Exercício de Aplicação 4
Estabilidade de malha de controle
SME 301 - Métodos Numéricos para Engenharia I

Monitor João Paulo Casagrande Bertoldo
Prof. Dr. Eduardo Fontoura Costa

1 Introdução

No Exercício de Aplicação 3 (dinâmica de uma barra rígida acoplada a um motor de corrente contínua), utilizamos uma técnica amplamente conhecida para a análise de sistemas lineares: os Espaços de Estados.

Esta técnica consiste em definir uma variável vetorial que nos permite descrever completamente o sistema (posição, velocidade, aceleração, energia, corrente, ...).

Também há uma variável vetorial de entrada do sistema, que é variável que podemos ajustar livremente com o objetivo de controlar todo o resto do sistema (seu nome técnico é "variável de controle").

Em **sistemas mecatrônicos**, colocam-se computadores (analógicos ou digitais) para calcular o comando (*input*) para o sistema físico responda da maneira esperada. Nestes sistemas controlados automaticamente, é comum haver sensores que fornecem ao computador um sinal elétrico que corresponde a uma medida física, que o permite calcular o estado do sistema.

Sabendo como o sistema *está* em um instante do tempo, o computador calcula a entrada do sistema para fazê-lo chegar a um estado desejado (por exemplo, fazer o eixo de um motor chegar a uma posição angular desejada). Isto é o **fechamento de malha** do sistema.

Uma maneira simples e muito utilizada de fechar a malha é utilizando um **controlador proporcional**. Ele calcula um sinal de entrada proporcional ao erro da saída medida pelo sensor em relação à saída desejada. Ou seja, ele calcula uma diferença de sinais e multiplica este resultado por uma constante.

Por exemplo, no caso do posicionamento do braço, a tensão de entrada v seria proporcional à diferença entre posição angular de comando $\theta_{comando}$ e a posição medida θ_{medido}, resultando em: $v = K * (\theta_{comando} - \theta_{medido})$.

Perceba que intuitivamente faz sentido: quanto mais "longe"de $\theta_{comando}$, maior é a tensão que força o sistema a se mover; igualmente, conforme θ_{medido} se aproxima do comando, a tensão de entrada diminui proporcionalmente.

1.1 Estabilidade

Quando um **engenheiro mecatrônico** projeta um sistema de controle, é necessário analisar diversos critérios para atender aos requisitos do sistema, por exemplo: rapidez; limite de vibração; não ultrapassar uma corrente máxima; etc.

Um importante aspecto a ser analisado é a **estabilidade**. Quando se fecha a malha de um sistema (ou seja, criamos um *feedback* da informação de saída para determinar a entrada necessária), o sistema pode tornar-se instável e colapsar. Para evitar este problema, podemos fazer análises de estabilidade usando um modelo do sistema real.

Nesta prática, usaremos uma técnica simples para determinar a estabilidade da malha de controle de posição do motor DC com barra rígida.

1.2 Método

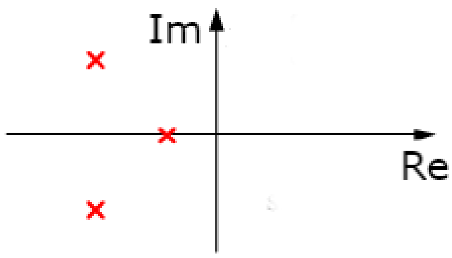
Considere que a equação de espaço de estados:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = F\mathbf{x}(t) + G\boldsymbol{u}(t), \tag{1}$$

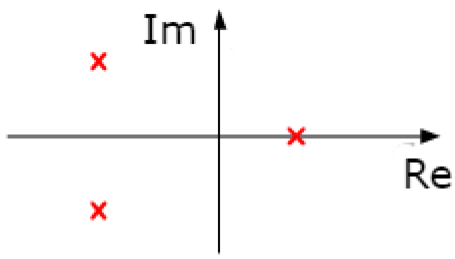
em que $\mathbf{x}$ é a variável de estados e $\boldsymbol{u}$ é a variável de comando do sistema.

Para que a malha seja estável, é [necessário e] suficiente que todos os autovalores da matriz A tenham suas componentes reais negativas - lembrando que eles são complexos. Lembre também que os autovalores de F são idênticos às raízes do polinômio característico da função de transferência (os chamados "pólos"do sistema).

Por exemplo, um sistema com os autovalores/pólos da Figura 1a é estável, mas o da Figura 1b é instável.



(a) Estável



(b) Instável

Figura 1: Exemplo de localização de autovalores/pólos.

Porém, não é preciso conhecer todos os autovalores do sistema para assegurar que ele seja estável. Basta calcular o autovalor com a maior componente real e verificar se este está à esquerda do eixo imaginário (ou seja, parte real negativa).

Para isso, vamos utilizar o Método das Potências, que encontra o autovalor de **maior módulo**. Porém, há um problema: se houver autovalores com componentes imaginárias, não podemos garantir que o autovalor de maior módulo é também o de maior parte real.

Vamos contornar este problema fazendo a seguinte operação:

$$F_{deslocada} = F + k * I, \tag{2}$$

onde k é um escalar e I é a matriz identidade. Esta operação faz com que a matriz $F_{deslocada}$ tenha os mesmos autovalores de F deslocados k unidades no eixo dos reais (veja a Figura 2).

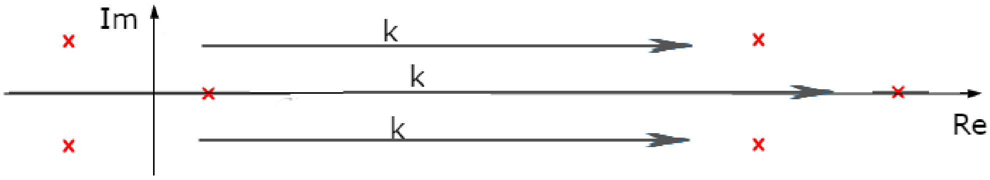


Figura 2: Deslocamento dos autovalores de uma matriz.

Tendo o valor numérico do autovalor de maior módulo da matriz $F_{deslocada}$, basta subtrair k deste autovalor para obter o autovalor de F com maior componente real.

2 Exercício

O sistema considerado será o mesmo do Exercício de Aplicação 3 e considerando um controlador proporcional. Baixe os scripts pré-prontos neste link, abra o arquivo "Estabilidade.m"e execute-o para ver o resultado esperado.

Você deve comentar a linha que faz a chamada do método de referência e descomentar a chamada da função "encontraMaiorAutoValor". Seu código deve ser escrito dentro do arquivo "encontraMaiorAutoValor.m", que é uma função que retorna o autovalor de maior parte real de uma dada matriz M usando o Método das Potências.

A função deve fazer o seguinte:

1. Calcular a matriz deslocada $M_{deslocada}$ da matriz de entrada M;
2. Obter seu autovalor de maior módulo usando o Método das Potências;
3. Calcular o autovalor correspondente da matriz M;

Obs: o deslocamento deve ser um número grande - uma ou duas ordens de grandeza maior do que o determinante de M deve ser suficiente.

Envie seu arquivo de código para **joao.bertoldo@usp.br** com cópia para **efcosta@icmc.usp.br** com o assunto "Exercício Adicional 4 - xx", onde "xx"é o seu nome.

Boa sorte!