Aplicações:

Incluir as distribuições discretas: distribuição degenerada + distribuição uniforme + distribuição multinomial

Incluir as distribuições contínuas: uniforme + exponenciais + triangulares

Distribuição de Bernoulli:

Jogar a moeda, só temos duas possibilidades, cara ou coroa. A v.a. será definida como cara = 1 e coroa = 0. Qualquer jogo com apenas duas respostas, sim = 1 e não = 0, segue uma distribuição de Bernoulli. Se a probabilidade de SIM é p, a de Não será $q = 1 - p$ e a função densidade de probabilidade é dada por: $f(x) = q\delta(x) + p\delta(x-1)$. A função distribuição de probabilidade acumulada vale:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ q & 0 \le x < 1 \\ 1 & x \ge 1 \end{cases}$$

A funçao geradora dos momentos é dada por: $M(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[q\delta(x) + p\delta(x-1) \right] e^{xt} dx = q + pe^{t}$. A função característica $\varphi(t) = q + pe^{it}$.

Momentos: $M_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[q\delta(x) + p\delta(x-1) \right] x^k dx = q0^k + p1^k$ logo $M_k = p \quad \forall k$, então $\mu = p$.

Momentos centrados: $e^{-\mu t} M(t) = e^{-pt} \left[q + pe^{t} \right] = qe^{-pt} + pe^{(1-p)t} = qe^{-pt} + pe^{qt}$.

Agora $m_k = \frac{d^k}{dt^k} \left[qe^{-pt} + pe^{qt} \right] = q(-p)^k e^{-pt} + pq^k e^{qt} \Big|_{t=0}$, ou seja, $m_k = pq^k + (-1)^k qp^k$ ou ainda $m_k = pq\left[(1-p)^{k-1} - (-p)^{k-1} \right]$.

Casos particulares:

1. $m_1 = pq - qp = 0$;

2. $m_2 = pq\left[(1-p)+p\right] = pq$;

3. $m_3 = pq\left[(1-p)^2 - p^2\right] = pq\left[1-2p+p^2-p^2\right] = pq(1-2p)$;

4. $m_4 = pq\left[(1-p)^3 - p^3\right] = pq\left[1-3p+3p^2-p^3+p^3\right] = pq\left[1-3p(1-p)\right] = pq\left[1-3pq\right]$.

Cumulantes:

$\ln\varphi(t) = \ln\left[1+p\left(e^{it}-1\right)\right]$, então $\dfrac{d}{dt}\ln\varphi(t) = \dfrac{ipe^{it}}{1+p\left(e^{it}-1\right)} = \dfrac{ip}{e^{-it}+p-pe^{-it}} = \dfrac{ip}{p+(1-p)e^{-it}}$

logo:

1. $\dfrac{d}{dt}\ln\varphi(t) = ip\left(p+qe^{-it}\right)^{-1}$. Logo $c_1 = -i\dfrac{d}{dt}\ln\varphi(t)\Big|_{t=0} = p$

2. $\dfrac{d^2}{dt^2}\ln\varphi(t) = i^2 pq\left[e^{-it}\left(p+qe^{-it}\right)^{-2}\right]$, logo $\sigma^2 = c_2 = (-i)^2\dfrac{d^2}{dt^2}\ln\varphi(t) = pq$.

3. $\dfrac{d^3}{dt^3}\ln\varphi(t) = i^3 pq\left[2qe^{-2it}\left(p+qe^{-it}\right)^{-3} - e^{-it}\left(p+qe^{-it}\right)^{-2}\right] = -i^3 pqe^{-it}\left(p-qe^{-it}\right)\left(p+qe^{-it}\right)^{-3}$

   logo, $m_3 = c_3 = (-i)^3\dfrac{d^3}{dt^3}\ln\varphi(t)\Big|_{t=0} = pq(q-p)$.

4. $\dfrac{d^4}{dt^4}\ln\varphi(t) = i^4 pqe^{-it}\left[\left(p-2qe^{-it}\right)\left(p+qe^{-it}\right)+3qe^{-it}\left(qe^{-it}-p\right)\right]\left(p+qe^{-it}\right)^{-4}$. Após alguma álgebra temos $\dfrac{d^4}{dt^4}\ln\varphi(t) = i^4 pqe^{-it}\left[p^2-4pqe^{-it}+q^2e^{-2it}\right]\left(p+qe^{-it}\right)^{-4}$, logo $c_4 = (-i)^4\dfrac{d^4}{dt^4}\ln\varphi(t)\Big|_{t=0} = pq\left[p^2-4pq+q^2\right]$ ou $c_4 = pq\left[1-6pq\right]$.

Distribuição Binomial:

Vamos jogar a moeda n vezes de forma independente. Nesse caso a v.a. soma são i.i.d., e a função característica vale: $\varphi_{Bin}(t)=\varphi_{Bern}^{n}(t)=\left[q+pe^{it}\right]^{n}$. Sabendo a φ queremos a $f(z)$ dada por $f(z)=FT^{-1}\left[\varphi(t)\right]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[q+pe^{it}\right]^{n}e^{-itz}dt$. Expandindo em binômio de Newton temos:

$$f(z)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}q^{n-k}p^{k}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i(k-z)t}dt\right]=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}q^{n-k}p^{k}\delta(z-k)$$

Aqui vale a acumulação dos cumulantes $c_{k\,Bin}=n\,c_{k\,Bern}$, então $\mu=np$, $\sigma^{2}=npq$, $c_{3}=npq(q-p)$ e $c_{4}=npq[1-6pq]$.

Distribuição de Poisson:

Essa distribuição é um caso limite da binomial quando $n\to\infty$, mas $p\to 0$ de tal forma que o produto $np=\lambda$ é constante. Agora $\varphi_{Bin}(t)=\left[1-p+pe^{it}\right]^{n}=\left[1+\frac{\lambda\left(e^{it}-1\right)}{n}\right]^{n}$. Nesse ponto usamos o fato de que $\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{x}{n}\right]^{n}=e^{x}$ para achar $\varphi_{Poisson}(t)=e^{\lambda\left(e^{it}-1\right)}$. Agora queremos a fdp:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\lambda\left(e^{it}-1\right)}e^{-itz}dt=\frac{e^{-\lambda}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\lambda e^{it}}e^{-itz}dt=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k}}{k!}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ikt}e^{-itz}dt\right]=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k}}{k!}\delta(z-k)$$

$$f_{Poisson}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{k}}{k!}\delta(z-k).$$

Uma expressão para $F_{Poisson}(z)$.

$$F_{Poisson}(z)=\int_{-\infty}^{z}f_{Poisson}(x)dx=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{k}}{k!}\int_{-\infty}^{z}\delta(x-k)dx=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\mathrm{int}(z)}\frac{\lambda^{k}}{k!}$$

Então $F_{Poisson}(z)=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\mathrm{int}(z)}\frac{\lambda^{k}}{k!}$.

