OPÇÕES

Conforme afirmamos no capítulo 3 no mercado de opções o comprador tem a opção de comprar ou vender, mas não a obrigação. No final do período combinado pode exercer ou não seu direito de comprar ou vender. Como o comprador da opção só tem direitos e nenhuma obrigação no futuro ele deve pagar um prêmio ao vendedor da opção. Para desenvolver a álgebra do mercado de opções é preciso definir o vocabulário e o significado dos símbolos que utilizaremos.

Opções – vocabulário:

Convenção de sinais: vamos adotar a perspectiva do investidor que tem um custo inicial para obter um lucro no final do período. Assim, em $t=0$ dinheiro gasto será considerado positivo e dinheiro recebido negativo. Já em $t=T$ dinheiro recebido será considerado positivo e gasto negativo.

Ativo-objeto [AO]: ativo a ser comprado/vendido em $t=T$.

Maturidade: tempo em que o contrato da opção expira $t=T$.

Preço à vista em $t=0$: chamaremos de S, de spot, o preço do A-O no momento do contrato.

Preço à vista em $t=T$: chamaremos de S_T, o preço do A-O na maturidade. O subscrito denota o momento em que o preço foi estabelecido.

Preço à vista em $t \in [0,T]$: chamaremos de S_t, o preço do A-O em qualquer tempo entre o fechamento do contrato e a maturidade.

Titular: quem compra a opção

Lançador: quem vende a opção.

(a) Lançador coberto – se o lançador de uma CALL possuir o A-O desde o início ele estará coberto, ou seja, tem o A-O para entregar caso o titular exerça a opção.
(b) Lançador descoberto – se o lançador de uma CALL não possui o A-O ele terá que comprá-lo no mercado spot para entregá-lo no caso em que o titular exerça a opção.
(c) Não existe lançador coberto/descoberto de PUT porque a promessa do lançador foi de comprar o A-O, e não de vendê-lo.

Preço do Exercício: preço combinado para o ativo objeto no tempo T. Também chamado de STRIKE PRICE simbolizado por X ou K. Vamos denotar o Strike price por X.

Opção de Compra [CALL]: o titular tem o direito de comprar o ativo-objeto por X.

Opção de Venda [PUT]: o titular tem o direito de vender o ativo-objeto por X.

Exercer/Não exercer a opção: Note que o titular tem o direito mas não a obrigação de comprar ou vender. Para uma CALL, opção de compra, se em $t = T$ o preço do A-O S_T estiver abaixo do strike price X ele não exerce o seu direito e compra no mercado spot por $S_T < X$. Por outro lado se em $t = T$, o preço do A-O S_T estiver acima do strike price X ele exerce o seu direito e compra por $X < S_T$. Já para uma PUT, opção de venda, se em $t = T$, o preço do A-O S_T estiver abaixo do strike price X ele exerce o seu direito e vende seu A-O por $X > S_T$. Por outro lado se em $t = T$ o preço do A-O S_T estiver acima do strike price X ele não exerce o seu direito e vende o A-O por $S_T > X$.

Tipo de opção:

(a) Europeu: direito de comprar/vender a ser exercido apenas em $t = T$.
(b) Americana: direito de comprar/vender a ser exercido até T . Ou seja, a opção pode ser exercida antecipadamente em qualquer tempo $t \leq T$.

Prêmio: valor pago pelo titular ao lançador para comprar a opção. Vamos denotar os prêmios pela seguinte convenção:

1. CALLs: c para uma CALL européia e C para uma CALL americana
2. PUTs: p para uma PUT européia e P para uma PUT americana.

Valor Intrínseco: lucro do titular sem considerar o prêmio que já pagou ao lançador.

Opção dentro do dinheiro [in-the-money]: quando o titular tem vantagem de exercer a opção. Ou seja se $S_T > X$ para a CALL ou se $S_T < X$ para a PUT.

Opção ao dinheiro [at-the-money]: quando $S_T = X$ é indiferente exercer ou não a opção.

Opção fora do dinheiro [ou-of-the-money]: quando o titular não tem vantagem de exercer a opção. Ou seja se $S_T < X$ para a CALL ou se $S_T > X$ para a PUT.

Lucros:

(a) CALLs: no caso da opção de compra o titular sai ganhando quando o preço do produto que pretende comprar fica acima do strike price, e seu lucro será $L_{call} = Max\left[S_T - X, 0\right] - c$. Como se trata de um jogo de soma zero, o lucro do titular representa prejuízo para o lançador e vice versa. Note que:

$$L_{call} = \begin{cases} S_T - X - c & se \quad S_T > X \\ -c & se \quad S_T < X \end{cases}$$

Figura 1 mostra os lucros do titular e lançador de uma CALL em função do preço à vista em T, S_T .

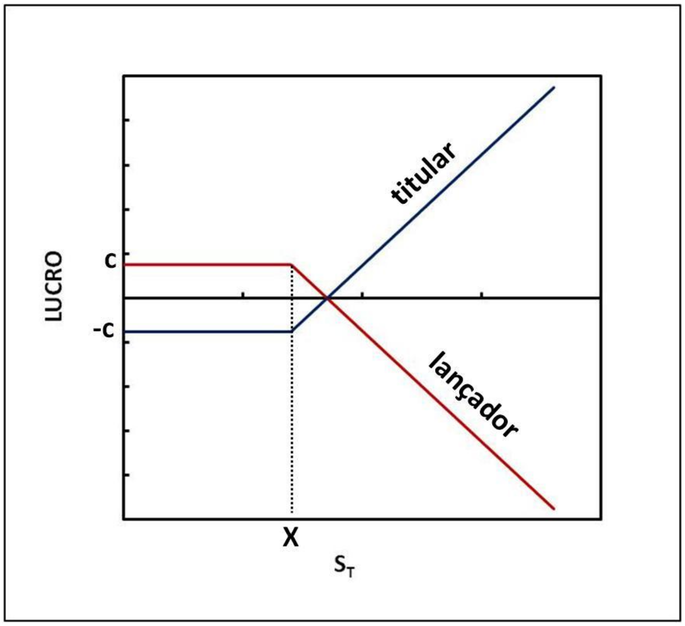


Figura 1. Lucros do titular e do lançador de uma CALL européia em função do preço à vista na maturidade

Note que o prejuízo do lançador poderia, teoricamente, ser infinito. Mas aqui é preciso distinguir prejuízos reais de prejuízos do tipo deixou de ganhar. Um lançador coberto só terá prejuízos do tipo "deixou de ganhar". Suponha que o lançador possui o ativo-objeto, ele tem duas opções, deixar para vender no mercado à vista em T ou vender a opção de compra por X , pela qual recebe c . Se deixar para vender à vista recebe S_T pelo seu A-O. Em T enquanto preço do A-O estiver abaixo do strike price o titular não exerce a opção e o lançador vende seu A-O por S_T , ganhando $S_T + c$. Se o preço ultrapassar o strike price então ele é obrigado a vender seu A-O por X . Figura 2 mostra os lucros do lançador nos dois casos, vendendo a opção ou no mercado à vista. Agora o lançador descoberto pode ter prejuízos reais porque deve comprar o A-O no mercado spot por S_T e vendê-lo por X para honrar seu compromisso.

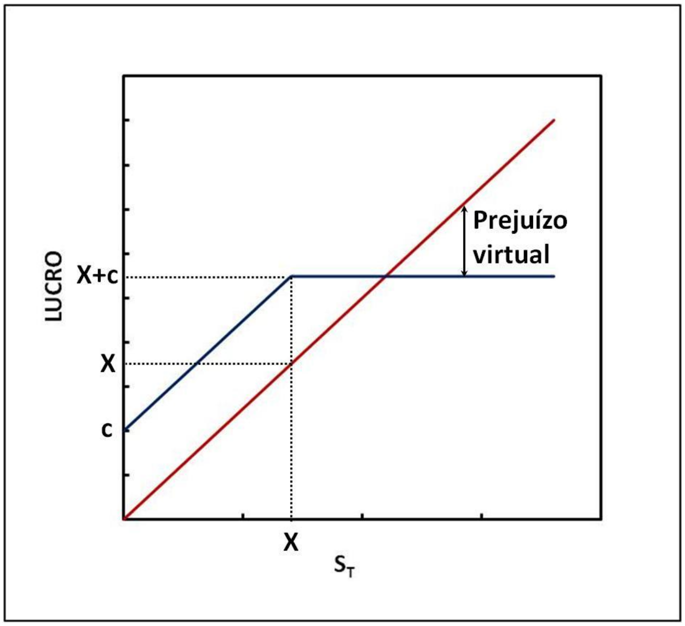


Figura 2. Lucros do lançador coberto ao vender uma CALL européia ou no mercado spot em função do strike price

(b) PUTs: no caso da opção de compra o titular sai ganhando quando o preço do produto que pretende vender fica abaixo do strike price, e seu lucro será $L_{put} = Max\left[X - S_T, 0\right] - p$. Como se trata de um jogo de soma zero, o lucro do titular representa prejuízo para o lançador e vice versa. Note que:

$$L_{put} = \begin{cases} X - S_T - p & se \quad X > S_T \\ -p & se \quad X < S_T \end{cases}$$

Figura 3 mostra os lucros do titular e lançador de uma PUT em função do preço à vista em T, S_T .

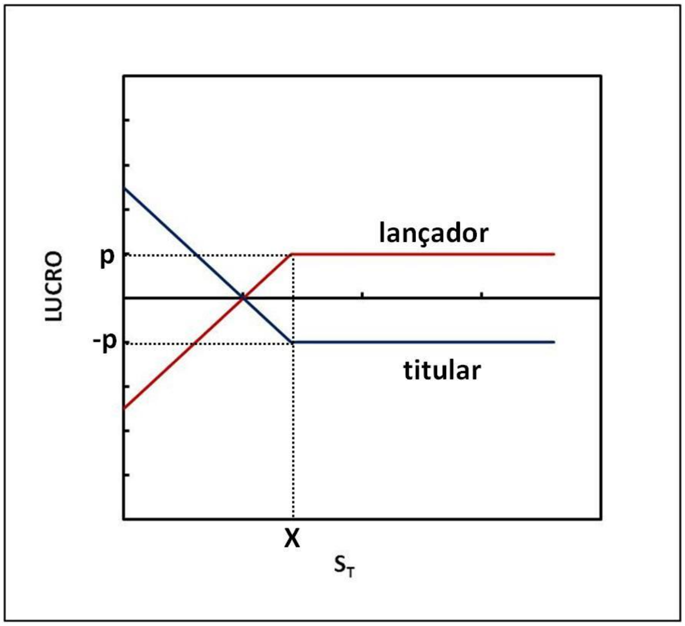


Figura 3. Lucros do titular e do lançador de uma PUT européia em função do preço à vista na maturidade

Aqui vale a pena notar que o prejuízo do lançador da PUT é limitado, no máximo, se o preço à vista do A-O chegar a ZERO, perderia $X - p$.

Opções com preços de barreira.

