Leis de uma Álgebra:

Uma lei interna T associa dois elementos x e y de um conjunto A à um terceiro elemento $z \quad A$. Por exemplo: $x \quad y \quad z$ onde a lei interna é a adição , ou $xy \quad z$, onde a lei interna é a multiplicação . Na nossa notação se afirma que $xTy \quad z \qquad x \quad y \quad z$ ou $xTy \quad z \qquad xy \quad z$.

A lei será associativa se: $xTy\;Tz \quad xT\;yTz$ e será comutativa se $xTy \quad yTx$. O elemento $a \quad A$ será REGULAR se $xTa \quad yTa \qquad x \quad y$ e $aTx \quad aTy \qquad x \quad y$. O elemento $e \quad A$ será unitário sobre a lei T se $xTe \quad eTx \quad x$. O elemento $x \quad A$ possui elemento inverso x sobre a lei T se $x \quad A / xTx \quad xTx \quad e$.

Teorema: se uma lei T possui elemento unitário, é associativa e $x \quad A$ possui inversa, então a inversa é única e x é regular.

Provar por absurdo: supor que $x \quad x$ inversos de x. Nesse caso:

$xTx \quad e$ e $xTx \quad e$ além disso $x\;T\;xTx \quad x\;Te \quad x$. Agora, como T é associativo então $x\;T\;xTx \quad x\;Tx\;Tx \quad eTx \quad x$ o que implica que $x \quad x$ em contradição com $x \quad x$. Logo a inversa é única. Falta a regularidade:

Seja $a \quad xTy$ e $b \quad xTz$. Queremos mostrar que se $a \quad b$ então $y \quad z$. Aplicando a inversa de x de ambos os lados temos que $x\;T\;xTy \quad x\;T\;xTz$ e usando a associatividade $x\;Tx\;Ty \quad x\;Tx\;Tz$ logo $eTy \quad eTz$ e, finalmente $y \quad z$ C.Q.D.

Álgebra com duas Leis. Vamos chamar a lei T de lei 1 e uma outra lei 2 de . A lei será distributiva frente à lei T se $xTy \quad z \quad x \quad zTy \quad z$ ou $z \quad xTy \quad z \quad x\;T\;z \quad y$ para $x,y,z \quad A$. Exemplo: mostrar que a multiplicação é distributiva frente à adição mas o inverso não é verdade. $x \quad y\;z \quad xz \quad yz$ logo a mulitplicação é distributiva. Entretanto $xy \quad z \quad x \quad z \quad y \quad z$.

GRUPO. Um conjunto G é um grupo se uma lei interna T com as seguintes propriedades:

1. T é associativa
2. T admite elemento unitário e

3. x G admite inversa x G

Se, além da propriedade associativa, T for comutativa, o grupo é chamado de Abeliano.

CAMPOS. Seja G um grupo Abeliano de T com uma segunda lei associativa e distributiva frente à T. Seja e o elemento unitário de G e G^* o conjunto de todos os elementos de G exceto e. Se é uma lei de grupo para G^* então G é um campo.

Exemplo: vamos considerar as leis e para o conjunto dos números reais.

Primeira lei :

x y z x y z associativa

x y y x comutativa

x e e x x então e 0 é o elemento unitário da adição.

Inversa x x e e x é a inversa de x. Note que se o conjunto fosse o dos naturais não haveria inversa pois ele não inclui números negativos. Então G e G^* x $/x$ 0. Agora vamos analisar o comportamento da multiplicação frente ao G^*.

xy z x yz associativa

xy yx comutativa

x y z xz yz distributiva frente à adição

xe e x x então e 1 é o elemento unitário da multiplicação. Logo a inversa será dada por xx 1, ou seja, x $\frac{1}{x}$. Note que sem a exclusão do zero teríamos problema com a inversa do elemento unitário da adição pois 0 $\frac{1}{0}$. Então é um CAMPO frente à adição e multiplicação. Note a necessidade de ampliar os conjuntos para a obtenção de grupos e campos. Partindo dos naturais e da operação foi necessário incluir os números negativos para a existência da inversa, chegando ao conjunto . Já para a operação multiplicação foi-se obrigado a inlcuir o conjunto dos racionais para admitir inversas x $\frac{1}{x}$. Além disso, para admitir operações como $x x \quad y$ com $x \quad G$ e $y \quad G$ percebe-se a necessidade de inclusão dos irracionais e dos imaginários, caso $y \quad 0$.

Teoria dos Conjuntos.

Um conjunto é uma coleção de elementos distinguíveis, i.e., cada elemento só aparece uma vez no conjunto. É preciso ficar bem claro que elementos pertencem ou não pertencem ao conjunto[1]. Geralmente isso é feito através de propriedades partilhadas por todos os elementos do conjunto. Exemplo:

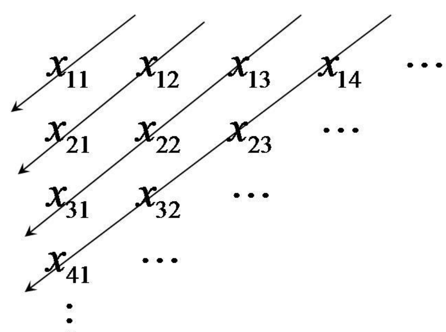
Seja A o conjunto de todos os elementos que possuem a propriedade P, então a sentença

$x \quad A$ x possui a propriedade P.

x x é inteiro positivo ou zero.

O conjunto vazio não possui qualquer elemento. Um conjunto finito tem um número finito de elementos, e um conjunto infinito possui um número infinito de elementos. Dois conjuntos A e B possuem a mesma potênica se for possível estabelecer uma relação biunívoca entre seus elementos, ou seja, a cada elemento de A pode-se associar um, e só um, elemento de B. O conjunto pode ser enumerável [countable] ou não enumerável. Se for enumerável o conjunto tem uma associação biunívoca com o conjnto dos núemros naturais. Um conjunto infinito pode ser enumerável, como o dos números naturais. Todo conjunto finito é enumerável pois podemos ordenar seus elementos e associá-los a 1, 2, 3, etc.

Os elementos de um conjunto de conjuntos enumeráveis formam um conjunto enumerável. Pense em uma matriz



Podemos enumerá-los pela seqüência triangular, e dentro da diagonal pelo primeiro índice, como mostra a tabela xx abaixo:

x_{11}	x_{12}	x_{21}	x_{13}	x_{22}	x_{31}	x_{14}	x_{23}	x_{32}	x_{41}
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**

[1] Se a fronteira entre o que pertence e o que não pertence ao conjunto é NEBULOSA, não claramente definida, aceita uma gradação, o con junto é nebuloso, ou FUZZY. Existe toda uma lógica, chamada FUZZY LOGIC, para lidar com esses caso hoje.

Assim fizemos a correspondência com . Conseqüência dessa fato é que o conjunto dos núemeros racionais é enumerável, pois $x \quad \frac{n}{m}$ contém dois índices, o n e o m, logo pode ser enumerado usando a mesma regra acima.

Entretanto, o conjunto de todos os números em um intervalo não é enumerável. Basta trabalhar com o intervalo $0,1$. A pergunta é: o conjunto de todos os números no intervalo $0,1$ é enumerável? Vamos provar que não por absurdo.