Cumulantes: $\ln\varphi_{Poisson}(t)=\ln\left[e^{\lambda\left(e^{it}-1\right)}\right]=\lambda\left(e^{it}-1\right)=\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{i^k t^k}{k!}$, portanto todos os cumulantes valem λ, daí $\mu=\lambda$, $\sigma^2=\lambda$, $m_3=\lambda$ e $m_4=\lambda+3\lambda^2$, a skewness vale $\alpha_3=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}>0$, skewed to the right, e a curtose $k=\frac{1}{\lambda}$, sempre leptocúrtica. Se $\lambda\to\infty$ então a skewness e curtose tendem a zero.

Distribuição Normal:

Vamos fazer o limite de n tendendo a infinito na distribuição binomial e usar o truque do logarítmo. Nesse caso:

$\ln\varphi_{Bin}(t)=\varphi_{Bern}^{n}(t)=n\ln\left[q+pe^{it}\right]=n\ln\left[q+p+ipt-p\frac{t^2}{2}+\cdots\right]=n\ln\left[1+ipt-p\frac{t^2}{2}+\cdots\right]$. Mas já sabemos que $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k$ e vamos truncar a série na ordem 2. Chamando $x=ipt-p\frac{t^2}{2}$ temos:

$$\ln\varphi_{Bin}(t)=n\left[ipt-p\frac{t^2}{2}+\left(ipt-p\frac{t^2}{2}\right)^2\right]=n\left[ipt-p\frac{t^2}{2}-p^2\frac{t^2}{2}+\cdots\right]=n\left[ipt-p(1-p)\frac{t^2}{2}+\cdots\right]$$

Logo $\lim_{n\to\infty}\left[\ln\varphi_{Bin}(t)\right]=inpt-\frac{npqt^2}{2}+\cdots$ e essa é a distribuição normal, cuja função característica vale: $\varphi_{Normal}(t)=e^{i\mu t-\frac{\sigma^2t^2}{2}}$. Note que, nesse caso, só existem dois cumulantes, pois $\ln\left[\varphi_{Normal}(t)\right]=i\mu t-\frac{\sigma^2t^2}{2}$, $c_1=\mu$ e $c_2=\sigma^2$, todos os outros são nulos. Os momentos centrados são dados pela função geradora:

$$e^{-i\mu t}e^{i\mu t-\frac{\sigma^2t^2}{2}}=e^{-\frac{\sigma^2t^2}{2}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{\sigma^2t^2}{2}\right)^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\sigma^{2k}}{2^k k!}t^{2k}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\sigma^{2k}(2k)!}{2^k k!}\frac{t^{2k}}{(2k)!}.$$

Percebe-se que não existem momentos ímpares e que os pares valem $\sum_{k=0}^{\infty}(i)^{2k} m_{2k}\frac{t^{2k}}{(2k)!}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k} m_{2k}\frac{t^{2k}}{(2k)!}$. Comparando extraímos $m_{2k}=\frac{(2k)!}{2^k k!}\sigma^{2k}$. Podemos reescrever esse resultado em termos dos fatoriasi duplos $z!!=z(z-2)(z-4)\cdots$. Notando que $(2k)!!=(2k)(2k-2)(2k-4)\cdots 2=2\times 2\times\cdots\times 2\times k(k-1)(k-2)\cdots 1=2^k k!$ e, além disso, que:

$$(2k)!=(2k)(2k-1)(2k-2)(2k-3)\cdots 2\times 1=\left[(2k)(2k-2)\cdots 2\right]\left[(2k-1)(2k-3)\cdots 1\right]$$

logo $(2k)!=(2k)!!(2k-1)!!$, substituindo $m_{2k}=\frac{(2k)!!(2k-1)!!}{(2k)!!}\sigma^{2k}$ chegamos na expressão mais simples $m_{2k}=(2k-1)!!\sigma^{2k}$. Então vemos que $m_2=\sigma^2$; $m_4=(3)!!\sigma^4=3\sigma^4$; $m_6=(5)!!\sigma^6=15\sigma^6$ e assim por diante.

Falta a função densidade de probabilidade: $f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\mu t-\frac{\sigma^2t^2}{2}}e^{-itz}dt$. O truque aqui é completar quadrado no expoente $e^{-\frac{\sigma^2t^2}{2}+i\mu t-itz}=e^{-\frac{\sigma^2t^2}{2}-it(z-\mu)}=e^{-\frac{\sigma^2}{2}\left[t^2+2i\frac{(z-\mu)}{\sigma^2}t-\frac{(z-\mu)^2}{\sigma^4}+\frac{(z-\mu)^2}{\sigma^4}\right]}$, obtendo $e^{-\frac{\sigma^2t^2}{2}+i\mu t-itz}=e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}}e^{-\frac{\sigma^2}{2}\left(t+i\frac{z-\mu}{\sigma^2}\right)^2}$. Substituindo de volta na integral temos:

$$f(z)=\frac{e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{2\pi}\frac{\sqrt{2}}{\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{\sigma^2}{2}\left(t+i\frac{z-\mu}{\sigma^2}\right)^2}d\left(\frac{\sigma t}{\sqrt{2}}\right)=\frac{e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2}\pi\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}du=\frac{e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2}\pi\sigma}\sqrt{\pi}$$

Finalmente obtemos a função densidade de probabilidade da distribuição Normal:

$$N(x;\mu,\sigma)=\frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}$$

A Normal Padrão tem esperança nula e variância unitária dada por $NP(x)=\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$. A Normal padrão cumulativa é definida como $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$. Note que é sempre possível escrever o resultado de uma normal cumulativa em termos da $\Phi(x)$ por uma mudança de variável. Se queremos a função distribuição de probabilidade cumulativa de uma normal com μ e σ, ou seja: $F_{Normal}\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}d\left(\frac{x}{\sigma}\right)$ a mudança de variável $t=\frac{x-\mu}{\sigma}$ nos leva a $F_{Normal}\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{(x-\mu)/\sigma}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$. Por isso as tabelas da normal são sempre feitas para a normal padrão usando como argumento o desvio da esperança medido em desvios padrão $z=\frac{x-\mu}{\sigma}$.

Distribuição Log-Normal.

A distribuição Log-Normal é obtida da Normal através da mudança de variável $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{x}}$. A regra ára mudança de variável é dada por $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})=\sum\frac{\boldsymbol{f}[\boldsymbol{g}^{-1}(\boldsymbol{y})]}{\left|\frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dx}}\right|}$, com a somatória sobre todos os x's possíveis para as raízes da equação $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y}$, ou, $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{g}^{-1}(\boldsymbol{y})$. Neste caso a função é biunívoca e só existe uma raiz dada por $\boldsymbol{x}=\ln\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{y}\in[0,+\infty)$. Vamos precisar da derivada $\frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dx}}=\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{y}$. Logo:

$$\boldsymbol{LogN}[\boldsymbol{y};\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\sigma}^2]=\frac{\boldsymbol{e}^{-\frac{(\ln\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\mu})^2}{2\boldsymbol{\sigma}^2}}}{\sqrt{2\boldsymbol{\pi}}\,\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{y}}$$

A log-Normal como uma aproximação da normal:

Vamos reescrever a log-normal como $\boldsymbol{LogN}=\frac{\boldsymbol{e}^{-\frac{(\ln\boldsymbol{y}-\ln\boldsymbol{y_o})^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\boldsymbol{\pi}}\,\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{y}}=\frac{\boldsymbol{e}^{-\frac{\left[\ln\left(\boldsymbol{y}/\boldsymbol{y_o}\right)\right]^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\boldsymbol{\pi}}\,\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{y}}=$, $y_o>0$, e ver o que acontece para $y=y_o+\delta y$ com $\left|\delta y\right|<<y_o$.