Nessa operação se estabelece um preço de barreira B para o lucro do titular, diminuindo assim o preço da opção. Nesse caso o lucro final da CALL será $L_{call} = Max\left[Min\left[S_T - X, B - X\right], 0\right]$ e o lucro final da PUT será $L_{put} = Max\left[Min\left[X - S_T, X - B\right], 0\right]$. A figura 4 mostra os lucros/prejuízos dos titulares e lançadores de opções de compra e venda com preços de barreira.

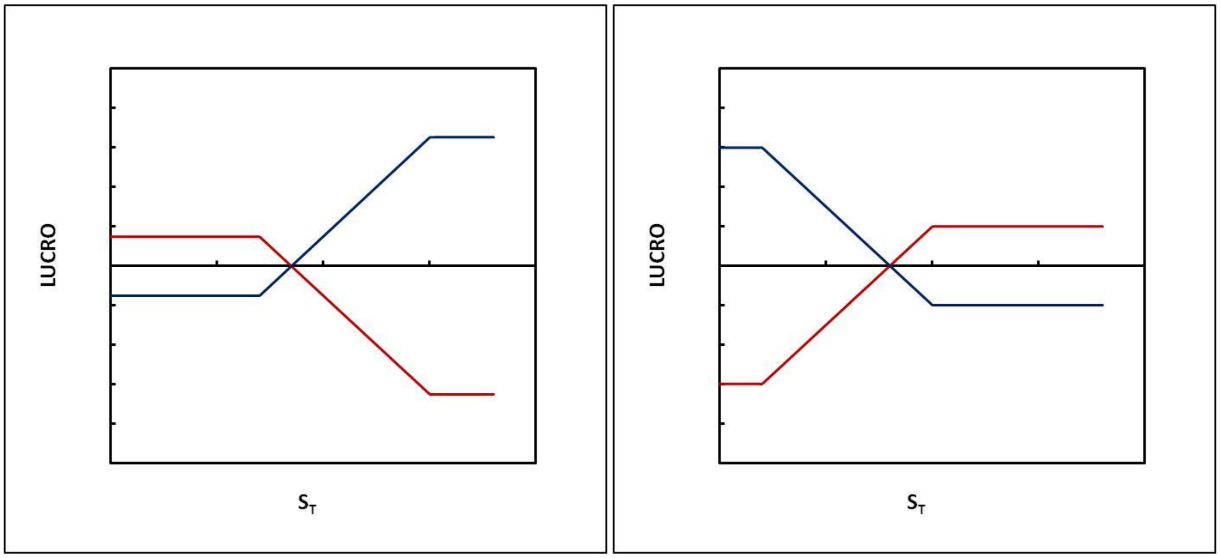
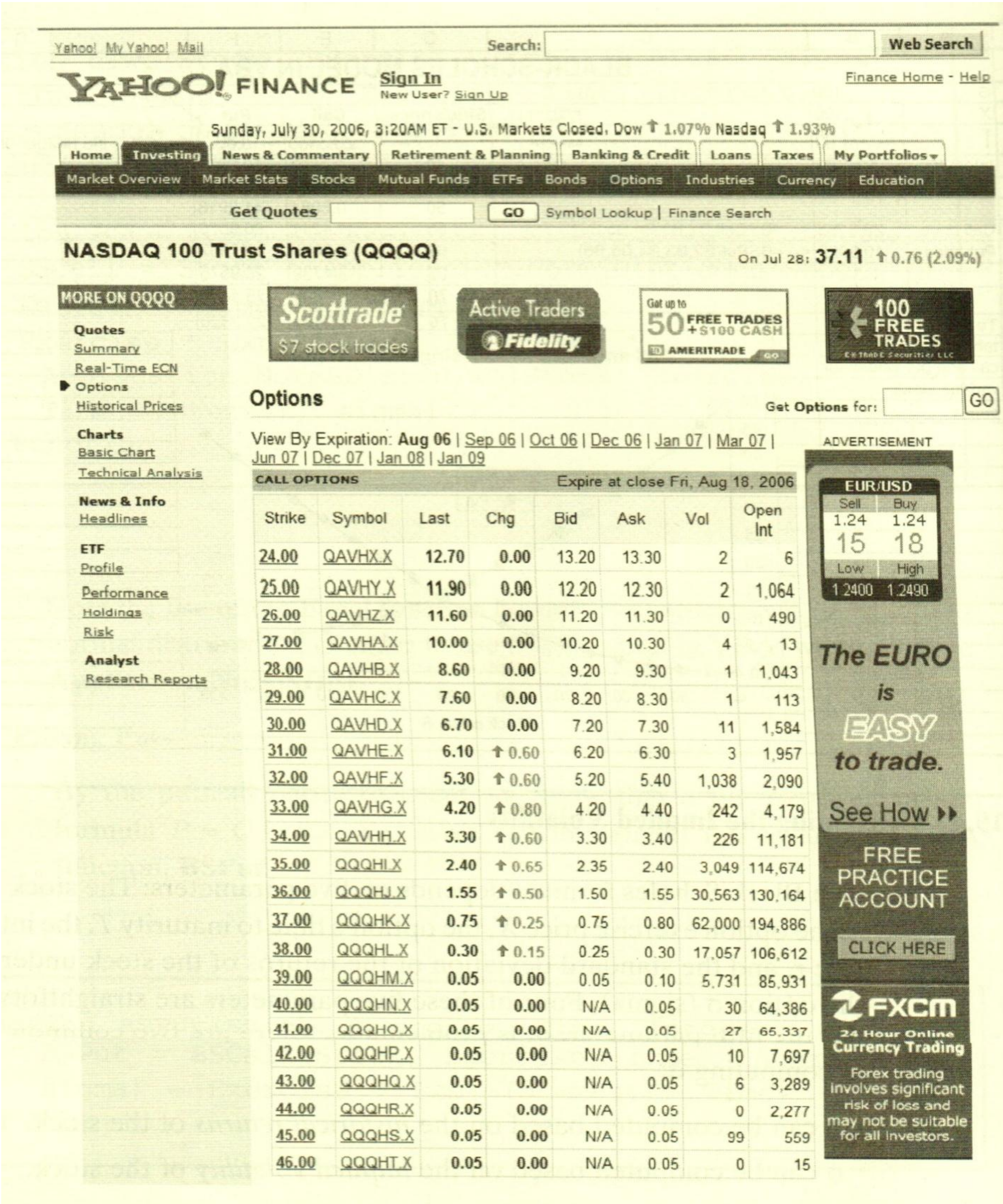


Figura 4. Esquerda: lucro da CALL com barreira. Direita: lucro da PUT com barreira.

Operacionalidade das OPÇÕES. A figura 5 mostra uma página com os valores dos diferentes strikes prices e os preços de compra e de venda de uma CALL, juntamente com o volume negociado das mesmas. A ação QQQQ [da NASDAQ] valia 37.11 no dia da cotação e os strike prices variaram de 24 até 46. Note que o volume de negócios em 37 é máximo, e diminui rapidamente fora desse intervalo, estando concentrado entre 34 e 39. Ou seja, a liquidez fora desse intervalo é baixa. O que não significa que contrato foram fechados por valores tão altos quanto 45 e tão baixos quanto 24. Acima de 40 não houve oferta de venda, só de compra. Existe um bid-ask spread mas pequeno com os preços acompanhando a mesma curva. Note que os preços caem com o strike price.



Yahoo! My Yahoo! Mail Search: Web Search

YAHOO! FINANCE Sign In New User? Sign Up Finance Home - Help

Sunday, July 30, 2006, 3:20AM ET - U.S. Markets Closed. Dow ↑ 1.07% Nasdaq ↑ 1.93%

Home | Investing | News & Commentary | Retirement & Planning | Banking & Credit | Loans | Taxes | My Portfolios

Market Overview | Market Stats | Stocks | Mutual Funds | ETFs | Bonds | Options | Industries | Currency | Education

Get Quotes GO Symbol Lookup | Finance Search

NASDAQ 100 Trust Shares (QQQQ) On Jul 28: **37.11** ↑ 0.76 (2.09%)

MORE ON QQQQ

Quotes: Summary, Real-Time ECN, Options, Historical Prices

Charts: Basic Chart, Technical Analysis

News & Info: Headlines

ETF: Profile, Performance, Holdings, Risk

Analyst: Research Reports

Options Get Options for: GO

View By Expiration: **Aug 06** | Sep 06 | Oct 06 | Dec 06 | Jan 07 | Mar 07 | Jun 07 | Dec 07 | Jan 08 | Jan 09

CALL OPTIONS Expire at close Fri, Aug 18, 2006

Strike	Symbol	Last	Chg	Bid	Ask	Vol	Open Int
24.00	QAVHX.X	12.70	0.00	13.20	13.30	2	6
25.00	QAVHY.X	11.90	0.00	12.20	12.30	2	1,064
26.00	QAVHZ.X	11.60	0.00	11.20	11.30	0	490
27.00	QAVHA.X	10.00	0.00	10.20	10.30	4	13
28.00	QAVHB.X	8.60	0.00	9.20	9.30	1	1,043
29.00	QAVHC.X	7.60	0.00	8.20	8.30	1	113
30.00	QAVHD.X	6.70	0.00	7.20	7.30	11	1,584
31.00	QAVHE.X	6.10	↑ 0.60	6.20	6.30	3	1,957
32.00	QAVHF.X	5.30	↑ 0.60	5.20	5.40	1,038	2,090
33.00	QAVHG.X	4.20	↑ 0.80	4.20	4.40	242	4,179
34.00	QAVHH.X	3.30	↑ 0.60	3.30	3.40	226	11,181
35.00	QQQHI.X	2.40	↑ 0.65	2.35	2.40	3,049	114,674
36.00	QQQHJ.X	1.55	↑ 0.50	1.50	1.55	30,563	130,164
37.00	QQQHK.X	0.75	↑ 0.25	0.75	0.80	62,000	194,886
38.00	QQQHL.X	0.30	↑ 0.15	0.25	0.30	17,057	106,612
39.00	QQQHM.X	0.05	0.00	0.05	0.10	5,731	85,931
40.00	QQQHN.X	0.05	0.00	N/A	0.05	30	64,386
41.00	QQQHO.X	0.05	0.00	N/A	0.05	27	65,337
42.00	QQQHP.X	0.05	0.00	N/A	0.05	10	7,697
43.00	QQQHQ.X	0.05	0.00	N/A	0.05	6	3,289
44.00	QQQHR.X	0.05	0.00	N/A	0.05	0	2,277
45.00	QQQHS.X	0.05	0.00	N/A	0.05	99	559
46.00	QQQHT.X	0.05	0.00	N/A	0.05	0	15

Figura 5. Transações de uma opção de compra para diversos strike prices efetuadas no dia 28/07/2006 para maturidade em 18/08/2006. O maior volume de negócios se concentra para o strike price em torno do preço spot, que foi de $S = 37.11$. Abaixo de $X = 24.00$ e acima de $X = 46.00$ não existiram transações.