Suponha que seja. Então temos $x_1 \quad x_2 \quad x_3$ e podemos ordená-los em ordem crescente:

$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad\quad 1$ uma vez que dois números não podem ser iguais. Neste caso $\bar{x} \quad \frac{x_i \quad x_{i\ 1}}{2}$ é tal que $x_i \quad \bar{x} \quad x_{i\ 1}$ e $\bar{x}$ não pertence ao conjunto dado. Logo o conjunto não incluiu todos os números entre 0 e 1. Note então que existem números racionais entre 0 e 1 e que também existem números irracionais entre 0 e 1. Só que o conjunto dos irracionais não é enumerável, e dos racionais é enumerável, ou seja, $_{irr} \quad _{rac}$.

Álgebra dos conjuntos.

São duas as operações principais entre conjuntos: a UNIÃO e a INTERSEÇÃO.

Operação UNIÃO:

Seja A o conjunto dos elementos com a propriedade P_A e B o conjunto dos elementos com a propriedade P_B. Se $x \quad AUB$ então $x \quad A$ ou $x \quad B$. Ou seja, x ou tem a propriedade P_A ou tem a propriedade P_B. Note que a operação lógica da união é OU. Vamos usar a notação 0 para falso e 1 para verdadeiro. A tabela da verdade para essa operação é dada por:

P_A	P_B	AUB
1	**1**	**1**
1	**0**	**1**
0	**1**	**1**
0	**0**	**0**

Ou seja se x possui P_A e P_B então $x \quad AUB$; se x possui P_A mas não P_B então $x \quad AUB$; se x não possui P_A mas possui P_B então $x \quad AUB$ e, finalmente, se x nem possui P_A nem possui P_B então $x \quad AUB$. Em linguagem de conjuntos estamos afirmando que:

$$x \quad A \quad e \quad x \quad B \qquad x \quad AUB$$
$$x \quad A \quad e \quad x \quad B \qquad x \quad AUB$$
$$x \quad A \quad e \quad x \quad B \qquad x \quad AUB$$
$$x \quad A \quad e \quad x \quad B \qquad x \quad AUB$$

Na nossa álgebra de lógica em que só existem 0 e 1, falsa ou verdadeira, então $1 \quad 1 \quad 1$, $1 \quad 0 \quad 1$, $0 \quad 1 \quad 1$ e $0 \quad 0 \quad 0$. Por isso é comum associar o sinal de + à operação lógica OU.

Ou seja $AUB \quad A \quad B$ quando A e B são conjuntos.

Propriedades da operação união[2].

Associativa: $A \quad B \quad D \quad A \quad B \quad D$

Comutativa: $A \quad B \quad B \quad A$

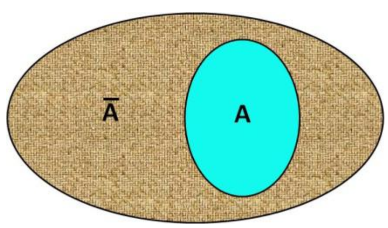
Elemento unitário: $A \qquad A$

Observação: apesar da operação união possuir o elemento unitário e ela não admite inversa pois $A \quad B$ se A ou B .

CONJUNTO UNIVERSO

O conjunto universo é definido como o conjunto contendo todos os elementos possíveis, com todas as propriedades existentes em dado contexto e denominado por S. Note que $A \quad S$ sempre e que $A \quad S \quad S$.

CONJUNTO COMPLEMENTAR $\bar{A}$.



Se $x \quad \bar{A}$ então $x \quad A$ e $x \quad S$.

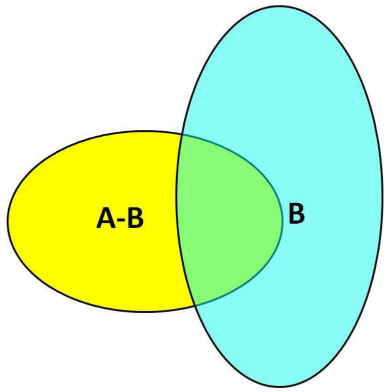
Propriedades:

$\bar{\bar{A}} \quad A$; $\bar{S}$; $\bar{} \quad S$; se $B \quad A$ então $\bar{A} \quad \bar{B}$ e se $A \quad B$ então $\bar{A} \quad \bar{B}$.

[2] Vamos evitar a letra C para conjuntos por que é a letra usada para estar contido.

Operação DIFERENÇA $A \quad B$

Se $x \quad A \quad B$ então $x \quad A$ e $x \quad B$ OU $x \quad A$ e $x \quad \bar{B}$. Se $A \quad B$ então $A \quad B$ e $\bar{A} \quad S \quad A$.



Operação INTERSEÇÃO:

Dizemos que $x \quad A \quad B$ se $x \quad A$ E $x \quad B$. A operação lógica nesse caso é E (AND). Ou seja, agora temos que:

$$x \quad A \quad e \quad x \quad B \qquad x \quad A \quad B$$
$$x \quad A \quad e \quad x \quad B \qquad x \quad A \quad B$$
$$x \quad A \quad e \quad x \quad B \qquad x \quad A \quad B$$
$$x \quad A \quad e \quad x \quad B \qquad x \quad A \quad B$$

A tabela da verdade para essa operação é dada por:

P_A	P_B	AUB
1	**1**	**1**
1	**0**	**0**
0	**1**	**0**
0	**0**	**0**

Como $1 \quad 1 \quad 1$, $1 \quad 0 \quad 0$, $0 \quad 1 \quad 0$ e $0 \quad 0 \quad 0$, usamos também a notação de multiplicação na forma $A \quad B \quad AB$.

Propriedades da operação união.

Associativa: $AB \; D \quad A \; BD$

Comutativa: $AB \quad BA$

Distributiva frente à união: $A \;\; B \quad D \quad AB \quad AD$

Se $A \quad B$ então $AB \quad A$; $AA \quad A$; $AS \quad A$; A e $A\bar{A}$.

Conjuntos disjuntos: se AB dizemos que A e B são disjuntos, ou mutuamente exclusivos. Se pertence a A não pertence a B e se pertence a B não pertence a A.

PARTIÇÃO. Uma partição de um conjunto A é uma coleção de subconjuntos A_i tais que: $\underset{i}{\;} A_i \quad A$, ou seja, $A_1 \quad A_2 \qquad A_n \quad A$, entretanto $A_i A_j \qquad i \quad j$.

Algumas partições clássicas:

1. $A \quad \bar{A} \quad S$ e $A\bar{A}$
2. $A \qquad A$ e A
3. $SB \quad B \qquad A \quad \bar{A} \;\; B \quad B \qquad AB \quad \bar{A}B \quad B$ e $AB\,\bar{A}B \quad A\bar{A}BB \quad B$
4. $A \quad B \quad A \quad AB \quad \bar{A}B \quad A \quad AB \quad \bar{A}B \quad A \quad \bar{A}B$ e $A\bar{A}B$

Leis de De Morgan:

São leis super importantes na teoria dos conjuntos e muito úteis para demonstração de teoremas. Podem ser apresentadas em duas formas equivalentes:

Forma 1: $\overline{A \quad B} \quad \bar{A}\bar{B}$

Forma 2: $\overline{AB} \quad \bar{A} \quad \bar{B}$

A estratégia para demonstrá-la e usar o fato de que se $A \quad B$ e $B \quad A$ então $A \quad B$.