Neste caso $\ln y=\ln\left(y_o+\delta y\right)=\ln\left[y_o\left(1+\frac{\delta y}{y_o}\right)\right]=\ln y_o+\ln\left(1+\frac{\delta y}{y_o}\right)$ e o termo no expoente é aproximado por $(\ln\boldsymbol{y}-\ln\boldsymbol{y_o})=\ln\left(1+\frac{\boldsymbol{\delta y}}{\boldsymbol{y_o}}\right)\cong\frac{\boldsymbol{\delta y}}{\boldsymbol{y_o}}$. No denominador simplesmente fazemos $y=y_o$ e vemos que $\boldsymbol{LogN}=\frac{\boldsymbol{e}^{-\frac{\delta y^2}{2\sigma^2 y_o^2}}}{\sqrt{2\boldsymbol{\pi}}\,\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{y_o}}$ é uma normal da variável $\delta y/y_o$. Se fizermos $\sigma_{\log N}=\frac{\sigma_N}{y_o}$ teremos duas curvas muito semelhantes no caso em que $\sigma_N << \mu$. Note que se $y \to 0$ o $\ln y \to -\infty$ anulando a função. Grandes diferenças, portanto, entre a normal e a log-normal ocorrerão quando a probabilidade de valores de x negativos na normal forem grandes. A figura xx mostra esse comportamento:

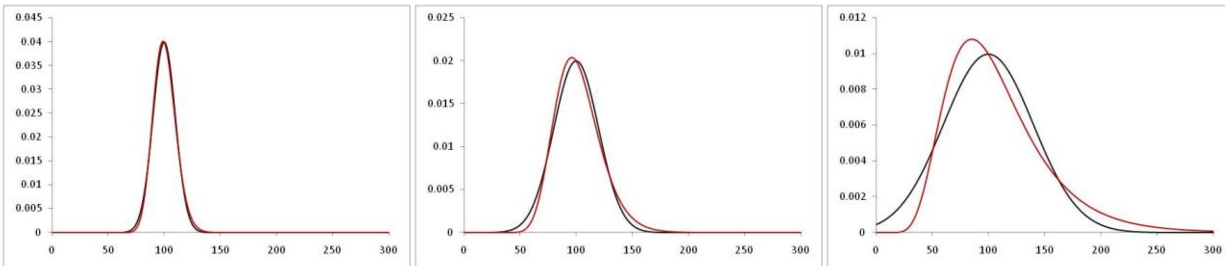

Figura xxx. Normal com $x_o = y_o = 100$. (a) $\sigma_N = 10$ e $\sigma_{\log N} = 0{,}1$; (b) $\sigma_N = 20$ e $\sigma_{\log N} = 0{,}2$;(c) $\sigma_N = 40$ e $\sigma_{\log N} = 0{,}4$.

Tanto a função geradora dos momentos quanto a função característica apresentam problemas de convergência, mas podemos calcular os momentos da Log-Normal $\boldsymbol{M_n} = \int_0^\infty \boldsymbol{y}^n \frac{\boldsymbol{e}^{-\frac{(\ln y-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\,\boldsymbol{\sigma}} \frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{y}}$ mudando a variável de integração para $\ln \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}^x$, $\frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{dx}$, quando $\boldsymbol{y} \to 0 \quad \boldsymbol{x} \to -\infty$ e quando $\boldsymbol{y} \to +\infty \quad \boldsymbol{x} \to +\infty$. Nesse caso: $\boldsymbol{M_n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\boldsymbol{\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{e}^{nx} \boldsymbol{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \boldsymbol{dx}$. O truque aqui é completar quadrado no expoente: $\boldsymbol{e}^{nx}\boldsymbol{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \boldsymbol{e}^{-\frac{(x-\mu)^2-2\sigma^2 nx}{2\sigma^2}} = \boldsymbol{e}^{-\frac{x^2-2\mu x+\mu^2-2\sigma^2 nx}{2\sigma^2}} = \boldsymbol{e}^{-\frac{x^2-2(\mu+n\sigma^2)x+(\mu+n\sigma^2)^2-(\mu+n\sigma^2)^2+\mu^2}{2\sigma^2}}$ continuando $\boldsymbol{e}^{nx}\boldsymbol{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \boldsymbol{e}^{-\frac{(x-\mu x-n\sigma^2)^2-(\mu^2+2\mu n\sigma^2+n^2\sigma^4)+\mu^2}{2\sigma^2}} = \boldsymbol{e}^{\mu n+n^2\frac{\sigma^2}{2}} \boldsymbol{e}^{-\frac{(x-\mu x-n\sigma^2)^2}{2\sigma^2}}$. Daí vemos que $\boldsymbol{M_n} = \boldsymbol{e}^{\mu n+n^2\frac{\sigma^2}{2}} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\boldsymbol{\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{e}^{-\frac{(x-\mu x-n\sigma^2)^2}{2\sigma^2}} \boldsymbol{dx} \right]$. A integral entre colchetes vale 1 e temos todos os momentos de ordem n dados por $\boldsymbol{M_n} = \boldsymbol{e}^{\mu n+n^2\frac{\sigma^2}{2}}$. Em particular temos $\boldsymbol{M}_0 = 1$; $\boldsymbol{M}_1 = \boldsymbol{e}^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$; $\boldsymbol{M}_2 = \boldsymbol{e}^{2\mu+2\sigma^2}$; $\boldsymbol{M}_3 = \boldsymbol{e}^{3\mu+\frac{9}{2}\sigma^2}$ e $\boldsymbol{M}_4 = \boldsymbol{e}^{4\mu+8\sigma^2}$. Podemos calcular os momentos centrados usando binômio de Newton $m_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \mu^{n-k} M_k$. Já sabemos que $\boldsymbol{m_o} = 1$ e $\boldsymbol{m}_1 = 0$. Para a variância m_2 temos: $\boldsymbol{m}_2 = \boldsymbol{M}_2 - \boldsymbol{M}_1^2$ logo $\boldsymbol{m}_2 = \boldsymbol{e}^{2\mu+2\sigma^2} - \boldsymbol{e}^{2\mu+\sigma^2} = \boldsymbol{e}^{2\mu+\sigma^2}(\boldsymbol{e}^{\sigma^2} - 1)$,

