O truque do logarítmo:

A expansão em série de Taylor-McLaurin da função $f(x)=\ln(1+x)$ pode ser feita notando que $f(0)=\ln(1)=0$, e $f'(x)=(1+x)^{-1}$. As derivadas de ordem superior a um podem ser facilmente calculadas usando: $f^{(k)}(x)=\dfrac{d^{(k-1)}}{dx^{k-1}}(1+x)^{-1}=(-1)^{k-1}(k-1)!(1+x)^{-k}$, para obter $f^{(k)}(0)=(-1)^{k-1}(k-1)!$. Desse resultado mostramos que:

$$Ln(1+x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{k!}x^k=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$$

e:

$$Ln(1-x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{k!}(-x)^k=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}=-[x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\ldots].$$

O truque do logarítimo é muito útil em casos em que a convergência da série de Taylor é problemática. Suponha o caso da função $f(x)=(1+x)^{-n}$, com $x<<1$ mas $n>>1$. Melhor dizendo, com $x\to 0$ e $n\to\infty$. Se fizermos a expansão de Taylor-McLaurin para esta função, obteremos:

$$f(y)=1-ny+\frac{n(n+1)y^2}{2}-\frac{n(n+1)(n+2)y^3}{6}+\cdots\approx 1-ny+\frac{1}{2}(ny)^2-\frac{1}{6}(ny)^3+\cdots.$$

Cuja convergência depende se o produto ny é maior ou menor do que 1. Em lugar de fazer a expansão direta da função vamos expandir seu logaritmo na forma: $Ln(1+y)^{-n}=-n\,Ln(1+y)=-n\{y-\dfrac{y^2}{2}+\dfrac{y^3}{3}+\ldots\}$, que não apresenta problemas de convergência para $|y|<1$. Agora retorna-se à função inicial para reescreve-la como $f(y)=e^{-n(y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\ldots)}$.

Teorema Central do Limite e o truque do logarítmo:

Agora vamos tomar uma variável aleatória $z = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ dada pela adição de n v.a. independentes no limite $n \to \infty$. Sabemos que $\varphi_z(t) = \varphi_1(t)\varphi_2(t)\cdots\varphi_n(t)$. Note que se as v.a. fossem, além de independentes, idênticas [i.i.d.], teríamos $\varphi_z(t) = \left[\varphi_1(t)\right]^n$, um caso semelhante ao utilizado no truque do logarítmo. Também sabemos que $\varphi_i(0) = 1$ e que $\left|\varphi_i(t)\right| \le 1$. Um número menor do que 1 elevado à uma potência muito alta tende a zero. Mas não em $t = 0$ porque $1^n = 1 \quad \forall n$, o que significa que a função $\varphi_z(t) = \left[\varphi_1(t)\right]^n$ se torna concentrada em torno de $t = 0$, caindo a zero para fora desse intervalo. Com isso podemos fazer uma expansão em série de Taylor-McLaurin da função característica, mas usando o truque do logarítmo, $\ln\left[\varphi_z(t)\right] = n\ln\left[\varphi_1(t)\right]$. Mas essa é a expansão dos cumulantes $\ln\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{i^k c_k}{k!}t^k$. Se as v.a. não são idênticas a expansão em Taylor agora será dada por $\varphi_z(t) = e^{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{i^k t^k}{k!}\sum_{j=0}^{n} c_{k,j}}$.

Teorema Central do Limite:

Truncando a expansão até segunda ordem em $\varphi_z(t) = e^{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{i^k t^k}{k!}\sum_{j=0}^{n} c_{k,j}}$ temos $\varphi_z(t) \cong e^{it\sum_{j=0}^{n} c_{1,j} - \frac{t^2}{2}\sum_{j=0}^{n} c_{2,j}}$. Mas $c_{1j} = \mu_j$ e $c_{2j} = \sigma_j^2$, logo $\varphi_z(t) = e^{it\sum_{j=0}^{n}\mu_j - \frac{t^2}{2}\sum_{j=0}^{n}\sigma_j^2}$ que é a função característica de uma normal com $\mu = \sum_j \mu_j$ e $\sigma^2 = \sum_j \sigma_j^2$. Se as variáveis são independentes e idênticas [i.i.d.] então $\mu = n\mu_1$ e $\sigma^2 = n\sigma_1^2$ e a distribuição tende para uma normal com $\mu = n\mu_1$ e $\sigma^2 = n\sigma_1^2$. Então notamos que a variável $z = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ tem esperança $E[z] = n\mu$ e desvio padrão $\sigma_z = \sqrt{n}\,\sigma$, ambos crescendo com n.

Vamos usar agora $\bar{x}=\frac{1}{n}\left(x_1+x_2+\cdots+x_n\right)$ em lugar de $z=x_1+x_2+\cdots+x_n$. Note que nesse caso $\bar{x}=\frac{z}{n}$, $\frac{d\,\bar{x}}{dz}=\frac{1}{n}$ e $z=n\,\bar{x}$, portanto a nova fdp será $f\left(\bar{x}\right)=nf\left(n\bar{x}\right)$ e a nova função característica será:

$$\varphi_{\bar{x}}\left(t\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\,\bar{x}\,t} n\, f\left(n\,\bar{x}\right)d\,\bar{x}=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\,n\,\bar{x}\frac{t}{n}}\, f\left(n\,\bar{x}\right)dn\,\bar{x}=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\,u\frac{t}{n}}\, f\left(u\right)du=\varphi_z\left(\frac{t}{n}\right)$$

Nesse caso a função caracetrística da distribuição da média será dada por:

$$\varphi_{\bar{x}}\left(t\right)=e^{it\left(\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n}\mu_j\right)-\frac{t^2}{2}\left(\frac{1}{n^2}\sum_{j=0}^{n}\sigma_j^2\right)}$$

Que é a função característica da Normal $\varphi_{\bar{x}}\left(t\right)=e^{i\mu t-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$, com $\mu=\frac{1}{n}\sum_j \mu_j$ e $\sigma=\frac{1}{n}\sqrt{\sum_j \sigma_j^2}$. Note que se as v.a. são iid então $\mu=\mu_j$ e $\sigma=\frac{\sigma_j}{\sqrt{n}}$. Agora e esperança fica parada e o desvio padrão vai diminuindo com o aumento de n. Para manter os dois parados fazemos a última mudança de variável $z_p=\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma}$, $\frac{dz_p}{d\,\bar{x}}=\frac{1}{\sigma}$ e $\bar{x}=\sigma z_p+\mu$, logo $f\left(z_p\right)=\sigma\, f_{\bar{x}}\left(\sigma z_p+\mu\right)$ e a nova função característica será dada por:

$$\varphi_{z_p}\left(t\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\,z_p t}\sigma\, f_{\bar{x}}\left(\sigma z_p+\mu\right)dz_p=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\,z_p t}\sigma\, f_{\bar{x}}\left(\sigma z_p+\mu\right)d\left(\sigma z_p+\mu\right)=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\left(w-\mu\right)\frac{t}{\sigma}} f_{\bar{x}}\left(w\right)dw=e^{-i\,\mu\frac{t}{\sigma}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\,w\frac{t}{\sigma}} f_{\bar{x}}\left(w\right)dw$$

Ou seja $\varphi_{z_p}(t) = e^{-i\mu\frac{t}{\sigma}}\varphi_{\overline{x}}\left(\frac{t}{\sigma}\right) = e^{-i\mu\frac{t}{\sigma}}e^{i\mu\frac{t}{\sigma}-\frac{\sigma^2}{2}\frac{t^2}{\sigma^2}} = e^{-\frac{t^2}{2}}$ que é a função característica da distribuição Normal padrão $N(0,1)$.

A melhor forma, portanto, de especificar o Teorema Central do Limite é afirmando que:

Se x_j e $x_{k\neq j}$ são independentes, $E\left[x_j\right] = \mu_j$ e $V\left[x_j\right] = \sigma_j$ existem e são finitos então a v.a.:

$$z_p = \frac{\sum_j \left(x_j - \mu_j\right)}{\sqrt{\sum_j \sigma_j^2}} \quad \rightarrow \quad N(0,1)$$

Note que não foi necessário que as v.a. fossem idênticas ou que sigam uma distribuição normal mas apenas que a média seja feita em um número muito grande de v.a.s.

Se as v.a.s são iid então:

$$z_p = \frac{\sum_j \left(x_j - \mu\right)}{\sqrt{n}\,\sigma} \quad \rightarrow \quad N(0,1)$$

Cuidados com o Teorema Central do Limite.

Primeiro cuidado é em relação as condições de validade do teorema: momentos de ordem 1 e 2 finitos. Se o momento de ordem for infinito então o teorema pode falhar. Veremos o que ocorre com as ditribuições estáveis, ou distribuições de Lévy mais adiante.

Entretanto, mesmo no caso em que a variância é finita, garantindo a validade do teorema, cuidados extras são necessários para o comportamento das caudas. Note que o TCL depende da validade da expansão dos cumulantes, que truncamos na ordem 2. Isso significa que a região central, próxima do pico, vai coincidir com a Normal, mas essa aproximação vai se tornando pior nas caudas, bem longe do pico. No limite de $n \to \infty$ o teorema é 100% válido, mas dado um número grande n mas finito, a região de validade é um função de n que vai com $n^{2/3}$ se a skewness é diferente de zero ou $n^{3/4}$ se apenas a curtose existe.

Quem se interessa pelas caudas? A probabilidade nas caudas é obviemnte pequena, mas para muitas situações é essa probabilidade que interessa. No caso em que a probabilidade é muito pequena mas os efeitos do evento são devastadores o estudo das caudas é fundamental.

Metodologias da expansão nos cumulantes:

Para v.a.s iid o truque do logarítmo foi de fazer $\varphi^n(t) = e^{n \ln \varphi(t)} = e^{nC(t)}$. Nesse ponto existem duas estratégias para estudar o comportamento de soma de $n \to \infty$ cópias independentes de x.

1. Fazer uma expansão em série de Taylor-McLaurin, i.e., centrada em $t = 0$, de $C(t)$, que sai em termos dos cumulantes $C(t) = \sum_k i^k c_k \frac{t^k}{k!}$. Truncando a expansão até segunda ordem obtemos a função característica da Normal. Problemas que podem surgir são: (1) o cumulante de ordem 2 não existe, é infinito, logo a expansão não pode ser feita. Isso ocorre com distribuições com variância infinita que não obedece ao teorema central do limite. Se precisarmos de uma aproximação melhor é necessário levar a expansão até ordem 3, se $c_3 \neq 0$, ou ordem 4 no caso de $c_3 = 0$ que sempre ocorre para distribuições simétricas [todos os momentos ímpares são nulos]. Se c_3 ou c_4 existem, i.e. são finitos, então teremos um controle da qualidade da aproximação até ordem 2. A continuação dessa expansão até ordens superiores [supondo que todos os momentos necessários existem] é chamada de EXPANSÃO DE EDGEWORTH. O bom dessa expansão é que ele nos permite definir até para que valores de x a aproximação da Normal é boa. Quaisquer dessas séries só podem ser utilizadas matematicamente com rigor se os momentos até a ordem necessária existirem.
2. A outra idéia é utilizada na metodologia de Laplace, ou da fase estacionária e expandir a função geradora dos cumulantes em um ponto especial que maximiza o expoente de uma função. O resultado dessa nova metodologia vale para qualquer intervalo de x desde que n seja grande o suficiente.