Forma 1: Se $x \quad \overline{A \quad B} \qquad x \quad A \quad B \qquad x \quad A \, e \, x \quad B \qquad x \quad \bar{A} \, e \, x \quad \bar{B} \qquad x \quad \bar{A}\bar{B}$

Com isso demonstramos que se $x \quad \overline{A \quad B}$ então $x \quad \bar{A}\bar{B}$ o que significa que $\overline{A \quad B} \quad \bar{A}\bar{B}$. Entretanto, como todas as setas são bidirecionais também concluímos que se $x \quad \bar{A}\bar{B}$ então $x \quad \overline{A \quad B}$ logo $\bar{A}\bar{B} \quad \overline{A \quad B}$, significando que $\overline{A \quad B} \quad \bar{A}\bar{B}$.

Forma 2: Se $x \quad \overline{AB} \qquad x \quad AB \qquad x \quad A \, ou \, x \quad B \qquad x \quad \bar{A} \, ou \, x \quad \bar{B} \qquad x \quad \bar{A} \quad \bar{B}$. Com isso mostramos que se $x \quad \overline{AB}$ então $x \quad \bar{A} \quad \bar{B}$ logo que significa que $\overline{AB} \quad \bar{A} \quad \bar{B}$. Com a bidirecionalidade das setas concluímos que se $x \quad \bar{A} \quad \bar{B}$ então $x \quad \overline{AB}$ logo $\bar{A} \quad \bar{B} \quad \overline{AB}$, e $\overline{AB} \quad \bar{A} \quad \bar{B}$.

Parecem duas leis mas na realidade é uma só. Dado uma a outra será verdadeira e vice-versa. Passando de uma forma à outra:

Na forma 2 fazer $A \quad \bar{A}$ e $B \quad \bar{B}$ logo $\overline{\bar{A}\bar{B}} \quad \bar{\bar{A}} \quad \bar{\bar{B}} \quad A \quad B$ agora tirar o complementar de ambos os lados $\overline{\overline{\bar{A}\bar{B}}} \quad \overline{A \quad B} \qquad \overline{A \quad B} \quad \bar{A}\bar{B}$ a forma 1. Na forma 1 fazer $A \quad \bar{A}$ e $B \quad \bar{B}$ logo $\overline{\bar{A} \quad \bar{B}} \quad \bar{\bar{A}}\bar{\bar{B}} \quad AB$ tirar o complementar de tudo novamente $\overline{\overline{\bar{A} \quad \bar{B}}} \quad \overline{AB} \qquad \overline{AB} \quad \bar{A} \quad \bar{B}$.

Exemplo de utilização das leis de De Morgan:

$$A \quad B \quad \overline{AB} \qquad A \quad B \quad \bar{A} \quad \bar{B} \qquad A\bar{A} \quad A\bar{B} \quad \bar{A}B \quad B\bar{B} \qquad A\bar{B} \quad \bar{A}B \qquad A\bar{B} \quad \bar{A}B$$

1. Teorema: se em uma identidade de conjuntos substituirmos todos os conjuntos por seus complementos, todas uniões por interseções e vice-versa, a identidade é preservada.

Exemplo: $A \; B \quad D \qquad AB \quad AD$ usando o teorema $\bar{A} \quad \bar{B}\bar{D} \qquad \bar{A} \quad \bar{B} \quad \bar{A} \quad \bar{D}$ deve ser verdadeira. Provando:

$\overline{A \; B \quad D} \quad \bar{A} \quad \overline{B \quad D}$ pela segunda lei, e $\overline{A \; B \quad D} \quad \bar{A} \quad \overline{B \quad D} \quad \bar{A} \quad \bar{B}\bar{D}$ pela primeira lei. Por outro lado $\overline{A \; B \quad D} \quad \overline{AB \quad AD} \quad \overline{AB}\,\overline{AD} \quad \bar{A} \quad \bar{B} \quad \bar{A} \quad \bar{D}$ logo $\bar{A} \quad \bar{B}\bar{D} \quad \bar{A} \quad \bar{B} \quad \bar{A} \quad \bar{D}$ C.Q.D.

Princípio da DUALIDADE:

Se em uma identidade de conjuntos substituirmos todas as uniões por interseções e vice-versa, os conjuntos vazios por S e vice-versa, a identidade é preservada.

Exemplo 1: $A \; B \quad D \qquad AB \quad AD$ usando a dualidade $A \; B \quad D \qquad AB \quad AD$

CAMPOS [Também chamados de álgebras booleanas ou simplesmente álgebra]

Vamos chamar um conjunto de conjuntos de CLASSE. Uma classe de conjuntos será um campo [FIELD] se:

1. é não vazio
2. Se A então $\bar{A}$
3. Se A e B então $A \quad B$

Desses axiomas de campo podemos extrair os seguintes teoremas:

Sejam A , B e é um campo, então: AB , S e .

Pelos axiomas 2 e 3 $\bar{A}$, $\bar{B}$, $A \quad B$ e $\bar{A} \quad \bar{B}$. Agora usando De Morgan $\bar{A} \quad \bar{B} \quad \overline{AB}$ e $\overline{\bar{A} \quad \bar{B}} \quad AB$ logo se $\bar{A} \quad \bar{B}$ então $\overline{\bar{A} \quad \bar{B}}$ logo AB . Se A e $\bar{A}$ então $A \quad \bar{A}$ S . Também $A\bar{A}$.

Dessa forma se é uma álgebra então , S , $A, \bar{A}, B, \bar{B}$ e se $A_1, A_2, \quad , A_n$ $A_1 \quad A_2 \quad A_n$. Note que o campo foi definido acima apenas para um conjunto finito.

Campos de Borel [σ-álgebra].

Borel estendeu a definição d campo para conjunto infinito enumerável:

1. é não vazio
2. Se A_i então $\overline{A_i}$
3. Se A_i , $i \quad I$ com I infinito mas enumerável, então $\underset{i \quad 1}{} A_i$

Uma σ-álgebra, portanto, é um conjunto de conjuntos fechado sobre um número contável de operações união, interseção e complementos.

Probabilidade.

Vocabulário:

Experimento. Na estatística designa uma atividade para a qual não se pode especificar antecipadamente o resultado final. Jogar um dado, por exemplo, é um experimento. Jogar um dado duas vezes seguidas é um experimento. Se é possível especificar o resultado antecipadamente se diz que estamos no campo determinístico. Experimento nas ciências exatas possui outra conotação – é uma experiência determinística utilizada para comprovar ou falsificar uma teoria ou modelo.

TRIAL (ensaio, tentativa). Cada performance isolada de um experimento é um trial.

Resultado (outcome). É o resultado do experimento. Exemplo, joguei o dado e obtive 5 – 5 é o resultado. Cada trial dá origem a um resultado. Jogar dois dados, por exemplo, pode dar o resultado (2,3).

Espaço amostral S ou Ω. O conjunto de todos os resultados do experimento é o espaço amostral. Esse conjunto pode conter mais resultados do que os possíveis, mas não pode deixar de conter todos os possíveis. No caso de um dado $1,2,3,4,5 e 6$. Agora suponha o conjunto da quantidade de gordura no leite, x. Sabemos que $x / 0 \quad x \quad 100\%$ embora se saiba que $x \quad 10\%$ é praticamente impossível. Logo $x / 0 \quad x \quad 20\%$ também é um espaço amostral. Todo resultado, portanto, é um elemento do espaço amostral. O espaço amostral pode ser finito, infinito, enumeráel ou não enumerável.

Evento. Evento é um sub-conjunto do espaço amostral. São coleções de resultados de um experimento.