$V[y]=e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2}-1)$ e $\sqrt{V[y]}=e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}\sqrt{(e^{\sigma^2}-1)}$. Para o momento centrado de ordem 3 temos $m_3=M_3-3M_1M_2+2M_1^3$ de onde extraímos que $m_3=e^{3\mu+\frac{9}{2}\sigma^2}-3e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2}e^{2\mu+2\sigma^2}+2e^{3\mu+\frac{3}{2}\sigma^2}=e^{3\mu+\frac{9}{2}\sigma^2}-3e^{3\mu+\frac{5}{2}\sigma^2}+2e^{3\mu+\frac{3}{2}\sigma^2}$ e $m_3=e^{3\mu+\frac{3}{2}\sigma^2}\left[e^{3\sigma^2}-3e^{\sigma^2}+2\right]$. Fatorando o termo entre colchetes ainda chegamos a $m_3=e^{3\mu+\frac{3}{2}\sigma^2}\left[e^{\sigma^2}-1\right]^2\left[e^{\sigma^2}+2\right]$. A Skewness será dada por:

$$\alpha_3=\frac{m_3}{\left(\sqrt{V(y)}\right)^3}=\frac{e^{3\mu+\frac{3}{2}\sigma^2}\left[e^{\sigma^2}-1\right]^2}{e^{3\mu+\frac{3}{2}\sigma^2}\left[e^{\sigma^2}-1\right]^{\frac{3}{2}}}\left[e^{\sigma^2}+2\right]=\sqrt{\left(e^{\sigma^2}-1\right)}\left[e^{\sigma^2}+2\right].$$

Para o momento de ordem 4 $m_4=M_4-4M_1M_3+6M_1^2M_2-3M_1^4$ teremos:

$$m_4=e^{4\mu+8\sigma^2}-4e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}e^{3\mu+\frac{9}{2}\sigma^2}+6e^{2\mu+\sigma^2}e^{2\mu+2\sigma^2}-3e^{4\mu+2\sigma^2}=e^{4\mu+8\sigma^2}-4e^{4\mu+5\sigma^2}+6e^{4\mu+3\sigma^2}-3e^{4\mu+2\sigma^2}$$

Que pode ser simplificado para $m_4=e^{4\mu+2\sigma^2}\left[e^{6\sigma^2}-4e^{3\sigma^2}+6e^{\sigma^2}-3\right]$ e fatorando o termo:

$$\left[e^{6\sigma^2}-4e^{3\sigma^2}+6e^{\sigma^2}-3\right]=\left[e^{\sigma^2}-1\right]\left[e^{5\sigma^2}+e^{4\sigma^2}+e^{3\sigma^2}-3e^{2\sigma^2}-3e^{\sigma^2}+3\right]=\left[e^{\sigma^2}-1\right]^2\left[e^{4\sigma^2}+2e^{3\sigma^2}+3e^{2\sigma^2}-3\right]$$

obtemos, finalmente: $m_4=e^{4\mu+2\sigma^2}\left[e^{\sigma^2}-1\right]^2\left[e^{4\sigma^2}+2e^{3\sigma^2}+3e^{2\sigma^2}-3\right]$.

Agora $$\alpha_4=\frac{m_4}{\left(\sqrt{V(y)}\right)^4}=\frac{e^{4\mu+2\sigma^2}\left[e^{\sigma^2}-1\right]^2}{e^{4\mu+2\sigma^2}\left[e^{\sigma^2}-1\right]^2}\left[e^{4\sigma^2}+2e^{3\sigma^2}+3e^{2\sigma^2}-3\right]=\left[e^{4\sigma^2}+2e^{3\sigma^2}+3e^{2\sigma^2}-3\right]$$

que leva à curtose $k=\left[e^{4\sigma^2}+2e^{3\sigma^2}+3e^{2\sigma^2}-6\right]$. Como $1+2+3=6$ percebe-se que $k\geq 0$ sempre, com a igualdade valendo apenas se $\sigma^2=0$.

Distribuição Gama:

Função gama: Vamos calcular a seguinte integral: $I(z)=\int_0^\infty t^z e^{-t}dt$. Fazendo por partes $\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du$ com $u=t^z$; $du = z t^{z-1}dt$, $dv = e^{-t}dt$ e $v=-e^{-t}$, temos que:

$$I(z)=\int_0^\infty t^z e^{-t}dt = -t^z e^{-t}\Big|_0^\infty + z\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt \,.$$

Mas $-t^z e^{-t}\Big|_0^\infty = 0$, pelo t^z em $t=0$ e pelo e^{-t} em $t=\infty$, então $I(z)=z\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$, o que nos leva à relação de recorrência $I(z)=zI(z-1)$. Aplicando essa relação várias vezes temos que $I(z)=zI(z-1)=z(z-1)I(z-2)=\cdots=z(z-1)(z-2)\cdots 1\times I(0)\quad z\in\mathbb{N}$. Pela definição de $I(z)$ temos que $I(0)=\int_0^\infty e^{-t}dt = -e^{-t}\Big|_0^\infty = 1$, portanto $I(z)=z!$.

A identidade acima foi mostrada apenas para Z inteiro positivo, mas dado que a integral existe ela pode ser utilizada para generalizar a função fatorial para reais e até mesmo complexos, com a única condição de que a integral convirja. Assim: $z!=\int_0^\infty t^z e^{-t}dt$. Essa integral não apresenta problemas para $t\to\infty$ por conta do e^{-t} mas pode ter problemas para $t\to 0$ se $z<0$. A integral converge se $\int_0^x t^z dt$ existe. Para $z\neq -1$ a integral $\int_0^x t^z dt = \dfrac{t^{z+1}}{z+1}\Bigg|_{t=0}$ existe se $z+1>0$, ou seja, $z>-1$.

A função gama é definida por: $\Gamma(z)=\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$, com $\operatorname{Re} Z>0$. A relação com a função fatorial é dada por $\Gamma(z)=(z-1)!$ e $z!=\Gamma(z+1)$. Formas equivalentes: vamos mudar a variável para $t=x^2$ e $dt=2x\,dx$ então $\Gamma(z)=2\int_0^\infty (x^2)^{z-1} e^{-x^2} x\,dx$, finalmente $\Gamma(z)=2\int_0^\infty x^{2z-1}e^{-x^2}dx$ e

$z! = 2\int_0^{\infty} x^{2z+1} e^{-x^2} dx$. Fazendo $z = \frac{1}{2}$ vemos que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ de onde extraímos que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ e que $\left(-\frac{1}{2}\right)! = \sqrt{\pi}$.

A distribuição gama é dada por:

$$f_{gama}\left(x - x_o; \alpha, \beta\right) = \frac{\left(x - x_o\right)^{\alpha-1} e^{-\frac{x-x_o}{\beta}}}{\beta^{\alpha}\,\Gamma(\alpha)} H\left(x - x_o\right)$$

Vamos mostrar que a área sobre a curva vale sempre 1.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{gama}(x)\,dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x_o}^{+\infty} \left(\frac{x - x_o}{\beta}\right)^{\alpha-1} e^{-\frac{x-x_o}{\beta}} d\left(\frac{x}{\beta}\right) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} = 1$$

Casos particulares:

1. $\alpha = 1$ então $f_{\text{exponencial}}\left(x - x_o; \beta\right) = f_{gama}\left(x - x_o; 1, \beta\right) = \frac{e^{-\frac{x-x_o}{\beta}}}{\beta} H\left(x - x_o\right)$

2. $\alpha = \frac{\nu}{2}$ e $\beta = 2$ então $f_{\chi^2}\left(x - x_o; \nu\right) = f_{gama}\left(x - x_o; \frac{\nu}{2}, 2\right) = \frac{\left(x - x_o\right)^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{x-x_o}{2}}}{2^{\nu/2}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} H\left(x - x_o\right)$

   é a distribuição chi-quadrado [se pronuncia qui-quadrado].

