análise pode simplificar muito o tratamento de processos de tempo contínuo via computador digital.
- um problema fundamental é como descrever um sistema de tempo contínuo conectado a um computador via conversores A-D (analógico-digital) e D-A (digital-analógico), conforme apresentado na Figura 1.

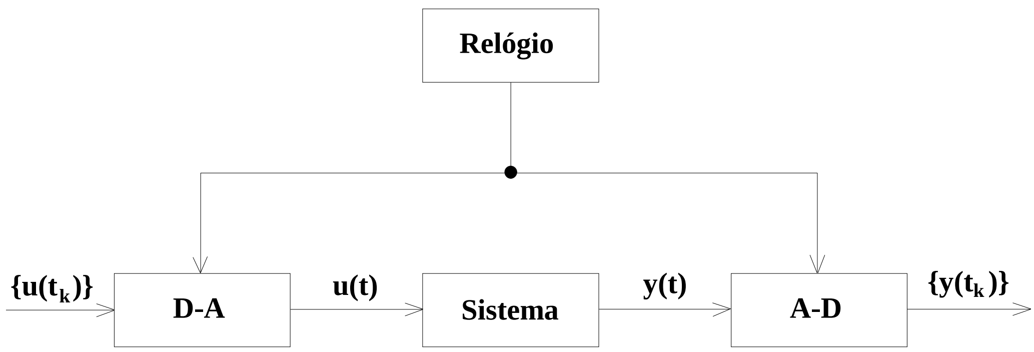


Figura 1: Sistema de tempo contínuo conectado a conversores A-D e D-A

- os sinais no computador correspondem às seqüências $\{u(t_k)\}$ e $\{y(t_k)\}$. O problema básico está em encontrar uma relação entre estas seqüências.
- o processo de obtenção de um equivalente de tempo discreto para um sistema de tempo contínuo é chamado amostragem de um sistema de tempo contínuo.
- dado o sistema de ordem n de tempo contínuo, é possível obter uma representação em tempo discreto que forneça valores exatos em $t = kT$, k=0,1,2,...
- considere a equação de estado de tempo contínuo:

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{5}$$

- a representação de tempo discreto da equação (5) vai assumir a forma:

$$x((k+1)T) = G(T)x(kT) + H(T)u(kT)$$

- para se determinar $G(T)$ e $H(T)$, é preciso recorrer à solução da equação (5):

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \tag{6}$$

- supondo que todos os r componentes do vetor $u(t)$ são constantes no intervalo entre quaisquer dois instantes consecutivos de amostragem, então:

$$u(t) = u(kT) \text{ para todo } t \text{ tal que } kT \le t < (k+1)T$$

e da equação (6) resulta:

$$x((k+1)T) = e^{A(k+1)T}x(0) + e^{A(k+1)T}\int_0^{(k+1)T} e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau \tag{7}$$

$$x(kT) = e^{AkT}x(0) + e^{AkT}\int_0^{kT} e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau \tag{8}$$

- multiplicando-se a equação (8) por e^{AT} e subtraindo da equação (7), obtém-se:

$$x((k+1)T) - e^{AT}x(kT) = e^{A(k+1)T}\int_{kT}^{(k+1)T} e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$$

- como estamos supondo $u(t)$ constante no intervalo entre quaisquer dois instantes consecutivos de amostragem, fazendo uma mudança de variáveis $t = \tau - kT$ resulta:

$$x((k+1)T) = e^{AT} x(kT) + e^{AT}\left[\int_0^T e^{-At} dt\right] Bu(kT)$$

- fazendo mais uma mudança de variáveis $\lambda = T - t$, fica:

$$x((k+1)T) = e^{AT} x(kT) + \left[\int_0^T e^{A\lambda} d\lambda\right] Bu(kT) \tag{9}$$

- definindo:

$$G(T) = e^{AT} \tag{10}$$

$$H(T) = \left[\int_0^T e^{A\lambda} d\lambda\right] B \tag{11}$$

então a equação (9) assume a forma:

$$x((k+1)T) = G(T)x(kT) + H(T)u(kT)$$

que é a representação por espaço de estados para tempo discreto.

- portanto, as equações (10) e (11) fornecem as matrizes $G(T)$ e $H(T)$ desejadas, embora ambas dependam do intervalo de amostragem.

- conclusão: os sistemas $\dot{x} = Ax + Bu$ e $x((k+1)T) = G(T)x(kT) + H(T)u(kT)$, com $G(T)$ e $H(T)$ dados pelas equações (10) e (11), apresentam os mesmos valores para $x(t)$ nos instantes de amostragem.

7 Obtenção da representação por espaço de estados a partir de uma equação ou um sistema de equações a diferenças

- dada a seguinte equação a diferenças:

$$z(k+2) + z(k+1) + 0.7 * z(k) = u(k+1) + 3 * u(k),$$

obtenha a representação por espaço de estados tomando as seguintes variáveis de estado e de saída:

$$\begin{cases} x_1(k) = z(k) \\ x_2(k) = z(k+1) - u(k) \\ y(k) = x_1(k) \end{cases} \quad \text{com} \quad x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

- Solução: deve-se obter A, B e C tal que: $\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases}$

- $x_1(k+1) = z(k+1) = x_2(k) + u(k)$

- $x_2(k+1) = z(k+2) - u(k+1) = -z(k+1) - 0.7 * z(k) + u(k+1) + 3 * u(k) - u(k+1)$

- $x_2(k+1) = -x_1(k+1) - 0.7 * x_1(k) + 3 * u(k) = -x_2(k) - u(k) - 0.7 * x_1(k) + 3 * u(k)$

- $x_2(k+1) = -0.7 * x_1(k) - x_2(k) + 2u(k)$

- $$\begin{cases} \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.7 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \end{cases}$$

  com condição inicial $\begin{cases} x_1(0) = z(0) \\ x_2(0) = z(1) - u(0) \end{cases}$

8 Cálculo da potência de matrizes especiais

- dado $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, calcule A^n para n arbitrário.

- $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2+2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

- $A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4+2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2+2+2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

- $A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6+2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2+2+2+2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

- ...

- $A^n = \begin{bmatrix} 1 & n * 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$