Teoria da Medida de Conjuntos.

Lebesgue e Borel definiram e estudaram uma grandeza que pode ser definida como a medida de um conjunto finito ou infinito enumerável. No apêndice xxx apresentamos uma breve introdução à teoria da medida. Eles mostraram que se a partição infinita $E_1, E_2, \quad , E_n,$ for composta de conjuntos mensuráveis então $E_i \quad E_j$, $E_i \quad E_j$ e $\overline{E_i} \quad i, j$ também são mensuráveis. Note então que o conjunto desses conjuntos é um campo de Borel. A probabilidade é uma medida de conjuntos só pode, portanto, ser aplicada à conjuntos mensuráveis. Isso significa que o espaço dos eventos tem que ser um sub-conjunto de contendo apenas conjuntos mensuráveis, que correspondem a um campo de Borel ou a uma σ-álgebra. Nem todos os sub-conjuntos de são mensuráveis. Se é um conjunto finito todos os seus sub-conjuntos serão mensuráveis e não há qualquer problema. Se for infinito, entretanto, é necessário restringir os sub-conjuntos possíveis.

Exemplo: é razoável admitir que a probabilidade de um dardo atingir um sub-conjunto do alvo seja proporcional à área do sub-conjunto. Entretanto existem sub-conjunto sem área, não mensuráveis, como ponto, pontos, retas, etc. Ou seja podem ter largura mas não possuem altura e vice-versa. Logo esses sub-conjuntos não são eventos e não fazem parte do campo de Borel .

Por isso a probabilidade é definida no espaço $\;,\;,p$, para definir p precisamos saber quem o conjunto espaço amostral , e o campo de Borel , o conjunto de conjuntos mensuráveis. Assim a união, interseção e conjunto complementar de qualquer evento também serão eventos e possuem probabilidades associados à eles.

Exemplo1. Jogar dois dados. Espaço amostral é dado pelos pontos vermelhos da figura xxx.

Evento 1: obter 6 no dado 1 e 5 no dado 2. $E_1 \quad 6,5$

Evento 2: obter 4 para a soma dos dois dados. $E_2 \quad 1,3 \;,\; 2,2 \;,\; 3,1$

FUNÇÃO. Uma função é uma regra de associação entre elementos de um conjunto chamado domínio com elementos de outro conjunto chamado contra-domínio. Para ser função a regra deve ser clara, sem dar origem a impasses, deve se saber exatamente a que elemento associar e o que fazer com todos os elementos do domínio. Não pode portanto, associar um elemento do domínio a mais de um elemento do contra-domínio pois haveria dúvida sobre qual regra seguir. Além disso, todos os elementos do domínio devem poder ser associados para evitar não saber o que fazer com um elemento que não se pode associar.

Estamos acostumados à funções de um conjunto de números em outro conjunto de números, mas podemos perfeitamente associar um conjunto a uma número, ou conjuntos a conjuntos. Um exemplo de uma função de conjunto que associa elementos de um conjunto a um número é o indicador do conjunto:

$$\mathbf{1}_A \; x \qquad \begin{matrix} 1 & se & x & A \\ 0 & se & x & A \end{matrix}$$

Probabilidade é uma função de conjunto, que deve associar um número real $0 \quad P \;\, A \quad 1$ à todo evento A do espaço amostral.

Definições de probabilidade.

Subjetiva: uma pessoa julga qual a probabilidade de ocorrência dos eventos.

Freqüência relativa. Executa um experimento N vezes e conta quantas vezes o evento A ocorreu e assim associa à probabilidade $P\ A \quad \underset{N}{Lim}\frac{N_A}{N}$. A dificuldade dessa definição é que seria preciso repetir o experimento inifinitas vezes. Também só seria útil se for possível provar que $\frac{N_A}{N}$ estabiliza para certo valor à medida que N cresce, ou seja, que $\frac{N_A}{N}$ converge.

Clássica. Seja um espaço amostral finito com N resultados igualmente PROVÁVEIS e A um evento com N_A elementos, então $P\ A \quad \frac{N_A}{N}$. A maior dificuldade com essa definição [é que ela usou o conceito de probabilidade para definir probabilidade [igualmente prováveis]. Ou seja, é uma definição circular. Também, da forma como foi definida, seria impossível analisar o comportamento de um dado desonesto. Finalmente restringe o estudo a espaços amostrais finitos.

Dadas todas as dificuldades apontadas acima finalmente chegou-se a conclusão que a probabilidade deveria ser definida através de axiomas.

Definição Axiomática.

São apenas três os axiomas para uma função de conjuntos $P\ A \quad f :$, com $P\ A \quad 0,1$, que pode representar uma probabilidade:

1. $P\ A \quad 0 \quad A$
2. $P \qquad 1,$ é chamado de evento certo.
3. Se AB então $P\ A\ \ B \quad P\ A \quad P\ B$

Tudo o que pode ser demonstrado através dos axiomas é teorema e não deve ser colocado na mesma categoria de axioma. Com esses 3 axiomas podemos mostrar vários teoremas:

1. $P \qquad 0$.

Prova: $A \qquad\quad P\ A \qquad P\ A \quad P$ mas $A \qquad A$, logo $P\ A \quad P\ A \quad P$ e $P \qquad 0$.

2. $P \; A \quad 1 \; P \; \bar{A}$

Prova: $A \; \bar{A}$ e $A\bar{A}$ logo pelo axioma 3 mas $A \quad A$, logo $P \; A \; \bar{A} \quad P \; A \quad P \; \bar{A}$. Por outro lado $P \; A \; \bar{A} \quad P \quad 1$ pelo axioma 2. Então $P \; A \quad P \; \bar{A} \quad 1$ e $P \; A \quad 1 \; P \; \bar{A}$.

Corolário: Se $a \; 0$, $b \; 0$ e $a \; b \; 1$ então $a \; 1$ e $b \; 1$, pois $a \; 1 \; b$ e $b \; 0 \quad 1 \; b \; 1 \quad a \; 1$. Repetindo o argumento temos também que $b \; 1$. Como $P \; A \quad P \; \bar{A} \quad 1$ e $P \; A \quad 0$ e $P \; \bar{A} \quad 0$ pelo axioma 1 então $0 \quad P \; A \quad 1$ e $0 \quad P \; \bar{A} \quad 1$.

3. $P \; A \; B \quad P \; A \quad P \; B \quad P \; AB$

Prova: $B \quad B \quad A \; \bar{A} \; B$ logo $B \quad AB \quad \bar{A}B$. Fazendo a união com A temos $A \; B \quad A \quad AB \quad \bar{A}B$ entretanto $AB \quad A$ logo $A \quad AB \quad A$ e $A \; B \quad A \quad \bar{A}B$. Note que $B \quad AB \quad \bar{A}B$ e $A \; B \quad A \quad \bar{A}B$ representam duas partições pois $AB \quad \bar{A}B \quad A\bar{A}BB \quad B$ e $A \quad \bar{A}B \quad A\bar{A}B$. Aplicando axioma 3 nas duas partições temos: $P \; B \quad P \; AB \quad P \; \bar{A}B$ e $P \; A \; B \quad P \; A \quad P \; \bar{A}B$. Extraindo $P \; \bar{A}B \quad P \; B \quad P \; AB$ da primeira partição e substituindo na segunda temos:

$$P \; A \; B \quad P \; A \quad P \; B \quad P \; AB$$

Esse teorema implica em que a probabilidade é sub-aditiva, ou seja, a união dos conjuntos leva a uma probabilidade menor do que a da soma das probabilidades.