Método de Laplace ou método da fase estacionária:

O método da fase estacionária [**STATIONARY PHASE METHOD**], também denominado **STEEPEST DESCENT** ou **SADDLE POINT** [ponto de sela] – extensão do método de Laplace é mais adequado para o estudo do comportamento assimptótico das distribuições após a soma de n v.a.s, com n muito grande. Não é necessário que a integral tenha um e^{ixt} como faremos aqui, poderia ter um e^{xt} ou mesmo ser uma função real. Ambos os métodos são muito semelhantes, um usa funções exponenciais reais e o outro complexas.

Método de Laplace:

Suponha que se deseje calcular a integral $I_\lambda = \int_a^b e^{-\lambda g(x)} f(x)dx$, onde $f(x)$ é uma função que varia lentamente e $\lambda \to \infty$ [na realidade basta λ ser muito grande]. Note que o termo $e^{-\lambda g(x)} = \left[e^{-g(x)}\right]^\lambda$ será máximo quando $g(x)$ for mínimo, e que esse termo será tanto mais dominate quanto maior for λ. Se $g(x)$ possui pontos de mínimo então, nesses pontos, $\left.\frac{d}{dx}g(x)\right|_{x^*} = g'(x^*) = 0$ e que $g''(x^*) > 0$. Então a idéia é expandir $g(x)$ nos pontos de mínimo como $g(x) = g(x^*) + \frac{1}{2}g''(x^*)(x-x^*)^2$, fazer $f(x) \cong f(x^*)$ e tirá-lo da integral obtendo:

$$I_\lambda = f(x^*)e^{-\lambda g(x^*)}\int_a^b e^{-\frac{\lambda}{2}g''(x^*)(x-x^*)^2}dx = f(x^*)e^{-\lambda g(x^*)}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\lambda}{2}g''(x^*)(x-x^*)^2}dx.$$

Podemos aumentar o intervalo de integração para $(-\infty,+\infty)$ desde que $e^{-\frac{\lambda}{2}g''(x^*)(a-x^*)^2} = e^{-\frac{\lambda}{2}g''(x^*)(b-x^*)^2} \cong 0$. Agora só falta achar $I_o = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\lambda}{2}g''(x^*)(x-x^*)^2}dx$. Mas essa é uma integral de uma função Gaussiana e pode ser calculada rapidamente como:

$$I_o = \frac{1}{\sqrt{\frac{\lambda}{2}g''(x^*)}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\lambda}{2}g''(x^*)(x-x^*)^2} d\left(x\sqrt{\frac{\lambda}{2}g''(x^*)}\right) = \frac{1}{\sqrt{\frac{\lambda}{2}g''(x^*)}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-w^2}dw = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\frac{\lambda}{2}g''(x^*)}}$$

Ou seja: $I_o = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda g''(x^*)}}$, portanto:

$$I_\lambda = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda g''(x^*)}}\, f(x^*) e^{-\lambda g(x^*)}$$

Onde $g'(x^*) = 0 \quad e \quad g''(x^*) > 0$. Se existirem mais de um ponto de mínimo então:

$$I_\lambda = \sum_k \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda g''(x_k^*)}}\, f(x_k^*) e^{-\lambda g(x_k^*)}$$

Método da Fase Estacionária:

Suponha agora que a integral seja do tipo $I_\lambda = \int_a^b f(x) e^{i\lambda\phi(x)} dx$, novamente com $\lambda >> 1$ e $f(x)$ uma função que varia pouco. Em relação ao método de Laplace a única mudança foi o i no expoente, que nos leva a uma função oscilatória. Nesse caso a função $\phi(x)$ é chamada de fase. Vamos expandir a fase em série de Taylor em torno de um ponto x_o qualquer:

$$\phi(x) = \phi(x_o) + \phi'(x_o)(x - x_o) + \frac{1}{2}\phi''(x_o)(x - x_o)^2 + \frac{1}{3!}\phi^{(3)}(x_o)(x - x_o)^3 + \cdots$$

Nesse caso teremos

$$e^{i\lambda\phi(x)} = e^{i\lambda\left[\phi(x_o) + \phi'(x_o)(x - x_o) + \frac{1}{2}\phi''(x_o)(x - x_o)^2 + \frac{1}{3!}\phi^{(3)}(x_o)(x - x_o)^3\right]}$$
$$e^{i\lambda\phi(x)} = e^{i\lambda\phi(x_o)} e^{i\lambda\phi'(x_o)(x - x_o)} e^{i\frac{\lambda}{2}\phi''(x_o)(x - x_o)^2} e^{i\frac{\lambda}{3!}\phi^{(3)}(x_o)(x - x_o)^3}$$

O termo linear com $(x - x_o)$ é o mais importante porque trata-se de uma função que oscila muito rapidamente, uma vez que $\lambda \to \infty$,

$$e^{i\lambda\phi'(x_o)(x - x_o)} = \cos\left[\lambda\phi'(x_o)(x - x_o)\right] + i\sin\left[\lambda\phi'(x_o)(x - x_o)\right]$$

e cuja área é nula, ou seja:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos\left[\lambda\phi'(x_o)(x - x_o)\right] dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin\left[\lambda\phi'(x_o)(x - x_o)\right] dx = 0$$

Porque as áreas positivas se cancelam com as negativas.

Note que isso não é verdade para outras potências de x, ou seja:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\begin{bmatrix}\cos\\ \sin\end{bmatrix}\left[n\alpha\left(x-x_o\right)^2\right]dx\neq 0$$

porque deixou de ser periódica. Assim com n muito grande e a função $f\left(x\right)$ variando pouco no período de oscilação de $e^{i\lambda\phi'(x_o)(x-x_o)}$ a integral tende a zero. Então só haverá resultado diferentes de zero nas vizinhanças dos pontos em que $\phi'\left(x_o\right)=0$, ou seja nos quais a fase é estacionária. [Note que coincidem com os pontos de máximo ou mínimo da fase].

Nas vizinhanças desses pontos temos:

$$I_\lambda=\sum_j e^{i\lambda\phi\left(x_j\right)}\int_a^b f\left(x\right)e^{i\frac{\lambda}{2}\phi''\left(x_j\right)\left(x-x_j\right)^2}dx=\sum_j e^{i\lambda\phi\left(x_j\right)}f\left(x_j\right)\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\frac{\lambda}{2}\phi''\left(x_j\right)\left(x-x_j\right)^2}dx$$

Só consideramos o valor da função $f\left(x\right)$ em $x=x_j$ fora da qual a integral se anula. Agora falta a integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\frac{\lambda}{2}\phi''\left(x_j\right)\left(x-x_j\right)^2}dx=\frac{1}{\sqrt{-i\frac{\lambda}{2}\phi''\left(x_j\right)}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\left[-i\frac{\lambda}{2}\phi''\left(x_j\right)\right]\left(x-x_j\right)^2}d\left[\sqrt{-i\frac{\lambda}{2}\phi''\left(x_j\right)}\,x\right]$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\frac{\lambda}{2}\phi''\left(x_j\right)\left(x-x_j\right)^2}dx=\frac{1}{\sqrt{-i\frac{\lambda}{2}\phi''\left(x_j\right)}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}du=\frac{1}{\sqrt{-i\frac{\lambda}{2}\phi''\left(x_j\right)}}\sqrt{\pi}=\sqrt{\frac{2\pi}{-i\lambda\phi''\left(x_j\right)}}$$

A única restrição aqui para cair na integral da Gaussiana é que $\mathrm{Re}\left[-i\phi''\left(x_j\right)\right]=\mathrm{Im}\left[\phi''\left(x_j\right)\right]>0$

.

Então, temos que:

$$I_\lambda=\sum_j\sqrt{\frac{2\pi}{-i\lambda\phi''\left(x_j\right)}}f\left(x_j\right)e^{i\lambda\phi\left(x_j\right)}$$

Se existir apenas um ponto de fase estacionária x_o então

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(x\right)e^{i\lambda\phi(x)}dx=\sqrt{\frac{2\pi}{-i\lambda\phi''(x_o)}}f\left(x_o\right)e^{i\lambda\phi(x_o)}$$

Esse é em esência o método da fase estacionária para integrais univariadas. O método deve ser ligeiramente modificado se a função for de mais de uma variável.

Método da fase estacionária na probabilidade:

Harald Cramér (1893 – 1985), figura xxx, foi um matemático sueco considerado um dos gigantes da teoria da probabilidade. Seu trabalho para um seguradora o levou a se perguntar sobre o comportamento das caudas das distribuições para além do teorema central do limite, no qual utilizou essencialmente o método da fase estacionária ou seus congêneres.

Figura xxx. Fotografia de Harald Cramér
http://www.insurancehalloffame.org/laureateprofile.php?laureate=72

Vamos aplicar o método da fase estacionária para o caso da probabilidade de n cópias [iid] da v.a. X.
Sabemos que $\varphi_n(t)=\varphi^n(t)$ e que a fdp da v.a. $z=\sum_{j=1}^{n}x_j$ é dada por:

$$f_n(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ixt}\varphi^n(t)\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-izt}e^{n\ln\varphi(t)}dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-in\frac{z}{n}t}e^{in\left[-i\ln\varphi(t)\right]}dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{in\left[-i\ln\varphi(t)-\frac{z}{n}t\right]}dt$$

$$f_n(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{in\left[-\frac{z}{n}t-i\ln\varphi(t)\right]}dt$$

Ou seja, queremos:

$$f_n(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{in\phi(z,t)}dt \text{ com } \phi(z,t)=-i\ln\varphi(t)-\frac{z}{n}t\,.$$

Chamando $C(t)=\ln\varphi(t)$, a função geradora dos cumulantes, e aplicando o método da fase estacionária nesse caso, temos:

$$\phi(z,t) = -iC(t) - \frac{z}{n}t$$

$$\dot{\phi}(z,t) = -i\dot{C}(t) - \frac{z}{n}$$

$$\ddot{\phi}(z,t) = -i\ddot{C}(t) = -i\ddot{C}(t)$$

$\frac{\partial}{\partial t}\phi(z,t) = -i\frac{\partial C(t)}{\partial t} - \frac{z}{n} = 0$ ou seja precisamos da raiz da equação: $\frac{\partial C(t_o)}{\partial t} = i\frac{z}{n}$. Note que essa raiz da equação define $t_o = g\left(\frac{z}{n}\right)$ como uma função de $u = \frac{z}{n}$.

