Distribuições que não obedecem ao Teorema Central do Limite.

Começamos essa seção com a pergunta: será que existem distribuições que não obedecem ao Teorema Central do Limite e jamais convergem para a distribuição normal?

Vamos começar analisando um caso simples, a distribuição de Cauchy dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{q}{q^2 + x^2} \quad q > 0 .$$

Note que $f(x) \geq 0$ e que para ser um *fdp* é preciso que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{q}{q^2+x^2}dx = 1$.

Fazendo a mudança de variável $x = q\tan\theta$, temos que $q^2 + x^2 = q^2\left[1+\tan^2\theta\right] = q^2\sec^2\theta$ e $dx = q\sec^2\theta\, d\theta$. Os limites são dados por $\tan\theta = \pm\infty \to \theta = \pm\frac{\pi}{2}$ e a integral se transforma em $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{1}{\pi}\pi = 1$. Logo, trata-se de uma distribuição de probabilidades legítima. Note que a esperança de x é nula por paridade, pois $E[x] = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{q}{q^2+x^2}x\,dx = 0$ pois x é uma função ímpar e $\frac{1}{q^2+x^2}$ é par. Nesse caso a variância é o próprio momento de ordem 2 dada por: $V[x] = \frac{q}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{q^2+x^2}dx$. Mas essa integral não converge, pois $\underset{x\to\pm\infty}{Lim}\frac{x^2}{q^2+x^2} = 1$ e a variância será infinita. Trata-se, portanto, de uma distribuição com momento de ordem 2 infinito e o teorema central do limite fica sob suspeita, uma vez que foi demonstrado com a suposição de que a variância era finita. Para examinar esse aspecto precisamos da função característica dessa distribuição.

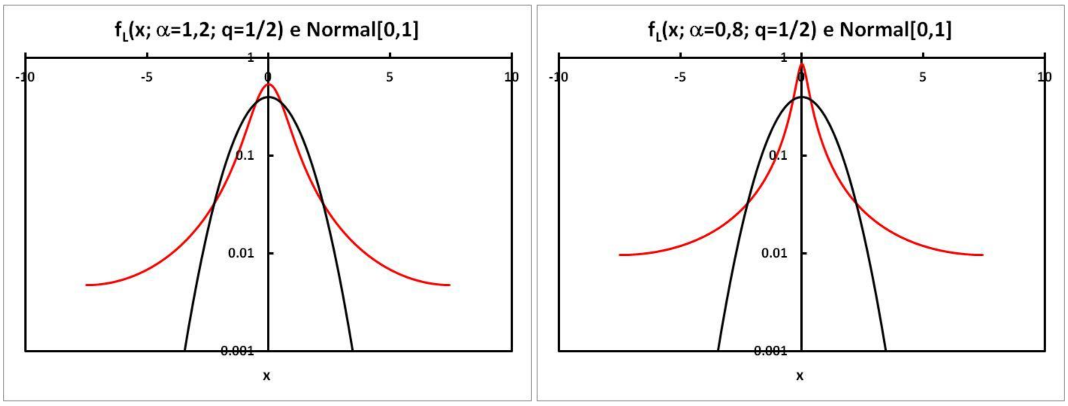
O cálculo de $\varphi(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{qe^{ixt}}{q^2+x^2}dx = e^{-q|t|}$ pode ser feito por resíduos, com cuidados para fechar o circuito por cima e por baixo nos casos em que $t > 0$ e $t < 0$, que gera o módulo de t. Embora a operação direta seja complexa, envolvendo cálculo de resíduos, a volta é muito mais simples. Vamos analisar o problema inverso, que *fdp* corresponde à função característica $\varphi(t) = e^{-q|t|}$.

Aplicando a transformada de Fourier inversa temos que:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-q|t|}e^{-ixt}dt=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{0}e^{(q-ix)t}dt+\int_{0}^{+\infty}e^{-(q+ix)t}dt\right]=\frac{1}{2\pi}\left[\left.\frac{e^{(q-ix)t}}{q-ix}\right|_{-\infty}^{0}-\left.\frac{e^{-(q+ix)t}}{q+ix}\right|_{0}^{\infty}\right]$$

As exponenciais se anulam em $t=\pm\infty$ e ficamos com $f(x)=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{q-ix}+\frac{1}{q+ix}\right]=\frac{1}{\pi}\frac{q}{q^2+x^2}$.