4. Se $A \quad B$ então $P \; A \quad P \; B$. Prova $B \quad AB \quad \bar{A}B$ logo $P \; B \quad P \; AB \quad P \; \bar{A}B$. Mas como $A \quad B$ então $AB \quad A$, então $P \; B \quad P \; A \quad P \; \bar{A}B$ e como $P \; \bar{A}B \quad 0$ então $P \; B \quad P \; A$.

Note que o mesmo tipo de lógica pode ser usada para extrair propriedades dos Indicadores.

1. $\mathbf{1} \quad x \quad 1$ pois x
2. $\mathbf{1}_{AB} \; x \quad \mathbf{1}_A \; x \; \mathbf{1}_B \; x$ sai diretamente da tabela da verdade da operação interseção

3. $\mathbf{1}_A(x) + \mathbf{1}_{\bar{A}}(x) = \mathbf{1}(x) = 1$ logo $\mathbf{1}_A(x) = 1 - \mathbf{1}_{\bar{A}}(x)$
4. Se $AB = \emptyset$ então $\mathbf{1}_{A \cup B}(x) = \mathbf{1}_A(x) + \mathbf{1}_B(x)$. Se $AB = \emptyset$ e $x \in A \cup B$ então ou $x \in A \; e \; x \notin B$ ou $x \notin A \; e \; x \in B$. No primeiro caso, que implica $\mathbf{1}_{A \cup B}(x) = 1$ enquanto no segundo caso $\mathbf{1}_A(x) = 0 \; e \; \mathbf{1}_B(x) = 1$ que também implica em $\mathbf{1}_{A \cup B}(x) = 1$. Se $x \notin A \cup B$ então $\mathbf{1}_A(x) = 0 \; e \; \mathbf{1}_B(x) = 0$ e $\mathbf{1}_{A \cup B}(x) = 0$. O importante a notar aqui é que não há a possibilidade de somar 1 + 1 = 2 por conta da exclusão mútua de A e B.
5. Também vale $\mathbf{1}_{A \cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$. A prova é idêntica à da probabilidade usando as identidades de conjuntos: $\mathbf{1}_B = \mathbf{1}_{AB} + \mathbf{1}_{\bar{A}B}$ e $\mathbf{1}_{A \cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_{\bar{A}B}$.

Eventos independentes:

Os eventos A e B são independentes se $P(AB) = P(A)P(B)$.

Daí podemos mostrar como teoremas que se A e B são independentes então ($\bar{A}$ e B), (A e $\bar{B}$) e ($\bar{A}$ e $\bar{B}$) também são independentes entre si. Isso significa que os eventos complementares também são independentes.

Prova: Usando $B = AB \cup \bar{A}B$ e $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$, percebemos que $P(B) = P(AB) + P(\bar{A}B)$, logo $P(\bar{A}B) = P(B) - P(AB)$. Como A e B são independentes, então $P(\bar{A}B) = P(B) - P(A)P(B) = P(B)(1 - P(A)) = P(B)P(\bar{A})$, provando que $\bar{A}$ e B são independentes. Chamando A de B e vice-versa temos que A e $\bar{B}$ são independentes. Se $\bar{A}$ e B são independentes então mudando A para $\bar{A}$ temos que $\bar{A}$ e $\bar{B}$ são independentes.

Probabilidade Condicional.

Pergunta: qual a probabilidade do evento A sabendo que o evento B ocorreu? Denotamos essa probabilidade por $P(A|B)$, [leia-se: p de A dado B]. Se B ocorreu então $P(B) > 0$ e podemos restringir o espaço amostral para $\Omega \cap B = B$. Agora basta mostrar que $P(A|B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$ obedece aos axiomas da probabilidade.

1. $P \qquad P\ B|B \quad \frac{P\ BB}{P\ B} \quad \frac{P\ B}{P\ B} \quad 1$

2. $P\ A|B \quad 0$ pois $P\ AB \quad 0$ e $P\ B \quad 0$

3. Se AD então:

$$P\ A \quad D|B \quad \frac{P\ AB \quad DB}{P\ B} \quad \frac{P\ AB}{P\ B} \quad \frac{P\ DB}{P\ B} \quad P\ A|B \quad P\ D|B$$

Teorema da propabilidade total:

Seja $par \qquad A_1, A_2, \quad , A_n$ uma partição de e B um evento arbitrário. Então:

$$P\ B \quad P\ B|A_1\ P\ A_1 \quad P\ B|A_2\ P\ A_2 \qquad P\ B|A_n\ P\ A_n$$

Prova: $\quad B \quad B \quad B\ A_1 \quad A_2 \qquad A_n \quad BA_1 \quad BA_2 \qquad BA_n$ e $BA_i \quad BA_j \qquad i \quad j$, logo $BA_1 \quad BA_2 \qquad BA_n$ é uma partição de B. Nesse caso:

$$P\ B \quad P\ BA_1 \quad P\ BA_2 \qquad P\ BA_n$$

Agora basta substituir $P\ BA_i \quad P\ B|A_i\ P\ A_i$ para provar o teorema.

$$P\ B \quad P\ B|A_1\ P\ A_1 \quad P\ B|A_2\ P\ A_2 \qquad P\ B|A_n\ P\ A_n$$

Teorema de Bayes.

$P\ A_i|B \quad \frac{P\ A_iB}{P\ B} \quad \frac{1}{P\ B} P\ B|A_i\ P\ A_i$ logo:

$$P\ A_i|B \quad \frac{P\ B|A_i\ P\ A_i}{P\ B|A_1\ P\ A_1 \quad P\ B|A_2\ P\ A_2 \qquad P\ B|A_n\ P\ A_n}$$

Thomas Bayes [1701 – 1761] estabeleceu o teorema de Bayes em uma obra póstuma Bayes ***“An Essay towards solving a Problem in the Doctrine of Chances”*** [1763] editada pelo seu amigo Richard Price, da tabela Price.

A inferência de Bayes está sendo hoje, cada vez mais, considerada mais robusta do que a inferência frequentista de Fisher.

Suppose someone told you they had a nice conversation with someone on the train. Not knowing anything else about this conversation, the probability that they were speaking to a woman is 50%. Now suppose they also told you that this person had long hair. It is now more likely they were speaking to a woman, since women are more likely to have long hair than men. Bayes' theorem can be used to calculate the probability that the person is a woman.

To see how this is done, let W represent the event that the conversation was held with a woman, and L denote the event that the conversation was held with a long-haired person. It can be assumed that women constitute half the population for this example. So, not knowing anything else, the probability that W occurs is $P(W) = 0.5$.

Suppose it is also known that 75% of women have long hair, which we denote as $P(L|W) = 0.75$ (read: the probability of event L given event W is 0.75). Likewise, suppose it is known that 25% of men have long hair, or $P(L|M) = 0.25$, where M is the complementary event of W, i.e., the event that the conversation was held with a man (assuming that every human is either a man or a woman).