Operacionalidade do Método da Fase Estacionária:

1. $C(t) = \ln\varphi(t)$
2. Resolver a equação $\dot{C}(t_o) = iu$ para t_o e com esse valor calcular:
3. $\phi(z,t_o) = -iC(t_o) - ut_o$ e $\ddot{\phi}(z,t_o) = -i\ddot{C}(t_o)$.
4. Finalmente utilizá-los em $f_n(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n\left[-\ddot{C}(t_o)\right]}} e^{-n\left[iut_o - C(t_o)\right]}$.

Função de Crámer: O que Crámer fez foi estabelecer que $f_n(z) = e^{-nS\left(\frac{z}{n}\right)}$ com $S(u)$, $u = \frac{z}{n}$, sendo a função de Crámer. Para reobter a forma de Crámer devemos escrever:

$f_n(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n\left[-\ddot{C}(t_o)\right]}} e^{-n\left[iut_o - C(t_o)\right]}$ como $f_n(z) = e^{-n\left[iut_o - C(t_o) + \frac{1}{2n}\ln\left[-\ddot{C}(t_o)\right] + \frac{1}{2n}\ln(2\pi n)\right]}$

A função de Crámer será dada por:

$$S(u) = iut_o - C(t_o) + \frac{1}{2n}\ln\left[-\ddot{C}(t_o)\right] + \frac{1}{2n}\ln(2\pi n).$$

Caso em que $\varphi(t)$ é real:

Se $f(x)$ for simétrica então $\varphi(t)$ será real e simétrica, ou seja, teremos uma $\varphi(|t|)$. Vamos começar da integral:

$$f_n(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ixt}\varphi^n(|t|)dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\cos(zt)\varphi^n(t)dt=\frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\left[\int_0^{+\infty}e^{-izt+n\ln\varphi(t)}dt\right]$$

E agora $t>0$ não temos mais que nos preocupar com o módulo.

$$f_n(z)=\frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\left[\int_0^{+\infty}e^{in\left[-\frac{z}{n}t-i\ln\varphi(t)\right]}dt\right]$$

Agora aplicamos o método da fase estacionária da mesma forma que anteriormente.

$$f_n(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi n\left[-\ddot{C}(t_o)\right]}}e^{-n\left[iut_o-C(t_o)\right]}$$

Método de Laplace utilizando a função geradora dos momentos em lugar da função característica.

Se a função geradora dos momentos existe então sabemos que $\varphi(t)=M(it)$. Entretanto, uma das grandes vantagens da função característica é que sabemos a transformada inversa $\varphi(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ixt}f(x)dx$ então $f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ixt}\varphi(t)dt$ mas não sabemos ainda como, dado $M(t)$ encontrar $f(x)$. Em outras palavras precisamos da transformada de Laplace inversa. Para tanto é melhor partir da função característica com inversa bem conhecida:

$$f_n(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ixt}\varphi^n(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ixt+n\ln M(it)}dt$$

Agora mudamos a variável para $t'=it$ então $f_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\tau-i\infty}^{\tau+i\infty}e^{-xt+n\ln M(t)}dt$. O cálculo de resíduos afirma que a integral será a mesma para qualquer τ então podemos escolher τ que torna $-xt+n\ln M(t)$ máximo, ou seja: $-x+n\frac{\dot{M}(\tau)}{M(\tau)}=0$, ou $\frac{\dot{M}(\tau)}{M(\tau)}=\frac{x}{n}$. Nesse ponto expandimos $-xt+n\ln M(t)=-x\tau+n\ln M(\tau)+n\ddot{C}(\tau)(t-\tau)^2$ e teremos:

$$f_n(z)=\frac{1}{2\pi i}e^{-x\tau+n\ln M(\tau)}\int_{\tau-i\infty}^{\tau+i\infty}e^{-n\left[-\ddot{C}(\tau)\right](t-\tau)^2}dt=\frac{1}{2\pi}e^{-x\tau+n\ln M(\tau)}\int_{-i\infty}^{+i\infty}e^{-n\left[-\ddot{C}(\tau)\right]\frac{w^2}{i^2}}d\left(\frac{w}{i}\right)$$

$$f_n(z)=\frac{1}{2\pi}e^{-x\tau+n\ln M(\tau)}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-n\left[-\ddot{C}(\tau)\right]u^2}du=\frac{1}{2\pi}e^{-x\tau+n\ln M(\tau)}\frac{1}{\sqrt{n\left[-\ddot{C}(\tau)\right]}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-n\left[-\ddot{C}(\tau)\right]u^2}d\left(\sqrt{n\left[-\ddot{C}(\tau)\right]}u\right)$$

$$f_n(z)=\frac{1}{2\pi}e^{-x\tau+n\ln M(\tau)}\frac{1}{\sqrt{n\left[-\ddot{C}(\tau)\right]}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-s^2}ds=\frac{1}{2\pi}e^{-x\tau+n\ln M(\tau)}\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n\left[-\ddot{C}(\tau)\right]}}=\frac{e^{-x\tau+n\ln M(\tau)}}{\sqrt{2\pi n\left[-\ddot{C}(\tau)\right]}}$$

Finalmente $f_n(z)=\dfrac{e^{-x\tau+n\ln M(\tau)}}{\sqrt{2\pi n\left[-\ddot{C}(\tau)\right]}}$ onde τ é a solução de $\dfrac{d}{dt}\ln M(t)=\dfrac{\dot{M}(\tau)}{M(\tau)}=\dfrac{z}{n}$.

Resumo do método de Laplace:

Encontrar $f_n(z)=\dfrac{e^{-n\left[\frac{x}{n}\tau-nC(\tau)\right]}}{\sqrt{2\pi n\left[-\ddot{C}(\tau)\right]}}$ onde $C(t)=\ln M(t)$, $\dot{C}(t_o)=u$ e $u=\dfrac{z}{n}$.

Vamos apresenta vários exemplos com solução analítica para mostrar como o método funciona.

1. **Distribuição Normal com** $\mu = 0$.

$\varphi(t) = e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$ e $C(t) = \ln \varphi(t) = -\frac{\sigma^2 t^2}{2}$ então $\dot{C}(t) = -\sigma^2 t$ e $\ddot{C}(t) = -\sigma^2$. Temos que resolver a equação $\dot{C}(t_o) = i\frac{z}{n}$, ou seja, $-\sigma^2 t = i\frac{z}{n}$ de onde $t_o = -i\frac{z}{n\sigma^2}$. Nesse caso então

$$C(t_o) = -\frac{\sigma^2 t_o^2}{2} = -\frac{\sigma^2}{2}\left(-i\frac{z}{n\sigma^2}\right)^2 = \frac{\sigma^2}{2}\frac{z^2}{n^2\sigma^4} = \frac{z^2}{2n^2\sigma^2}$$

$$f_n(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n\left[-\ddot{C}(t_o)\right]}} e^{-n\left[iut_o - C(t_o)\right]}$$

$$f_n(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n\left[-\ddot{C}(t_o)\right]}} e^{-n\left[\frac{z^2}{n^2\sigma^2} - \frac{z^2}{2n^2\sigma^2}\right]} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n\sigma^2}} e^{-\frac{z^2}{2n\sigma^2}}$$

$$f_n(z) = \frac{e^{-\frac{z^2}{2n\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{n\sigma^2}}$$

Um resultado que já sabíamos à priori.

Note que o método passou por uma raiz complexa. Sempre que a distribuição for simétrica então $\varphi(t)$ será real e a raiz da equação $\dot{C}(t) = i\frac{z}{n}$ será complexa.

2. **Bernoulli - Binomial:**

Nesse caso x só pode ser 0 ou 1 e o z após jogar a moeda n vezes está no intervalo $0 \le z \le n$, que pode ser também expresso como $0 \le \frac{z}{n} \le 1$. A função geradora dos cumulantes da distribuição de Bernoulli é dada por:

$$C(t) = \ln \varphi(t) = \ln\left(q + pe^{it}\right).$$

Portanto:

$$\frac{\partial}{\partial t} C(t) = ipe^{it}\left(q + pe^{it}\right)^{-1} = \frac{ipe^{it}}{\left(q + pe^{it}\right)}$$

$$\text{e } \frac{\partial^2}{\partial t^2} C(t) = iipe^{it}\left(q + pe^{it}\right)^{-1} + ipe^{it}(-1)\left(q + pe^{it}\right)^{-2}(ipe^{it}),$$

que pode ser desenvolvido como:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} C(t) = -\frac{pe^{it}}{\left(q + pe^{it}\right)} + \left[\frac{pe^{it}}{\left(q + pe^{it}\right)}\right]^2 = \frac{pe^{it}}{\left(q + pe^{it}\right)}\left[\frac{pe^{it}}{\left(q + pe^{it}\right)} - 1\right]$$

para gerar o resultado final $\ddot{C}(t) = -q\dfrac{pe^{it}}{\left(q + pe^{it}\right)^2}$.

No caso de Bernoulli, portanto, temos:

$$C(t) = \ln\left(q + pe^{it}\right), \dot{C}(t) = i\frac{pe^{it}}{\left(q + pe^{it}\right)} \text{ e } \ddot{C}(t) = -pq\frac{e^{it}}{\left(q + pe^{it}\right)^2}.$$

Primeira etapa é achar a raiz de $\dot{C}(t_o) = iu$. A equação em t é dada por $\dfrac{pe^{it_o}}{\left(q + pe^{it_o}\right)} = u$, ou $(1-u)\,pe^{it_o} = qu$, com as soluções que necessitaremos dadas por $pe^{it_o} = \dfrac{qu}{(1-u)}$ e $iut_o = u\ln\left[\dfrac{qu}{p(1-u)}\right]$.

