Introdução à Econofísica

Aula 4

O modelo de Bachelier (1900) para o movimento Browniano: a primeira proposta da dinâmica do preço de um ativo financeiro

Para entendermos o modelo que Bachelier propôs em 1900 para a dinâmica do preço de um ativo financeiro, inicialmente estudamos o movimento aleatório em uma dimensão e depois tomamos seu limite contínuo, definindo o movimento Browniano unidimensional.

Movimento aleatório em uma dimensão

As considerações a seguir são baseadas no livro "Mathematical Models of Financial Derivatives", de Yue-Kuen Kwok. Consideremos uma partícula pontual que pode mover-se apenas ao longo do eixo x, com passos de tamanho δ fixo, em ambos os sentidos do eixo x. Suponhamos ainda que a partícula começa na origem e, a cada passo, tem probabilidade p de dar um passo no sentido positivo, mudando sua posição de $+\delta$, e tem probabilidade q, com $p+q=1$, de dar um passo no sentido negativo, mudando sua posição de $-\delta$. Assim, cada passo da partícula independe de seus passos anteriores, já que as probabilidades p e q são sempre as mesmas. O valor esperado do deslocamento x_i do i-ésimo passo é, portanto,

$$\begin{aligned} E(x_i) &= p\delta + q(-\delta) \\ &= (p-q)\delta, \end{aligned}$$

independentemente de i. Após n passos, a partícula tem a posição X_n dada pela soma de todos os n deslocamentos:

$$X_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

Logo, como os passos são todos independentes, o valor esperado da posição da partícula após n passos é:

$$\begin{aligned} E(X_n) &= E\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} E(x_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (p-q)\delta \\ &= n(p-q)\delta. \end{aligned} \tag{1}$$

A variância de X_n é, por definição, dada por:

$$\begin{aligned}
\operatorname{var}(X_n) &= E\left\{[X_n - E(X_n)]^2\right\} \\
&= E\left\{X_n^2 - 2X_n E(X_n) + [E(X_n)]^2\right\} \\
&= E\left(X_n^2\right) + E[-2X_n E(X_n)] + E\left\{[E(X_n)]^2\right\} \\
&= E\left(X_n^2\right) - 2E(X_n)E(X_n) + [E(X_n)]^2 \\
&= E\left(X_n^2\right) - [E(X_n)]^2 .
\end{aligned}$$

Já calculamos $E(X_n)$. Calculemos agora:

$$\begin{aligned}
E\left(X_n^2\right) &= E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right] \\
&= E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)\right] \\
&= E\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} E(x_i x_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} E\left(x_i^2\right) + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} E(x_i x_j) .
\end{aligned}$$

Como os passos são todos independentes,

$$\begin{aligned}
E(x_i x_j) &= E(x_i)E(x_j) \\
&= [(p-q)\delta]^2 .
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} E(x_i x_j) &= \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} [(p-q)\delta]^2 \\
&= [(p-q)\delta]^2 \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) \\
&= [(p-q)\delta]^2 \left[n(n-1) - \sum_{i=1}^{n-1} i\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[(p-q)\,\delta\right]^2 \left[n\,(n-1) - \frac{(n-1)\,n}{2}\right] \\
&= \left[(p-q)\,\delta\right]^2 (n-1) \left[n - \frac{n}{2}\right] \\
&= \left[(p-q)\,\delta\right]^2 \frac{(n-1)\,n}{2},
\end{aligned}
$$

onde utilizamos:

$$
\sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{(n-1)\,n}{2}.
$$

Resta-nos calcular:

$$
\begin{aligned}
E\left(x_i^2\right) &= p\delta^2 + q\delta^2 \\
&= \delta^2,
\end{aligned}
$$

pois

$$
p + q = 1.
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{var}\,(X_n) &= \sum_{i=1}^{n} E\left(x_i^2\right) + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} E\left(x_i x_j\right) - \left[E\left(X_n\right)\right]^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} \delta^2 + 2\left[(p-q)\,\delta\right]^2 \frac{(n-1)\,n}{2} - \left[n\,(p-q)\,\delta\right]^2 \\
&= n\delta^2 + (n-1)\,n\left[(p-q)\,\delta\right]^2 - n^2\left[(p-q)\,\delta\right]^2 \\
&= n\delta^2 - n\left[(p-q)\,\delta\right]^2 \\
&= n\delta^2 - n\left(p^2 - 2pq + q^2\right)\delta^2 \\
&= n\delta^2\left(1 - p^2 - q^2 + 2pq\right).
\end{aligned}
$$