Our goal is to calculate the probability that the conversation was held with a woman, given the fact that the person had long hair, or, in our notation, $P(W|L)$. Using the formula for Bayes' theorem, we have:

$$P(W|L) = \frac{P(L|W) P(W)}{P(L)} = \frac{P(L|W) P(W)}{P(L|W) P(W) + P(L|M) P(M)}$$

where we have used the law of total probability. The numeric answer can be obtained by substituting the above values into this formula. This yields

$$P(W|L) = \frac{0.75\cdot0.50}{0.75\cdot0.50 + 0.25\cdot0.50} = 0.75,$$

i.e., the probability that the conversation was held with a woman, given that the person had long hair, is 75%. You will notice this example presents an ambiguous answer, where $P(W|L) = P(L|W)$. More telling examples are provided below.

Another way to do this calculation is as follows. Initially, it is equally likely that the conversation is held with a woman as to a man. The prior odds on a woman versus a man are 1:1. The respective chances that a man and a woman have long hair are 75% and 25%. It is three times more likely that a woman has long hair than that a man has long hair. We say that the likelihood ratio or Bayes factor is 3:1. Bayes' theorem in odds form, also known as Bayes' rule, tells us that the posterior odds that the person was a woman is also 3:1 (the prior odds, 1:1, times the likelihood ratio, 3:1). In a formula:

$$\frac{P(W|L)}{P(M|L)} = \frac{P(W)}{P(M)} \cdot \frac{P(L|W)}{P(L|M)}.$$

In statistics, Bayesian inference is a method of inference in which Bayes' rule is used to update the probability estimate for a hypothesis as additional evidence is learned. Bayesian updating is an important technique throughout statistics, and especially in mathematical statistics. For some cases, exhibiting a Bayesian derivation for a statistical method automatically ensures that the method works as well as any competing method. Bayesian updating is especially important in the dynamic analysis of a sequence of data. Bayesian inference has found application in a range of fields including science, engineering, philosophy, medicine, and law.

Apêndice: Teoria da Medida e a integração:

Para achar a integral $\int_a^b f(x)\,dx$ com b > a quebramos o intervalo $[a, b]$ em n partes da forma: $a = x_o < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$. Vamos chamar m_i mínimo de $f(x)$ no intervalo $x_i \le x \le x_{i+1}$ e M_i máximo de de $f(x)$ no intervalo $x_i \le x \le x_{i+1}$.[3] Também chamamos $s = \sum_{i=0}^{n-1} m_i (x_{i+1} - x_i)$ e $S = \sum_{i=0}^{n-1} M_i (x_{i+1} - x_i)$. Se $\underset{n \to \infty}{Lim}\, s = \underset{n \to \infty}{Lim}\, S$ então a função $f(x)$ é integrável segundo Riemann e $\int_a^b f(x)\,dx = \underset{n \to \infty}{Lim} \sum_{i=0}^{n-1} m_i (x_{i+1} - x_i) = \underset{n \to \infty}{Lim} \sum_{i=0}^{n-1} M_i (x_{i+1} - x_i)$.

Considere agora função $f(x) = \underset{n \to \infty}{Lim}\,\underset{m \to \infty}{Lim} \left[\cos(m!\pi x)\right]^{2n}$. Se $m!x$ for inteiro $\cos(m!\pi x) = \pm 1$ e como 2n é par $f(x) = 1$. Se $m!x$ não for inteiro $\left|\cos(m!\pi x)\right| < 1$ e como está elevado a um número muito grande $f(x) \to 0$. Se x é racional, $\frac{i}{j}$, então $m!\frac{i}{j}$ será inteiro pois com m tendendo a infinito sempre haverá um j no m! Para cancelar com o j do denominador. Já se x for irracional $m!x$ não será inteiro. Acabamos de criar uma função com a seguinte propriedade:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & se \quad x \in racional \\ 0 & se \quad x \in irracional \end{cases}$$

Qualquer que seja o intervalo $(x_{i+1} - x_i)$ ele contém números racionais e irracionais – logo $M_i = 1$ e $m_i = 0$. Mas neste caso $s = 0$ e $S = b - a$ e a função não é integrável segundo Riemann.

Nesse ponto Lebesgue e Borel entraram. Precisa definir outra grandeza que substitua o intervalo de um segmento $l = b - a$ por outra que chamaremos de medida do conjunto. Note que da definição da função indicador se $A = \{x / a \le x \le b\}$ então $\int \mathbf{1}_A(x)\,dx = \int_a^b dx = b - a$ corresponde ao intervalo $l = b - a$. Vamos definir

[3] É comum se usar as expressões ínfimo e supremo.

$l\ I\quad b\quad a$ para os conjuntos de pontos $I\quad [a,b)$, $I\quad (a,b]$, $I\quad [a,b]$ ou $I\quad (a,b)$. O caso particular $l\ [a,a]\quad 0$.

Conjunto de pontos nulo.

Um conjunto A terá medida nula se $A \quad {}_{j} I_j$ em que $l\ I_j$ é arbitrariamente pequeno para qualquer j, ou, em outras palavras, ${}_{j}\ l\ I_j$. Daí podemos afirmar que um conjunto de pontos enumerável é um conjunto de medida nula. Seja $A\quad x_1, x_2,$. Vamos “cobrir” o conjunto A da seguinte forma:

$I_1 \quad x_1 \quad \frac{}{8}, x_1 \quad \frac{}{8}$ logo $l\ I_1 \quad \frac{}{4}$ e $x_1 \quad I_1$

$I_2 \quad x_2 \quad \frac{}{16}, x_2 \quad \frac{}{16}$ logo $l\ I_2 \quad \frac{}{8}$ e $x_2 \quad I_2$

$I_n \quad x_n \quad \frac{}{2^{n\ 2}}, x_n \quad \frac{}{2^{n\ 2}}$ logo $l\ I_n \quad \frac{}{2^{n\ 1}}$ e $x_n \quad I_n$

Dessa forma $A \quad {}_{j} I_j$ mas ${}_{j}\ l\ I_j \quad \frac{}{4} \ {}_{j} \frac{1}{2^j} \quad \frac{}{4} \frac{1 \quad \frac{1}{2^n}}{1 \quad \frac{1}{2}} \quad \frac{}{2}$. Para 0 então ${}_{j}\ l\ I_j \quad 0$ e o conjunto tem medida nula. A medida do conjunto dos números racionais é nula. A intuição aqui é que área é altura multiplicada pela largura. Um ponto tem altura mas não tem largura, logo sua área será nula. Um conjunto enumerável só tem pontos sem largura, logo a área será nula.

Conjuntos abertos e fechados. Um ponto P é interior a um conjunto de pontos E se uma vizinhança de P $x \quad , x$ na qual todo ponto pertence a E . Um conjunto E é aberto se todo ponto de E é um ponto interior. O conjunto E será fechado se $\overline{E}$ é aberto. A questão é sempre saber se a fronteira do conjunto pertence ou não ao conjunto. Se não pertence o conjunto é aberto e se pertence é fechado. Podem existir conjuntos que nem são abertos nem fechados.

Os axiomas para a medida de conjuntos abertos são quase os mesmos da probabilidade com excessão do axioma 1 que limitaria a medida à 1. Usamos a notação mE para a medida do conjunto E.

1. $mE \quad 0$
2. Se $E_1E_2 \qquad$ então $m \; E_1 \quad E_2 \quad mE_1 \quad mE_2$

Sem o axioma $m \qquad 1$ ainda valem os teoremas:

a. $m \qquad 0$

b. $m \; E_1 \quad E_2 \quad mE_1 \quad mE_2 \quad mE_1E_2$

c. Se $E_2 \quad E_1$ então $mE_2 \quad mE_1$.