FGM da distribuição gama:

$$M(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{xt} \left(\frac{x - x_o}{\beta}\right)^{\alpha-1} e^{-\frac{x-x_o}{\beta}} H\left(x - x_o\right) d\left(\frac{x}{\beta}\right) = \frac{e^{x_o t}}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(x-x_o)t} \left(\frac{x - x_o}{\beta}\right)^{\alpha-1} e^{-\frac{x-x_o}{\beta}} H\left(x - x_o\right) d\left(\frac{x - x_o}{\beta}\right)$$

$$M(t) = \frac{e^{x_o t}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} e^{\beta t u} u^{\alpha-1} e^{-u} du = \frac{e^{x_o t}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} u^{\alpha-1} e^{-(1-\beta t)u} du = \frac{e^{x_o t}}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{(1-\beta t)^{\alpha}} \int_0^{+\infty} \left[(1-\beta t)u\right]^{\alpha-1} e^{-(1-\beta t)u} d\left[(1-\beta t)u\right]$$

$$M(t)=\frac{e^{x_o t}}{\Gamma(\alpha)}(1-\beta t)^{-\alpha}\int_0^{+\infty} v^{\alpha-1}e^{-v}dv=\frac{e^{x_o t}}{\Gamma(\alpha)}(1-\beta t)^{-\alpha}\,\Gamma(\alpha)$$

$$M(t)=e^{x_o t}(1-\beta t)^{-\alpha}$$

Logo $\varphi(t)=e^{ix_o t}(1-i\beta t)^{-\alpha}$

Esperança: $M'(t)=x_o e^{x_o t}(1-\beta t)^{-\alpha}+\alpha\beta e^{x_o t}(1-\beta t)^{-\alpha-1}$ então $\mu=M'(0)=x_o+\alpha\beta$.

Se $\mu=0$ então $x_o=-\alpha\beta$ logo neste caso $\varphi(t)=e^{-i\alpha\beta t}(1-i\beta t)^{-\alpha}$ e $\varphi^n(t)=e^{-in\alpha\beta t}(1-i\beta t)^{-n\alpha}$ o que gera uma distribuição gama com $\Gamma(x-n\alpha\beta;n\alpha,\beta)$.

Cumulantes: $\ln\varphi(t)=\ln e^{ix_o t}-\alpha\ln(1-i\beta t)=ix_o t-\alpha\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-i)^k(-1)^{k-1}\beta^k}{k}t^k$, pela série do logarítmo $\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k$, ou seja, $\ln\varphi(t)=ix_o t+\alpha\sum_{k=1}^{\infty}\frac{i^k k!\beta^k}{k}\frac{t^k}{k!}$, finalmente:

$$\ln\varphi(t)=i(x_o+\alpha\beta)t+\sum_{k=2}^{\infty}\left[i^k(k-1)!\alpha\beta^k\right]\frac{t^k}{k!}$$

Comparando com $\ln\varphi(t)=\sum_{k=0}^{\infty}i^k c_k\,\frac{t^k}{k!}$, da definição dos cumulantes, vemos que $c_1=\mu=x_o+\alpha\beta$ e que $c_k=(k-1)!\alpha\beta^k$, de onde extraímos que $c_2=\sigma^2=\alpha\beta^2$, $c_3=m_3=2\alpha\beta^3$ e $c_4=6\alpha\beta^4$. Assim a curtose vale $k=\frac{6\alpha\beta^4}{\alpha^2\beta^4}=\frac{6}{\alpha}$, positiva, logo leptocúrtica. Usando o fato de que $c_4=m_4-3\sigma^4$ vemos que $6\alpha\beta^4=m_4-3\alpha^2\beta^4$ e extraímos $m_4=3\alpha(\alpha+2)\beta^4$.

Aditividade da distribuição gama:

Sejam $x_1,x_2,\cdots,x_n$ n v.a.´s independentes que seguem a distribuição gama de mesmo β mas com diferentes $\alpha's$ e $x_o's$, ou seja, $f(x_i)=Gama(x_i-x_{oi};\alpha_i,\beta)$. Então a variável $z=x_1+x_2+\cdots+x_n$ também segue a distribuição com $x_o=x_{o1}+x_{o2}+\cdots+x_{on}$ e $\alpha=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$ e mesmo β. Pelo teorema da convolução $\varphi_z(t)=e^{ix_{o1}t}(1-i\beta t)^{-\alpha_1}e^{ix_{o2}t}(1-i\beta t)^{-\alpha_2}\cdots e^{ix_{on}t}(1-i\beta t)^{-\alpha_n}$ logo $\varphi_z(t)=e^{i(x_{o1}+x_{o2}+\cdots+x_{on})t}(1-i\beta t)^{-(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)}$ que é a função característica da distribuição gama.

Convergência para a Normal:

Se $\alpha\to\infty$ podemos usar o truque do logarítmo para analisar o comportamento assimptótico da distribuição gama. Aplicando o logarítmo na função característica temos: $\ln\left[\varphi(t)\right]=ix_ot-\alpha\ln\left[1-i\beta t\right]$, usando $\ln(1-x)=-\left[x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+...\right]$ com $x=i\beta t$ obtemos, até segunda ordem, $\ln(1-x)\cong -i\beta t-\frac{(i\beta t)^2}{2}=-i\beta t+\frac{\beta^2}{2}t^2$. Nesse caso temos então que $\ln\left[\varphi(t)\right]=i(x_o+\alpha\beta)t-\frac{\alpha\beta^2}{2}t^2$ ou $\varphi(t)=e^{i(x_o+\alpha\beta)t-\frac{\alpha\beta^2}{2}t^2}$ que é a função característica de uma normal com $\mu=x_o+\alpha\beta$ e $\sigma^2=\alpha\beta^2$. Logo para $\underset{\alpha\to\infty}{Lim}\Gamma(x-x_o;\alpha,\beta)\to N\left(x-x_o;\alpha\beta,\alpha\beta^2\right)$.

Distribuição Chi-quadrado:

Na função Gama vamos fazer $\alpha=\frac{\nu}{2}$ e $\beta=2$. Nesse caso temos: $\alpha={}^{\nu}\!/_{2}$ e $\beta=2$ então

$$f_{\chi^2}(x-x_o;\nu)=\frac{(x-x_o)^{\frac{\nu}{2}-1}e^{-\frac{x-x_o}{2}}}{2^{\nu/2}\,\Gamma\left({}^{\nu}\!/_{2}\right)}H(x-x_o).$$

Distribuições t-student e F.