Como $p + q = 1$, segue que

$$
\begin{aligned}
p^2 + 2pq + q^2 &= (p+q)^2 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

e, portanto,

$$
1 - p^2 - q^2 = 2pq.
$$

Logo,

$$
\mathrm{var}\,(X_n) = 4pqn\delta^2. \tag{2}
$$

Limite contínuo do movimento aleatório

Aqui calculamos o que acontece quando $\delta \to 0$, ou seja, a partícula pode mover-se continuamente e, em cada passo infinitesimal, ainda tem probabilidade p de deslocar-se $+\delta$ e probabilidade q de deslocar-se $-\delta$. Seja $u(x,t)$ a probabilidade de que a partícula esteja na posição x no instante t. Suponhamos que a partícula dá r passos por unidade de tempo. Assim, o intervalo de tempo entre dois passos é dado por

$$\lambda = \frac{1}{r}$$

e, portanto, no limite contínuo, isto é, quando $\delta \to 0$, temos $r \to \infty$ e $\lambda \to 0$. Antes de tomarmos o limite, podemos dizer que o número de passos no instante t é dado por

$$n = rt,$$

ou ainda, podemos dizer que o instante de tempo t é dado por

$$t = n\lambda.$$

Com isso, podemos dizer também que, depois de n passos, a partícula tem probabilidade $u(x,t)$ de encontrar-se em $x = X_n$, no instante t. No próximo passo, que ocorre no instante $t+\lambda$, a probabilidade de a partícula encontrar-se em x é dada por

$$u(x,t+\lambda) = pu(x-\delta,t) + qu(x+\delta,t).$$

Para entendermos essa equação, basta pensarmos que, para a partícula estar em x no instante t, pode ter vindo da posição $x-\delta$, dando um passo no sentido positivo do eixo x, deslocando-se de $+\delta$, ou pode ter vindo de $x+\delta$, deslocando-se de $-\delta$. No primeiro caso, a probabilidade de a partícula estar em $x-\delta$ no instante t, anterior a $t+\lambda$, é $u(x-\delta,t)$ e a probabilidade de deslocar-se $+\delta$ é p. Logo, a probabilidade de que a partícula tenha vindo da posição $x-\delta$ é o produto $pu(x-\delta,t)$, já que para dar um passo no sentido positivo e parar em x, a partícula precisa, antes, estar em $x-\delta$. Analogamente, $qu(x+\delta,t)$ é a probabilidade de a partícula vir da posição $x+\delta$. Como, em $t+\lambda$, a partícula pode ter vindo de $x-\delta$ ***ou*** de $x+\delta$, segue que a probabilidade de estar em x é a soma de $pu(x-\delta,t)$ com $qu(x+\delta,t)$. Como temos em mente tomar o limite contínuo fazendo $\delta \to 0$ e $\lambda \to 0$, podemos expandir a equação acima em série de Taylor para as variáveis δ e λ:

$$u(x,t+\lambda) = u(x,t) + \lambda\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + O\left(\lambda^2\right),$$

$$
u(x-\delta,t) = u(x,t) - \delta\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \frac{\delta^2}{2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - O\left(\delta^3\right)
$$

e

$$
u(x+\delta,t) = u(x,t) + \delta\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \frac{\delta^2}{2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + O\left(\delta^3\right),
$$

dando:

$$
\begin{aligned}
u(x,t) + \lambda\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + O\left(\lambda^2\right) &= pu(x,t) - p\delta\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + p\frac{\delta^2}{2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - O\left(p\delta^3\right) \\
&+ qu(x,t) + q\delta\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + q\frac{\delta^2}{2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + O\left(q\delta^3\right),
\end{aligned}
$$

isto é,

$$
\lambda\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + O\left(\lambda^2\right) = (q-p)\,\delta\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \frac{\delta^2}{2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + O\left[(q-p)\,\delta^3\right].
$$

Dividindo tudo por λ, obtemos:

$$
\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + O(\lambda) = \left[(q-p)\,\frac{\delta}{\lambda}\right]\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\delta^2}{\lambda}\right)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + O\left[(q-p)\,\frac{\delta^3}{\lambda}\right] \tag{3}
$$

Vemos acima que temos alguns quocientes indeterminados.