Limites superiores para os prêmios:

1. $c \le C \le S$. Se $c > S$ ou $C > S$ o lançador cobra $c \ ou \ C$ hoje, do qual tira uma parte S para comprar o A-O, ficando com o lucro $L = \begin{bmatrix} c \\ C \end{bmatrix} - S$. Na maturidade, caso a opção seja exercida, ele entrega o A-O. Se não for ele vende o A-O. Ou seja, conseguiu montar uma operação de arbitragem de segunda espécie. Suponha que $c > C$, um arbitrador vende a opção européia por c e compra uma opção americana por C e não exerce a opção americana antecipadamente. Na maturidade a opção americana paga a européia e ele ficou com o lucro $L = c - C$ em $t = 0$. Note que a opção americana inclui a européia, pois o titular pode exerce-la apenas na maturidade. O inverso não é verdade, pois o titular pode exercer a opção americana antecipadamente e o lançador corre o risco de não trocar uma pela outra na maturidade.

2. $p \le P \le X$. Se $p > X$ ou $P > X$ o lançador cobra $p \ ou \ P$ hoje, e guarda X para a maturidade caso tenha que pagar a opção. Da mesma forma que no caso da CALL suponha que $p > P$. Um arbitrador vende a opção européia por p e compra uma opção americana por P e não exerce a opção americana antecipadamente. Na maturidade a opção americana paga a européia e ele ficou com o lucro $L = p - P$ em $t = 0$.

3. $p \le \frac{X}{(1+R)^T}$. Se $p > \frac{X}{(1+R)^T}$ o lançador cobra p, do qual extrai $\frac{X}{(1+R)^T}$ para uma aplicação na taxa de juros R. Na maturidade terá $\frac{(1+R)^T X}{(1+R)^T} = X$ para pagar o titular e ficou com o lucro $L = p - \frac{X}{(1+R)^T}$. Na opção americana é mais complicado pois não se sabe em que momento será necessário cobrir a opção.

Limites inferiores para os prêmios:

4. $C \ge c \ge Max\left[S - \frac{X}{(1+R)^T}, 0 \right]$. Suponha o caso em que $S - \frac{X}{(1+R)^T} > 0$, caso contrário, a desigualdade diz apenas que $c \ge 0$. Vamos analisar a seguinte operação: em $t = 0$ vende o A-O por S, compra uma CALL por c e aplica $\frac{X}{(1+R)^T}$ na taxa R.

$t = 0$	$t = 0$	$t = T$	$t = T$
Operação	$	$S_T < X$	$X \le S_T$

Vende x A-Os	$-S\,x$		
Comprar x A-Os		$-S_T\,x$	$-S_T\,x$
Comprar x CALLs X	$c\,x$	0	$\left[X-S_T\right]x$
Aplica $\dfrac{x\,X}{(1+R)^T}$	$\dfrac{x\,X}{(1+R)^T}$	$x\,X$	$x\,X$
Total	$\left[-S+c+\dfrac{X}{(1+R)^T}\right]x$	$\left[X-S_T\right]x>0$	0

Note que na maturidade ele recompôs seus ativos e só existem ganhos positivos ou nulos. Nesse caso deve ter gasto dinheiro em $t=0$ ou teria uma oportunidade de operação de arbitragem de segunda espécie. Assim $\left[-S+c+\dfrac{X}{(1+R)^T}\right]>0$ ou $c>S-\dfrac{X}{(1+R)^T}$. Daí vale a desigualdade $c\geq Max\left[S-\dfrac{X}{(1+R)^T},0\right]$.

5. Se o A-O não paga dividendos então nunca é vantajoso exercer a opção americana antecipadamente, logo $C=c$. Para $t<T$ só vale a pena exercer a CALL americana se $S_t-X>0$. O prêmio de uma CALL para T em t será maior do que $c_t\geq S_t-\dfrac{X}{(1+R)^{(T-t)}}$ mas $\dfrac{X}{(1+R)^{(T-t)}}<X$ logo $c_t\geq S_t-\dfrac{X}{(1+R)^{(T-t)}}\geq S_t-X$ e é preferível manter a opção.

6. A curva do prêmio da CALL em função do strike price X é decrescente e convexa.

(a) A primeira parte é feita por absurdo supondo que $X_2>X_1$ mas $c_2>c_1$. A operação é vender a call de X_2 por c_2 e comprar a call de X_1 por c_1. Ficar com o lucro $L=c_2-c_1$. Na maturidade temos as seguintes possibilidades: $S_T<X_1$ e nada há para pagar nem para receber, ganho nulo; $X_1\leq S_T<X_2$ e o arbitrador recebe o valor S_T-X_1 da call comprada e, finalmente, no caso $X_2\leq S_T$ o arbitrador recebe S_T-X_1 da call comprada e paga S_T-X_2 da call vendida, com um lucro de X_2-X_1. Para não permitir essa operação de arbitragem é necessário que $c(X_2)<c(X_1)\quad\forall X_2>X_1$. A curva c vs X é decrescente.

(b) A segunda parte é demonstrada da seguinte forma: Sejam X_1, X_2 e $\bar{X} = \frac{X_1 + X_2}{2}$ três preços de exercício [strike] prices de opções de compra sobre o mesmo ativo. Os prêmios serão diferentes para cada uma delas, valendo $c(X_1)$, $c(X_2)$ e $c(\bar{X})$. Podemos mostrar que $c(\bar{X}) < \frac{c(X_1)+c(X_2)}{2}$.

Provar por arbitragem de segunda espécie. Vamos montar a seguinte operação: comprar x CALLs com strike price de X_1 por $xc(X_1)$, mais outras x CALLs com strike price de X_2 por $xc(X_2)$ e vender 2x CALLs com strike price de $\bar{X}$ por $2xc(\bar{X})$. Fazendo $X_1 < X_2$ temos que $X_1 < \bar{X} < X_2$.

$t=0$	$t=0$	$t=T$	$t=T$	$t=T$	$t=T$
Operação	\$	$S_T < X_1$	$X_1 \le S_T < \bar{X}$	$\bar{X} \le S_T < X_2$	$X_2 \le S_T$
Comprar x CALLs de X_1	$c(X_1)$	0	$S_T - X_1$	$S_T - X_1$	$S_T - X_1$
Comprar x CALLs de X_2	$c(X_2)$	0	0	0	$S_T - X_2$
Vender 2x CALLs de $\bar{X}$	$-2c(\bar{X})$	0	0	$-2(S_T - \bar{X})$	$-2(S_T - \bar{X})$
Total	$c(X_1)+c(X_2)-2c(\bar{X})$	0	$S_T - X_1 > 0$	$2\bar{X} - X_1 - S_T =$ $= X_2 - S_T > 0$	$2\bar{X} - X_1 - X_2 = 0$

Em $t=T$ as operações ou são nulas ou positivas, logo a esperança de lucro é sempre positiva. Então o portfólio tem que custar algo em $t=0$, ou seja, $c(X_1)+c(X_2)-2c(\bar{X})>0$, que leva a $c(\bar{X}) < \frac{c(X_1)+c(X_2)}{2}$.

Então a curva do prêmio da CALL em função do strike price tem que ser da forma mostrada pela figura 6:

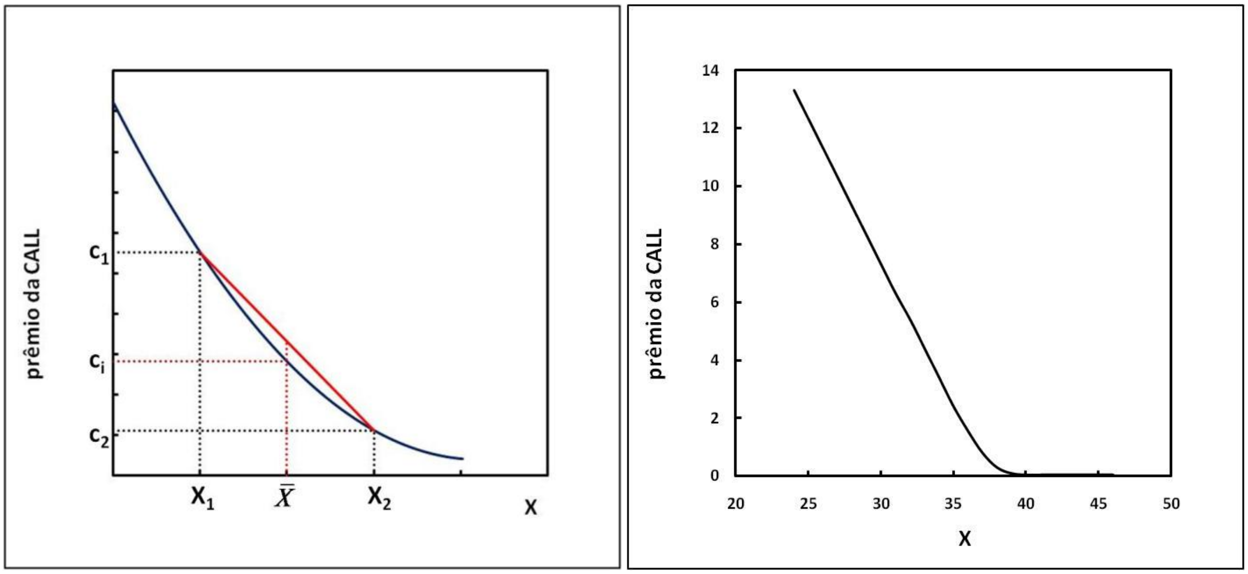


Figura 6. Esquerda: Prêmio da Call em função do Strike Price. Direita: Preços reais de mercado [ask] da CALL para a QQQQ. Note que é decrescente e convexa embora quase uma reta para valores baixos de X.

1. $p \geq Max\left[\frac{X}{(1+R)^T} - S, 0\right]$. Suponha o caso em que $\frac{X}{(1+R)^T} - S > 0$. Vamos analisar a seguinte operação:

Em $t=0$ compra o A-O por S, compra uma PUT por p e toma $\frac{X}{(1+R)^T}$ emprestado na taxa R.

$t=0$	$t=0$	$t=T$	$t=T$
Operação	$	$S_T < X$	$X \leq S_T$
Compra x A-Os	$S\,x$		
Vende x A-Os	-	$S_T\,x$	$S_T\,x$
Comprar x PUTs X	$p\,x$	$[X - S_T]x$	0
Toma empréstimo de $\frac{x\,X}{(1+R)^T}$	$-\frac{x\,X}{(1+R)^T}$	$-X\,x$	$-X\,x$
Total	$\left[S + p - \frac{X}{(1+R)^T}\right]x$	0	$[S_T - X]x > 0$

Novamente só existem ganhos positivos ou nulos na maturidade, logo $\left[S+p-\frac{X}{(1+R)^T}\right]>0$, ou $p>\frac{X}{(1+R)^T}-S$. Daí vale a desigualdade $p \geq Max\left[\frac{X}{(1+R)^T}-S,0\right]$.

7. A curva do prêmio da PUT em função do strike price X é crescente e convexa.

(a) A primeira parte é feita por absurdo supondo que $X_2 > X_1$ mas $p_2 < p_1$. A operação é: vende a call de X_1 por p_1 e compra a put de X_2 por p_2. Fica com o lucro $L = p_1 - p_2$. Na maturidade temos as seguintes possibilidades: $S_T > X_2$ nada temos a pagar nem a receber, nenhuma opção será exercida, ganho nulo; $X_1 \leq S_T < X_2$ e recebemos o valor $X_2 - S_T$ da put comprada; e, finalmente, no caso $X_1 \leq S_T$ recebemos $X_2 - S_T$ da put comprada e pagamos $X_1 - S_T$ da put vendida, com lucro de $X_2 - X_1$. Para não permitir essa operação de arbitragem é necessário que $p(X_2) > p(X_1) \quad \forall X_2 > X_1$. A curva p vs X é crescente.