Agora suponha a variável $y=x^2$ onde x segue uma normal $N(0,1)$. Então y segue a distribuição χ^2 com $f_y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}y^{-1/2}e^{-\frac{y}{2\sigma^2}}H(y)$. Agora a v.a. $S^2=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$ segue a distribuição Gama com $f\left(S^2\right)=$nnnnnnnn

Suponha que x segue uma normal $N(\mu,\sigma)$ cuja função característica vale $\varphi_x(t)=e^{i\mu t-\frac{\sigma^2t^2}{2}}$. Qual a distribuição de $z=x_1+x_2+\cdots+x_n$ com x´s iid? A nova função característica será dada por $\varphi_x(t)=e^{in\mu t-n\frac{\sigma^2t^2}{2}}=e^{in\mu t-\frac{(\sqrt{n}\,\sigma)^2t^2}{2}}$ logo z segue uma normal $N(n\mu,\sqrt{n}\,\sigma)$. Agora vamos mudar a v.a. para a média $\overline{x}=\frac{z}{n}=\frac{1}{n}\sum_j x_j$. Nesse caso $f_{\overline{x}}\left(\frac{z}{n}\right)=nf_z(n\overline{x})$, ou seja,

$$f_{\overline{x}}(\overline{x})=\frac{n}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-in\overline{x}t}e^{in\mu t-n\frac{\sigma^2t^2}{2}}dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-in\overline{x}t}e^{in\mu t-\frac{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2(nt)^2}{2}}d(nt)$$

Chamando $s=nt$ temos que

$$f_{\overline{x}}(\overline{x})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\overline{x}s}e^{i\mu s-\frac{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2s^2}{2}}ds=N\left(\mu,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Distribuição Beta:

Podemos iniciar a distribuição Beta descobrindo quanto vale $n!m!$. Usando a forma $z!=2\int_0^\infty x^{2z+1}e^{-x^2}dx$ podemos reescreever esse produto como:

$$n!m!=4\int_0^\infty x^{2n+1}e^{-x^2}dx\int_0^\infty y^{2m+1}e^{-y^2}dy=4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\left(x^2+y^2\right)}x^{2n+1}y^{2m+1}dxdy\,.$$

Vamos trocar para coordenadas polares $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, $x^2+y^2=r^2$ e $dx\,dy=r\,dr\,d\theta$. Temos que integrar apenas no primeiro quadrante, pois $x>0\ e\ y>0$, logo $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ e $0\le r<\infty$, logo:

$$n!m! = 4\int_0^{\infty}\int_0^{\pi/2} e^{-r^2} r^{2n+1} r^{2m+1} \cos^{2n+1}\theta \sin^{2m+1}\theta \; r\, dr\, d\theta = \left[2\int_0^{\infty} r^{2(n+m+1)+1} e^{-r^2} dr \right]\left[2\int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1}\theta \sin^{2m+1}\theta \; d\theta \right]$$

Ou seja: $n!m! = (n+m+1)!\,2\int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1}\theta \sin^{2m+1}\theta \; d\theta$

Fazendo $t = \cos^2\theta$, $1-t = 1-\cos^2\theta = \sin^2\theta$ e $dt = -2\sin\theta\cos\theta\, d\theta$ transformamos a integral acima em

$$n!m! = (n+m+1)!\int_0^{\pi/2} \left[\cos^2\theta\right]^n \left[\sin^2\theta\right]^m (2\sin\theta\cos\theta\, d\theta) = (n+m+1)!\int_1^0 t^n (1-t)^m (-dt) = (n+m+1)!\int_0^1 t^n (1-t)^m \, dt$$

Então sabemos que: $\int_0^1 t^n (1-t)^m \, dt = \dfrac{n!m!}{(n+m+1)!}$.

A função Beta é definida como $B(n,m) = \int_0^1 t^{n-1}(1-t)^{m-1} dt = \dfrac{(n-1)!(m-1)!}{(n+m-1)!} = \dfrac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(n+m)}$.

A distribuição Beta, definida no intervalo $0 \le x \le 1$ apenas, é dada por:

$$f_{beta}(x;\alpha,\beta) = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)} H(x) H(1-x)$$

FGM da Beta:

$$M_{beta}(t) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)}\int_0^1 e^{xt} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx = \frac{1}{B(\alpha,\beta)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\int_0^1 x^k x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx$$

$$M_{beta}(t) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\int_0^1 x^{\alpha+k-1}(1-x)^{\beta-1} dx = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{B(\alpha+k,\beta)}{B(\alpha,\beta)}\frac{t^k}{k!}$$

$$M_{beta}(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{B(\alpha+k,\beta)}{B(\alpha,\beta)}\frac{t^k}{k!}$$

Daqui extraímos que: $M_k = \dfrac{B(\alpha+k,\beta)}{B(\alpha,\beta)}$. Em termos dos fatoriais temos: $M_k = \dfrac{(\alpha+k-1)!(\beta-1)!}{(\alpha+k+\beta-1)!}\dfrac{(\alpha+\beta-1)!}{(\alpha-1)!(\beta-1)!}$, ou seja, $M_k = \dfrac{(\alpha+k-1)!}{(\alpha+k-1+\beta)!}\dfrac{(\alpha+\beta-1)!}{(\alpha-1)!}$.

1. $M_o = \dfrac{(\alpha-1)!}{(\alpha-1+\beta)!}\dfrac{(\alpha+\beta-1)!}{(\alpha-1)!} = 1.$

2. $M_1 = \dfrac{(\alpha)!}{(\alpha+\beta)!}\dfrac{(\alpha+\beta-1)!}{(\alpha-1)!} = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$ então $\mu = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$.

3. $M_2 = \dfrac{(\alpha+1)!}{(\alpha+\beta+1)!}\dfrac{(\alpha+\beta-1)!}{(\alpha-1)!} = \dfrac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}$ então $\sigma^2 = M_2 - \mu^2$ será dado por $\sigma^2 = \dfrac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)} - \dfrac{\alpha^2}{(\alpha+\beta)^2} = \dfrac{\alpha}{(\alpha+\beta)}\left[\dfrac{(\alpha+1)}{(\alpha+\beta+1)} - \dfrac{\alpha}{(\alpha+\beta)}\right]$ finalmente $\sigma^2 = \dfrac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2}$.

4. $M_3 = \dfrac{(\alpha+2)!}{(\alpha+\beta+2)!}\dfrac{(\alpha+\beta-1)!}{(\alpha-1)!} = \dfrac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta+2)}$.

5. $M_4 = \dfrac{(\alpha+3)!}{(\alpha+\beta+3)!}\dfrac{(\alpha+\beta-1)!}{(\alpha-1)!} = \dfrac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+3)}$.

