Introdução à Econofísica

Aula 11

Estacionalidade e correlação temporal em processos estocásticos

Consideremos, agora, processos estocásticos estacionários. Seja S_n a variável estocástica obtida pela soma de n variáveis estocásticas,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k,$$

onde estamos indicando os instantes de tempo considerados através do índice da variável:

$$x(t_k) = x_k.$$

Então, podemos escrever:

$$\begin{aligned} E\left(S_n^2\right) &= E\left(\sum_{k=1}^{n} x_k \sum_{l=1}^{n} x_l\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} E(x_k x_l) \\ &= \sum_{k=1}^{n} E\left(x_k^2\right) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} (1-\delta_{kl}) E(x_k x_l). \end{aligned}$$

Como estamos supondo que o processo em consideração é estacionário, então, de acordo com a aula passada,

$$E\left(x_k^2\right) = R(0)$$

e

$$E(x_k x_l) = R(t_l - t_k).$$

Como

$$E(x_k x_l) = E(x_l x_k),$$

segue que

$$R(t_l - t_k) = R(t_k - t_l).$$

Também suponhamos que os tempos são separados por um intervalo fixo:

$$t_{k+1} - t_k = \Delta t.$$

Assim,

$$t_k - t_l \;=\; (k-l)\,\Delta t.$$

Podemos, portanto, escrever:

$$\begin{aligned}
E\left(S_n^2\right) &= nR(0) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}(1-\delta_{kl})\,R\left[(k-l)\,\Delta t\right] \\
&= nR(0) + 2\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=k+1}^{n} R\left[(l-k)\,\Delta t\right] \\
&= nR(0) + 2\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{s=1}^{n-k} R\left[s\Delta t\right] \\
&= nR(0) + 2\left\{\sum_{s=1}^{n-1} R\left[s\Delta t\right] + \sum_{s=1}^{n-2} R\left[s\Delta t\right] + \cdots + \sum_{s=1}^{2} R\left[s\Delta t\right] + \sum_{s=1}^{1} R\left[s\Delta t\right]\right\} \\
&= nR(0) + 2\left\{R\left[(n-1)\,\Delta t\right] + 2R\left[(n-2)\,\Delta t\right] + \cdots\right. \\
&+ \left.(n-2)\,R\left[2\Delta t\right] + (n-1)\,R\left[\Delta t\right]\right\} \\
&= nR(0) + 2\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\,R\left[k\Delta t\right] \\
&= nR(0) + 2\sum_{k=1}^{n}(n-k)\,R\left[k\Delta t\right].
\end{aligned}$$

Para colocarmos essa igualdade na forma do livro-texto, usamos:

$$R(0) \;=\; E\left(x_i^2\right),\ \text{para qualquer } i \in \{1,2,\ldots,n\},$$

e

$$R\left[k\Delta t\right] \;=\; E\left(x_i x_{i+k}\right),\ \text{para qualquer } i \in \{1,2,\ldots,n\}.$$

Assim,

$$E\left(S_n^2\right) \;=\; nE\left(x_i^2\right) + 2\sum_{k=1}^{n}(n-k)\,E\left(x_i x_{i+k}\right).$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(n-k)\,E\left(x_i x_{i+k}\right) &= (n-1)\,E\left(x_i x_{i+1}\right) + (n-2)\,E\left(x_i x_{i+2}\right) \\
&+ \cdots + 2E\left(x_i x_{i+n-2}\right) + E\left(x_i x_{i+n-1}\right) \\
&= n\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)E\left(x_i x_{i+1}\right) + \left(1-\frac{2}{n}\right)E\left(x_i x_{i+2}\right)\right. \\
&+ \left.\cdots + \frac{2}{n}E\left(x_i x_{i+n-2}\right) + \frac{1}{n}E\left(x_i x_{i+n-1}\right)\right].
\end{aligned}$$

No limite em que n é muito grande, temos, aproximadamente,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(n-k)\,E\left(x_i x_{i+k}\right) &\approx n\left[(1-0)\,E\left(x_i x_{i+1}\right)+(1-0)\,E\left(x_i x_{i+2}\right)\right.\\ &+ \left.\cdots+0E\left(x_i x_{i+n-2}\right)+0E\left(x_i x_{i+n-1}\right)\right]\\ &\approx n\sum_{k=1}^{n}E\left(x_i x_{i+k}\right).\end{aligned}$$