Seja μ o valor esperado do deslocamento da partícula por unidade de tempo. Assim, segue da Eq. (1):

$$
\begin{aligned}
\mu &= r(p-q)\,\delta \\
&= (p-q)\,\frac{\delta}{\lambda}.
\end{aligned} \tag{4}
$$

Seja σ^2 a variância do deslocamento da partícula por unidade de tempo. Portanto, segue da Eq. (2):

$$
\begin{aligned}
\sigma^2 &= 4pqr\delta^2 \\
&= 4pq\frac{\delta^2}{\lambda}.
\end{aligned} \tag{5}
$$

Nossa intenção é caracterizar o movimento aleatório contínuo pelos parâmetros μ e σ^2 apenas. Isso é possível? Devemos, portanto, responder se é possível escolher p e q tais que:

$$
\lim_{\delta,\lambda\to 0}(p-q)\,\frac{\delta}{\lambda} = \mu
$$

e

$$
\lim_{\delta,\lambda\to 0} 4pq\frac{\delta^2}{\lambda} = \sigma^2,
$$

com μ e σ^2 quantidades finitas fixas. Elevando a Eq. (4) ao quadrado, temos:

$$\begin{aligned}\mu^2 &= (p-q)^2 \frac{\delta^2}{\lambda^2} \\ &= \left(p^2+q^2\right)\frac{\delta^2}{\lambda^2} - 2pq\frac{\delta^2}{\lambda^2}.\end{aligned}$$

Usando a Eq. (5), vem:

$$\mu^2 = \left(p^2+q^2\right)\frac{\delta^2}{\lambda^2} - \frac{\sigma^2}{2\lambda}.$$

Como $q = 1 - p$, obtemos:

$$\mu^2 = \left(2p^2+1-2p\right)\frac{\delta^2}{\lambda^2} - \frac{\sigma^2}{2\lambda},$$

ou seja,

$$\frac{\mu^2}{2}\lambda^2 = \left(p^2+\frac{1}{2}-p\right)\delta^2 - \frac{\sigma^2}{4}\lambda,$$

ou ainda,

$$p^2 - p + \frac{1}{2} - \frac{\sigma^2}{4}\frac{\lambda}{\delta^2} - \frac{\mu^2}{2}\frac{\lambda^2}{\delta^2} = 0.$$

Resolvendo:

$$p = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-1+\sigma^2\frac{\lambda}{\delta^2}+2\mu^2\frac{\lambda^2}{\delta^2}}.$$

Sem perda de generalidade, podemos escolher o sinal positivo para p e temos, para as probabilidades:

$$p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-1+\sigma^2\frac{\lambda}{\delta^2}+2\mu^2\frac{\lambda^2}{\delta^2}} \tag{6}$$

e

$$q = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-1+\sigma^2\frac{\lambda}{\delta^2}+2\mu^2\frac{\lambda^2}{\delta^2}}. \tag{7}$$

Testemos a consistência dessas duas equações com a Eq. (4):

$$\begin{aligned}(p-q)\frac{\delta}{\lambda} &= \frac{\delta}{\lambda}\sqrt{-1+\sigma^2\frac{\lambda}{\delta^2}+2\mu^2\frac{\lambda^2}{\delta^2}} \\ &= \mu, \qquad (8)\end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{\delta^2}{\lambda^2}\left(-1+\sigma^2\frac{\lambda}{\delta^2}+2\mu^2\frac{\lambda^2}{\delta^2}\right) - \mu^2 = 0.$$