Neste caso $C(t_o) = \ln\left(q + pe^{it_o}\right) = \ln\left(q + \dfrac{qu}{(1-u)}\right)$, ou seja, $C(t_o) = \ln\left(\dfrac{q}{1-u}\right)$. O termo $S(u) = iut_o - C(t_o) = u\ln\left[\dfrac{qu}{p(1-u)}\right] - \ln\left(\dfrac{q}{1-u}\right) = u\ln\left(\dfrac{q}{p}\right) + u\ln u - u\ln(1-u) + \ln(1-u) - \ln q$, cujo resultado final é:

$$S(u)=u\ln u+(1-u)\ln(1-u)+u\ln\left(\frac{q}{p}\right)-\ln q\,.$$

Para encontrar $\ddot{C}(t_o)=-q\dfrac{pe^{it_o}}{\left(q+pe^{it_o}\right)^2}$, substituimos $pe^{it_o}=\dfrac{qu}{(1-u)}$ e vemos que

$$\ddot{C}(t_o)=-q\frac{\dfrac{qu}{(1-u)}}{\left(q+\dfrac{qu}{(1-u)}\right)^2}=-\frac{\dfrac{u}{(1-u)}}{\left(1+\dfrac{u}{(1-u)}\right)^2}=-(1-u)^2\frac{u}{(1-u)}=-u(1-u)\text{, ou seja:}$$

$$\ddot{C}(t_o)=-u(1-u)$$

A fdp da variável z, será dada portanto por:

$$f_n(z)=\frac{e^{-nS(u)}}{\sqrt{2\pi nu(1-u)}}$$

Com $S(u)=u\ln u+(1-u)\ln(1-u)+u\ln\left(\dfrac{q}{p}\right)-\ln q$

Vamos analisar o comportamento da função $S(u)$:

$$\frac{d}{du}S(u)=\ln\frac{q}{p}+\ln u-\ln(1-u)$$

$$\frac{d^2}{du^2}S(u)=\frac{1}{u}+\frac{1}{(1-u)}=\frac{1}{u(1-u)}\geq 0$$

Como a derivada segunda é sempre positiva a função só pode ter ponto de mínimo, o qual se localiza em:

$$\frac{d}{du}S(u)=\ln\left[\frac{qu}{p(1-u)}\right]=0 \quad\rightarrow\quad \frac{qu}{p(1-u)}=1 \quad\rightarrow\quad qu=p-pu \quad\rightarrow\quad (q+p)u=p \quad\rightarrow\quad u=p$$

Nesse ponto $S_{\min}=p\ln p+q\ln q+p\ln q-p\ln p-\ln q=(q+p)\ln q-\ln q=0$, logo $S(u)\geq 0$ sempre. Além disso nesse ponto de mínimo temos que $\dfrac{d^2}{du^2}S(u)=\dfrac{1}{pq}$. Expandindo o expoente em série de Taylor nesse ponto temos que $S(u)=\frac{1}{pq}(u-p)^2$. Por outro lado, nesse ponto $u(1-u)=pq$ logo a fdp nessa região será dada por $f_n(z)=\frac{e^{-n\frac{1}{2pq}\left(\frac{z}{n}-p\right)^2}}{\sqrt{2\pi npq}}$, ou seja, a distribuição NORMAL:

$$f_n(z)=\frac{e^{-\frac{(z-np)^2}{2npq}}}{\sqrt{2\pi npq}}$$

Entretanto a função:

$$S(u)=u\ln u+(1-u)\ln(1-u)+u\ln\left(\frac{q}{p}\right)-\ln q$$

Se aplica a todos os pontos $0\le z\le n$ e não apenas nas vizinhanças do pico onde vale a distribuição normal.

Exercício: usar as duas funções $f_n(z)=\frac{e^{-\frac{(z-np)^2}{2npq}}}{\sqrt{2\pi npq}}$ e $f_n(z)=\frac{e^{-nS(u)}}{\sqrt{2\pi nu(1-u)}}$ com $S(u)=u\ln u+(1-u)\ln(1-u)+u\ln\left(\frac{q}{p}\right)-\ln q$ no Excel e comparar os resultados, principalmente nas caudas. Sugestão, usar a escala LOG no eixo y para realçar as diferenças das duas nas caudas.

3. Distribuição Gama:

A função característica da distribuição Gama centrada em zero é dada por $\varphi(t)=(1-i\beta t)^{-\alpha}$. Portanto $C(t)=-\alpha\ln(1-i\beta t)$, $\dot{C}(t)=i\alpha\beta(1-i\beta t)^{-1}=i\frac{\alpha\beta}{(1-i\beta t)}$ e $\ddot{C}(t)=-\frac{\alpha\beta^2}{(1-i\beta t)^2}$. A equação a ser resolvida é $i\frac{\alpha\beta}{(1-i\beta t)}=iu$ de onde se extrai $(1-i\beta t)=\frac{\alpha\beta}{u}$ e $iut_o=\frac{u}{\beta}\left(1-\alpha\frac{\beta}{u}\right)=\frac{(u-\alpha\beta)}{\beta}$.

$$S(u)=iut_o-C(t_o)=\frac{(u-\alpha\beta)}{\beta}+\alpha\ln\left(\frac{\alpha\beta}{u}\right)=\frac{1}{\beta}u-\alpha\ln u+\alpha\left[\ln(\alpha\beta)-1\right]$$

e, por outro lado, $\ddot{C}(t_o) = -\frac{1}{\alpha}u^2$. Daí temos o resultado final de $f_n(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n\left[-\ddot{C}(t_o)\right]}} e^{-nS(u)}$ é dado por:

$$f_n(z) = \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi n u^2}}\, e^{-n\left(\frac{1}{\beta}u - \alpha \ln u + \alpha\left[\ln(\alpha\beta) - 1\right]\right)}$$

A função $S(u) = \frac{1}{\beta}u - \alpha \ln u + \alpha\left[\ln(\alpha\beta) - 1\right]$ tem derivada primeira $S'(u) = \frac{1}{\beta} - \frac{\alpha}{u}$ e derivada segunda $S''(u) = \frac{\alpha}{u^2} \geq 0$, logo, novamente, só tem ponto de mínimo em $u = \alpha\beta$ no qual $S(u)$ vale $S(u) = \alpha - \alpha \ln(\alpha\beta) + \alpha\left[\ln(\alpha\beta) - 1\right] = 0$, significando então que $S(u) \geq 0$ sempre. Nesse ponto $S''(u) = \frac{1}{\alpha\beta^2}$ e a função $S(u) = \frac{(u - \alpha\beta)^2}{\alpha\beta^2}$ e $f_n(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n\alpha\beta^2}} e^{-\frac{(z - n\alpha\beta)^2}{n\alpha\beta^2}}$ é a normal com $\mu = n\alpha\beta$ e $\sigma = \sqrt{n\alpha\beta^2}$. Fora dessa aproximação a expressão geral do método da fase estacionária é:

$$f_n(z) = \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi n}}\, e^{-n\alpha\left[\ln(\alpha\beta) - 1\right]} \left(\frac{z}{n}\right)^{n\alpha - 1} e^{-\frac{z}{\beta}}$$

Essa ditribuição tem um pico forte nas proximidades da Gaussiana mas as caudas basicamente caem com $e^{-\frac{z}{\beta}}\left(\frac{z}{n}\right)^{n\alpha-1}$. Entretanto sabemos que a distribuição Gama $f_{gama}(x; \alpha, \beta) = \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x^{\alpha - 1} e^{-\frac{x}{\beta}} H(x)$ possui propriedade da aditividade, logo $z = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ segue a distribuição:

$$f_{gama}(x; n\alpha, \beta) = \frac{n^{n\alpha - 1}}{\beta^{n\alpha}\Gamma(n\alpha)} \left(\frac{z}{n}\right)^{n\alpha - 1} e^{-\frac{z}{\beta}} H(x)$$

A aproximação de Stirling para a função fatorial para z muito grande é $\ln z! \simeq z\ln z - z$ que pode ser extraída da comparação com a integral pois:

$$\ln z! = \ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln z = \sum_{k=1}^{z} \ln k \simeq \int_1^z \ln x\, dx = \left[x\ln x - x \right]_1^z \simeq z\ln z - z\,.$$

Isso significa que $z! \simeq e^{z(\ln z - 1)}$. Entretanto, uma análise mais precisa mostra que: $\Gamma(z) \cong e^{-z} z^{z-\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi} = e^{z(\ln z - 1)} \sqrt{\frac{2\pi}{z}}$. Neste caso podemos substituir $\Gamma(n\alpha) \cong e^{n\alpha[\ln(n\alpha)-1]} \sqrt{\frac{2\pi}{n\alpha}}$ na expressão para a distribuição obtendo:

$$f_{gama}(x; n\alpha, \beta) = \frac{e^{(n\alpha-1)\ln n - n\alpha \ln \beta}}{e^{n\alpha[\ln(n\alpha)-1]} \sqrt{\frac{2\pi}{n\alpha}}} \left(\frac{z}{n}\right)^{n\alpha-1} e^{-\frac{z}{\beta}} H(z),$$

$$f_{gama}(x; n\alpha, \beta) = \sqrt{\frac{n\alpha}{2\pi}} e^{(n\alpha-1)\ln n - n\alpha\ln\beta - n\alpha[\ln(n\alpha)-1]} \left(\frac{z}{n}\right)^{n\alpha-1} e^{-\frac{z}{\beta}} H(z)$$

$$f_{gama}(x; n\alpha, \beta) = \sqrt{\frac{n\alpha}{2\pi}} \frac{1}{n} e^{-n\alpha[\ln(\alpha\beta)-1]} \left(\frac{z}{n}\right)^{n\alpha-1} e^{-\frac{z}{\beta}} H(z)$$

Ou seja:

$$f_{gama}(x; n\alpha, \beta) = \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi n}}\, e^{-n\alpha\left[\ln(\alpha\beta)-1\right]} \left(\frac{z}{n}\right)^{n\alpha-1} e^{-\frac{z}{\beta}} H(z)$$

que é o mesmo resultado obtido com o método da fase estacionária. Notamos então que o método da fase estacionária foi muito além da aproximação do teorema central do limite, dando conta do comportamento também nas caudas da distribuição.

Distribuição de Student.

Para entender melhor o comportamento das caudas e da adição de muitas v.a.s vamos tomar uma distribuição simétrica que segue uma lei de potência nas caudas do tipo:

$$f(x)=\frac{A}{\left(a^2+x^2\right)^{\frac{\alpha+1}{2}}}$$

Note que para $x>>a$ então $f(x)\approx\frac{1}{\left(\sqrt{x^2}\right)^{\alpha+1}}=\frac{1}{|x|^{\alpha+1}}$ e precisamos que $\alpha>1$ para que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$. Note que no outro limite, para $x\to 0$ a fdp tende a uma constante. Logo trata-se de uma distribuição que segue uma lei de potência nas caudas mas é finita em $x=0$. Deixamos a constante A para normalizar a distribuição $A\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(a^2+x^2\right)^{\frac{\alpha+1}{2}}}=1$, ou melhor, obrigando que $\varphi(0)=1$. Nesse caso temos que:

$$\varphi(t)=A\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ixt}\,dx}{\left(a^2+x^2\right)^{\frac{\alpha+1}{2}}}=2A\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos\left(x|t|\right)dx}{\left(a^2+x^2\right)^{\frac{\alpha+1}{2}}}.$$

Agora, uma consulta nas propriedades das funções de Bessel modificadas de segundo tipo mostra que:

$$K_\nu\left(|zt|\right)=\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)(2z)^\nu}{\sqrt{\pi}\,|t|^\nu}\int_0^\infty\frac{\cos(xt)\,dx}{\left(x^2+z^2\right)^{\nu+\frac{1}{2}}}$$

Portanto:

$$\int_0^\infty\frac{\cos\left(x|t|\right)dx}{\left(x^2+a^2\right)^{\frac{\alpha+1}{2}}}=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{\frac{\alpha}{2}}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)|a|^\alpha}|at|^{\frac{\alpha}{2}}K_{\alpha/2}\left(|at|\right)$$

A função característica será dada por:

$$\varphi(t)=A\frac{\sqrt{\pi}}{2^{\frac{\alpha}{2}-1}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)|a|^{\alpha}}|at|^{\frac{\alpha}{2}}K_{\alpha/2}\left(|at|\right)$$