Então mostramos que $\varphi(t)=e^{-q|t|}$ é a função característica da distribuição de Cauchy, $f(x)=\frac{1}{\pi}\frac{q}{q^2+x^2}$. Não podemos extrair os momentos dessa função característica porque não podemos expandi-la em série de Taylor, uma vez que a função $|t|$ não é diferenciável em $t=0$. Logo não há contradição com o fato de que a variância é infinita e a função característica existe. Agora suponha o caso de n variáveis i.i.d. que seguem a distribuição de Cauchy. A soma dessas v.a.s terá a função característica $\varphi(t)=\left[e^{-q|t|}\right]^n=e^{-nq|t|}$, que continua sendo a função característica de uma distribuição de Cauchy com o parâmetro nq em lugar de q, ou seja, a *fdp* dessa distribuição será $f(x)=\frac{1}{\pi}\frac{nq}{n^2q^2+x^2}$. Então, por maior que seja o n, essa distribuição jamais convergirá para uma distribuição normal. As figuras 24 (a) e (b) mostram as curvas das distribuições de Lévy simétricas para $q=1/2$, $\alpha=1,2$ e $\alpha=0,8$ em comparação com distribuição normal padrão. Podemos notar que as caudas da distribuição são muito mais "pesadas" do que as caudas da normal.



(a) (b)

Figura 24. Distribuições de Lévy com diferentes parâmetros para α, comparadas à Normal Padrão, em escala logarítmica.

Com isso respondemos com um sonoro SIM, existem distribuições que não obedecem ao teorema central do limite. A próxima questão é: qual a classe geral das distribuições que não obedecem ao teorema central do limite?

Note que nesse caso a convolução de uma distribuição de Cauchy gerou outra distribuição de Cauchy. Nos casos em que a convolução de uma distribuição com ela mesma gera uma distribuição da mesma classe que não converge para uma Normal, por mais que se adicionem v.a. i.i.d.s a distribuição jamais convergirá para a normal.

1.1.1.1. Distribuições ESTÁVEIS.

Tome a distribuição $F(x)$. A $F(x-a)$é uma distribuição da mesma classe apenas transladada por a. Da mesma forma $F\left(\frac{x}{b}\right)$ também é da mesma classe com uma ampliação horizontal de b. O parâmetro b deve ser positivo para evitar uma reflexão que destruiria as propriedades $F(-\infty)=0$ e $F(+\infty)=1$. Nesse caso $F\left(\frac{x-a}{b}\right)$ também é uma distribuição da mesma classe, apenas transladada por a e ampliada por b. Se $F\left(\frac{x-a}{b}\right)$ é a nova distribuição, a nova *fdp* será dada por $f(x)=\frac{d}{dx}F\left(\frac{x-a}{b}\right)=\frac{1}{b}f\left(\frac{x-a}{b}\right)$, e a nova função característica será:

$$\varphi(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} f\left(\frac{x-a}{b}\right)\frac{1}{b}dx$$

Fazendo $u=\frac{x-a}{b}$, $x=bu+a$ e $du=\frac{1}{b}dx$, dessa forma obtemos:

$$\varphi(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(bu+a)t} f(u)du = e^{iat}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iubt} f(u)du = e^{iat}\varphi(bt).$$

Então, se $f(x)\leftrightarrow\varphi(t)$, temos que $\frac{1}{b}f\left(\frac{x-a}{b}\right)\leftrightarrow e^{iat}\varphi(bt)$.

Quando chamamos uma distribuição de estável? Se x e y são independentes e seguem uma distribuição da mesma classe, e a v.a. $z=x+y$ também segue uma distribuição de mesma classe, afirmamos que essa é uma distribuição estável. Em termos da convolução isso significa que $F\left(\frac{x-a_1}{b_1}\right)*F\left(\frac{x-a_2}{b_2}\right)=F\left(\frac{x-a}{b}\right)$, ou, em termos das funções características, que $e^{ia_1t}\varphi(b_1t)e^{ia_2t}\varphi(b_2t)=e^{iat}\varphi(bt)$. Ou seja, sempre que $\varphi(b_1t)\varphi(b_2t)=e^{i\gamma t}\varphi(bt)$ temos uma distribuição estável.

Generalizando para mais de uma distribuição temos que as distribuições estáveis satisfazem a:

$$\varphi(b_1 t)\varphi(b_2 t)\cdots\varphi(b_n t) = e^{i\gamma t}\varphi(bt)$$

Por exemplo, vamos tomar a classe das distribuições com a função característica da forma $\varphi(t) = e^{-q|t|^{\alpha}}$, que pode ser expresso como $\ln\varphi(t) = -q|t|^{\alpha}$. Uma translação na distribuição aparece na função característica como $\varphi(t) = e^{iat-q|t|^{\alpha}}$, ou $\ln\varphi(t) = iat - q|t|^{\alpha}$. A soma de n v.a. i.i.d. dessa distribuição gera a função característica $\varphi_n(t) = e^{inat-nq|t|^{\alpha}}$, da mesma classe, logo se tratam de distribuições estáveis. Note que se $\alpha = 2$ caímos no caso da distribuição normal, que faz parte do conjunto das distribuições estáveis. No caso da normal, a função $|t|^2 = t^2$ é diferenciável em $t = 0$ e podemos sim extrair os momentos da função característica. No entanto, para $0 \leq \alpha < 2$, teremos as distribuições de Lévy simétricas, com os momentos de ordem 2 infinitos.

