Sistemas Dinâmicos e o Conceito de Estado

- Definições genéricas de sistema:

1. disposição das partes ou dos elementos de um todo, coordenados entre si, e que funcionam como estrutura organizada.
2. parte limitada do Universo, sujeita à observação imediata ou mediata, e que, em geral, pode caracterizar-se por um conjunto finito de variáveis associadas a grandezas físicas que a identificam univocamente.
3. coleção de objetos unidos por algum tipo de interação ou interdependência. Cada objeto apresenta um conjunto de atributos relevantes que o descreve.

- encontrar a descrição matemática de um sistema equivale a determinar um conjunto de relações matemáticas entre os atributos dos objetos que compõem o sistema, a partir do conhecimento das relações entre estes objetos e entre os atributos de um mesmo objeto.

- Definições genéricas de estado:

1. conjunto de valores das grandezas físicas de um sistema, necessário e suficiente para caracterizar univocamente a situação física deste sistema. Não é necessário que seja o menor conjunto possível.
2. em uma abordagem de entrada-saída, pode-se afirmar que o estado é uma parametrização dos pares de entrada-saída (esta definição vai ficar clara mais adiante).

1 Formulação matemática de sistemas dinâmicos

- é possível associar um sistema dinâmico a uma entidade matemática precisa;
- idéias intuitivas acerca de sistemas dinâmicos físicos:
  - processa matéria, energia e/ou informação;
  - a dinâmica pode ser de tempo contínuo ou discreto;

- a sua evolução no tempo é causal ou não-antecipativa, ou seja, o passado influencia o futuro, mas o contrário não é verdadeiro.

- Notação:
  - sistema dinâmico: Σ
  - variável temporal: $t \in T$ (T geralmente é o $\Re^{+}_{\{0\}}$ ou o $Z^{+}_{\{0\}}$)
  - função de entrada: u: $T \rightarrow U$ (U geralmente é o $\Re^{m}$)
  - função de saída: y: $T \rightarrow Y$ (Y geralmente é o $\Re^{r}$)
  - função de estado: x: $T \rightarrow X$ (X geralmente é o $\Re^{n}$)

Nota: $\Re^{+}_{\{0\}}$ ($Z^{+}_{\{0\}}$) é o conjunto dos números reais (inteiros) não-negativos.

- hipótese: A cada instante de tempo $t \in T$, o sistema dinâmico Σ recebe alguma entrada $u(t) \in U$ e emite alguma saída $y(t) \in Y$.

- no entanto, $y(t)$ não depende apenas da entrada instantânea $u(t)$. A resposta de saída de Σ, para um dado $t \in T$, depende *também* da história passada de Σ.

- passa a ser necessário, então, operar com entidades definidas em um intervalo de tempo, já que o tratamento apenas de valores instantâneos não será suficiente para os propósitos em questão, ao menos em relação à entrada do sistema. Sendo assim, definimos $\Omega(t_i,t_f)$ como a classe de funções de entrada, que assumem valores instantâneos em U e estão definidas no intervalo $[t_i,t_f]$, com $0 \le t_i \le t_f$. Neste caso, todo elemento u do conjunto $\Omega(t_i,t_f)$ é tal que $u:[t_i,t_f] \rightarrow U$ e $u \in \Omega(t_i,t_f)$. A escolha das propriedades que uma função deve apresentar para ser um elemento do conjunto $\Omega(t_i,t_f)$ pode se dar por considerações físicas ou puramente matemáticas.

1.1 Definição de estado

- o estado $x(t) \in X$ de um sistema dinâmico Σ é um atributo interno de Σ, no instante de tempo $t \in T$, que descreve completamente a parte da história passada de Σ que é relevante na determinação da saída $y(t) \in Y$ para uma dada entrada $u \in \Omega(0,t)$.
- portanto, este atributo interno denominado estado deve ser capaz de armazenar toda a informação a respeito da história passada de Σ que pode afetar o presente e o futuro de Σ. Com isso, se $x(t_i)$ é o estado do sistema dinâmico no instante $t_i < t_f$, então o conhecimento de $u \in \Omega(t_i,t_f)$ deve ser necessário e suficiente para determinar $x(t_f)$.
- se esta informação puder ser expressa na forma de um conjunto de variáveis, então estas variáveis são denominadas *variáveis de estado* e o estado de um sistema dinâmico pode ser definido como o menor conjunto de variáveis tal

que o conhecimento destas variáveis em $t = t_i$, juntamente com o conhecimento da entrada do sistema para $t_f \geq t_i$, determina completamente o comportamento do sistema para qualquer $t_f \geq t_i$.