Falta a constante A a ser extraída de $\varphi(0)=1$. Um exame das propriedades das funções de Bessel mostra que para $z\to 0$ a função de Bessel se comporta da forma $K_{\nu}(z)\cong\frac{\Gamma(\nu)}{2}\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}$ com a restrição de que $\mathrm{Re}\,\nu>0$. Assim

$$\varphi(0)=A\frac{\sqrt{\pi}}{2^{\frac{\alpha}{2}-1}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)|a|^{\alpha}}\frac{\Gamma\left(\alpha/2\right)}{2}|at|^{\frac{\alpha}{2}}\frac{1}{|at|^{\frac{\alpha}{2}}}2^{\frac{\alpha}{2}}=A\frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\alpha/2\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)|a|^{\alpha}}=1$$

Assim encontramos a constante $A=\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\alpha/2\right)}|a|^{\alpha}$ e as funções característica e fdp:

$$\varphi(t)=\frac{2}{2^{\frac{\alpha}{2}}\Gamma\left(\alpha/2\right)}|at|^{\frac{\alpha}{2}}K_{\alpha/2}\left(|at|\right)$$

$$f(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{|a|\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\alpha/2\right)}\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)^{-\frac{\alpha+1}{2}}$$

Vale notar que a $f(x)$ tem a dimensão correta de $1/a$. Vamos chamar $\nu=\frac{\alpha}{2}$ e re-escrever o resultado como:

$$\varphi(t)=\frac{2}{2^{\nu}\Gamma(\nu)}|at|^{\nu}K_{\nu}\left(|at|\right)$$

$$f(x)=\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{|a|\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu)}\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)^{-\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}$$

Esses resultados podem ser utilizados no Excel se o valor de α for inteiro e par, pois o Excel só permite calcular a função K de Bessel de ordem inteira. No Mathematica podemos usar qualquer valor de α. Valores semi-inteiros possuem expressões fechadas. Para calcular os momentos de ordem temos que:

$$m_{2n}=M_{2n}=\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{a\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}2\int_0^\infty\frac{x^{2n}}{\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}}}dx=2a^{2n}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\int_0^\infty\frac{\left(\frac{x}{a}\right)^{2n}}{\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}}}d\left(\frac{x}{a}\right)$$

, ou seja, $m_{2n}=2a^{2n}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\int_0^\infty\frac{u^{2n}}{\left(1+u^2\right)^{\frac{\alpha+1}{2}}}du$, em que a integral só converge para $n<\alpha$.

Para fazer a integral mudamos a variável para $u=\tan\theta$ então $1+u^2=\sec^2\theta$ e $du=\sec^2\theta\,d\theta$

$$m_{2n}=2a^{2n}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\int_0^{\pi/2}\frac{\tan^{2n}\theta}{\sec^{2\frac{\alpha+1}{2}}\theta}\sec^2\theta d\theta=2a^{2n}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\int_0^{\pi/2}\cos^{\alpha-2n-1}\theta\sin^{2n}\theta d\theta$$

Mas sabemos da distribuição Beta que $\int_0^{\pi/2}\cos^{2n-1}\theta\,\sin^{2m-1}\theta\,d\theta=\frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{2\Gamma(n+m)}$. Então podemos colocar a integral acima na forma correta fazendo:

$$m_{2n}=2a^{2n}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\int_0^{\pi/2}\cos^{2\left(\frac{\alpha}{2}-n\right)-1}\theta\sin^{2\left(n+\frac{1}{2}\right)-1}\theta\,d\theta$$

$$m_{2n}=2a^{2n}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}-n\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\right)}$$

Chegando, finalmente, a: $m_{2n}=a^{2n}\dfrac{\Gamma\left(\frac{\alpha-2n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$

Teste do comportamento assimptótico. Suponha que não conhecessemos a fdp mas apenas a sua função característica. Sabemos que o comportamento assimptótico da fdp vai com $f\left(x\right)\approx\dfrac{1}{\left|x\right|^{2\nu+1}}$.

Vamos testar para ver se recuperamos esse resultado.

$$f\left(x\right)=\frac{1}{2\pi}\frac{2}{2^{\nu}\Gamma\left(\nu\right)}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ixt}\left|at\right|^{\nu}K_{\nu}\left(\left|at\right|\right)dt$$

$$f\left(x\right)=\frac{2}{2^{\nu}\pi\Gamma\left(\nu\right)}\int_{0}^{+\infty}\cos\left(\left|x\right|t\right)\left|at\right|^{\nu}K_{\nu}\left(\left|at\right|\right)dt=\frac{2}{2^{\nu}\pi\Gamma\left(\nu\right)}\mathrm{Re}\left[\int_{0}^{+\infty}e^{-i\left|x\right|t}\left|at\right|^{\nu}K_{\nu}\left(\left|at\right|\right)dt\right]$$

$$f\left(x\right)=\frac{2}{2^{\nu}\pi\,a\,\Gamma\left(\nu\right)}\mathrm{Re}\left[\int_{0}^{+\infty}e^{-i\left|\frac{x}{a}\right|at}\left|at\right|^{\nu}K_{\nu}\left(\left|at\right|\right)d\left(at\right)\right]=\frac{2}{2^{\nu}\pi\,a\,\Gamma\left(\nu\right)}\mathrm{Re}\left[\int_{0}^{+\infty}e^{-i\left|\frac{x}{a}\right|z}z^{\nu}K_{\nu}\left(z\right)dz\right]$$

Agora mudamos a variável para $i\left|\frac{x}{a}\right|z=w$, logo $z=-iw\left|\frac{a}{x}\right|$ e $dz=-i\left|\frac{a}{x}\right|dw$ então:

$$f\left(x\right)=\frac{2}{2^{\nu}\pi\,a\,\Gamma\left(\nu\right)}\mathrm{Re}\left[\left(-i\right)^{\nu+1}\left|\frac{a}{x}\right|^{\nu+1}\int_{0}^{+\infty}e^{-w}w^{\nu}K_{\nu}\left(-i\left|\frac{a}{x}\right|w\right)dw\right]$$

$$f(x)=\frac{2}{2^{\nu}\pi a\Gamma(\nu)}\mathrm{Re}\left[e^{-i(\nu+1)\frac{\pi}{2}}\left|\frac{a}{x}\right|^{\nu+1}\int_0^{+\infty}e^{-w}w^{\nu}K_{\nu}\left(-i\left|\frac{a}{x}\right|w\right)dw\right]$$

Se x é real a função modificada de Bessel é real e dada por:

$$K_{\nu}(x)=\frac{\pi}{2}i^{\nu+1}\left[J_{\nu}(ix)+iN_{\nu}(ix)\right] \text{ então}$$

$$e^{-i(\nu+1)\frac{\pi}{2}}K_{\nu}(-iz)=\frac{\pi}{2}e^{-i(\nu+1)\frac{\pi}{2}}e^{i\frac{(\nu+1)\pi}{2}}\left[J_{\nu}(z)+iN_{\nu}(z)\right]=\frac{\pi}{2}\left[J_{\nu}(z)+iN_{\nu}(z)\right]$$

A fdp agora é dada por:

$$f(x)=\frac{2}{2^{\nu}\pi a\Gamma(\nu)}\mathrm{Re}\left[\left|\frac{a}{x}\right|^{\nu+1}\int_0^{+\infty}e^{-w}w^{\nu}\frac{\pi}{2}\left[J_{\nu}\left(\left|\frac{a}{x}\right|w\right)+iN_{\nu}\left(\left|\frac{a}{x}\right|w\right)\right]dw\right]$$

A qual simplifica para:

$$f(x)=\frac{1}{2^{\nu}a\Gamma(\nu)}\left|\frac{a}{x}\right|^{\nu+1}\int_0^{+\infty}e^{-w}w^{\nu}J_{\nu}\left(\left|\frac{a}{x}\right|w\right)dw$$

Note que a função exponencial morre após $w>2$ e que se $\left|\frac{a}{x}\right|2<<1$ ou seja, para $|x|>>2a$ estamos na região em que o argumento da função de Bessel tende a zero. A expansão em série das funções de Bessel, J_{ν}, e de Neumann, N_{ν}, são dadas por:

$$J_{\nu}(x)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{s!(s+\nu)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2s} \text{ e } N_{\nu}(x)=-\frac{1}{\pi}\sum_{r=0}^{\nu-1}\frac{(\nu-r-1)!}{r!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2r}+\cdots$$

Note que $x\to 0$ precisamos ficar com a potência mais baixa de todas, nesse caso:

$$J_{\nu}(x)\cong\frac{1}{\nu!}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} \text{ e } N_{\nu}(x)=-\frac{(\nu-1)!}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}.$$

Então para $x\to\infty$ teremos $J_{\nu}\left(\left|\frac{a}{x}\right|w\right)=\frac{1}{\nu!}\left(\left|\frac{a}{2x}\right|w\right)^{\nu}=\frac{1}{2^{\nu}\nu!}\left|\frac{a}{x}\right|^{\nu}w^{\nu}$

$$f(x)=\frac{1}{2^{\nu}a\Gamma(\nu)}\left|\frac{a}{x}\right|^{\nu+1}\int_{0}^{+\infty}e^{-w}w^{\nu}\frac{1}{2^{\nu}\nu!}\left|\frac{a}{x}\right|^{\nu}w^{\nu}dw=\frac{1}{2^{2\nu}\nu!a\Gamma(\nu)}\left|\frac{a}{x}\right|^{2\nu+1}\int_{0}^{+\infty}e^{-w}w^{2\nu}dw$$

$$f(x)=\frac{(2\nu)!}{2^{2\nu}\nu!a\Gamma(\nu)}\left|\frac{a}{x}\right|^{2\nu+1}=\frac{\Gamma(2\nu+1)}{2^{2\nu}a\Gamma(\nu+1)\Gamma(\nu)}\left|\frac{a}{x}\right|^{2\nu+1}$$

Agora vamos usar as propriedades de recorrência $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$ e a fórmula de duplicação de Legendre $\Gamma(2z)=\frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)$ para reescrever:

$$f(x)=\frac{2\nu\Gamma(2\nu)}{2^{2\nu}a\nu\Gamma^{2}(\nu)}\left|\frac{a}{x}\right|^{2\nu+1}=\frac{\Gamma(2\nu)}{2^{2\nu-1}a\Gamma^{2}(\nu)}\left|\frac{a}{x}\right|^{2\nu+1}=\frac{2^{2\nu-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(\nu)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2^{2\nu-1}a\Gamma^{2}(\nu)}\left|\frac{a}{x}\right|^{2\nu+1}$$

$$f(x)=\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{a\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu)}\left|\frac{a}{x}\right|^{2\nu+1}$$

Basta comparar então com a função original para $x\to\infty$

$$f(x)\sim\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{|a|\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu)}\left(\frac{x^{2}}{a^{2}}\right)^{-\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}=\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{|a|\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu)}\left|\frac{a}{x}\right|^{2\nu+1}$$

E temos o mesmo resultado. Então estamos controlando o comportamento assimptótico.