Para mostrar se os momentos divergem ou convergem precisamos analisar o comportamento assimptótico da *fdp*, ou seja, $f(x \to \infty)$. Se caírem com uma lei de potência do tipo $\frac{1}{x^{\beta}}$ então os momentos para $k > \beta - 1$ divergem.

O comportamento assimptótico dessas distribuições segue uma lei de potência do tipo[1] $f(x) \propto \frac{1}{|x|^{\alpha+1}}$. Note que $\alpha > 0$ é necessário para que a integral $\int f(x)dx$ exista. Os momentos de ordem serão finitos apenas se $\alpha > 2$. Se $\alpha > 2$ a variância é finita e a distribuição segue o teorema central do limite, convergindo para a normal. Se $\alpha = 2$ caímos na normal diretamente. Se $0 < \alpha < 2$ a variância será infinita e a distribuição jamais converge para a distribuição normal. A distribuição será estável se $0 < \alpha \leq 2$ com a normal incluída no caso $\alpha = 2$. Pareto já havia percebido no final do século XIX que a distribuição de renda não segue uma normal, mas uma lei de potência com $\frac{1}{x^{\alpha}}$ e $0 < \alpha < 2$.

No apêndice xx mostramos que a forma mais geral das distribuições de Lévy é dada por:

$$\ln\varphi(t) = iat - q|t|^{\alpha}\left[1 - i\beta\frac{t}{|t|}\omega(|t|,\alpha)\right]$$

[1] Ver apêndice 8.

Com $0 < \alpha \leq 2$ e $\omega\left(|t|, \alpha\right) = \begin{cases} \tan\dfrac{\pi\alpha}{2} & \alpha \neq 1 \\ \dfrac{2}{\pi}\ln|t| & \alpha = 1 \end{cases}$

O parâmetro β define a assimetria da distribuição. Se for nulo a distribuição será simétrica com a função característica dada através da relação $\ln\varphi(t) = iat - q|t|^{\alpha}$. O parâmetro α define a curtose da distribuição. Se $\alpha = 2$, $\tan\pi = 0$ e $\ln\varphi(t) = iat - qt^2$, recuperamos a distribuição normal independente de β. O comportamento assimptótico dessas distribuições é dado por:

$F[x] \sim \begin{cases} C_- |x|^{-(1+\alpha)} & x \to -\infty \\ C_+ |x|^{-(1+\alpha)} & x \to +\infty \end{cases}$ com $\beta = \dfrac{C_+ - C_-}{C_+ + C_-}$.

As distribuições estáveis fazem parte do conjunto das distribuições infinitamente divisíveis, e uma análise das distribuições atratoras requer conhecimento dessas distribuições. No apêndice xxx mostramos as curvas das distribuições de Lévy para diferentes valores dos parâmetros q, α e β.

1.1.1.2. Distribuições divisíveis e distribuições infinitamente divisíveis:

Vejamos o significado de uma distribuição divisível, ou fatorável. Do teorema da convolução sabemos que o produto de duas funções características também é uma função característica. Uma distribuição é divisível se: $\varphi(t) = \varphi_1(t)\varphi_2(t)$ em que $\varphi_1(t) \neq e^{iat}$ e $\varphi_2(t) \neq e^{ibt}$. Se permitíssemos que $\varphi_1(t) = e^{iat}$ a fatoração se tornaria trivial, pois $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x')\delta(x - x')dx'$ é a convolução da distribuição degenerada $f_1(x) = \delta(x - a)$ com ela mesma, e $\varphi_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt}\delta(x - a)dx = e^{iat}$. Existem distribuições não fatoráveis, ou indecomponíveis, que funcionam de forma similar à dos números primos para as distribuições.