Distribuição Logística:

$F(x;\theta) = \dfrac{1}{1+e^{-\frac{x-x_o}{\theta}}}$ então $f(x;\theta) = \dfrac{d}{dx}\left(1+e^{-\frac{x-x_o}{\theta}}\right)^{-1} = \dfrac{1}{\theta}\dfrac{e^{-\frac{x-x_o}{\theta}}}{\left(1+e^{-\frac{x-x_o}{\theta}}\right)^2}$

$$M(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx}\frac{dF(x)}{dx}dx = e^{tx}F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - t\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx}F(x)dx$$

$$M(t)=e^{x_o t}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\theta t\left(\frac{x-x_o}{\theta}\right)}\frac{e^{-\frac{x-x_o}{\theta}}}{\left(1+e^{-\frac{x-x_o}{\theta}}\right)^2}\,d\,\frac{x-x_o}{\theta}=e^{x_o t}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left(e^z\right)^{\theta t-1}}{\left(1+e^{-z}\right)^2}dz$$

$$z=\ln s \quad dz=\frac{1}{s}ds$$

$$M(t)=e^{x_o t}\int_{0}^{+\infty}\frac{\left(e^{\ln s}\right)^{\theta t-1}}{\left(1+e^{-\ln s}\right)^2}\frac{1}{s}ds=e^{x_o t}\int_{0}^{+\infty}\frac{s^{\theta t}}{\left(s+1\right)^2}ds$$

$$s=\frac{t}{(1-t)}\ ;\ ds=\frac{1}{(1-t)^2}dt\ ,\ s+1=\frac{t}{(1-t)}+1=\frac{1}{(1-t)}$$

$$M(t)=e^{x_o t}\int_0^1\frac{\frac{t^{\theta t}}{(1-t)^{\theta t}}}{\frac{1}{(1-t)^2}}\frac{1}{(1-t)^2}dt=e^{x_o t}\int_0^1 t^{\theta t+1-1}(1-t)^{-\theta t+1-1}dt=e^{x_o t}B\left(1+\theta t,1-\theta t\right)$$

Distribuição t de Student.

Uma variável aleatória t de Student é dada por uma variável normal cuja variância é igual à recíproca de uma variável que segue uma distribuição gama. Se a variável x segue uma normal com média nula mas variância $\frac{1}{\sigma^2}=\psi$ desconhecida então $f\left(x|\psi\right)=\sqrt{\frac{\psi}{2\pi}}\ e^{-\frac{\psi}{2}x^2}$. A ψ segue uma distribuição gama com parâmetros $f_{gama}\left(\psi;\alpha,\beta\right)=\frac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}\psi^{\alpha-1}e^{-\frac{\psi}{\beta}}H(\psi)$, então x segue a distribuição:

$$f(x)=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\frac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty d\psi\,\psi^{\alpha-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\psi}{\beta}}e^{-\frac{\psi}{2}x^2}=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\frac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty d\psi\,\psi^{\alpha-\frac{1}{2}}e^{-\left[1+\frac{\beta x^2}{2}\right]\frac{\psi}{\beta}}$$

Ou seja, $f\left(x\right)=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\frac{\beta^{\alpha+\frac{1}{2}}}{\beta^{\alpha}\Gamma\left(\alpha\right)}\left[1+\frac{\beta x^2}{2}\right]^{-\alpha-\frac{1}{2}}\int_0^{\infty}\left[1+\frac{\beta x^2}{2}\right]\frac{d\psi}{\beta}\left[1+\frac{\beta x^2}{2}\right]^{\alpha-\frac{1}{2}}\frac{\psi^{\alpha-\frac{1}{2}}}{\beta^{\alpha-\frac{1}{2}}}e^{-\left[1+\frac{\beta x^2}{2}\right]\frac{\psi}{\beta}}$, de modo que $f\left(x\right)=\sqrt{\frac{\beta}{2\pi}}\frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\left[1+\frac{\beta x^2}{2}\right]^{-\alpha-\frac{1}{2}}\int_0^{\infty}z^{\alpha+\frac{1}{2}-1}e^{-z}dz=\sqrt{\frac{\beta}{2\pi}}\frac{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\alpha\right)}\left[1+\frac{\beta x^2}{2}\right]^{-\alpha-\frac{1}{2}}$. Para $\alpha=\nu/2$ e $\beta=\frac{2}{\nu}$ chegamos a distribuição t de Student dada por $f\left(x\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\left[1+\frac{x^2}{\nu}\right]^{-\frac{\nu+1}{2}}$.

A distribuição t de Student não possui função geradora dos momentos mas possui função característica dada por $\varphi\left(t\right)=\frac{K_{\nu/2}\left(\nu\left|t\right|\right)\left(\sqrt{\nu}\left|t\right|\right)^{\nu/2}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)2^{\frac{\nu}{2}-1}}$ onde $K_{\nu/2}\left(x\right)$ é a função de Bessel modificada. Note entretanto que é uma função do módulo de t, não diferenciável, e portanto não pode ser utilizada para cálculo dos momentos.

Distribuição normal multivariada:

Se as v.a.s correlacionadas seguem uma distribuição normal multivariada queremos mostrar que a função densidade de probabilidade conjunta é dada por:

$f\left(\vec{x}\right)=Ae^{-\frac{1}{2}\sum_i\sum_j\left(x_i-\mu_i\right)V_{ij}^{-1}\left(x_j-\mu_j\right)}$ onde V é a matriz de variância-covariância. O fato de que se trata de uma matriz definida positiva garante que o expoente será sempre negativo e f caia a zero para grandes valores de x. Antes de mais nada precisamos encontrar a constante normalizadora A tal que $\iiint Ae^{-\frac{1}{2}\sum_i\sum_j\left(x_i-\mu_i\right)V_{ij}^{-1}\left(x_j-\mu_j\right)}dx_1dx_2\cdots dx_n=1$. Para realizar essa operação precisamos antes diagnolizar a matriz V^{-1}. Voltando à distribuição normal multivariada temos que a integral $\iiint Ae^{-\frac{1}{2}\sum_i\sum_j\left(x_i-\mu_i\right)V_{ij}^{-1}\left(x_j-\mu_j\right)}dx_1dx_2\cdots dx_n=1$ é complicada por causa dos termos cruzados envolvendo x_i e x_j. Então a idéia é diagonalizar e ficar apenas com termos contendo z_i^2. Para tanto vamos começar definindo $q_i=x_i-\mu_i$ e reescrever a integral como $A\iiint e^{-\frac{1}{2}\sum_i\sum_j q_i V_{ij}^{-1}q_j}dq_1dq_2\cdots dq_n=1$. Agora notamos que temos $A\iiint e^{-\frac{1}{2}\vec{q}'V^{-1}\vec{q}}dq_1dq_2\cdots dq_n=1$ e diagonalizamos a matriz V^{-1} no expoente com o seguinte truque: $A\iiint e^{-\frac{1}{2}\vec{q}'S\left(S'V^{-1}S\right)S'\vec{q}}dq_1dq_2\cdots dq_n=A\iiint e^{-\frac{1}{2}\left(S'\vec{q}\right)'\left(S'V^{-1}S\right)\left(S'\vec{q}\right)}dq_1dq_2\cdots dq_n=1$. Agora mudamos para as variáveis giradas, $\vec{z}=S'\vec{q}$, ou seja, $z_i=\sum_j S'_{ij}q_j$. Multiplicando pela inversa de S´ temos que $\vec{q}=S\,\vec{z}$, ou seja, $q_i=\sum_j S_{ij}z_j$ de onde tiramos que $\frac{\partial q_i}{\partial z_j}=S_{ij}$ e que a matriz Jacobiana J é a própria matriz S. Sabemos que $dq_1\,dq_2\cdots dq_n=\det\left(J\right)dz_1\,dz_2\cdots dz_n$. Mas, nesse caso, como $J=S$ e $\det\left(S\right)=1$ então $dq_1\,dq_2\cdots dq_n=dz_1\,dz_2\cdots dz_n$ e a integral fica na forma $A\iiint e^{-\sum_i\frac{z_i^2}{2\lambda_i}}dz_1dz_2\cdots dz_n=A\prod_i\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{z_i^2}{2\lambda_i}}dz_i=A\prod_i\sqrt{2\lambda_i}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}du=A\prod_i\sqrt{2\pi\lambda_i}=1$. Isso significa que $A=\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n\sqrt{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n}}$ onde λ_i são os autovalores de V. Agora, usamos o fato de que a diagonalização de uma matriz preserva o determinante e que, portanto, $\det\left(V\right)=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$. Daí obtemos que $A=\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n\sqrt{\det V}}$.