Agora podemos enfrentar o problema da forma assimptótica para qualquer valor de n:

$$\varphi(t)=\frac{2}{2^{\nu}\Gamma(\nu)}|at|^{\nu}K_{\nu}(|at|)$$

$$f_{n}(x)=\frac{2^{n}}{2\pi 2^{n\nu}\Gamma^{n}(\nu)}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ixt}\left[|at|^{\nu}K_{\nu}(|at|)\right]^{n}dt=\frac{2^{n}}{\pi 2^{n\nu}\Gamma^{n}(\nu)}\int_{0}^{+\infty}\cos(|x|t)\left[|at|K_{\nu}(|at|)\right]^{n}dt$$

$$f_n(x)=\frac{2^n}{\pi 2^{n\nu}\Gamma^n(\nu)}\mathrm{Re}\left\{\int_0^{+\infty}e^{-i|x|t}\left[|at|^{\nu}K_\nu(|at|)\right]^n dt\right\}$$

$$f_n(x)=\frac{2^n}{\pi a 2^{n\nu}\Gamma^n(\nu)}\mathrm{Re}\left\{\int_0^{+\infty}e^{-i\left|\frac{x}{a}\right|at}\left[|at|^{\nu}K_\nu(|at|)\right]^n d(at)\right\}$$

$$f_n(x)=\frac{2^n}{\pi a 2^{n\nu}\Gamma^n(\nu)}\mathrm{Re}\left\{\int_0^{+\infty}e^{-i\left|\frac{x}{a}\right|z}\left[z^{\nu}K_\nu(z)\right]^n dz\right\}$$

Agora mudamos a variável para $i\left|\frac{x}{a}\right|z=w$, logo $z=-i\left|\frac{a}{x}\right|w$ e $dz=-i\left|\frac{a}{x}\right|dw$ então:

$$f_n(x)=\frac{2^n}{\pi a 2^{n\nu}\Gamma^n(\nu)}\left|\frac{a}{x}\right|\mathrm{Re}\left\{-i\int_0^{+\infty}e^{-w}\left[\left|\frac{a}{x}\right|^{\nu}w^{\nu}e^{-i\frac{\nu\pi}{2}}K_\nu\left(-i\left|\frac{a}{x}\right|w\right)\right]^n dw\right\}$$

$$e^{-i\frac{\nu\pi}{2}}K_\nu(-iz)=\frac{\pi}{2}e^{-i\frac{\nu\pi}{2}}e^{i\frac{(\nu+1)\pi}{2}}\left[J_\nu(z)+iN_\nu(z)\right]=\frac{\pi}{2}i\left[J_\nu(z)+iN_\nu(z)\right]$$

$$f_n(x)=\frac{2^n}{\pi a 2^{n\nu}\Gamma^n(\nu)}\frac{\pi^n}{2^n}\left|\frac{a}{x}\right|^{n\nu+1}\mathrm{Re}\left\{-i\int_0^{+\infty}e^{-w}\left[iw^{\nu}\left[J_\nu\left(\left|\frac{a}{x}\right|w\right)+iN_\nu\left(\left|\frac{a}{x}\right|w\right)\right]\right]^n dw\right\}$$

$$f_n(x)=\frac{2\pi^n}{\pi a\Gamma^n(\nu)}\left|\frac{a}{2x}\right|^{n\nu+1}\mathrm{Re}\left\{-i\int_0^{+\infty}e^{-w}\left[iw^{\nu}\left[J_\nu\left(\left|\frac{a}{x}\right|w\right)+iN_\nu\left(\left|\frac{a}{x}\right|w\right)\right]\right]^n dw\right\}$$

Agora vamos usar o comportamento das funções de Bessel para argumentos muito pequenos, como é o caso de $x\to\infty$:

$$J_\nu(x)\cong\frac{1}{\nu!}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} \text{ e } N_\nu(x)=-\frac{(\nu-1)!}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}.$$

Note que para $x\to 0$ as funções de Neumann $N_\nu \sim x^{-\nu}$ serão muito maiores do que as de Bessel $J_\nu \sim x^{\nu}$. Entretanto precisamos manter as duas porque um dos termos é real e o outro imaginário e precisaremos extrair apenas a parte real no final dos cálculos. Assim podemos desprezar todas as potências mais altas de cada uma delas, mas manter as duas.

$$f_n(x)=\frac{2\pi^n}{\pi a\Gamma^n(\nu)}\left|\frac{a}{2x}\right|^{n\nu+1}\mathrm{Re}\left\{-i\int_0^{+\infty}e^{-w}\left[iw^\nu\left[\frac{1}{\nu!}\left|\frac{a}{2x}\right|^{\nu}w^\nu-i\frac{(\nu-1)!}{\pi}\left|\frac{a}{2x}\right|^{-\nu}w^{-\nu}\right]\right]^n dw\right\}$$

$$f_n(x)=\frac{2\pi^n}{\pi a\Gamma^n(\nu)}\left|\frac{a}{2x}\right|^{n\nu+1}\mathrm{Re}\left\{-i\int_0^{+\infty}e^{-w}\left[\frac{(\nu-1)!}{\pi}\left|\frac{a}{2x}\right|^{-\nu}\left[1+i\frac{\pi}{(\nu-1)!\nu!}\left|\frac{a}{2x}\right|^{2\nu}w^{2\nu}\right]\right]^n dw\right\}=$$

$$=\frac{2\pi^n}{\pi a\Gamma^n(\nu)}\left|\frac{a}{2x}\right|^{n\nu+1}\frac{\Gamma^n(\nu)}{\pi^n}\left|\frac{a}{2x}\right|^{-n\nu}\mathrm{Re}\left\{-i\int_0^{+\infty}e^{-w}\left[1+i\frac{\pi}{(\nu-1)!\nu!}\left|\frac{a}{2x}\right|^{2\nu}w^{2\nu}\right]^n dw\right\}=$$

$$=\frac{2}{\pi a}\left|\frac{a}{2x}\right|\mathrm{Re}\left\{-i\int_0^{+\infty}e^{-w}\left[1+i\frac{\pi}{(\nu-1)!\nu!}\left|\frac{a}{2x}\right|^{2\nu}w^{2\nu}\right]^n dw\right\}$$

$$f_n(x)\cong\frac{2}{\pi a}\left|\frac{a}{2x}\right|\mathrm{Re}\left\{\int_0^{+\infty}e^{-w}\left[-i+\frac{n\pi}{(\nu-1)!\nu!}\left|\frac{a}{2x}\right|^{2\nu}w^{2\nu}\right]dw\right\}=$$

$$=\frac{2n}{a(\nu-1)!\nu!}\left|\frac{a}{2x}\right|^{2\nu+1}\int_0^{+\infty}e^{-w}w^{2\nu}dw=\frac{n(2\nu)!}{a(\nu-1)!\nu!}\left|\frac{a}{2x}\right|^{2\nu+1}$$

$$f_n(x)=n\frac{2(2\nu)(2\nu-1)!}{2^{2\nu+1}a(\nu-1)!\nu(\nu-1)!}\left|\frac{a}{x}\right|^{2\nu+1}=n\frac{\Gamma(2\nu)}{2^{2\nu-1}a\Gamma^2(\nu)}\left|\frac{a}{x}\right|^{2\nu+1}$$

De novo usando $\Gamma(2\nu)=\frac{2^{2\nu-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(\nu)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)$, obtemos:

$$f_n(x)=n\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}a\Gamma(\nu)}\left|\frac{a}{x}\right|^{2\nu+1}=n\,f_o\left|\frac{a}{x}\right|^{2\nu+1}\text{ com }f_o=\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}a\Gamma(\nu)}.$$

Note que fazendo $n=1$ recuperamos o resultado anterior. O comportamento da cauda não muda, continua com a mesma lei de potência simplesmente multiplicada por n, mesmo somando muitas cópias da v.a.s.

Função característica para α ímpar. Se α é inteiro e par a função característica é dada pela função de Bessel modificada de ordem inteira. Mas se $\alpha = 2k+1$ é ímpar a ordem será semi-inteira. No entanto nesses casos podemos fazer a integral por resíduos.

$$\varphi(t) = A\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ixt}\,dx}{\left(a^2+x^2\right)^{\frac{2k+1+1}{2}}} = A\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ixt}\,dx}{\left(a^2+x^2\right)^{k+1}} = \frac{A}{a^{2k+1}}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\frac{x}{a}at}\,d\frac{x}{a}}{\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)^{k+1}} = \frac{A}{a^{2k+1}}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iuat}\,du}{\left(1+u^2\right)^{k+1}}$$

$$\varphi(t) = \frac{A}{a^{2k+1}}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iuat}\,du}{(u-i)^{k+1}(u+i)^{k+1}}$$

Já sabemos que a função característica será simétrica, então basta calcular para t positivos e depois substituir t por $|t|$. Com dois polos de ordem $k+1$ em $z=i$ e $z=-i$ e $t>0$ fechamos o círculo por cima e pegamos o resíduo em $z=i$.

Para $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{izat}\,dx}{(z-i)^{k+1}(z+ia)^{k+1}} = 2\pi i a_{-1}(i)$. Como é um polo de ordem $k+1$ o resíduo é dado por:

$$a_{-1}(i) = \left[\frac{1}{k!}\frac{d^k}{dz^k}\frac{e^{izat}}{(z+i)^{k+1}}\right]_{z=i}$$

Agora:

$$\frac{d^k}{dz^k}\frac{e^{izat}}{(z+i)^{k+1}}=\sum_{j=0}^{k}\frac{k!}{j!(k-j)!}\left[\frac{d^{k-j}}{dz^{k-j}}e^{izat}\right]\left[\frac{d^j}{dz^j}(z+i)^{-k-1}\right]=$$

$$=\sum_{j=0}^{k}\frac{k!}{j!(k-j)!}(iat)^{k-j}e^{izat}(-1)^j(k+1)(k+2)\cdots(k+j)(z+i)^{-k-1-j}=$$

$$=\sum_{j=0}^{k}\frac{k!}{j!(k-j)!}(iat)^{k-j}e^{izat}(-1)^j\frac{(k+j)!}{k!}(z+i)^{-k-1-j}=$$

$$=\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\frac{(k+j)!}{j!(k-j)!}(iat)^{k-j}e^{izat}(z+i)^{-k-1-j}$$

$$\left.\frac{d^k}{dz^k}\frac{e^{izat}}{(z+i)^{k+1}}\right|_{z=i}=\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\frac{(k+j)!}{j!(k-j)!}(iat)^{k-j}e^{-at}(2i)^{-k-1-j}=$$

$$=e^{-at}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\frac{(k+j)!}{j!(k-j)!}(at)^{k-j}2^{-k-1-j}i^{k-j-k-j-1}=$$

$$=e^{-at}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\frac{(k+j)!}{j!(k-j)!}(at)^{k-j}2^{-k-1-j}i^{-2j}i^{-1}=$$

$$=-ie^{-at}\sum_{j=0}^{k}\frac{(k+j)!}{2^{k+j+1}j!(k-j)!}(at)^{k-j}$$

Logo

$$a_{-1}=\left[\frac{1}{k!}\frac{d^k}{dz^k}\frac{e^{izat}}{(z\pm i)^{k+1}}\right]_{z=i}=-ie^{-a|t|}\sum_{j=0}^{k}\frac{(k+j)!}{2^{k+j+1}k!\,j!(k-j)!}(at)^{k-j}$$