Simplificando, ficamos com:

$$-\frac{\delta^2}{\lambda^2} + \frac{\sigma^2}{\lambda} + \mu^2 \;=\; 0,$$

ou ainda,

$$\lambda^2 + \frac{\sigma^2}{\mu^2}\lambda - \frac{\delta^2}{\mu^2} \;=\; 0,$$

resultando em:

$$\lambda \;=\; -\frac{\sigma^2}{2\mu^2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sigma^4}{\mu^4} + 4\frac{\delta^2}{\mu^2}}, \tag{9}$$

já que

$$\lambda \;\geqslant\; 0$$

por hipótese. Fica evidente que quando tomamos o limite em que δ vai a zero, necessariamente, devemos ter λ indo a zero também:

$$\lim_{\delta\to 0} \lambda \;=\; 0. \tag{10}$$

Das Eqs. (6), (7) e (8) seguem:

$$p \;=\; \frac{1}{2} + \frac{\mu}{2}\frac{\lambda}{\delta}$$

e

$$q \;=\; \frac{1}{2} - \frac{\mu}{2}\frac{\lambda}{\delta},$$

dando:

$$p - q \;=\; \mu\frac{\lambda}{\delta}$$

e, portanto,

$$\lim_{\delta\to 0} \left[(p-q)\,\frac{\delta}{\lambda}\right] \;=\; \mu. \tag{11}$$

Agora, calculemos

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{\delta^2}{\lambda}.$$

Fazendo uma expansão para δ^2 infinitesimal, obtemos:

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{\sigma^4}{\mu^4} + 4\frac{\delta^2}{\mu^2}} \;&=\; \frac{\sigma^2}{\mu^2}\sqrt{1 + 4\frac{\mu^2\delta^2}{\sigma^4}} \\ &\approx\; \frac{\sigma^2}{\mu^2} + 2\frac{\delta^2}{\sigma^2}\end{aligned}$$

e, portanto, a Eq. (9) dá:

$$\begin{aligned}\lambda &\approx -\frac{\sigma^2}{2\mu^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma^2}{\mu^2}+2\frac{\delta^2}{\sigma^2}\right)\\ &= \frac{\delta^2}{\sigma^2}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\lim_{\delta\to 0}\frac{\delta^2}{\lambda} &= \lim_{\delta\to 0}\frac{\delta^2}{\frac{\delta^2}{\sigma^2}}\\ &= \sigma^2. \qquad (12)\end{aligned}$$

Também temos:

$$\begin{aligned}\lim_{\delta\to 0}\left[(p-q)\frac{\delta^3}{\lambda}\right] &= \lim_{\delta\to 0}\left[\mu\frac{\lambda}{\delta}\frac{\delta^3}{\lambda}\right]\\ &= \lim_{\delta\to 0}\left[\mu\delta^2\right]\\ &= 0. \qquad (13)\end{aligned}$$

Tomemos o limite em que δ vai a zero de ambos os membros da Eq. (3):

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}+\lim_{\delta\to 0}O(\lambda) &= \left\{\lim_{\delta\to 0}\left[(q-p)\frac{\delta}{\lambda}\right]\right\}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\\ &+ \frac{1}{2}\left[\lim_{\delta\to 0}\left(\frac{\delta^2}{\lambda}\right)\right]\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+\lim_{\delta\to 0}O\left[(q-p)\frac{\delta^3}{\lambda}\right].\end{aligned}$$

Utilizando os limites expressos pelas Eqs. (10), (11), (12) e (13), a equação para a probabilidade $u(x,t)$ fica, finalmente,

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}+\mu\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}-\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0.$$

Essa é a equação de Kolmogorov avançada ou equação de Fokker-Planck.

É fácil verificar que a solução para essa equação é dada pela distribuição gaussiana:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}}\exp\left[-\frac{(x-\mu t)^2}{2\sigma^2 t}\right].$$

O modelo de Bachelier

Bachelier, em 1900, propôs que o preço de um ativo financeiro fosse descrito por um movimento Browniano contínuo, mas com $\mu = 0$.

Assim, o modelo de Bachelier tem algumas características não desejáveis:

- o modelo dá probabilidade não nula para o preço do ativo, x, assumir valores negativos, contrariando a condição de responsabilidades limitadas (limited liabilities);
- Bachelier supôs $\mu = 0$, sugerindo uma taxa de juros nula, o que não é sempre verdade.