Prova: $E_1 \quad E_2 \quad E_1 \quad E_2 \qquad$ e $E_2 \; E_1 \quad E_2 \quad E_2E_1 \quad E_2E_2 \quad E_2 \quad E_2 \qquad$, então $mE_1 \quad m \; E_2 \quad E_1 \quad E_2 \quad mE_2 \quad m \; E_1 \quad E_2$, como $m \; E_1 \quad E_2 \quad 0$ então $mE_1 \quad mE_2$.

Medida de um conjunto fechado.

Essa medida será definida por $mF \quad mE \quad m \; E \quad F$ com $F \quad E$. Note que se F é fechado e E aberto então $E \quad F$ é aberto e todas as medidas do lado direito estão definidas. Essa definição, entretanto, só pode ser útil se for possível demonstrar que qualquer conjunto E aberto escolhido que obedeça à restrição $F \quad E$ gera o mesmo valor de mF.

Para mostrar isso vamos tomar dois conjuntos abertos E_1 e E_2 com as propriedades $E_1 \quad E_2$, $F \quad E_1$ e $F \quad E_2$. Agora $E_1 \quad E_2 \quad F \quad E_1 \quad E_2$, pois o $E_1 \quad E_1 \quad F$ uma vez que $F \quad E_1$ e $F \quad E_2 \; F \quad E_2$. Então $m \; E_1 \quad E_2 \quad m \; E_1 \quad E_2 \quad F \quad mE_1 \quad m \; E_2 \quad F \quad m \; E_1 \; E_2 \quad F$. Mas $E_1 \; E_2 \quad F \quad E_1E_2 \quad E_1F \quad E_1E_2 \quad F$ logo:

$$m \; E_1 \quad E_2 \quad mE_1 \quad m \; E_2 \quad F \quad m \; E_1E_2 \quad F$$

Trocando E_1 por E_2 temos:

$$m \quad E_1 \quad E_2 \quad mE_2 \quad m \quad E_1 \quad F \quad m \quad E_1 E_2 \quad F$$

Subtraindo uma da outra:

$$mE_1 \quad m \quad E_2 \quad F \quad mE_2 \quad m \quad E_1 \quad F$$

Logo o valor da medida independe da escolha do conjunto aberto. Aceitando essa definição então podemos mostrar alguns teoremas envolvendo conjuntos abertos e fechados. Seja E um conjunto aberto não nulo, então

a. Se $F \quad E$ então $mF \quad mE$
b. Se $E \quad F$ então $mE \quad mF$

Prova. Para (a) $mF \quad mE \quad m \quad E \quad F$ como $m \quad E \quad F \quad 0$ então $mF \quad mE$. Para (b) se F é fechado e E aberto então $F \quad E$ é fechado. Vamos tomar $E / E \quad F \quad E$ então $F \quad E \quad E$ e $m \quad F \quad E \quad mE \quad m \quad E \quad F \quad E$ por definição. Mas $E \quad F \quad E \quad E \quad F \quad E \quad \overline{F} \quad E$ e $\overline{F} \, E$ pois $E \quad F$. Então $m \quad E \quad F \quad E \quad m \quad E \quad F \quad mE$ logo $m \quad F \quad E \quad mE \quad m \quad E \quad F \quad mE \quad mF \quad mE$ como $m \quad F \quad E \quad 0$ então $mF \quad mE \quad 0$ e $mF \quad mE$. Daí se conclui que $E_1 \quad F \quad E_2$ então $mE_1 \quad mF \quad mE_2$.

Percebe-se então que a medida de um conjunto aberto é um limite superior para as medidas dos conjuntos fechados contidos no mesmo e que a medida de um conjunto fechado é um limite inferior para as medidas dos conjunto abertos que o contém.

Definição de medidas externa e interna de um conjunto qualquer. [pode ser nem aberto nem fechado].

Medida externa m* (outer measure): $m \, A$ é o limite inferior para as medidas dos conjuntos abertos que contém A, ou seja, $m \, A \quad \min \quad m \quad E \quad A$. Então, para achar a medida de A é necessário encontrar o conjunto aberto E de menor medida que contém A.

Medida interna m_* (inner measure): $m_* A$ é o limite superior para as medidas dos conjuntos fechados contidos em A, ou seja, $m_* A \quad \max \quad m \quad F \quad A$. Trata-se então de encontrar o conjunto fechado F de maior medida contido em A. Claro que $m^* A \quad m_* A$

Definição de medida de um conjunto:

Se $m^* A \quad m_* A$ dizemos que A é MENSURÁVEL e que $mA \quad m^* A \quad m_* A$.

Agora precisamos de uma forma mais prática para definir que conjuntos são mensuráveis e estabelecer propriedades dos conjuntos mensuráveis e das operações entre si.

O desenvolvimento à partir desse ponto é mostrar que se A_1 e A_2 são mensuráveis então $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$, $A_1 \quad A_2$ e $A_1 A_2$ são mensuráveis. Ou seja, o conjuntos dos conjuntos mensuráveis forma um campo de Borel, ou uma -álgebra.

Vamos começar com a propriedade da sub-aditividade

$$m^* \quad E_1 \quad E_2 \quad m^* E_1 \quad m^* E_2$$

Melhor ainda, podemos provar uma afirmação mais forte:

$$m^* \quad E_1 \quad E_2 \quad m^* \quad E_1 E_2 \quad m^* E_1 \quad m^* E_2$$

Considere $O_1 \quad E_1$ e $O_2 \quad E_2$, então sempre é possível encontrar O_1 e O_2 abertos para os quais:

$$mO_1 \quad m^* E_1 \qquad\qquad mO_1 \quad m^* E_1$$

$$mO_2 \quad m^* E_2 \qquad\qquad mO_2 \quad m^* E_2$$

Para qualquer valor de $\quad 0$. Como $E_1 \quad O_1$ e $E_2 \quad O_2$ então:

$$m^* \quad E_1 \quad E_2 \quad m^* \quad E_1 E_2 \quad m \quad O_1 \quad O_2 \quad m \quad O_1 O_2 \quad mO_1 \quad mO_2 \quad m^* E_1 \quad m^* E_2 \quad 2$$

Fazendo $\quad 0$ temos que

$$m^* \quad E_1 \quad E_2 \quad m^* \quad E_1 E_2 \quad m^* E_1 \quad m^* E_2$$

Com raciocínio complementar podemos mostrar que:

$$m_* \quad E_1 \quad E_2 \quad m_* \quad E_1 E_2 \quad m_* E_1 \quad m_* E_2$$

Considere $Q_1 \quad E_1$ e $Q_2 \quad E_2$, então sempre é possível encontrar Q_1 e Q_2 para os quais:

$m_* E_1 \quad mQ_1$ logo $mQ_1 \quad m_* E_1$

$m_* E_2 \quad mQ_2$ logo $mQ_2 \quad m_* E_2$

$m_* \; E_1 \quad E_2 \quad m_* \; E_1 E_2 \quad m \; Q_1 \quad Q_2 \quad m \; Q_1 Q_2 \quad mQ_1 \quad mQ_2 \quad m_* E_1 \quad m_* E_2 \quad 2$

Para $\quad 0$ temos

$m_* \; E_1 \quad E_2 \quad m_* \; E_1 E_2 \quad m_* E_1 \quad m_* E_2$

$$m^* \; E_1 \quad E_2 \quad m^* \; E_1 E_2 \quad m^* E_1 \quad m^* E_2$$

$$m_* \; E_1 \quad E_2 \quad m_* \; E_1 E_2 \quad m_* E_1 \quad m_* E_2$$

Seja E um conjunto mensurável e $\overline{E}$ seu complemento frente a um conjunto aberto O, então $E\overline{E}$ e $E \quad \overline{E} \quad O$ .Mas O é aberto, logo mensurável, então $mO \quad m^* E \quad m^* \overline{E}$ e $mO \quad m_* E \quad m_* \overline{E}$.