- Nota 1: o conceito de estado não é limitado a sistemas físicos.
- Nota 2: as variáveis de estado não precisam ser fisicamente mensuráveis ou observáveis.
- Nota 3: todo estado do sistema pode ser representado por um ponto no espaço de estados, sendo que cada coordenada representa uma variável de estado.
- Nota 4: a evolução do estado de um sistema dinâmico ao longo do tempo é denominada trajetória (ou fluxo, ou órbita) no espaço de estados, sendo determinada pela função de transição de estado.

1.2 Função de transição de estado

- Definição: Dados $t_i \leq t_f$, o estado $x(t_i)$ e a entrada $u \in \Omega(t_i,t_f)$, então a função $\phi: T \times T \times \Omega \times X \rightarrow X$ fornece o valor do estado $x(t_f)$ na forma: $x(t_f) = \phi(t_i, t_f, u, x(t_i))$, sendo denominada função de transição de estado.
- esta função apresenta as seguintes propriedades:

(a) Não-reversibilidade: $\phi(t_i, t_f, u, x(t_i))$ é definida para todo $t_i \leq t_f$, mas não necessariamente para todo $t_i > t_f$.

(b) Consistência: $\phi(t, t, u, x(t)) = x(t)$ para todo $t \in T$, $u \in \Omega(t,t)$ (que é equivalente a $u(t) \in U$) e $x(t) \in X$.

(c) Composição: Para todo $t_1 < t_2 < t_3$ tem-se que

$$\phi(t_1, t_3, u, x(t_1)) = \phi(t_2, t_3, u, \phi(t_1, t_2, u, x(t_1)))$$

1.3 Classes especiais de sistemas dinâmicos

- a formalização de sistemas dinâmicos apresentada até agora é demasiadamente genérica. Ela é necessária para criar uma terminologia geral, a partir da qual se possa analisar e refinar conceitos e também perceber aspectos universais em uma diversidade de aplicações. No entanto, esta formalização não é suficiente para conduzir à elaboração de um ferramental matemático de uso prático.
- para obter mais subsídios, é necessário mais especificações e a imposição de estrutura adicional, levando ao que denominaremos aqui de *classes especiais de sistemas dinâmicos*.
- a seguir, serão apresentadas as mais importantes propriedades especiais de sistemas dinâmicos que definem estas classes.

1.3.1 Sistemas invariantes no tempo

- Definição: Um sistema dinâmico Σ é invariante no tempo se e somente se, para todo $s \in \Re$, $s \geq -t_i$:
  (a) $\phi(t_i, t_f, u, x(t_i)) = \phi(t_i + s, t_f + s, z^s u, x(t_i))$, onde z^s é um operador descolamento tal que, se $u \in \Omega(t_i,t_f)$ então $z^s u \in \Omega(t_i+s,t_f+s)$;
  (b) o mapeamento do estado para a saída $\eta(\cdot, x) : X \rightarrow Y$ é independente do instante de tempo t.

- Nota: Funções do argumento suprimido:
  $\eta(t, x) : T \times X \rightarrow Y$
  $\eta(t,\cdot) : T \rightarrow Y$
  $\eta(\cdot, x) : X \rightarrow Y$

1.3.2 Sistemas de tempo contínuo e tempo discreto

- Definição: Um sistema dinâmico Σ é de tempo contínuo se e somente se a variável temporal t assume valores contínuos, ou seja, $t \in T \equiv \Re^+_{\{0\}}$.
- Definição: Um sistema dinâmico Σ é de tempo discreto se e somente se a variável temporal t assume valores discretos, ou seja, $t \in T \equiv Z^+_{\{0\}}$.
- sistemas de tempo contínuo correspondem, por exemplo, aos modelos da física clássica, enquanto que sistemas de tempo discreto surgem, por exemplo, sempre que computadores digitais fazem parte do sistema.
- em algumas aplicações, a distinção entre sistemas contínuos e discretos não é crítica, e a escolha se dá por conveniência.
- tratamento para sistemas contínuos: equações diferenciais, cálculo variacional.
- tratamento para sistemas discretos: equações a diferenças, álgebra.

