Introdução à Econofísica

Aula 9

Processos estocásticos de Lévy e teoremas limite. Processos aleatórios infinitamente divisíveis

O preço de um ativo financeiro, como uma ação, por exemplo, varia no tempo e muitas observações empíricas têm sido feitas. Já é bem estabelecida a noção de que, para um ativo financeiro de razoável liquidez, suas mudanças de preço ocorrem de forma independente desde alguns poucos minutos até vários anos. Se escolhemos uma escala de tempo da ordem de algumas horas ou mais, por exemplo, a mudança de preço há uma hora é completamente independente da mudança de preço neste instante. Assim, para intervalos de tempo maiores do que alguns minutos, a aproximação das mudanças de preço por uma sequência de variáveis independentes, $\{x_i\}$, está justificada empiricamente. No entanto, também é bem conhecido o fato de que o valor esperado da variância das mudanças de preço não é constante no tempo. Sendo assim, as mudanças de preço não são identicamente distribuídas e a correspondente densidade de probabilidade não é estacionária, isto é, varia no tempo.

Para que um teorema limite possa ser aplicado ao mercado financeiro, deve ser estabelecido para variáveis independentes, mas não necessariamente identicamente distribuídas. Há um teorema limite devido a Khintchin, estabelecendo uma distribuição limite para a soma das variáveis estocásticas independentes, porém não necessariamente identicamente distribuídas. A condição necessária e suficiente para haver esse limite da distribuição é que sua forma limite seja infinitamente divisível.

Um processo estocástico é infinitamente divisível se, para cada número natural k, possa ser representado por k variáveis estocásticas independentes e identicamente distribuídas. Em outras palavras, uma densidade de probabilidade $F(y)$ é infinitamente divisível se e somente se sua função característica $\varphi(q)$ for, para cada número natural k, dada pela k-ésima potência de alguma função característica $\varphi_k(q)$:

$$\varphi(q) \;=\; [\varphi_k(q)]^k \,,$$

com os requerimentos:

$$\varphi_k(0) \;=\; 1$$

e $\varphi_k(q)$ é contínua.

Exemplos

A distribuição gaussiana é infinitamente divisível, pois sua função característica é dada por:

$$\begin{aligned}\varphi(q) &= \exp\left(i\mu q - \frac{\sigma^2}{2}q^2\right) \\ &= \left[\exp\left(i\frac{\mu}{k}q - \frac{\sigma^2}{2k}q^2\right)\right]^k.\end{aligned}$$

Uma distribuição de Lévy simétrica é infinitamente divisível, pois sua função característica é dada por:

$$\begin{aligned}\varphi(q) &= \exp\left(i\mu q - \gamma\left|q\right|^\alpha\right) \\ &= \left[\exp\left(i\frac{\mu}{k}q - \frac{\gamma}{k}\left|q\right|^\alpha\right)\right]^k.\end{aligned}$$

Consideremos um processo de Poisson:

$$P(m;\lambda) = \frac{\lambda^m}{m!}\exp(-\lambda), \text{ com } m = 0, 1, \ldots.$$

Calculemos sua função característica:

$$\begin{aligned}\varphi(q) &= \sum_{m=0}^{\infty}\exp(imq)\frac{\lambda^m}{m!}\exp(-\lambda) \\ &= \exp(-\lambda)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left[\lambda\exp(iq)\right]^m}{m!} \\ &= \exp(-\lambda)\exp\left[\lambda\exp(iq)\right] \\ &= \exp\left\{\lambda\left[\exp(iq) - 1\right]\right\} \\ &= \left[\exp\left\{\frac{\lambda}{k}\left[\exp(iq) - 1\right]\right\}\right]^k.\end{aligned}$$

Assim, vemos que um processo de Poisson também é infinitamente divisível.

A densidade de probabilidade da distribuição gama é dada por:

$$P(x) = \frac{x^{\nu-1}\exp(-x)}{\Gamma(\nu)},$$

para

$$x \geqslant 0$$

e

$$0 < \nu < \infty.$$

A função característica correspondente é:

$$\begin{aligned}
\varphi(q) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \frac{x^{\nu-1}\exp(iqx - x)}{\Gamma(\nu)} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, x^{\nu-1} \exp\left[(iq-1)\,x\right].
\end{aligned}$$

Seja

$$z = (1 - iq)\,x.$$

Então,

$$x = \frac{z}{(1 - iq)}$$

e

$$dx = \frac{dz}{(1 - iq)}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\varphi(q) &= \frac{1}{\Gamma(\nu)\,(1-iq)^{\nu}} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \, z^{\nu-1} \exp\left[-z\right] \\
&= (1 - iq)^{-\nu},
\end{aligned}$$

já que

$$\Gamma(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} dz \, z^{\nu-1} \exp\left[-z\right].$$

Como

$$\begin{aligned}
\varphi(q) &= (1 - iq)^{-\nu} \\
&= \left[(1 - iq)^{-\nu/k}\right]^{k},
\end{aligned}$$

segue que a distribuição gama é infinitamente divisível.

Contra-exemplo

Consideremos este processo estocástico com uma densidade de probabilidade uniforme e mostremos que não é infinitamente divisível:

$$P(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < -\ell \\ \frac{1}{2\ell}, & \text{se } -\ell \leqslant x \leqslant \ell \,. \\ 0, & \text{se } x > \ell \end{cases}$$

Nesse caso, a função característica é obtida pela integral seguinte:

$$\begin{aligned}
\varphi(q) &= \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{+\ell} dx\, \exp(iqx) \\
&= \frac{1}{2\ell iq}\left[\exp(iq\ell) - \exp(-iq\ell)\right] \\
&= \frac{1}{\ell q}\left[\frac{\exp(iq\ell) - \exp(-iq\ell)}{2i}\right] \\
&= \frac{\operatorname{sen}(q\ell)}{q\ell}. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Notemos que se uma função característica é infinitamente divisível, então

$$|\varphi_k(q)|^2 = |\varphi(q)|^{2/k}.$$

Seja

$$\begin{aligned}
f(q) &= \lim_{k\to\infty} |\varphi_k(q)|^2 \\
&= \lim_{k\to\infty} |\varphi(q)|^{2/k}.
\end{aligned}$$

Segue, portanto, que

$$f(q) = \begin{cases} 0, & \text{se } \varphi(q) = 0 \\ 1, & \text{se } \varphi(q) \neq 0 \end{cases}.$$

Como por hipótese,

$$\varphi(0) = 1$$

e contínua, então

$$\varphi(q) \neq 0$$

em alguma vizinhança de $q = 0$. Em todos os pontos dessa vizinhança, portanto,

$$f(q) = 1.$$

Então, $f(q)$ também é contínua nessa vizinhança de $q = 0$ e, sendo um limite de uma função característica, também é uma função característica. Logo, $f(q)$ é contínua para todo valor de q. Como $f(q)$ só pode assumir os valores 0 ou 1, é contínua e vale 1 na vizinhança de $q = 0$, então deve ser uma função constante:

$$f(q) = 1, \text{ para todo valor de } q.$$

Como consequência disso,

$$\varphi(q) \neq 0 \text{ para todo valor de } q,$$

se for infinitamente divisível. A Eq. (1) mostra que a distribuição uniforme não é infinitamente divisível, já que

$$\frac{\operatorname{sen}(q\ell)}{q\ell} \;=\; 0$$

para

$$q\ell \;=\; n\pi, \text{ com } n = 1, 2, \ldots .$$