Introdução à Econofísica

Aula 5

O modelo padrão da dinâmica do preço de um ativo financeiro: o movimento Browniano geométrico

Como vimos na aula passada, o modelo de Bachelier não é perfeito para descrever a dinâmica de preços de um ativo financeiro. Um problema com esse modelo é que prevê valores negativos de preços. Quando compramos um lote de ações, por exemplo, gastamos um certo montante para pagar por ele e pela corretagem. Se a empresa correspondente ficar devendo muito para seus credores, o valor das ações que compramos pode chegar a zero, mas jamais teremos a responsabilidade de pagar pela dívida da empresa, ou seja, jamais as ações que compramos terão valor negativo. Isso é o que significa responsabilidade limitada do dono de ações. No entanto, o retorno diário pode ser positivo ou negativo. Se o preço de fechamento de um ativo era S_i ontem e hoje é S_{i+1}, então o retorno relativo de um dia fica:

$$R_{i+1} \;=\; \frac{S_{i+1} - S_i}{S_i},$$

que pode até ser expresso por uma porcentagem. Essa equação pode ainda ser escrita como:

$$1 + R_{i+1} \;=\; \frac{S_{i+1}}{S_i}.$$

Como os preços são positivos (é muito raro o preço ser zero), podemos tomar o logaritmo de ambos os membros da equação acima:

$$\ln\left(1 + R_{i+1}\right) \;=\; \ln\left(\frac{S_{i+1}}{S_i}\right).$$

Quando o retorno é bem pequeno, podemos escrever:

$$\ln\left(1 + R_{i+1}\right) \;\approx\; R_{i+1}$$

e, nesse caso,

$$R_{i+1} \;\approx\; \ln\left(\frac{S_{i+1}}{S_i}\right).$$

Essa expressão, para retornos pequenos, sugere que uma variável interessante é dada pelo logaritmo do quociente entre os preços de fechamento:

$$X_{i+1} \;=\; \ln\left(\frac{S_{i+1}}{S_i}\right).$$

Se o preço hoje tender a zero, X_{i+1} tenderá a valores negativos imensos. Se o preço hoje tender a valores muito altos, X_{i+1} também tenderá a valores positivos muito grandes. No caso contínuo, podemos definir a variável:

$$X(t) = \ln\left[\frac{S(t)}{S_0}\right], \tag{1}$$

onde S_0 é o preço no instante $t = 0$ e $S(t)$ é o preço no instante $t > 0$. O modelo padrão para a dinâmica de preços é obtido quando supomos que $X(t)$ executa um movimento Browniano unidimensional, caracterizado pelos parâmetros μ e σ^2. Assim, a probabilidade de que a quantidade $X(t)$ tenha o valor x no instante t é dada como na aula passada:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \exp\left[-\frac{(x-\mu t)^2}{2\sigma^2 t}\right]. \tag{2}$$

Como é, então, a probabilidade de que o preço, $S(t)$, tenha o valor s no instante t?

Aqui, um pouco mais de sofisticação matemática é necessária. A Eq. (2) não pode descrever a probabilidade no caso contínuo, mas a densidade de probabilidade de que a variável x assuma um valor entre x e $x + dx$ no instante t. Isso é facilmente visto se tomarmos a integral:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, u(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \exp\left[-\frac{(x-\mu t)^2}{2\sigma^2 t}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \sqrt{\pi 2\sigma^2 t} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Tivemos que multiplicar $u(x,t)$ por dx para podermos "somar" as probabilidades de todos os possíveis eventos (valores reais positivos, negativos e zero) e obter 1. Logo, a probabilidade é $dx\, u(x,t)$ e $u(x,t)$ é apenas a densidade de probabilidade de que a variável x assuma valor entre x e $x + dx$ no instante t.

Para cada valor de $X(t)$, há um valor correspondente de $S(t)$, de forma que a probabilidade de encontrarmos $S(t)$ entre s e $s + ds$ no instante t é dada por:

$$ds\, g(s,t) = dx\, u(x,t),$$

onde

$$x = \ln\left[\frac{s}{S_0}\right],$$

de acordo com a Eq. (1). Assim,

$$dx = \frac{ds}{s}$$

e

$$\begin{aligned} ds\, g(s,t) &= \frac{ds}{s} u(\ln s - \ln S_0, t) \\ &= ds \frac{1}{s\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \exp\left[-\frac{(\ln s - \ln S_0 - \mu t)^2}{2\sigma^2 t}\right]. \end{aligned}$$

Logo,

$$g(s,t) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \exp\left[-\frac{(\ln s - \ln S_0 - \mu t)^2}{2\sigma^2 t}\right].$$

Se definirmos a unidade de preços como sendo o valor S_0, então, em termos dessa unidade, $S_0 = 1$ e

$$g(s,t) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \exp\left[-\frac{(\ln s - \mu t)^2}{2\sigma^2 t}\right]. \tag{3}$$

A densidade de probabilidade expressa pela Eq. (3) é a que caracteriza o chamado movimento Browniano geométrico. As distribuições dos preços de ações e outros ativos financeiros muitas vezes são aproximadas pela Eq. (3).