1.3.3 Sistemas de dimensão finita e infinita

- Definição: Um sistema dinâmico Σ é de dimensão finita se e somente se o espaço de estados X é um espaço linear de dimensão n finita.
- Definição: Um sistema dinâmico Σ é de dimensão infinita se e somente se o espaço de estados X é um espaço linear de dimensão n infinita.
- a hipótese de finitude da dimensão do espaço de estados é essencial caso se queira tratar o sistema via processamento numérico. O tratamento via análise funcional já não depende tão fortemente desta hipótese.
- sistemas distribuídos são de dimensão infinita, e só podem ser tratados por aproximações que conduzam à finitude do espaço de estados. Exemplo: fluido turbulento.

1.3.4 Sistemas de estado contínuo e discreto

- Definição: Um sistema dinâmico Σ é de estado contínuo se e somente se o espaço de estados X é contínuo.
- Definição: Um sistema dinâmico Σ é de estado discreto se e somente se o espaço de estados X é discreto.

		espaço de estados	
		contínuo	discreto
dinâmica	contínua	sistema de equações diferenciais	vidros de spin
	discreta	sistema de equações a diferenças	autômato

1.3.5 Sistemas lineares e não-lineares

- Definição: Um sistema dinâmico Σ é linear se e somente se:

  (a) X, U, Ω e Y são espaços vetoriais sobre um dado campo arbitrário K;

  (b) o mapeamento $\phi(\cdot,\cdot,u,x(t_i)):\Omega\times X \to X$ é K-linear para todo t_i e t_f;

  (c) o mapeamento $\eta(\cdot,x):X \to Y$ é K-linear para todo t.

- Definição: Um sistema dinâmico Σ é não-linear se e somente se ele atende à definição de sistema dinâmico, mas não atende à definição de sistema dinâmico linear.

- em que a teoria de sistemas lineares pode ajudar no estudo da teoria de sistemas não-lineares?

1) devido ao grande desenvolvimento das ferramentas lineares de análise e síntese, o que já não ocorre no caso não-linear, o estudo de sistemas dinâmicos lineares permite obter uma familiaridade expressiva com boa parte dos conceitos associados a sistemas dinâmicos em geral.

2) a teoria de sistemas lineares é necessária para o estudo do comportamento local de sistemas não-lineares. Portanto, mesmo que as ferramentas inerentemente não-lineares se desenvolvam, esta motivação para estudar sistemas com dinâmica linear sempre vai existir.

1.3.6 Sistemas contínuos

- para poder recorrer a poderosas e sofisticadas ferramentas de análise, por exemplo, aquelas provenientes do cálculo diferencial e integral, a definição de sistema dinâmico deve incluir algum tipo de continuidade. Assim sendo, os espaços T, X, U, Ω e Y devem ser espaços topológicos e os mapeamentos ϕ e η devem ser contínuos em relação às topologias apropriadas.
- Definição: Um sistema dinâmico Σ é contínuo se e somente se:

  (a) $T \in \Re$;

  (b) X e Ω são espaços topológicos;

  (c) o mapeamento de transição $\phi(t_i, \cdot, u, x(t_i)) : T \to X$ é contínuo, segundo uma definição de continuidade vinculada à topologia dos espaços envolvidos.

- sistemas dinâmicos contínuos, conforme definidos acima e possivelmente impondo-se mais algumas restrições adicionais, podem ser descritos por sistemas de equações diferenciais.

1.3.7 Sistemas autônomos

- Definição: Um sistema dinâmico Σ é autônomo se e somente se:

$$\phi(t_i, t_f, u, x(t_i)) = \phi(t_f - t_i, x(t_i)).$$

  para todo $u \in \Omega(t_i,t_f)$, $x(t_i) \in X$, $t_i,t_f \in T$, $t_i \leq t_f$.
- repare que um sistema autônomo não possui entrada externa e é invariante no tempo.
- como será enfatizado no próximo tópico do curso, estas duas propriedades apresentadas por um sistema autônomo permitem que se estudo o seu comportamento de estado estacionário, ou seja, para $t \to \infty$.