2. A segunda parte é demonstrada da seguinte forma: Sejam X_1, X_2 e $\bar{X}=\frac{X_1+X_2}{2}$ três preços de exercício [strike] prices de opções de compra sobre o mesmo ativo. Os prêmios serão diferentes para cada uma delas, valendo $p(X_1)$, $p(X_2)$ e $p(\bar{X})$. Podemos mostrar que $p(\bar{X})<\frac{p(X_1)+p(X_2)}{2}$.

Provar por arbitragem de segunda espécie. Vamos montar a seguinte operação: comprar x PUTs com strike price de X_1 por $p(X_1)x$, mais outras x PUTs com strike price de X_2 por $p(X_2)x$ e vender 2x PUTs com strike price de $\bar{X}$ por $2p(\bar{X})x$. Fazendo $X_1 < X_2$ temos que $X_1 < \bar{X} < X_2$.

$t=0$	$t=0$	$t=T$	$t=T$	$t=T$	$t=T$
Operação	$	$S_T > X_2$	$\bar{X} \leq S_T < X_2$	$X_1 \leq S_T < \bar{X}$	$S_T \leq X_1$
Comprar x PUTs de X_2	$p(X_1)x$	0	$(X_2 - S_T)x$	$(X_2 - S_T)x$	$(X_2 - S_T)x$
Comprar x PUTs de X_1	$p(X_2)x$	0	0	0	$(X_1 - S_T)x$
Vender 2x PUTs de $\bar{X}$	$-2p(\bar{X})x$	0	0	$-2(\bar{X} - S_T)x$	$-2(\bar{X} - S_T)x$
Total	$\left[p(X_1)+p(X_2)-2p(\bar{X})\right]x$	0	$(X_2 - S_T)x > 0$	$(X_2 - S_T - 2\bar{X} + 2S_T)x = (S_T - X_1)x > 0$	$(X_1 + X_2 - 2\bar{X})x = 0$

Em $t=T$ as operações ou são nulas ou positivas, logo a esperança de lucro é sempre positiva. Então o portfólio tem que custar algo em $t=0$, ou seja, $p(X_1)+p(X_2)-2p(\bar{X})>0$, que leva a $p(\bar{X})<\frac{p(X_1)+p(X_2)}{2}$.

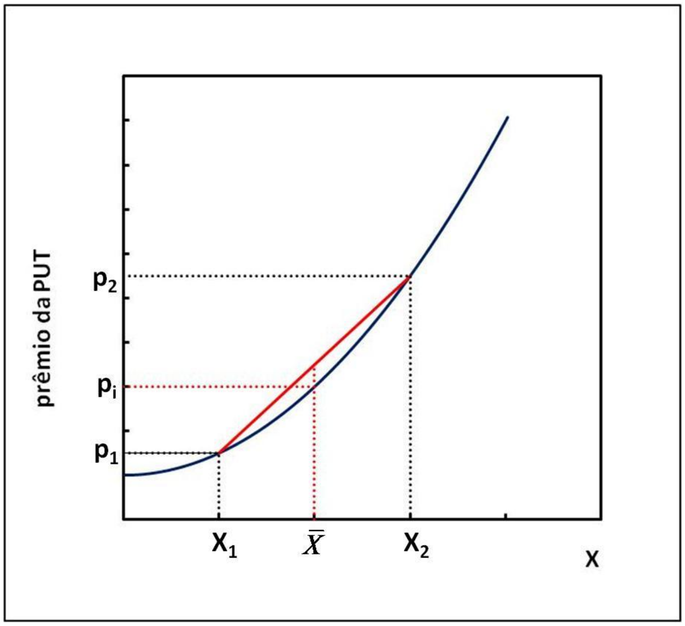


Figura 7. Prêmio da PUT em função do Strike Price.

Paridade entre opções de venda e de compra [PUT-CALL parity]: $c+\frac{X}{(1+R)^T}=p+S$.

Considere duas carteiras A e B. Na carteira A o investidor compra uma CALL por c e aplica $\frac{X}{(1+R)^T}$ na taxa R. Na carteira B o investidor compra uma put por p e guarda o ativo-objeto. Em $t=T$ as duas carteiras valem a mesma coisa pois: se $S_T<X$ a call não será exercida e o investidor A terá $\frac{(1+R)^T X}{(1+R)^T}=X$. A put será exercida e o investidor B entrega o A-O pelo qual recebe X; já, se $S_T>X$ a call será exercida e o investidor A paga X e recebe o A-O que pode vender por S_T. O investidor B não exerce a opção e fica com o A-O que pode vender por S_T. Se as duas carteiras valem o mesmo em qualquer situação na maturidade então devem custar o mesmo em $t=0$. A carteira A custou $c+\frac{X}{(1+R)^T}$ e a B custou $S+p$, logo $c+\frac{X}{(1+R)^T}=p+S$. Só vale para a opção européia.

Estratégias Operacionais no mercado de Opções.

Marins lista várias estratégias operacionais no mercado de opções, mas não exaure as possibilidades. Procurando na internet podem-se encontrar muitas e muitas formas de curvas de lucro e retorno com diferentes combinações de compra e vendas de CALLs e PUTs.

Operação financiamento com CALL.

Objetivo é financiar o mercado mas conseguir um retorno desejado se não houver exercício da opção. Operacionalização: comprar x ações no mercado à vista por S e vender opção de compra de x ações por X. Como é uma venda coberta a bolsa não exige margens de garantia.

Em $t=0$ pagou $S\,x$, ficou com x ações, e recebeu $c(X)x$ em um total de $\$_o = S\,x - c\,x = (S-c)x$

Em $t=T$ o fluxo de caixa será $\$_T = S_T - Max[S_T - X, 0]$ o lucro, não descontado, será de:

$$L_T = \$_T - \$_o = S_T\,x - Max[S_T - X, 0]x - (S-c)x = \{S_T - Max[S_T - X, 0] - (S-c)\}x$$

$$L_T = \begin{bmatrix} c + X - S & S_T > X \\ S_T - S + c & S_T < X \end{bmatrix} x$$

O ponto de zero será em $S_T = S - c$.

O rendimento da operação será $R = \dfrac{L_T}{[S-c]x} = \dfrac{S_T - Max[S_T - X, 0]}{[S-c]} - 1$

Os gráficos das figuras 1 (a) e (b) mostram o lucro e o retorno obtidos com essa operação.

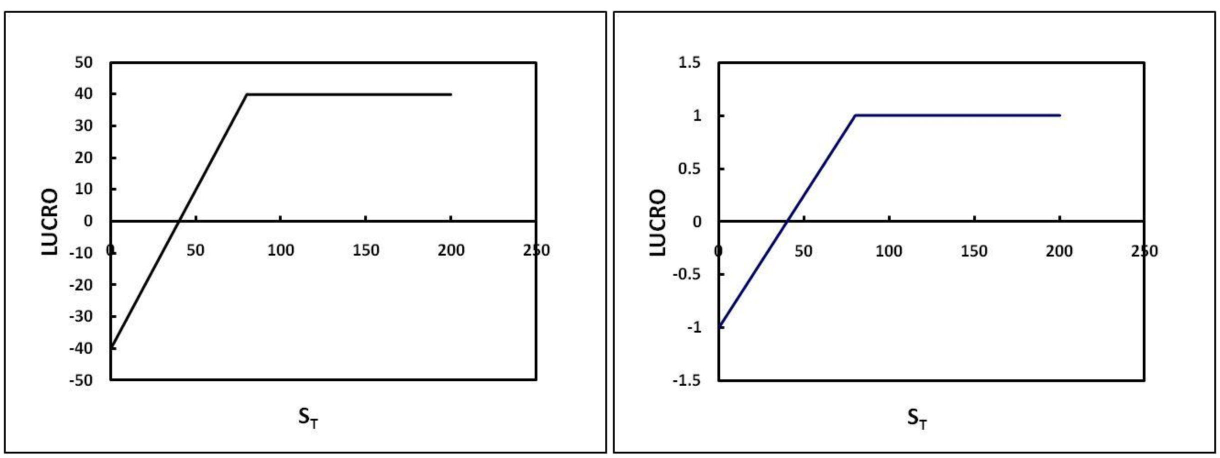


Figura 1

Operação financiamento com PUT.

Operacionalização: comprar x ações no mercado à vista por S e compra de opção de venda de x ações por X.

Em $t = 0$ pagou $S\,x$ e mais $p(X)x$ pela opção de venda $\$_o = S\,x + p\,x = (S + p)x$.

Em $t = T$ o fluxo de caixa será $\$_T = Max[X - S_T, 0]x + S_T\,x$ o lucro, não descontado, será de $L_T = \$_T - \$_o = Max[X - S_T, 0]x + S_T\,x - (S + p)x = \{Max[X - S_T, 0] + S_T - (S + p)\}x$

$$L_T = \$_T - \$_o = \begin{bmatrix} S_T - (S + p) & S_T > X \\ X - (S + p) & S_T < X \end{bmatrix} x$$

O rendimento da operação será $R = \dfrac{L_T}{(S + p)x} = \dfrac{Max[X - S_T, 0] + S_T}{(S + p)} - 1$

Os gráficos das figuras 2 (a) e (b) mostram o lucro e o retorno obtidos com essa operação.

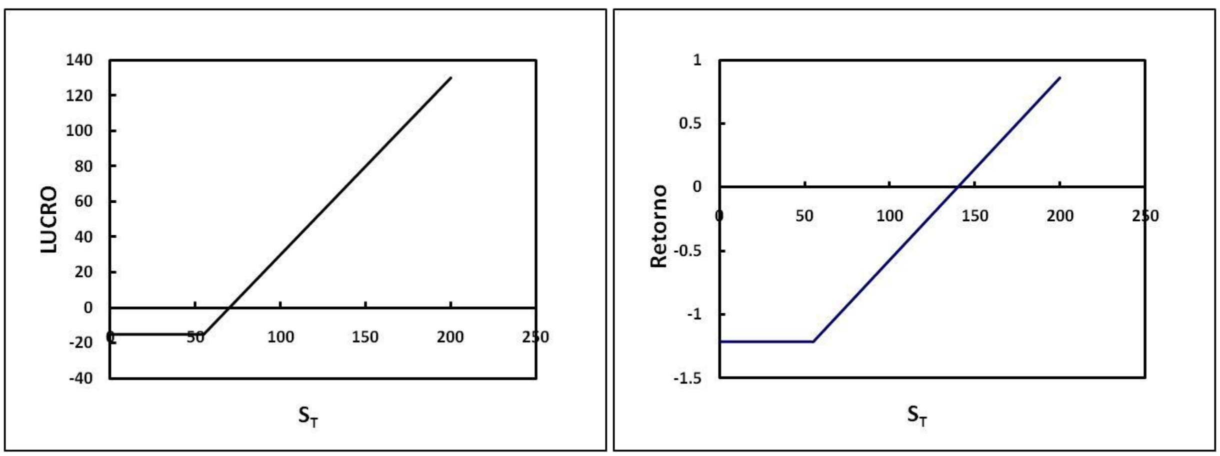


Figura 2.