E $\varphi(t)=\dfrac{A}{a^{2k+1}}2\pi i a_{-1}$

E $\varphi(t)=\pi\dfrac{A}{a^{2k+1}}e^{-a|t|}\sum_{j=0}^{k}\dfrac{(k+j)!}{2^k k!2^j j!(k-j)!}(at)^{k-j}$

$$\varphi(t)=\frac{\pi A}{a^{2k+1}(2k)!!}e^{-a|t|}\sum_{j=0}^{k}\frac{(k+j)!}{(2j)!!(k-j)!}(a|t|)^{k-j}$$

Para $t=0$ o único termo que sobra é para $j=k$ e

$$\varphi(0)=\pi\frac{A}{a^{2k+1}(2k)!!}\frac{(k+k)!}{(2k)!!(k-k)!}=\pi\frac{A}{a^{2k+1}(2k)!!}\frac{(2k)!}{(2k)!!}=\pi\frac{A}{a^{2k+1}(2k)!!}\frac{(2k)!!(2k-1)!!}{(2k)!!}$$

$$\pi\frac{A}{a^{2k+1}}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}=1$$

$$A=\frac{a^{2k+1}}{\pi}\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}$$

$$\varphi(t)=\pi\frac{1}{a^{2k+1}(2k)!!}\frac{a^{2k+1}}{\pi}\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}e^{-a|t|}\sum_{j=0}^{k}\frac{(k+j)!}{(2j)!!(k-j)!}(a|t|)^{k-j}$$

$$\varphi(t)=\frac{e^{-a|t|}}{(2k-1)!!}\sum_{j=0}^{k}\frac{(k+j)!}{(2j)!!(k-j)!}(a|t|)^{k-j}$$

Casos particulares:

$\alpha=1\rightarrow k=0$ então $\varphi(t)=e^{-a|t|}$

$\alpha=3\rightarrow k=1$ então $\varphi(t)=\left[1+a|t|\right]e^{-a|t|}$

$\alpha=5\rightarrow k=2$ então $\varphi(t)=\dfrac{e^{-a|t|}}{3}\left[(a|t|)^2+3(a|t|)+3\right]$

Método da fase estacionária com distribuição de Student:

$$f_n(x) = \frac{2\pi^n}{\pi a \Gamma^n(\nu)} \left|\frac{a}{2x}\right|^{n\nu+1} \mathrm{Re}\left\{ -i \int_0^{+\infty} e^{-w} \left[iw^\nu \left[J_\nu\left(\left|\frac{a}{x}\right| w\right) + iN_\nu\left(\left|\frac{a}{x}\right| w\right)\right]\right]^n dw \right\}$$

Vamos re-escrever $J_\nu\left(\left|\frac{a}{x}\right| w\right) + iN_\nu\left(\left|\frac{a}{x}\right| w\right) = M_\nu\left(\left|\frac{a}{x}\right| w\right) e^{i\theta_\nu\left(\left|\frac{a}{x}\right| w\right)}$

$$f_n(x) = \frac{2\pi^n}{\pi a \Gamma^n(\nu)} \left|\frac{a}{2x}\right|^{n\nu+1} \mathrm{Re}\left\{ -i \int_0^{+\infty} e^{-w} \left[w^\nu M_\nu\left(\left|\frac{a}{x}\right| w\right) e^{i\left[\theta_\nu\left(\left|\frac{a}{x}\right| w\right) + \frac{\pi}{2}\right]} \right]^n dw \right\} =$$

Então $= \frac{2\pi^n}{\pi a \Gamma^n(\nu)} \left|\frac{a}{2x}\right|^{n\nu+1} \mathrm{Im}\left\{ \int_0^{+\infty} e^{-w} e^{in\left(\theta_\nu + \frac{\pi}{2}\right)} e^{n\nu \ln w + nM_\nu} dw \right\} =$

$$= \frac{2\pi^n}{\pi a \Gamma^n(\nu)} \left|\frac{a}{2x}\right|^{n\nu+1} \mathrm{Im}\left\{ \int_0^{+\infty} e^{in\left(\theta_\nu + \frac{\pi}{2}\right) + iin\frac{w}{n} - iin\nu \ln w - iinM_\nu} dw \right\}$$

$$f_n(x) = \frac{2\pi^n}{\pi a \Gamma^n(\nu)} \left|\frac{a}{2x}\right|^{n\nu+1} \mathrm{Im}\left\{ \int_0^{+\infty} e^{in\left[\theta_\nu + \frac{\pi}{2} + i\frac{w}{n} - i\nu \ln w - iM_\nu\right]} dw \right\}$$

$$\frac{d}{dw}\left[\theta_\nu + \frac{\pi}{2} + i\frac{w}{n} - i\nu \ln w - iM_\nu\right] = 0$$

$$\frac{d\theta_\nu}{dw} + i\frac{1}{n} - i\frac{\nu}{w} - i\frac{dM_\nu}{dw} = 0$$

$$\frac{dM_\nu}{dw} = \frac{1}{n} - \frac{\nu}{w} - i\frac{d\theta_\nu}{dw}$$

Vamos começar com $\alpha = 3$ e $\varphi(t) = [1 + at]e^{-at}$ para acertar o passo no método da fase estacionária. Nesse caso:

$$C(t) = \ln[1+at] - at$$

$$\dot{C}(t) = \frac{a}{1+at} - a = -a\frac{at}{1+at}$$

$$\ddot{C}(t) = \frac{d}{dt}\frac{a}{1+at} = -\frac{a^2}{(1+at)^2}$$

1. Resolver a equação $-a\dfrac{at}{1+at} = i\dfrac{z}{n} \quad \to \quad at = -i\dfrac{z}{na} - i\dfrac{z}{na}at$:

$at\left(1+i\dfrac{z}{na}\right) = -i\dfrac{z}{na}$, logo $at_o = -\dfrac{i\dfrac{z}{na}}{\left(1+i\dfrac{z}{na}\right)}$

Checando a parte real de t:

$$at_o = -\frac{i\dfrac{z}{na}\left(1-i\dfrac{z}{na}\right)}{\left(1+i\dfrac{z}{na}\right)\left(1-i\dfrac{z}{na}\right)} = -\frac{\left(\dfrac{z^2}{n^2a^2}+i\dfrac{z}{na}\right)}{\left(1+\dfrac{z^2}{n^2a^2}\right)}$$

Nesse caso a parte real deu negativo em contradição. Vamos tentar com t negativo com $\alpha = 3$ e $\varphi(t) = [1-at]e^{at}$. Nesse caso:

$$C(t) = \ln[1-at] + at$$

$$\dot{C}(t) = \frac{-a}{1-at} + a = -a\frac{at}{1-at}$$

$$\ddot{C}(t) = \frac{d}{dt}\frac{-a}{1-at} = -\frac{a^2}{(1-at)^2}$$

2. Resolver a equação $-a\dfrac{at}{1-at} = i\dfrac{z}{n} \quad \to \quad at = -i\dfrac{z}{na} + i\dfrac{z}{na}at$:

$$at\left(1-i\frac{z}{na}\right)=-i\frac{z}{na}$$, logo $$at_o=-\frac{i\frac{z}{na}}{\left(1-i\frac{z}{na}\right)}$$

Checando a parte real de t:

$$at_o=-\frac{i\frac{z}{na}\left(1+i\frac{z}{na}\right)}{\left(1-i\frac{z}{na}\right)\left(1+i\frac{z}{na}\right)}=-\frac{\left(-\frac{z^2}{n^2a^2}+i\frac{z}{na}\right)}{\left(1+\frac{z^2}{n^2a^2}\right)}$$

Nesse caso a parte real deu negativo em contradição.

e:

$$1+at_o=1-\frac{i\frac{z}{na}}{\left(1+i\frac{z}{na}\right)}=\left(1+i\frac{z}{na}\right)^{-1}$$

$$i\frac{z}{n}t_o-C(t_o)=i\frac{z}{na}at_o-\ln\left[1+at_o\right]+at_o=\left(1+i\frac{z}{na}\right)at_o-\ln\left[1+at_o\right]=$$

$$=-\left(1+i\frac{z}{na}\right)\frac{i\frac{z}{na}}{\left(1+i\frac{z}{na}\right)}-\ln\left(1+i\frac{z}{na}\right)^{-1}$$

$$i\frac{z}{n}t_o-C(t_o)=-i\frac{u}{a}+\ln\left(1+i\frac{u}{a}\right)$$

$$\ddot{C}(t) = -a^2\left(1+i\frac{u}{a}\right)^2$$

$$f_n(z) = \mathrm{Re}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi n a^2\left(1+i\frac{u}{a}\right)^2}}\, e^{-n\left[-i\frac{u}{a}+\ln\left(1+i\frac{u}{a}\right)\right]}\right] = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{a\left(1+i\frac{u}{a}\right)}\sqrt{\frac{2}{\pi n}}\, e^{in\frac{u}{a}} e^{-\ln\left(1+i\frac{u}{a}\right)^n}\right]$$

$$f_n(z) = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{2}{\pi n}}\,\mathrm{Re}\left[e^{i\frac{z}{a}}\left(1+i\frac{z}{na}\right)^{-(n+1)}\right]$$

$$\left(1+i\frac{u}{a}\right) = \left(1+\frac{u^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i\arctan\frac{u}{a}}$$

$$f_n(z) = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{2}{\pi n}}\frac{1}{\left(1+\frac{u^2}{a^2}\right)^{\frac{n+1}{2}}}\mathrm{Re}\left[\left(e^{i\frac{u}{a}}\right)^n\left(e^{-i\arctan\frac{u}{a}}\right)^{n+1}\right] =$$

$$= \frac{1}{a}\sqrt{\frac{2}{\pi n}}\frac{1}{\left(1+\frac{u^2}{a^2}\right)^{\frac{n+1}{2}}}\mathrm{Re}\left[\left(\cos\left(\frac{u}{a}\right)+i\sin\left(\frac{u}{a}\right)\right)^n\left(\cos\left(\arctan\frac{u}{a}\right)-i\sin\left(\arctan\frac{u}{a}\right)\right)^{n+1}\right] =$$

$$= \frac{1}{a}\sqrt{\frac{2}{\pi n}}\frac{1}{\left(1+\frac{u^2}{a^2}\right)^{\frac{n+1}{2}}}\mathrm{Re}\left[\left(\cos\left(\frac{u}{a}\right)+i\sin\left(\frac{u}{a}\right)\right)^n\left(\frac{1-i\frac{u}{a}}{\left(1+\frac{u^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}}\right)^{n+1}\right]$$

$$f_n(z) = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{2}{\pi n}}\frac{1}{\left(1+\frac{u^2}{a^2}\right)^{n+1}}\mathrm{Re}\left[e^{in\frac{u}{a}}\left(1-i\frac{u}{a}\right)^{n+1}\right]$$