2 Formulação por espaço de estados – caso linear

- equação dinâmica linear, de tempo contínuo e variante no tempo ($x \in \Re^n$, $u \in \Re^m$, $y \in \Re^r$)

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{cases}$$

- <u>solução no tempo</u>: $y(t) = C(t)\phi(t,t_0)x_0 + C(t)\int_{t_0}^{t} \phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau + D(t)u(t)$

  onde, por definição, $\phi(t,t_0) = \psi(t)\psi^{-1}(t_0)$ é a matriz $n \times n$ de transição de estados, e $\psi(\cdot)$ é denominada matriz fundamental, formada por colunas LI que são solução da equação homogênea $\dot{x} = A(t)x$.

- caso invariante no tempo:

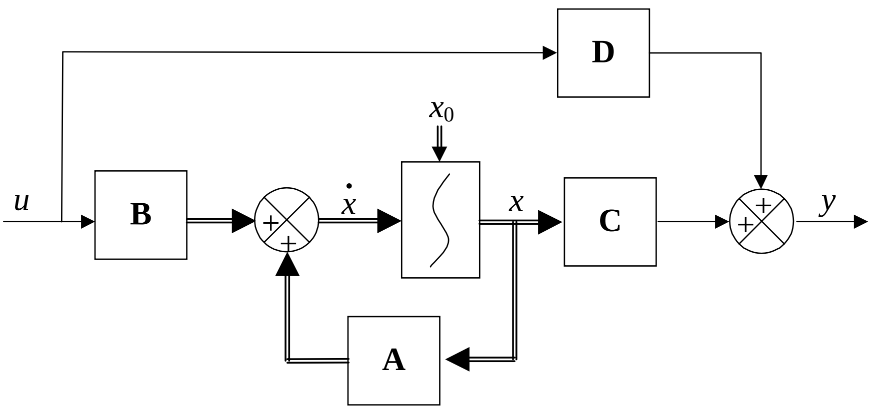
$$\begin{cases} \dot{x} = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

- <u>solução no tempo</u> (assumindo t_0=0 e com $e^{At} = L^{-1}\left[(sI - A)^{-1}\right]$):

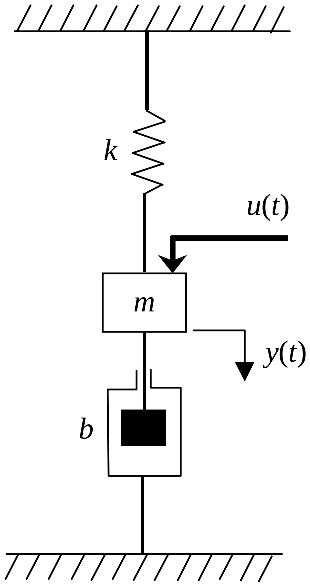
$$y(t) = Ce^{At}x_0 + Ce^{At}\int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau + Du(t)$$

- com $x_0 = 0$, $m = r = 1$ e para o caso invariante no tempo, é possível ainda aplicar a transformada de Laplace e obter a função de transferência na forma:

$$\frac{Y(S)}{U(s)} = G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \qquad \underline{\text{pólos}}:\ \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$$



Exemplo: Dado o sistema massa-mola-amortecedor, obtenha sua representação por espaço de estados, considerando como variáveis de estado $x_1(t) = y(t)$ e $x_2(t) = \dot{y}(t)$.



- A equação diferencial que descreve a dinâmica do sistema é dada na forma:

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = u$$

- Utilizando as variáveis de estado, resulta:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \dfrac{1}{m}(-ky - b\dot{y}) + \dfrac{1}{m}u = -\dfrac{k}{m}x_1 - \dfrac{b}{m}x_2 + \dfrac{1}{m}u \\ y = x_1 \end{cases}$$

- Na forma matricial:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -b/m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

- o número de variáveis de estado que definem completamente a dinâmica do sistema é igual ao número de integradores presentes no sistema. Como os integradores representam elementos de memória, as saídas dos integradores podem ser consideradas como as variáveis que definem o estado interno da dinâmica do sistema.
- a representação por espaço de estados não é única para um dado sistema. Através de transformações de similaridade é possível obter representações por espaço de estados que apresentem a mesma função de transferência de entrada-saída. Por exemplo, dada uma matriz **P** inversível, os sistemas dinâmicos a seguir são equivalentes, onde $\bar{x} = \mathbf{P}x$, $\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{PAP}^{-1}$, $\overline{\mathbf{B}} = \mathbf{PB}$, $\overline{\mathbf{C}} = \mathbf{CP}^{-1}$ e $\overline{\mathbf{D}} = \mathbf{D}$.