Operação caixa com reposição do ativo-objeto usando CALLs.

O agente deseja se financiar através do mercado de opções e voltar ao estado inicial no final da operação. Operacionalização: vender x ações no mercado à vista por S e comprar opção de compra de x ações por X.

Em $t = 0$ vendeu x ações e recebeu $S\,x$ pelas mesmas. Além disso, pagou $c(X)x$ pela opção. Gastou no total de $\$_o = -S\,x + c\,x = -(S - c)x$

Em $t = T$ tem que pagar $S_T\, x$ para reaver as ações e terá o lucro do titular da operação CALL $Max\left[S_T - X, 0\right]x$. O fluxo de caixa será $\$_T = Max\left[S_T - X, 0\right]x - S_T\, x$ e o lucro será de:

$$L_T = \$_T - \$_o = Max\left[S_T - X, 0\right]x - S_T\, x + \left(S - c\right)x = \left\{Max\left[S_T - X, 0\right] - S_T + \left(S - c\right)\right\}x$$

$$L_T = \begin{bmatrix} S - X - c & S_T > X \\ -S_T + \left(S - c\right) & S_T < X \end{bmatrix}x$$

O taxa de juros dessa captação de recurso foi de $R = \dfrac{L_T}{-\left[S - c\right]x} - 1 = \dfrac{S_T - Max\left[S_T - X, 0\right]}{\left[S - c\right]} - 1$

Os gráficos das figuras 3 (a) e (b) mostram o lucro e a taxa de captação dessa operação. Note que do ponto de vista do operador ele limitou o teto máximo da taxa de captação que pagaria e pode chegar a ter lucro, taxa de captação negativa, com essa operação.

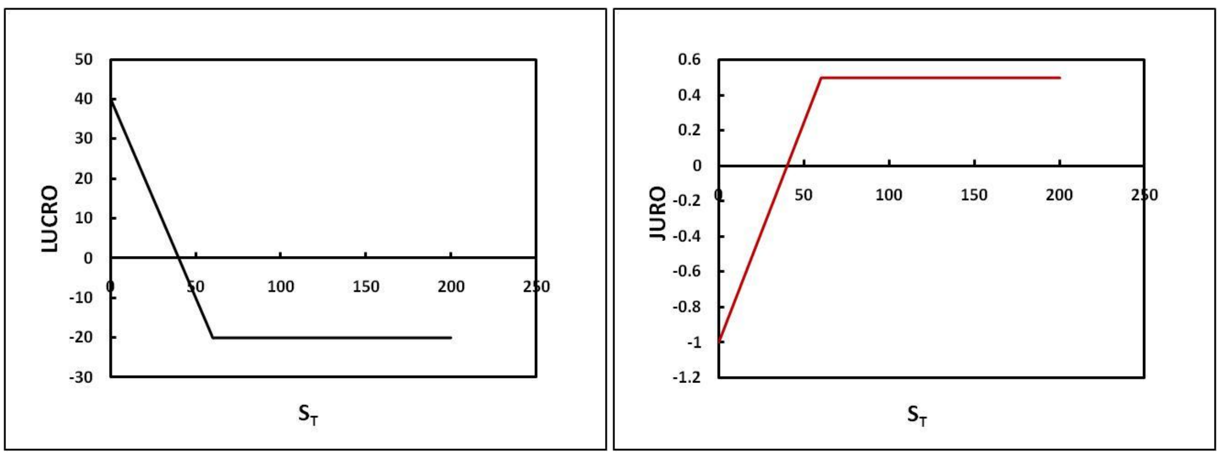


Figura 3.

Operação caixa com reposição do ativo-objeto usando PUTs.

O agente deseja se financiar através do mercado de opções e voltar ao estado inicial no final da operação. Operacionalização: vender x ações no mercado à vista por S e comprar opção de compra de x ações por X.

Em $t = 0$ vendeu x ações e recebeu $S\, x$ pelas mesmas, e vendeu uma opção de venda recebendo mais $p\left(X\right)x$ pela opção. Gastou no total de $\$_o = -S\, x - p\, x = -\left(S + p\right)x$, ou recebeu $-\$_o = \left(S + p\right)x$.

Em $t = T$ tem que pagar $S_T\, x$ para reaver as ações e deva pagar $Max\left[X - S_T, 0\right]x$. O fluxo de caixa será $\$_T = -S_T\, x - Max\left[S_T - X, 0\right]x$ e o lucro será de:

$$L_T = \$_T - \$_o = -S_T\,x - Max\left[S_T - X, 0\right]x + \left(S + p\right)x = \left\{-S_T - Max\left[S_T - X, 0\right] + \left(S + p\right)\right\}x$$

O taxa de juros dessa captação de recurso foi de $R = \dfrac{L_T}{-\left[S+p\right]x} - 1 = \dfrac{S_T + Max\left[X - S_T, 0\right]}{\left[S+p\right]} - 1$

Os gráficos das figuras 4 (a) e (b) mostram o lucro e a taxa de captação dessa operação.

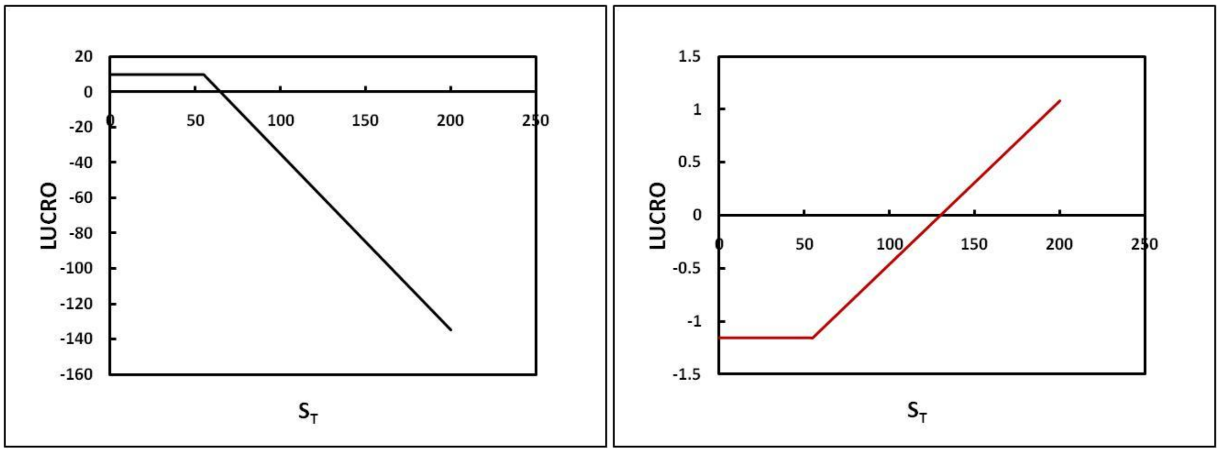


Figura 4.

Operação trava de baixa usando CALLs.

Em $t = 0$ vender uma CALL com X_- e c_+ e, ao mesmo tempo, comprar uma CALL com X_+ e c_-. Aqui vamos usar a notação $X_+ > X_-$ e $c_+ > c_-$. Nesse caso pagou no total $\$_o = -c_+\,x + c\_\,x = -\left(c_+ - c_-\right)x$, ou recebeu $-\$_o = \left(c_+ - c_-\right)x$.

Em $t = T$ tem que pagar $Max\left[S_T - X_-, 0\right]x$ e recebe $Max\left[S_T - X_+, 0\right]x$. O fluxo de caixa será $\$_T = \left\{Max\left[S_T - X_+, 0\right] - Max\left[S_T - X_-, 0\right]\right\}x$ e o lucro será de:

$$\begin{aligned} L_T &= \$_T - \$_o = Max\left[S_T - X_+, 0\right]x - Max\left[S_T - X_-, 0\right]x + \left(c_+ - c_-\right)x = \\ &= \left\{Max\left[S_T - X_+, 0\right] - Max\left[S_T - X_-, 0\right] + \left(c_+ - c_-\right)\right\}x \end{aligned}$$

O taxa de juros dessa captação de recurso foi:

$$R = \frac{L_T}{-\left(c_+ - c_-\right)x} = \frac{Max\left[X - S_-, 0\right] - Max\left[X - S_+, 0\right]}{\left(c_+ - c_-\right)} - 1$$

Os gráficos das figuras 5 (a) e (b) mostram o lucro e a taxa de captação dessa operação.

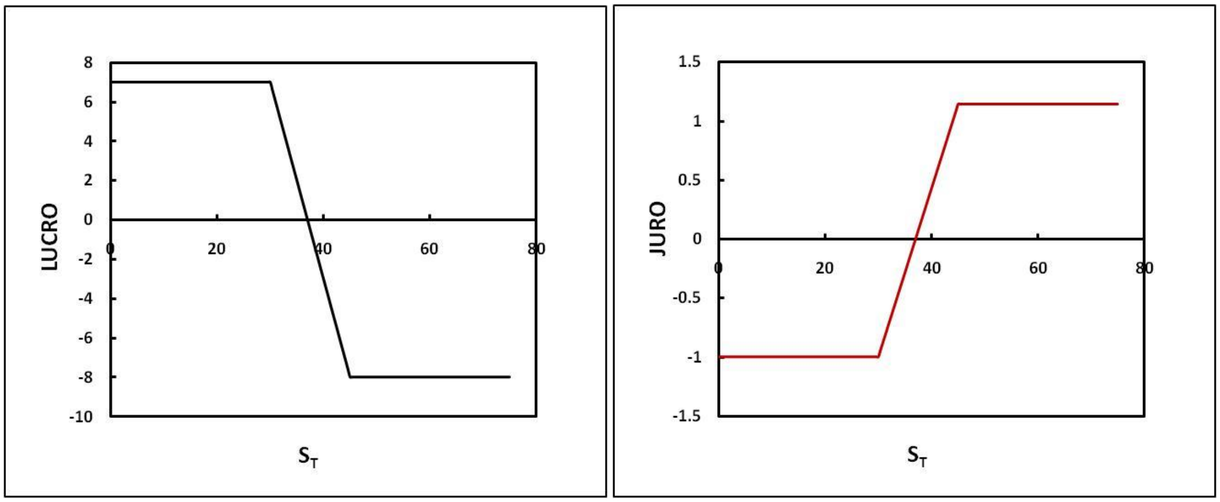


Figura 5.

Operação trava de alta usando CALLs.

Em $t=0$ comprar uma CALL com X_- e c_+ e, ao mesmo tempo, vender uma CALL com X_+ e c_-. Nesse caso pagou no total $\$_o = c_+ x - c_- x = (c_+ - c_-)x$, ou seja, está aplicando recursos.