Vamos ao método da fase estacionária:

$$\varphi(t) = \frac{2}{2^{\nu}\Gamma(\nu)}|at|^{\nu} K_{\nu}(|at|)$$

Aplicando o método da fase estacionária $\nu = \frac{\alpha}{2}$ com $w = \sqrt{a^2t^2}$

$$\varphi(t) = \frac{1}{2^{\nu-1}\Gamma(\nu)}\left[w^{\nu}K_{\nu}(w)\right]$$

$$C(t) = \ln\varphi(t) = \ln\left[w^{\nu}K_{\nu}(w)\right] - (\nu-1)\ln 2 - \ln\Gamma(\nu)$$

$$\frac{d}{dt}\ln\varphi(t)=\frac{d}{dw}\ln\left[w^{\nu}K_{\nu}(w)\right]\frac{d}{dt}\sqrt{a^2t^2}=\frac{\frac{d}{dw}\left[w^{\nu}K_{\nu}(w)\right]}{w^{\nu}K_{\nu}(w)}\left(\frac{at}{\sqrt{t^2}}\right)=\frac{w^{\nu}K_{\nu-1}(w)}{w^{\nu}K_{\nu}(w)}\left(\frac{at}{\sqrt{t^2}}\right)=$$

$$=\frac{K_{\nu-1}(w)}{K_{\nu}(w)}\left(\frac{at}{\sqrt{t^2}}\right)$$

E queremos a solução de

$$\dot{C}(w)=a\frac{K_{\nu-1}(w)}{K_{\nu}(w)}sign(w)=i\frac{z}{n}$$

Temos então que resolver a equação

$$\frac{K_{\nu-1}(w)}{K_{\nu}(w)}sign(w)=i\frac{z}{na}$$

Agora vamos fazer $w=-iu$ com $u\in\mathbb{R}$ e usar o fato de que $K_{\nu}(-iu)=\frac{\pi}{2}ie^{i\frac{\nu\pi}{2}}\left[J_{\nu}(u)+iN_{\nu}(u)\right]$ então $K_{\nu-1}(-iu)=\frac{\pi}{2}ie^{i\frac{\nu\pi}{2}-i\frac{\pi}{2}}\left[J_{\nu-1}(u)+iN_{\nu-1}(u)\right]=\frac{\pi}{2}e^{i\frac{\nu\pi}{2}}\left[J_{\nu-1}(u)+iN_{\nu-1}(u)\right]$

Logo:

$$\frac{K_{\nu-1}(-iu)}{K_{\nu}(-iu)}=\frac{\frac{\pi}{2}e^{i\frac{\nu\pi}{2}}\left[J_{\nu-1}(u)+iN_{\nu-1}(u)\right]}{\frac{\pi}{2}ie^{i\frac{\nu\pi}{2}}\left[J_{\nu}(u)+iN_{\nu}(u)\right]}=\frac{\left[N_{\nu-1}(u)-iJ_{\nu-1}(u)\right]}{\left[J_{\nu}(u)+iN_{\nu}(u)\right]}=\frac{\left[N_{\nu-1}(u)-iJ_{\nu-1}(u)\right]\left[J_{\nu}(u)-iN_{\nu}(u)\right]}{\left[J_{\nu}^2(u)+iN_{\nu}^2(u)\right]}=$$

$$=\frac{\left[J_{\nu}(u)N_{\nu-1}(u)-J_{\nu-1}(u)N_{\nu}(u)\right]}{\left[J_{\nu}^2(u)+iN_{\nu}^2(u)\right]}-i\frac{\left[N_{\nu}(u)N_{\nu-1}(u)+J_{\nu-1}(u)J_{\nu}(u)\right]}{\left[J_{\nu}^2(u)+iN_{\nu}^2(u)\right]}$$

A equação fica:

$$\frac{\left[N_\nu(u)N_{\nu-1}(u)+J_{\nu-1}(u)J_\nu(u)\right]}{\left[J_\nu^2(u)+iN_\nu^2(u)\right]}=\frac{z}{na}$$

Apesar de parecer que poderíamos jogar fora o termo com J precisaremos dele por conta das partes real e imaginária.

$$J_\nu(z)\cong\frac{1}{\nu!}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu=\frac{1}{\nu!}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu \text{ e } N_\nu(z)=-\frac{(\nu-1)!}{\pi}\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}$$

Então $K_\nu(-iz)=\frac{\pi}{2}ie^{i\frac{\nu\pi}{2}}\left[J_\nu(z)+iN_\nu(z)\right]\cong\frac{\pi}{2}ie^{i\frac{\nu\pi}{2}}\left[\frac{1}{\nu!}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu-i\frac{(\nu-1)!}{\pi}\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}\right]$

$$K_\nu(-iz)\cong\frac{\pi}{2}e^{i\frac{(\nu+1)\pi}{2}}\left[\frac{1}{\nu!}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu-i\frac{(\nu-1)!}{\pi}\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}\right]$$

$$e^{-i\frac{\pi}{2}(\nu+1)}K_\nu(-iz)=\frac{\pi}{2}e^{-i\frac{\pi}{2}(\nu+1)}e^{i\frac{\pi}{2}(\nu+1)}\left[\frac{1}{\nu!}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu-i\frac{1}{\pi}(\nu-1)!\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}\right]$$

$$e^{-i\frac{\pi}{2}(\nu+1)}K_\nu(-iz)=\frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{\nu!}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu-i\frac{1}{\pi}(\nu-1)!\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}\right]$$

Então

$$f(x)=\frac{\pi}{2}\frac{2}{2^\nu\pi a\Gamma(\nu)}\mathrm{Re}\left[\left|\frac{a}{x}\right|^{\nu+1}\int_0^{+\infty}e^{-w}w^\nu\left[\frac{1}{\nu!}\left(\left|\frac{a}{x}\right|w\right)^\nu-i\frac{1}{\pi}(\nu-1)!\left(\left|\frac{a}{x}\right|w\right)^{-\nu}\right]dw\right]$$

$$f(x)=\frac{1}{2^\nu\nu!a\Gamma(\nu)}\left|\frac{a}{x}\right|^{2\nu+1}\int_0^{+\infty}e^{-w}w^{2\nu}dw=\frac{(2\nu)!}{2^\nu\nu!a\Gamma(\nu)}\left|\frac{a}{x}\right|^{2\nu+1}$$

$$f(x)=\frac{\Gamma(2\nu+1)}{2^\nu\Gamma(\nu+1)a\Gamma(\nu)}\left|\frac{a}{x}\right|^{2\nu+1}=\frac{2\nu\Gamma(2\nu)}{2^\nu\nu\Gamma(\nu)a\Gamma(\nu)}\left|\frac{a}{x}\right|^{2\nu+1}$$

$$f(x)=\frac{2\Gamma(2\nu)}{2^{\nu}a\Gamma^2(\nu)}\left|\frac{a}{x}\right|^{2\nu+1}$$

Agora vamos usar a fórmula de duplicação de Legendre $\Gamma(2z)=\frac{2^{2z-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)$ para reescrever:

$$f(x)=\frac{2}{2^{\nu}a\Gamma^2(\nu)}\frac{2^{2\nu-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\Gamma(\nu)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\left|\frac{a}{x}\right|^{2\nu+1}=\frac{2^{\nu}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{a\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu)}\left|\frac{a}{x}\right|^{2\nu+1}$$

$$f(x)=\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{|a|\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu)}\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)^{-\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}$$

$$f_n(x)=\frac{2\pi^n}{\pi a\Gamma^n(\nu)}\left|\frac{a}{2x}\right|^{n\nu+1}\mathrm{Re}\left\{e^{-i\frac{\pi}{2}}\int_0^{+\infty}e^{-n\frac{w}{n}}e^{n\nu\ln w-n\ln\left[N_\nu\left(\left|\frac{a}{x}\right|w\right)\right]-n\ln\left[1-i\frac{J_\nu\left(\left|\frac{a}{x}\right|w\right)}{N_\nu\left(\left|\frac{a}{x}\right|w\right)}\right]}dw\right\}$$

$$f_n(x)=\frac{2\pi^n}{\pi a\Gamma^n(\nu)}\left|\frac{a}{2x}\right|^{n\nu+1}\mathrm{Re}\left\{e^{-i\frac{\pi}{2}}\int_0^{+\infty}e^{-n\frac{w}{n}}e^{n\nu\ln w-n\ln\left[N_\nu\left(\left|\frac{a}{x}\right|w\right)\right]-n\ln\left[1-i\frac{J_\nu\left(\left|\frac{a}{x}\right|w\right)}{N_\nu\left(\left|\frac{a}{x}\right|w\right)}\right]}dw\right\}=$$

$$=\frac{2\pi^n}{\pi a\Gamma^n(\nu)}\left|\frac{a}{2x}\right|^{n\nu+1}\mathrm{Re}\left\{e^{-i\frac{\pi}{2}}\int_0^{+\infty}e^{-n\frac{w}{n}}e^{n\nu\ln w-n\ln\left[N_\nu\left(\left|\frac{a}{x}\right|w\right)\right]-n\ln\left[\sqrt{\frac{N_\nu^2\left(\left|\frac{a}{x}\right|w\right)+J_\nu^2\left(\left|\frac{a}{x}\right|w\right)}{N_\nu^2\left(\left|\frac{a}{x}\right|w\right)}}e^{-i\arctan\left[\frac{J_\nu\left(\left|\frac{a}{x}\right|w\right)}{N_\nu\left(\left|\frac{a}{x}\right|w\right)}\right]}\right]}dw\right\}=$$

$$=\frac{2\pi^n}{\pi a\Gamma^n(\nu)}\left|\frac{a}{2x}\right|^{n\nu+1}\mathrm{Re}\left\{\int_0^{+\infty}e^{-n\left[\frac{w}{n}-\nu\ln w+\ln\left[N_\nu\left(\left|\frac{a}{x}\right|w\right)\right]-\ln\left|N_\nu\left(\left|\frac{a}{x}\right|w\right)\right|+\frac{1}{2}\ln\left[N_\nu^2\left(\left|\frac{a}{x}\right|w\right)+J_\nu^2\left(\left|\frac{a}{x}\right|w\right)\right]+i\frac{\pi}{2n}-i\arctan\left[\frac{J_\nu\left(\left|\frac{a}{x}\right|w\right)}{N_\nu\left(\left|\frac{a}{x}\right|w\right)}\right]\right]}dw\right\}$$