$$\begin{cases} \dot{x} = \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t) \\ y(t) = \mathbf{C}x(t) + \mathbf{D}u(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{\bar{x}} = \overline{\mathbf{A}}\bar{x}(t) + \overline{\mathbf{B}}u(t) \\ y(t) = \overline{\mathbf{C}}\bar{x}(t) + \overline{\mathbf{D}}u(t) \end{cases}$$

3 Controlabilidade de um Sistema Dinâmico

- Definição: O sistema dinâmico a seguir:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

é controlável no instante t_0 se existir um $t_1 > t_0$ (t_1 finito) tal que, para qualquer $x(t_0)$ e qualquer x_1, é possível definir um perfil de entrada $u_{[t_0,t_1]}$ que leve $x(t_0)$ para x_1 em $t = t_1$.

- como uma forma alternativa de medir controlabilidade, temos: o sistema dinâmico $\begin{cases} \dot{x} = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$ é controlável se a matriz de controlabilidade

$$\mathbf{M}_{cont} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \cdots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}$$

de dimensão ($n \times np$) tem posto completo: $posto(\mathbf{M}_{cont}) = n$.

4 Controle por Realimentação de Estado

1. Introdução

- existem três técnicas básicas de projeto de sistemas de controle por realimentação:

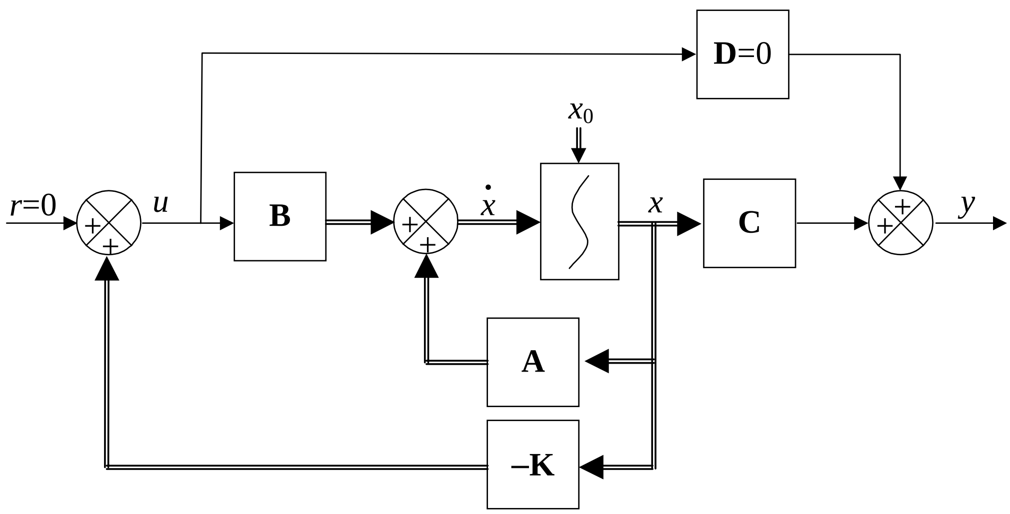
1. lugar das raízes;
2. resposta em freqüência;
3. realimentação de estados.

- embora haja muitos pontos de equivalência entre as três técnicas de projeto, o emprego de modelos por realimentação de estados tem ampliado seu campo de aplicação em virtude da possibilidade de tratar sistemas no domínio do tempo, além de permitir que o sistema seja, *em algum grau restrito*, não-linear, variante no tempo e MIMO.
- controle: moderno $\times$ clássico (por espaço de estados $\times$ por transformada)

- apresentação em 5 etapas:

1. projeto do controlador como se todos os estados estivessem disponíveis para uso na implementação da lei de controle (realimentação de ordem completa);
2. introdução do conceito de observador de ordem completa, que fornece estimativas dos estados a partir das variáveis de saída monitoradas;
3. utilização do observador do item (2) na implementação do controlador do item (1), com as estimativas empregadas no lugar dos estados;
4. introdução do conceito de observadores de ordem reduzida;
5. introdução de comandos externos de referência.