Em $t=T$ recebe $Max[S_T - X_-, 0]x$ e tem que pagar $Max[S_T - X_+, 0]x$. O fluxo de caixa será $\$_T = \{Max[S_T - X_-, 0] - Max[S_T - X_+, 0]\}x$ e o lucro será de:

$$
\begin{aligned}
L_T &= \$_T - \$_o = Max[S_T - X_-, 0]x - Max[S_T - X_+, 0]x - (c_+ - c_-)x = \\
&= \{Max[S_T - X_-, 0] - Max[S_T - X_+, 0] - (c_+ - c_-)\}x
\end{aligned}
$$

O taxa de retorno foi:

$$
R = \frac{L_T}{(c_+ - c_-)x} = \frac{Max[X - S_-, 0] - Max[X - S_+, 0]}{(c_+ - c_-)} - 1
$$

Os gráficos das figuras 6 (a) e (b) mostram o lucro e o retorno dessa operação.

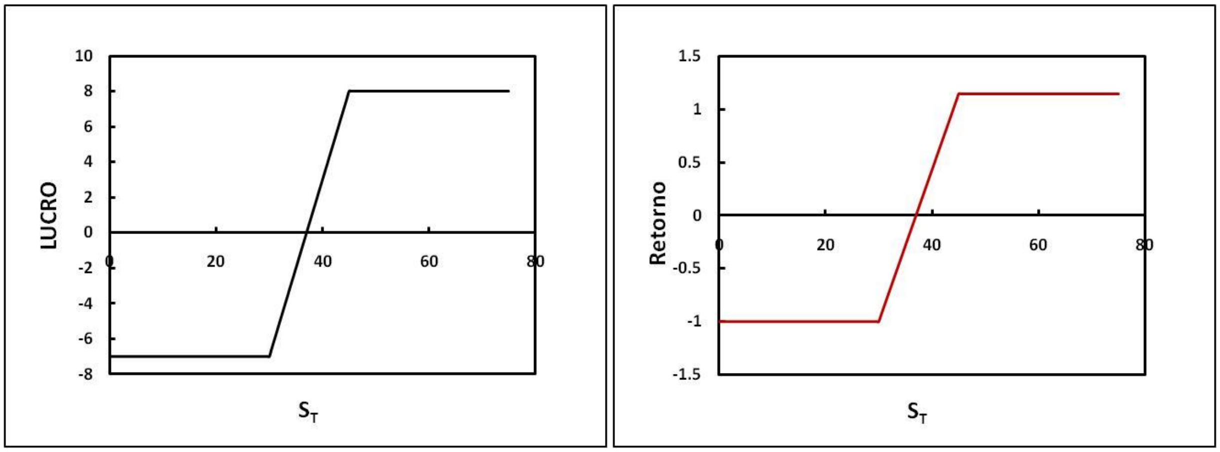


Figura 6.

Operação spread butterfly com CALLs.

Em $t=0$ vender x CALLs com X_- e c_+, comprar $2x$ CALLs com $\bar{X}$ e c_i e vender x CALLs com X_+ e c_-. Aqui, além da notação $X_+ > X_-$ e $c_+ > c_-$, $\bar{X} = \dfrac{X_+ + X_-}{2}$ e $c_i < \dfrac{c_+ + c_-}{2}$.

Em $t=0$ gastou $\$_o = 2c_i\,x - c_+x - c_-x = \left(2c_i - c_+ - c_-\right)x$ que será negativo porque $c_i < \dfrac{c_+ + c_-}{2}$.

Em $t=T$ ele liquida o contrato em ações pois vai receber 2x e entregar 2x ações. Em dinheiro recebe $\$_T = \left[2Max\left[S_T - \bar{X},0\right] - Max\left[S_T - X_-,0\right] - Max\left[S_T - X_+,0\right]\right]x$ e o lucro será de:

$$
\begin{aligned}
L_T &= \$_T - \$_o = \left[2Max\left[S_T - \bar{X},0\right] - Max\left[S_T - X_-,0\right] - Max\left[S_T - X_+,0\right]\right]x - \left(2c_i - c_+ - c_-\right)x \\
&= \left\{2Max\left[S_T - \bar{X},0\right] - Max\left[S_T - X_-,0\right] - Max\left[S_T - X_+,0\right] + \left(c_+ + c_- - 2c_i\right)\right\}x
\end{aligned}
$$

$$
L_T = \begin{bmatrix} c_+ + c_- - 2c_i & S_T < X_- \\ c_+ + c_- - 2c_i + X_- - S_T & X_- \le S_T < \bar{X} \\ c_+ + c_- - 2c_i + X_+ + S_T & \bar{X} \le S_T < X_+ \\ c_+ + c_- - 2c_i & S_T > X_+ \end{bmatrix} x
$$

O gráfico da figura 7 mostram o lucro dessa operação.

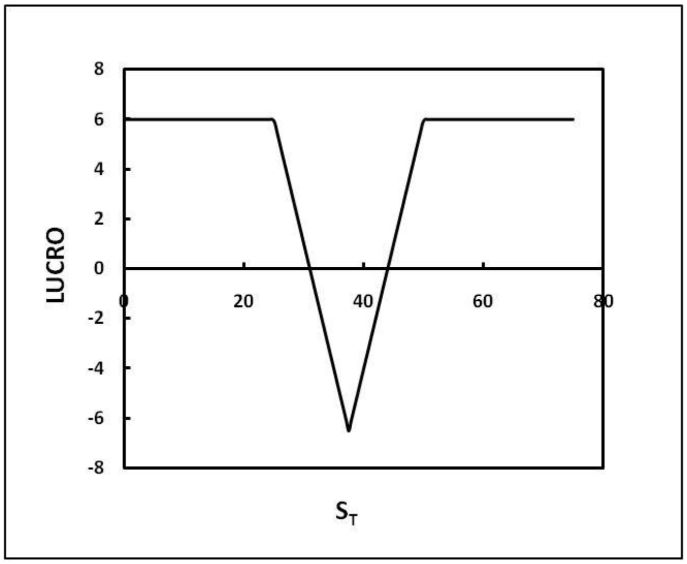


Figura 7.

Operação CONDOR com CALLs.

Em $t=0$

1. Vender x CALLs com X_a e c_a
2. Comprar x CALLs com X_b e c_b
3. Comprar x CALLs com X_c e c_c
4. Vender x CALLs com X_d e c_d

Onde $X_a < X_b < X_c < X_d$ e $c_a > c_b > c_c > c_d$. Truque é obrigar $\Delta = X_d - X_c = X_c - X_b = X_b - X_a$. Em $t=0$ gastou $\$_o = c_b\, x + c_c\, x - c_a\, x - c_d\, x = \left(c_b + c_c - c_a - c_d\right)x$. Em $t=T$ ele liquida o contrato em ações pois vai receber 2x e entregar 2x ações. Em dinheiro recebe $\$_T = \left[Max\left[S_T - X_b, 0\right] + Max\left[S_T - X_c, 0\right] - Max\left[S_T - X_a, 0\right] - Max\left[S_T - X_d, 0\right]\right]x$ e o lucro será de:

$$L_T = \$_T - \$_o = \left[Max\left[S_T - X_b, 0\right] + Max\left[S_T - X_c, 0\right] - Max\left[S_T - X_a, 0\right] - Max\left[S_T - X_d, 0\right] - \left(c_b + c_c - c_a - c_d\right)\right]x$$

$$L_T = \left[\left(c_a + c_d - c_b - c_c\right) - Max\left[S_T - X_a, 0\right] + Max\left[S_T - X_b, 0\right] + Max\left[S_T - X_c, 0\right] - Max\left[S_T - X_d, 0\right]\right]x$$

$$L_T = \begin{bmatrix} c_a + c_d - c_b - c_c \quad S_T < X_a \\ (c_a + c_d - c_b - c_c) + X_a - S_T \quad X_a \le S_T < X_b \\ (c_a + c_d - c_b - c_c) - \Delta \quad X_b \le S_T < X_c \\ (c_a + c_d - c_b - c_c) - \Delta - X_c + S_T \quad X_c \le S_T < X_d \\ (c_a + c_d - c_b - c_c) \quad S_T > X_d \end{bmatrix} x$$

O gráfico da figura 8 mostram o lucro dessa operação.

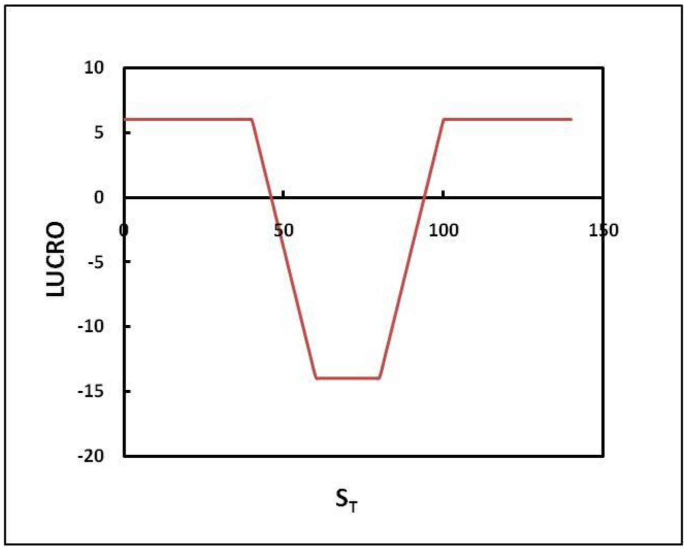


Figura 8.

Estratégias Box-spread envolvend CALLs e PUTs.

A paridade put-call nas opções européias pode ser usada para desenvolver as estratégias box-spread.

$$c_1 - p_1 = S - \frac{X_1}{(1+R)^T}$$

$$c_2 - p_2 = S - \frac{X_2}{(1+R)^T}$$

$$(c_1 - c_2) - (p_1 - p_2) = \frac{(X_2 - X_1)}{(1+R)^T}$$

Se subtraímos duas relações de paridade para diferentes strike prices nos livramos de S.

Estratégia Box- 4 pontas de aplicação.

Em $t=0$

5. Comprar x CALLs com X_- e c_+
6. Vender x CALLs com X_+ e c_-
7. Comprar x PUTs com X_+ e p_+
8. Vender x CALLs com X_- e p_-

Em $t=0$ gastou $\$_o = c_+ x - c_- x + p_+ x - p_- x = (c_+ - c_- + p_+ - p_-)x$.

Em $t=T$ recebe $\$_T = \left[Max[S_T - X_-, 0] - Max[S_T - X_+, 0] + Max[X_+ - S_T, 0] - Max[X_- - S_T, 0]\right]x$ e o lucro será de:

$$L_T = \left[Max[S_T - X_-, 0] - Max[S_T - X_+, 0] + Max[X_+ - S_T, 0] - Max[X_- - S_T, 0] - (c_+ - c_- + p_+ - p_-)\right]x$$
$$L_T = \left[X_+ - X_- - (c_+ - c_-) - (p_+ - p_-)\right]x \quad \forall S_T$$

Ou seja, nessa operação o lucro e a taxa de retorno serão sempre os mesmos. Se trocar as operações de venda e de compra teremos o box – 4 pontas de captação.

Estratégia Box - 3 pontas.

Em $t=0$

1. Comprar x ações
2. Comprar x PUTs com X e p
3. Vender x CALLs com X e c

Em $t=0$ gastou $\$_o = S\,x + p\,x - c\,x = (S + p - c)x$.