A distribuição Normal multivariada é dada por:

$$f\left(\vec{x}\right)=\frac{e^{-\frac{1}{2}\sum_i\sum_j\left(x_i-\mu_i\right)V_{ij}^{-1}\left(x_j-\mu_j\right)}}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n\sqrt{\det V}}=\frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\vec{x}-\vec{\mu}\right)'V^{-1}\left(\vec{x}-\vec{\mu}\right)}}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n\sqrt{\det V}}$$

Para achar a matriz de variância-covariância entre as variáveis x notamos que que as variáveis z´s são independentes, pois $f\left(z_i,z_j\right)=f_i\left(z_i\right)f_j\left(z_j\right)$, seguindo uma normal com esperança nula e variância λ_i, ou seja, $E\left[z_i\right]=0$ e $E\left[z_iz_j\right]=\lambda_i\delta_{ij}$. A relação entre as variáveis z´s e as x´s originais é: $x_i=\mu_i+\sum_j S_{ij}z_j$, de onde tiramos que $E\left[x_i\right]=\mu_i+\sum_j S_{ij}E\left[z_j\right]=\mu_i$ e $x_i-\mu_i=\sum_j S_{ij}z_j$, logo, $\left(x_i-\mu_i\right)\left(x_k-\mu_k\right)=\sum_j\sum_j S_{kl}S_{ij}z_jz_l$ então:

$$E\left[(x_i-\mu_i)(x_k-\mu_k)\right]=\sum_j\sum_l S_{kl}S_{ij}E\left[z_jz_l\right]=\sum_j\sum_l\frac{1}{\lambda_j}S_{kl}S_{ij}\delta_{jl}=\sum_j\lambda_jS_{ij}S'_{jk}=SDS'=V\ .$$

Geração de variáveis correlacionadas – método da decomposição de Cholesky.

Sabemos que a matriz de variância-covariância V é simétrica e definida positiva. Toda matriz dessa forma pode ser decomposta em uma multiplicação de matrizes triangulares superior e inferior, ou seja, queremos escrever $V=\Delta\Delta'$ onde $\Delta=\begin{pmatrix}\delta_{11} & 0 & 0\\ \delta_{21} & \delta_{22} & 0\\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33}\end{pmatrix}$ é uma matriz triangular inferior e $\Delta'=\begin{pmatrix}\delta_{11} & \delta_{21} & \delta_{31}\\ 0 & \delta_{22} & \delta_{32}\\ 0 & 0 & \delta_{33}\end{pmatrix}$ é triangular superior. Sabemos que qualquer matriz dada por $M=AA'$ é simétrica pois $M'=(AA')'=A''A'=AA'=M$. Logo $\Delta\Delta'$ é uma matriz simétrica. Agora note que

$$\Delta\Delta'=\begin{pmatrix}\delta_{11} & 0 & 0\\ \delta_{21} & \delta_{22} & 0\\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta_{11} & \delta_{21} & \delta_{31}\\ 0 & \delta_{22} & \delta_{32}\\ 0 & 0 & \delta_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\delta_{11}^2 & \delta_{11}\delta_{21} & \delta_{11}\delta_{31}\\ \delta_{11}\delta_{21} & \delta_{21}^2+\delta_{22}^2 & \\ \delta_{11}\delta_{31} & & \end{pmatrix}.$$

Percebe-se do processo que $\delta_{11}^2=V_{11}\rightarrow\delta_{11}=\sqrt{V_{11}}$ e $\delta_{11}\delta_{21}=V_{12}\rightarrow\delta_{21}=\frac{V_{12}}{\sqrt{V_{11}}}$ e $\delta_{11}\delta_{31}=V_{13}\rightarrow\delta_{31}=\frac{V_{13}}{\sqrt{V_{11}}}$ $\delta_{21}^2+\delta_{22}^2=V_{22}\rightarrow\delta_{22}^2=V_{22}-\frac{V_{12}^2}{V_{11}}=\frac{V_{11}V_{22}-V_{12}^2}{V_{11}}\rightarrow\delta_{22}=\sqrt{\frac{V_{11}V_{22}-V_{12}^2}{V_{11}}}$. O processo pode ser continuado, mas existem pacotes capazes de realizar a decomposição de Cholesky. Note que é necessário que V seja definida positiva para que as raízes sejam reais.

Agora geramos n v.a.s independentes com esperança nula e variância unitária, i.e., $E\left[x_i\right]=0$; $E\left[x_ix_j\right]=\delta_{ij}$ e com essas variáveis construímos as variáveis z´s dadas por $z_i=\sum_j\Delta_{ij}x_j+\overline{z}_i$ portanto $E\left[z_i\right]=\sum_j\Delta_{ij}E\left[x_j\right]+E\left[\overline{z}_i\right]=\overline{z}_i$. Nesse caso $\left(z_i-E\left[z_i\right]\right)=\left(z_i-\overline{z}_i\right)=\sum_j\Delta_{ij}x_j$. Daí extraímos que

$\left(z_k - \overline{z}_k\right) = \sum_l \Delta_{kl} x_l$ e $\left(z_i - \overline{z}_i\right)\left(z_k - \overline{z}_k\right) = \sum_l \sum_j \Delta_{kl} \Delta_{ij} x_j x_l$. Aplicando a esperança de ambos os lados:

$$E\left[\left(z_i - \overline{z}_i\right)\left(z_k - \overline{z}_k\right)\right] = \sum_l \sum_j \Delta_{kl} \Delta_{ij} E\left[x_j x_l\right] = \sum_l \sum_j \Delta_{kl} \Delta_{ij} \delta_{jl} = \sum_j \Delta_{ij} \Delta_{kj} = \sum_j \Delta_{ij} \Delta'_{jk} = \Delta\Delta' = V$$

Conseguimos então um conjunto de n v.a.s z_i com esperança e variância determinadas.

Aspectos fundamentais dessa técnica são: (1) A matriz de partida tem que ser simétrica e definida positiva; (2) as variáveis independentes devem ter esperança nula e (3) variância igual a 1.