Quando

$$\lim_{n\to\infty}\left|\sum_{k=1}^{n}E\left(x_i x_{i+k}\right)\right| < \infty,$$

isto é, o limite dessa soma é finito, dizemos que as variáveis estocásticas têm correlação de curto alcance. Já quando

$$\lim_{n\to\infty}\left|\sum_{k=1}^{n}E\left(x_i x_{i+k}\right)\right| = \infty,$$

dizemos que as variáveis estocásticas têm correlação de longo alcance.

No caso contínuo, ao invés de verificarmos a finitude da soma acima, utilizamos a integral temporal da autocorrelação:

$$\sum_{k=1}^{n}E\left(x_i x_{i+k}\right) \to \int_0^{\infty}d\tau\,R\left(\tau\right),$$

quando

$$n \to \infty.$$

No caso de uma partícula em movimento browniano, a autocorrelação é dada por

$$R\left(\tau\right) = \sigma^2\exp\left(-\frac{|\tau|}{\tau_c}\right).$$

A distribuição de frequências dessa função de autocorrelação é obtida pela sua transformada de Fourier:

$$\begin{aligned}S\left(\omega\right) &= \int_{-\infty}^{+\infty}d\tau\,R\left(\tau\right)\exp\left(-i\omega\tau\right)\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}d\tau\,\sigma^2\exp\left(-\frac{|\tau|}{\tau_c}\right)\exp\left(-i\omega\tau\right)\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}d\tau\,\sigma^2\exp\left(-\frac{|\tau|}{\tau_c}-i\omega\tau\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{+\infty} d\tau\, \sigma^2 \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_c} - i\omega\tau\right) + \int_{-\infty}^{0} d\tau\, \sigma^2 \exp\left(\frac{\tau}{\tau_c} - i\omega\tau\right) \\
&= \frac{\sigma^2}{\frac{1}{\tau_c} + i\omega} + \frac{\sigma^2}{\frac{1}{\tau_c} - i\omega} \\
&= \frac{\sigma^2\left(\frac{1}{\tau_c} - i\omega + \frac{1}{\tau_c} + i\omega\right)}{\left(\frac{1}{\tau_c} + i\omega\right)\left(\frac{1}{\tau_c} - i\omega\right)} \\
&= \frac{\sigma^2\left(\frac{2}{\tau_c}\right)}{\left(\frac{1}{\tau_c}\right)^2 + \omega^2} \\
&= \frac{2\sigma^2\tau_c}{1 + (\omega\tau_c)^2}.
\end{aligned}
$$

Para baixas frequências, temos o que se chama ruído branco. Para frequências altas, temos o processo de Wiener, caracterizado por uma densidade espectral que varia com o inverso do quadrado da frequência. O caso acima ilustra correlação de curto alcance.

No caso de correlação de longo alcance, podemos escrever

$$S(\omega) \sim \frac{1}{|\omega|^\eta},$$

com

$$0 < \eta < 2.$$

Nesse caso, a integral da função de autocorrelação diverge. Um caso típico de correlação de longo alcance, encontrada muitas vezes em circuitos eletrônicos, é o do ruído 1/f; no caso acima, esse caso ocorre para

$$\eta = 1.$$

No caso de escalas de tempo maiores do que o tempo de correlação τ_c, para processos com correlação de curto alcance, as densidades de probabilidades condicionais são dadas por:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}; t_1, t_2, \ldots, t_{n-1} | x_n; t_n) = f(x_{n-1}; t_{n-1} | x_n; t_n).$$

Esse tipo de processo é chamado de markoviano; bastam as densidades de probabilidade de primeira ordem e condicional de segunda ordem para ser completamente determinado. Como exemplo, temos:

$$f(x_1, x_2, x_3; t_1, t_2, t_3) = f(x_1; t_1)\, f(x_1; t_1 | x_2; t_2)\ \ f(x_2; t_2 | x_3; t_3).$$