Em $t=T$ recebe $\$_T = \left[S_T - Max[S_T - X, 0] + Max[X - S_T, 0]\right]x$ e o lucro será de:

$$L_T = \left[S_T - Max[S_T - X, 0] + Max[X - S_T, 0] - (S + p - c)\right]x$$

$$L_T = \left[X + c - (S + p)\right]x \quad \forall S_T$$

Ou seja, nessa operação o lucro e a taxa de retorno também serão sempre os mesmos.

Opções com preços de barreira.

Nessa operação se estabelece um preço de barreira B para o lucro do titular, diminuindo assim o preço da opção. Nesse caso o lucro final da CALL será $L_{call} = Max\left[Min\left[S_T - X, B - X\right], 0\right]$ e o lucro final da PUT será $L_{put} = Max\left[Min\left[X - S_T, X - B\right], 0\right]$. Refazer o cálculo do modelo CRR para a opção com preço de barreira.

Modelo binomial de Cox-Ross-Rubinstein [CRR].

Portfólio replicante e hedge perfeito:

Suponha que o stock que custa S pode mudar para os preços S_U ou S_D , $S_U > S_D$ no momento seguinte. Suponha que exista um derivativo D qualquer, uma opção, por exemplo, com as duas possibilidades L_U ou L_D. Será possível replicar o derivativo?

Vamos usar o stock e uma bond com rendimento R. O que desejamos é encontrar o portfólio $\begin{pmatrix} q_S & q_B \end{pmatrix}$ equivalente ao D. Para isso obrigamos:

$$\begin{array}{l} q_S S_U + q_B (1+R) B = L_U \\ q_S S_D + q_B (1+R) B = L_D \end{array}, \text{ ou seja } \begin{pmatrix} S_U & (1+R)B \\ S_D & (1+R)B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_S \\ q_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_U \\ L_D \end{pmatrix}$$

A matriz pode ser invertida e obtemos: $\begin{pmatrix} q_S \\ q_B \end{pmatrix} = \dfrac{1}{(1+R)B(S_U - S_D)} \begin{pmatrix} (1+R)B & -(1+R)B \\ -S_D & S_U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_U \\ L_D \end{pmatrix}$

Ou ainda $\begin{pmatrix} q_S \\ q_B \end{pmatrix} = \dfrac{1}{(S_U - S_D)} \begin{pmatrix} L_U - L_D \\ \dfrac{S_U L_D - S_D L_U}{(1+R)B} \end{pmatrix}$ logo $q_S = \dfrac{L_U - L_D}{(S_U - S_D)}$ e $q_B = \dfrac{1}{(S_U - S_D)} \dfrac{S_U L_D - S_D L_U}{(1+R)B}$.

O preço do derivativo então deve ser o preço do portfólio replicante, para evitar oportunidade de arbitragem. Em $t = 0$ esse portfólio custou $\begin{pmatrix} S & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_S \\ q_B \end{pmatrix} = q_S S + q_B B$, logo

$$p_{rep} = \begin{pmatrix} S & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_S \\ q_B \end{pmatrix} = \frac{1}{(S_U - S_D)} \left[(L_U - L_D) S + \frac{S_U L_D - S_D L_U}{(1+R)B} B \right]$$

$$p_{rep} = \frac{S - \dfrac{S_D}{(1+R)}}{(S_U - S_D)} L_U + \frac{\dfrac{S_U}{(1+R)} - S}{(S_U - S_D)} L_D$$

States prices: chamamos de $p_U = \dfrac{S - \dfrac{S_D}{(1+R)}}{(S_U - S_D)}$ e $p_D = \dfrac{\dfrac{S_U}{(1+R)} - S}{(S_U - S_D)}$ os states prices de U e de D.

Assim o preço de $p_{rep} = p_U L_U + p_D L_D$ pode ser calculado através dos states prices.

Outra forma de analisar a questão é através do conceito de jogo justo [fair game, fair price]. Suponha que existem as probabilidades π_U de ocorrer U e π_D de ocorrer D, $\pi_U + \pi_D = 1$. A esperança de ganho do derivativo L seria $E[L] = \pi_U L_U + \pi_D L_D$. Um jogo justo seria aquele em que a esperança de lucro dos dois lados são iguais, mas como o jogo é de soma nula, a esperança de lucro é zero para ambos os lados. Um lado cobrou o preço D pelo derivativo em $t = 0$, e o aplicou na taxa R, logo no período seguinte terá $(1+R)\, p_{rep}$. Para ser justo, portanto, esse valor deve ser a esperança de lucro do derivativo $E[L] = \pi_U L_U + \pi_D L_D$, então $(1+R)\, p_{rep} = \pi_U L_U + \pi_D L_D$. Nesse caso $p_{rep} = \dfrac{\pi_U}{(1+R)} L_U + \dfrac{\pi_D}{(1+R)} L_D$. Se comparamos com o preço do portfólio replicante de D vemos que:

$$\pi_U = \frac{(1+R)}{(S_U - S_D)}\left[S - \frac{S_D}{(1+R)} \right] \text{ e } \pi_D = \frac{(1+R)}{(S_U - S_D)}\left[\frac{S_U}{(1+R)} - S \right]$$

Note que essas são as probabilidades de risco-neutro, pois o hedging perfeito eliminou o risco. Nesse caso o especulador aceita cobrar exatamente a esperança de ganho.

A dificuldade com as expressões, tanto dos states prices quanto das probabilidades de risco neutro, é que, para mais de um período, elas dependerão do valor de S e da trajetória seguida pelo preço do stock. Existe um caso entretanto em que os states prices e as probabilidades de risco neutro independem da trajetória: o caso em que $S_U = US$ e $S_D = DS$, ou seja, em um processo multiplicativo em que S pode ser multiplicado pelo fator U ou D tais que $U > D > 0$. Nesse caso S será colocado em evidência no numerador e denominador, cancelando-se.

$$p_U = \frac{1 - \dfrac{D}{(1+R)}}{(U - D)} \text{ e } p_D = \frac{\dfrac{U}{(1+R)} - 1}{(U - D)}$$

$$\pi_U = \frac{(1+R)}{(U - D)}\left[1 - \frac{D}{(1+R)} \right] \text{ e } \pi_D = \frac{(1+R)}{(U - D)}\left[\frac{U}{(1+R)} - 1 \right]$$

Note que $\pi_U + \pi_D = \dfrac{(1+R)}{(U - D)}\left[\dfrac{U - D}{(1+R)} \right] = 1$. Além disso, o portfólio replicante será dado por:

$$q_S = \frac{L_U - L_D}{S(U-D)} \text{ e } q_B = \frac{1}{(U-D)} \frac{U\,L_D - D\,L_U}{(1+R)B}$$

Opções em apenas um período:

Só existiram contrato de opções para um período para strike prices no intervalo $D\,S \le X \le U\,S$.

No caso da CALL os lucros do titular no período seguinte serão dados por $L_U = Max[US - X, 0] = US - X$ no caso Up e $L_D = Max[DS - X, 0] = 0$. Nessa situação $q_S = \frac{U\,S - X}{S(U-D)}$ e $q_B = -\frac{D(US - X)}{(U-D)(1+R)B}$ e o preço do portfólio replicante dado por $c = \frac{U\,S - X}{S(U-D)} S - \frac{D(US - X)}{(U-D)(1+R)B} B$ ou seja, $c = \frac{1}{(U-D)}\left[1 - \frac{D}{(1+R)}\right](U\,S - X)$.

No caso da PUT os lucros do titular no período seguinte serão dados por $L_U = Max[X - US, 0] = 0$ no caso Up e $L_D = Max[X - DS, 0] = X - DS$. Nessa situação $q_S = -\frac{1}{S(U-D)}(X - DS)$ e $q_B = \frac{1}{(U-D)} \frac{U}{(1+R)B}(X - DS)$, e o preço do portfólio replicante dado por $p = -\frac{1}{S(U-D)}(X - DS)S + \frac{1}{(U-D)} \frac{U}{(1+R)B}(X - DS)B$ ou seja, $p = \frac{1}{(U-D)}\left[\frac{U}{(1+R)} - 1\right](X - DS)$.

Chegamos então à precificação das opções de compra [call] e venda [put].

CALL: $c = \frac{1}{(U-D)}\left[1 - \frac{D}{(1+R)}\right](U\,S - X)$.

PUT: $p = \frac{1}{(U-D)}\left[\frac{U}{(1+R)} - 1\right](X - DS)$.

Vamos verificar se satisfazem à paridade $c+\frac{X}{(1+R)}=p+S$.

Começando por:

$$
\begin{aligned}
c+\frac{X}{(1+R)} &= \frac{U\,S}{(U-D)}\left[1-\frac{D}{(1+R)}\right]-\frac{1}{(U-D)}\left[1-\frac{D}{(1+R)}\right]X+\frac{X}{(1+R)}= \\
&= \frac{U\,S}{(U-D)}\left[1-\frac{D}{(1+R)}\right]-\frac{1}{(U-D)}X+\frac{D}{(U-D)}\frac{X}{(1+R)}+\frac{X}{(1+R)}= \\
&= \frac{U\,S}{(U-D)}\left[1-\frac{D}{(1+R)}\right]-\frac{1}{(U-D)}X+\frac{U}{(U-D)(1+R)}X
\end{aligned}
$$

chegamos a $c+\frac{X}{(1+R)}=\frac{1}{(U-D)}\left[\left(1-\frac{D}{1+R}\right)U\,S+\left(\frac{U}{1+R}-1\right)X\right]$. Pelo outro lado:

$$
\begin{aligned}
p+S &= \frac{1}{(U-D)}\left[\frac{U}{(1+R)}-1\right]X-\frac{D}{(U-D)}\left[\frac{U}{(1+R)}-1\right]S+S= \\
&= \frac{1}{(U-D)}\left[\frac{U}{(1+R)}-1\right]X-\frac{D}{(U-D)}\frac{U}{(1+R)}S+\frac{D}{(U-D)}S+S
\end{aligned}
$$

Logo $p+S=\frac{1}{(U-D)}\left[\left(1-\frac{D}{1+R}\right)U\,S+\left(\frac{U}{1+R}-1\right)X\right]$ confirmando a validade da relação de paridade.

Opções européias em n períodos:

Agora podemos usar as probabilidades neutras para calcular a esperança de ganho do titular e usar o conceito de prêmio justo para calcular os prêmios da CALL e da PUT. Vale lembrar que os prêmios são pagos em $t=0$ e aplicados na taxa R, portanto em $t=n$ valerão $(1+R)^n\begin{pmatrix} c \\ p \end{pmatrix}=E\begin{bmatrix} L_{call} \\ L_{put} \end{bmatrix}$. Note que se sabemos π_U e π_D, e os agentes são neutros ao risco, pois ele foi eliminado, a probabilidade de em n vezes jogado o dado terem aparecidos k ups e $n-k$ downs será dada pela distribuição binomial[1] $P(n,k)=\binom{n}{k}\pi_D^{n-k}\pi_U^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}\pi_D^{n-k}\pi_U^k$. Nesse caso o preço do stock foi para $S_{n,k}=D^{n-k}U^kS$.

[1] Ver capítulo de teoria da probabilidade.