Teorema 2. Se E_1 e E_2 são disjuntos, o que significa que $E_2 \quad \overline{E_1}$, então:

$m^* \; E_1 \quad E_2 \quad m^* E_1 \quad m_* E_2 \quad m_* \; E_1 \quad E_2$

Vamos partir de:

$m_* \; E_1 \quad E_2 \quad m_* \; E_1 E_2 \quad m_* E_1 \quad m_* E_2$

E fazer $G \quad F$ e $E_1 \quad G$ e $E_2 \quad F \quad G$

Nesse caso

$E_1 E_2 \quad G \; F \quad G \quad GF \quad GG \quad G \quad G$ pois $G \quad F$.

$E_1 \quad E_2 \quad G \quad F \quad G \quad F$

Substituindo na desigualdade da medida interna:

$$m_*F \quad m_*G \quad m_* \; F \quad G$$

Agora vamos fazer $F \quad \overline{E_1}$ e $G \quad E_2$, logo $G \quad F$ e usar as leis de de Morgan para mostrar que:

$$\overline{E_1 \quad E_2} \quad \overline{E_1}\,\overline{E_2} \quad \overline{E_1} \; S \quad E_2 \quad \overline{E_1}\,S \quad \overline{E_1}\,E_2 \quad \overline{E_1} \quad E_2$$

Considere O um conjunto contendo todos esses conjuntos, então temos:

$$m_*\overline{E_1} \quad m_*E_2 \quad m_* \; \overline{E_1} \quad E_2 \quad m_*E_2 \quad m_* \; \overline{E_1 \quad E_2}$$

$$m_*\overline{E_1} \quad mO \quad m^*E_1$$

$$m_* \; \overline{E_1 \quad E_2} \quad mO \quad m^* \; E_1 \quad E_2$$

Logo

$$mO \quad m^*E_1 \quad m_*E_2 \quad mO \quad m^* \; E_1 \quad E_2$$

$$m^* \; E_1 \quad E_2 \quad m^*E_1 \quad m_*E_2$$

Com esse resultado podemos provar o seguinte teorema importante:

Se M é mensurável, então para E com m^*E finita vale a relação:

$$m^*E \quad m^*EM \quad m^* \; E \quad EM$$

Vamos partir de $m^* \; E_1 \quad E_2 \quad m^* \; E_1E_2 \quad m^*E_1 \quad m^*E_2$.

1. Fazer $E_1 \quad EM$ e $E_2 \quad E \quad EM$ logo $E_1 \quad E_2 \quad E$ e E_1E_2 então $m^*E \quad m^*EM \quad m^* \; E \quad EM$

Para mostrar a igualdade basta então provar que se M é mensurável então $m^*E \quad m^*EM \quad m^* \; E \quad EM$.

2. Fazer $E_1 \quad E$ e $E_2 \quad M$. Note que $E_1 \quad E_2 \quad E \quad M \quad E \quad M \quad EM \quad E \quad EM \quad M$, então $m^*E \quad m^*M \quad m^* \; EM \quad m^* \; E \quad M \quad EM$. Por outro lado $E \quad EM \quad M$ então logo $m^* \; E \quad M \quad EM \quad m^* \; E \quad EM \quad m_*M$ então $m^*E \quad m^*M \quad m^* \; EM \quad m^* \; E \quad M \quad EM \quad m^* \; EM \quad m^* \; E \quad EM \quad m_*M$. Mas se M é mensurável então $m^*M \quad m_*M$ e $m^*E \quad m^* \; EM \quad m^* \; E \quad EM$ que nos leva ao resultado $m^*E \quad m^* \; EM \quad m^* \; E \quad EM$.

Caratheodory usou essa proprieadade como a propriedade que define um conjunto mensurável, ou seja, ele afirmou que o conjunto M é mensurável se $m^*E \quad m^* \; EM \quad m^* \; E \quad EM$ para E com m^*E finita.

Se E_1 e E_2 são mensuráveis então $E_1 \quad E_2$ e E_1E_2 são mensuráveis. Para isso usamos as duas desigualdades:

$$m^* \; E_1 \quad E_2 \quad m^* \; E_1E_2 \quad m^*E_1 \quad m^*E_2 \quad mE_1 \quad mE_2$$

$$m_* \; E_1 \quad E_2 \quad m_* \; E_1E_2 \quad m_*E_1 \quad m_*E_2 \quad mE_1 \quad mE_2$$

Pois $m^*E_1 \quad m_*E_1 \quad mE_1$ e $m^*E_2 \quad m_*E_2 \quad mE_2$. Mas isso implica em:

$$m^* \; E_1 \quad E_2 \quad m^* \; E_1E_2 \quad mE_1 \quad mE_2 \quad m_* \; E_1 \quad E_2 \quad m_* \; E_1E_2$$

Ou seja: $m^* \; E_1 \quad E_2 \quad m^* \; E_1E_2 \quad m_* \; E_1 \quad E_2 \quad m_* \; E_1E_2$ que só não entra em contradição com $m^* \; E_1 \quad E_2 \quad m_* \; E_1 \quad E_2$ e $m^* \; E_1E_2 \quad m_* \; E_1E_2$ no caso em que $m^* \; E_1 \quad E_2 \quad m_* \; E_1 \quad E_2$ e $m^* \; E_1E_2 \quad m_* \; E_1E_2$. Ou seja, ambos $E_1 \quad E_2$ e E_1E_2 são mensuráveis. Além disso podemos afirmar mais, que $m \; E_1 \quad E_2 \quad mE_1 \quad mE_2 \quad m \; E_1E_2$.

Se, além disso, E_1 e E_2 são disjuntos então $m \; E_1 \quad E_2 \quad mE_1 \quad mE_2$

Seja E um conjunto mensurável e $\overline{E}$ seu complemento frente a um conjunto aberto O, então $E\overline{E}$ e $E \quad \overline{E} \quad O$ então $m^* \; E \quad \overline{E} \quad m^*E \quad m^*\overline{E}$ e $m_* \; E \quad \overline{E} \quad m_*E \quad m_*\overline{E}$, ou seja, $m^*O \quad m^*E \quad m^*\overline{E}$ e $m_*O \quad m_*E \quad m_*\overline{E}$. Mas O é aberto, logo mensurável, então

$$mO \quad m^*E \quad m^*\overline{E}$$ e $$mO \quad m_*E \quad m_*\overline{E}$$

$$mO \quad m_*E \quad m_*\overline{E}$$

$$m^*E \quad m^*\overline{E} \quad mO$$

Porém, como $m^*E \quad m_*E$ e $m^*\overline{E} \quad m_*\overline{E}$ as desigualdades só são válidas se $m_*E \quad m_*\overline{E} \quad mO \quad m^*E \quad m^*\overline{E}$ ou $m_*E \quad m_*\overline{E} \quad mO \quad m^*E \quad m^*\overline{E}$