Etapa 1 – Visão Geral



- objetivo da lei de controle: determinar o posicionamento de pólos do sistema em malha fechada que permita atender (da melhor forma possível) um elenco de requisitos de resposta transitória.

- adotando uma lei de controle na forma:

$$u = -\mathbf{K}x = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & \cdots & K_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

  a determinação dos n elementos de **K** vai se dar de modo a alocar arbitrariamente os n pólos do sistema em malha fechada, caso o sistema dinâmico seja controlável.

- aqui existe um forte contraste em relação ao projeto no domínio da freqüência, pois lá existe apenas um parâmetro livre e o posicionamento dos pólos está vinculado aos vários ramos do gráfico do lugar das raízes.
- com a realimentação de estado (tendo $r = 0$ e $\mathbf{D} = 0$), o sistema dinâmico em malha fechada pode ser descrito na forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u = \mathbf{A}x + \mathbf{B}(-\mathbf{K}x) = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})x \\ y = \mathbf{C}x \end{cases}$$

- sendo assim, sua equação característica é dada por:

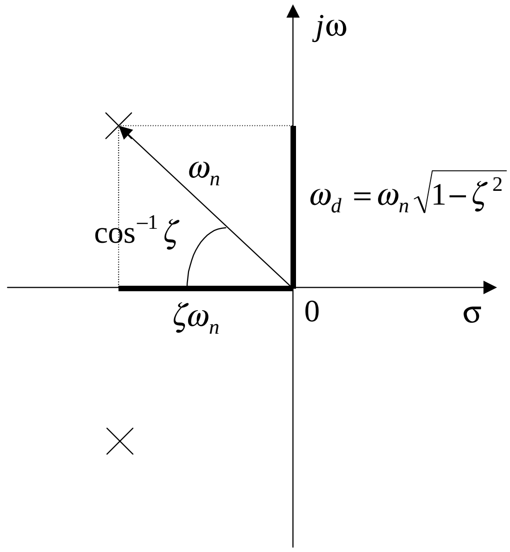
$$\det[s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{BK})] = 0$$

- assumindo que *a posição desejada dos pólos é conhecida*, então:

$$(s - s_1)(s - s_2)\cdots(s - s_n) = \det[s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{BK})]$$

- assim, os elementos de **K** são obtidos por simples casamento de coeficientes.
- no entanto, com o uso da forma canônica controlável, o cálculo dos elementos de **K** pode ser obtido diretamente. Obviamente, o sistema só pode ser transformado em sua forma canônica controlável se ele for controlável.
- a realimentação de estado não deve ser aplicada a sistemas não-controláveis ou fracamente controláveis, pois isto implica a obtenção de valores para os elementos de **K** não-realizáveis na prática.

Exemplo usando um sistema de 2ª ordem:



- dado um oscilador não-amortecido, com freqüência natural $\omega_n = \omega_0$, determine o ganho de realimentação de estado de modo a conduzir o sistema ao amortecimento crítico, com os dois pólos em $-2\omega_0 + j0$.

- descrição por espaço de estado do sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

- polinômio característico desejado:

$$(s + 2\omega_0)^2 = s^2 + 4\omega_0 s + 4\omega_0^2$$

- polinômio característico obtido com realimentação de estado:

$$\det[s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{BK})] = \det\left\{ \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [K_1 \quad K_2] \right) \right\} = s^2 + K_2 s + \left(\omega_0^2 + K_1\right)$$

- casamento de coeficientes: $\begin{cases} K_2 = 4\omega_0 \\ \omega_0^2 + K_1 = 4\omega_0^2 \end{cases}$

- logo, o ganho de realimentação de estado assume a forma:

$$\mathbf{K} = [K_1 \quad K_2] = \left[3\omega_0^2 \quad 4\omega_0\right]$$

Bibliografia consultada

FRANKLIN, G.F., POWELL, J.D. & EMANI-NAEINI, A. "Feedback Control of Dynamic Systems", 3rd. edition, Addison-Wesley Publishing Company, 1994.

KALMAN, R.E., FALB, P.L. & ARBIB, M.A. "Topics in Mathematical System Theory", McGraw-Hill, 1969.

KUO, B.C. "Automatic Control Systems", 7th. edition, Prentice Hall, 1995.

OGATA, K. "Modern Control Engineering", 3rd. edition, Prentice Hall, 1997.