Dessa forma podemos calcular os prêmios da CALL e da PUT européias:

$$(1+R)^n c = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \pi_D^{n-k} \pi_U^k \, Max\left[D^{n-k} U^k S - X, 0\right]$$

$$(1+R)^n p = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \pi_D^{n-k} \pi_U^k \, Max\left[X - D^{n-k} U^k S, 0\right]$$

Vamos nos livrar da função Max procurando o k^* de corte onde a igualdade $D^{n-k^*} U^{k^*} S = X$ acontece. A álgebra simples pode ser feita da seguinte forma: $D^n \left(\frac{U}{D}\right)^{k^*} S = X$ portanto $\left(\frac{U}{D}\right)^{k^*} = \frac{X}{S} D^{-n}$ o. Tirando o logaritmo de ambos os lados $k^* = \operatorname{int}\left[\frac{\ln\left(\frac{X}{S}\right) - n\ln(D)}{\ln\left(\frac{U}{D}\right)}\right]$ onde a função $\operatorname{int}(x) = \text{inteiro de x}$, pois k^* é inteiro.

$$(1+R)^n c = \sum_{k=k^*+1}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \pi_D^{n-k} \pi_U^k \left(D^{n-k} U^k S - X\right)$$

$$(1+R)^n p = \sum_{k=0}^{k^*} \frac{n!}{k!(n-k)!} \pi_D^{n-k} \pi_U^k \left(X - D^{n-k} U^k S\right)$$

Separando os termos com S e X podemos re-escrever os prêmios como:

$$c = \frac{S}{(1+R)^n} \sum_{k=k^*+1}^{n} \binom{n}{k} (\pi_D D)^{n-k} (\pi_U U)^k - \frac{X}{(1+R)^n} \sum_{k=k^*+1}^{n} \binom{n}{k} \pi_D^{n-k} \pi_U^k$$

$$p = \frac{X}{(1+R)^n} \sum_{k=0}^{k^*} \binom{n}{k} \pi_D^{n-k} \pi_U^k - \frac{S}{(1+R)^n} \sum_{k=0}^{k^*} \binom{n}{k} (\pi_D D)^{n-k} (\pi_U U)^k$$

Agora note que:

$$\frac{\pi_U U}{(1+R)} = \frac{U}{(U-D)}\left[1 - \frac{D}{(1+R)}\right]$$

$$\frac{\pi_D D}{(1+R)} = \frac{D}{(U-D)}\left[\frac{U}{(1+R)} - 1\right]$$

e que: $\frac{\pi_U U}{(1+R)} + \frac{\pi_D D}{(1+R)} = \frac{U}{(U-D)}\left[1 - \frac{D}{(1+R)}\right] + \frac{D}{(U-D)}\left[\frac{U}{(1+R)} - 1\right] = \frac{U}{(U-D)} - \frac{UD-UD}{(U-D)(1+R)} - \frac{D}{(U-D)}$,

portanto:

$$\frac{\pi_U U}{(1+R)} + \frac{\pi_D D}{(1+R)} = \frac{U-D}{(U-D)} = 1$$

Assim reescrevemos os prêmios como:

$$c = S\sum_{k=k^*+1}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{\pi_D D}{1+R}\right)^{n-k}\left(\frac{\pi_U U}{1+R}\right)^{k} - \frac{X}{(1+R)^n}\sum_{k=k^*+1}^{n}\binom{n}{k}\pi_D^{n-k}\pi_U^{k}$$

$$p = \frac{X}{(1+R)^n}\sum_{k=0}^{k^*}\binom{n}{k}\pi_D^{n-k}\pi_U^{k} - S\sum_{k=0}^{k^*}\binom{n}{k}\left(\frac{\pi_D D}{1+R}\right)^{n-k}\left(\frac{\pi_U U}{1+R}\right)^{k}$$

Agora podemos checar a paridade PUT-CALL novamente:

$$c - p = S\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{\pi_D D}{1+R}\right)^{n-k}\left(\frac{\pi_U U}{1+R}\right)^{k} - \frac{X}{(1+R)^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\pi_D^{n-k}\pi_U^{k}$$

Entretanto sabemos do binômio de Newton que $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$ e se $(a+b)=1$ então $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k = 1$. Examinando a fórmula acima percebemos que $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{\pi_D D}{1+R}\right)^{n-k}\left(\frac{\pi_U U}{1+R}\right)^{k} = 1$ e que $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\pi_D^{n-k}\pi_U^{k} = 1$, logo $c - p = S - \frac{X}{(1+R)^n}$ ou $c + \frac{X}{(1+R)^n} = p + S$, que é a relação de paridade PUT-CALL.

Opções americanas em n períodos:

Já sabemos que, sem dividendos, a opção de compra americana e européias são iguais, mas que isso não é verdade para a PUT. Então vamos analisar o processo de precificação de uma PUT americana, embora o processo seja o mesmo para a CALL americana. A idéia é retroagir do enésimo período de volta à $t=0$ usando ou os states prices, ou as probabilidades risco-neutra. Em t a ação vale S_t e pode variar para $S_{t+1,U} = U\,S_t$ ou $S_{t+1,D} = DS_t$ com as probabilidades π_U e π_D. Troca-se essa loteria hoje por

$\$_t = \dfrac{\pi_U U + \pi_D D}{1+R} S_t$. O titular tem, a todo momento, a possibilidade de exercer ou não a opção. Se ele exercer receberá $Max\left[X - S_t, 0\right]$. Nesse caso, a todo instante ele compara, o que é melhor ficar com a opção que vale $\$_t = \dfrac{\pi_U U + \pi_D D}{1+R} S_t$ ou exerce-la imediatamente e receber $Max\left[X - S_t, 0\right]$. Neste caso ele sempre prefere o mais alto $L_t = Max\left[\dfrac{\pi_U U + \pi_D D}{1+R} S_t,\ X - S_t,\ 0\right]$. O processo a seguir então é o seguinte: ir até o n final calculando os lucros do titular em todos os casos como $L_{n,k} = Max\left[X - U^{n-k} D^k S, 0\right]$. Aqui trocamos o k para o número de down´s em lugar do número de up´s. Tanto faz considerar $k = n^o\ up's$ como $k = n^o\ down's$, pois $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, uma vez que $\dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n!}{(n-k)!(n-n+k)!} = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$. Considerar $k = n^o\ down's$ deixa a tabela mais bonita pois os valores maiores ficam em cima. Daí vamos retroagindo para o tempo $t = n-1$ usando $L_{n-1,k} = Max\left[\dfrac{\pi_U L_{n,k} + \pi_D L_{n,k+1}}{1+R},\ X - S_t,\ 0\right]$. Trazendo esse processo até $t = 0$ teremos o prêmio da opção americana.

Vamos apresentar um exemplo do cálculo da precificação de uma PUT americana.

Os dados são: n = 7; S = 100; X = 100; U = 1.2; D = 0.8 e R = 0.05. As probabilidades neutras calculcadas através das fórmulas: $\pi_U = \dfrac{(1+R)}{(U-D)}\left[1 - \dfrac{D}{(1+R)}\right]$ e $\pi_D = \dfrac{(1+R)}{(U-D)}\left[\dfrac{U}{(1+R)} - 1\right]$ valem $\pi_U = 0{,}625$ e $\pi_D = 0{,}375$. A tabela 1 mostra as probabilidades risco-neutro calculadas através da fórmula $P_{n,k} = \binom{n}{k} \pi_U^{n-k} \pi_D^k$. No final da tabela o teste confirma que a soma das probabilidades vale 1. A tabela 2 mostra os preços do stock calculados através de $S_{n,k} = U^{n-k} D^k S$ para cada n e k. A tabela 3 mostra o lucro intrínseco da PUT dado por $L_{n,k} = Max\left[X - U^{n-k} D^k S, 0\right]$. As células vermelhas mostram os casos em que não vale a pena exercer a opção européia. Tirando a esperança da coluna 7 com as probabilidades da tabela 1 se calcula o prêmio da PUT européia, $p = 6{,}44$. A tabela 4 mostra o processo retroativo. A coluna 7 é idêntica à coluna 7 da tabela 3. A partir dela a coluna 6 é calculada comparando as duas possibilidades, manter a opção ou exerce-la antecipadamente, usando $L_{n-1,k} = Max\left[\dfrac{\pi_U L_{n,k} + \pi_D L_{n,k+1}}{1+R},\ X - S_t,\ 0\right]$. Note que no período 6 não valeu a pena exercer a Put antecipadamente, mas no período 5, para $k = 2$ valeu. Sempre que o número da tabela 4 é diferente do número da tabela 3 é porque valeu a pena antecipar. Retroagindo até $n=0$ obtém-se o prêmio da put americana, $P=10,31$.

Probabilidade risco neutro								
k/n	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1	0.625	0.390625	0.244140625	0.152588	0.095367	0.059605	0.037253
1		0.375	0.46875	0.439453125	0.366211	0.286102	0.214577	0.156462
2			0.140625	0.263671875	0.32959	0.343323	0.321865	0.281632
3				0.052734375	0.131836	0.205994	0.257492	0.281632
4					0.019775	0.061798	0.115871	0.168979
5						0.007416	0.027809	0.060833
6							0.002781	0.012167
7								0.001043
teste =	1	1	1	1	1	1	1	1

Tabela 1. Probabilidades risco-neutro para $\pi_U = 0,625$ e $\pi_D = 0,375$

Preços do stock								
k/n	0	1	2	3	4	5	6	7
0	100	120	144	172.8	207.36	248.832	298.5984	358.3181
1		80	96	115.2	138.24	165.888	199.0656	238.8787
2			64	76.8	92.16	110.592	132.7104	159.2525
3				51.2	61.44	73.728	88.4736	106.1683
4					40.96	49.152	58.9824	70.77888
5						32.768	39.3216	47.18592
6							26.2144	31.45728
7								20.97152

Tabela 2. Preços do stock obtidos através de $S_{n,k} = U^{n-k} D^k S$

Lucro da PUT									
k/n	0	1	2	3	4	5	6	7	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	
1		20	4	0	0	0	0	0	
2			36	23.2	7.84	0	0	0	
3				48.8	38.56	26.272	11.5264	0	
4					59.04	50.848	41.0176	29.22112	
5						67.232	60.6784	52.81408	
6							73.7856	68.54272	
7								79.02848	
								6.443685	= p

Tabela 3. Lucro da PUT européia obtido através de $L_{n,k} = Max\left[X - U^{n-k} D^k S, 0\right]$.

PUT americana

k/n	0	1	2	3	4	5	6	7
0	10.30603	5.314126	2.134423	0.525073	0	0	0	0
1		20	11.32218	5.101263	1.470204	0	0	0
2			36	23.2	11.8332	4.116571	0	0
3				48.8	38.56	26.272	11.5264	0
4					59.04	50.848	41.0176	29.22112
5						67.232	60.6784	52.81408
6							73.7856	68.54272
7								79.02848

Tabela 4. Lucro da PUT americana obtido através de $L_{n-1,k} = Max\left[\frac{\pi_U L_{n,k} + \pi_D L_{n,k+1}}{1+R},\ X - S_t,\ 0\right]$.