Uma distribuição será infinitamente divisível se existir uma $\varphi_n(t)$ de modo que $\varphi(t) = \left[\varphi_n(t)\right]^n$ para qualquer n, incluindo $n \to \infty$. Exemplos de distribuições infinitamente divisíveis são:

1. Distribuição degenerada: $\varphi(t)=e^{i\xi t}$ e $\varphi_n(t)=e^{i\frac{\xi}{n}t}$

2. Distribuição de Poisson: $\varphi(t)=e^{\lambda\left(e^{it}-1\right)}$ e $\varphi_n(t)=e^{\frac{\lambda}{n}\left(e^{it}-1\right)}$

3. Distribuição normal: $\varphi(t)=e^{i\mu t-\frac{\sigma^2t^2}{2}}$ e $\varphi_n(t)=e^{i\frac{\mu}{n}t-\frac{\sigma^2t^2}{2n}}$

4. Distribuição Gama: $\varphi(t)=e^{ix_ot}\left(1-i\beta t\right)^{-\alpha}$ e $\varphi_n(t)=e^{i\frac{x_o}{n}t}\left(1-i\beta t\right)^{-\frac{\alpha}{n}}$

5. Distribuição de Cauchy: $\varphi(t)=e^{ix_ot-q|t|}$ e $\varphi_n(t)=e^{i\frac{x_o}{n}t-\frac{q}{n}|t|}$

As propriedades de distribuições infinitamente divisíveis são as seguintes:

1. O produto de duas funções características infinitamente divisíveis também é uma função característica infinitamente divisível, pois se $\varphi(t)$ e $\psi(t)$ são $\infty-$divisíveis, então $\varphi(t)=\left[\varphi_n(t)\right]^n$ e $\psi(t)=\left[\psi_n(t)\right]^n$, logo, $\varphi(t)\psi(t)=\left[\varphi_n(t)\psi_n(t)\right]^n$ também é $\infty-$divisível.

2. Se $\varphi(t)$ é $\infty-$divisível, então $\varphi(t)$ não tem zero reais. Seja $\varphi(t)$ infinitamente divisível, então $\varphi_n(t)$ e $\left|\varphi_n(t)\right|^2$ também são funções características, portanto, $g(t)=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\varphi_n(t)\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\varphi(t)\right|^{2/n}$ também é uma função característica. Mas $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}=0$ e qualquer número, exceto zero, elevado à zero vale um, então: $g(t)=\begin{cases}1 & se \quad \varphi(t)\neq 0\\ 0 & se \quad \varphi(t)=0\end{cases}$. Mas, como $g(t)$ é uma função característica, ela precisa ser absolutamente contínua. Entretanto, se $\varphi(t)$ admite uma raiz real a $g(t)$ será descontínua exatamente nessa raiz, logo não pode ser uma função característica.

No apêndice xx mostramos que a forma geral das distribuições infinitamente divisíveis é dada pela representação canônica:

$$\ln\varphi(t)=ita+\int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{itx}-1-i\frac{tx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\ d\theta(x)$$

onde $\theta(x)$ é real, não decrescente, limitada e $\theta(-\infty)=0$. Uma outra forma de escrever essa equação, isolando a região em torno de $x=0$ é:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{itx}-1-i\frac{tx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\,d\theta(x)=\int_{-\infty}^{0^-}\left(e^{itx}-1-i\frac{tx}{1+x^2}\right)dM(x)+\int_{0^+}^{+\infty}\left(e^{itx}-1-i\frac{tx}{1+x^2}\right)dN(x)-\frac{\sigma^2t^2}{2}$$

Com $\sigma^2=\left[\theta\left(0^+\right)-\theta\left(0^-\right)\right]>0$, $M(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1+y^2}{y^2}d\theta(y)$ para $x<0$ e $N(x)=\int_{x}^{+\infty}\frac{1+y^2}{y^2}d\theta(y)$ para $x>0$. Como $\frac{1+y^2}{y^2}>1\quad\forall y$ e $\theta(y)$ é não decrescente então $M(x)$ e $N(x)$ também são não decrescentes. Além disso, dos limites de integração percebemos que $M(-\infty)=0$ e $N(+\infty)=0$.

1.1.1.3. Toda distribuição estável é infinitamente divisível:

Fazendo $b_1=b_2=\cdots=b_n=1$ em $\varphi(b_1t)\varphi(b_2t)\cdots\varphi(b_nt)=e^{i\gamma t}\varphi(bt)$ temos que $\left[\varphi(t)\right]^n=e^{i\gamma_nt}\varphi(b_nt)$, logo, $\varphi(b_nt)=\left[e^{-i\frac{\gamma_n}{n}t}\varphi(t)\right]^n$. Então para $t'=b_nt$ temos que $\varphi(t')=\left[e^{-i\frac{\gamma_n}{nb_n}t'}\varphi\left(\frac{t'}{b_n}\right)\right]^n$, significando que $\varphi(t)=\left[\varphi_n(t)\right]^n$.

1.1.1.4. Atratores das distribuições.

Figura 25 mostra os conjuntos das distribuições separadas através dos seguintes critérios: (1) momentos de ordem 2 finitos ou infinitos; (2) infinitamente divisíveis ou não e (3) estáveis ou não.

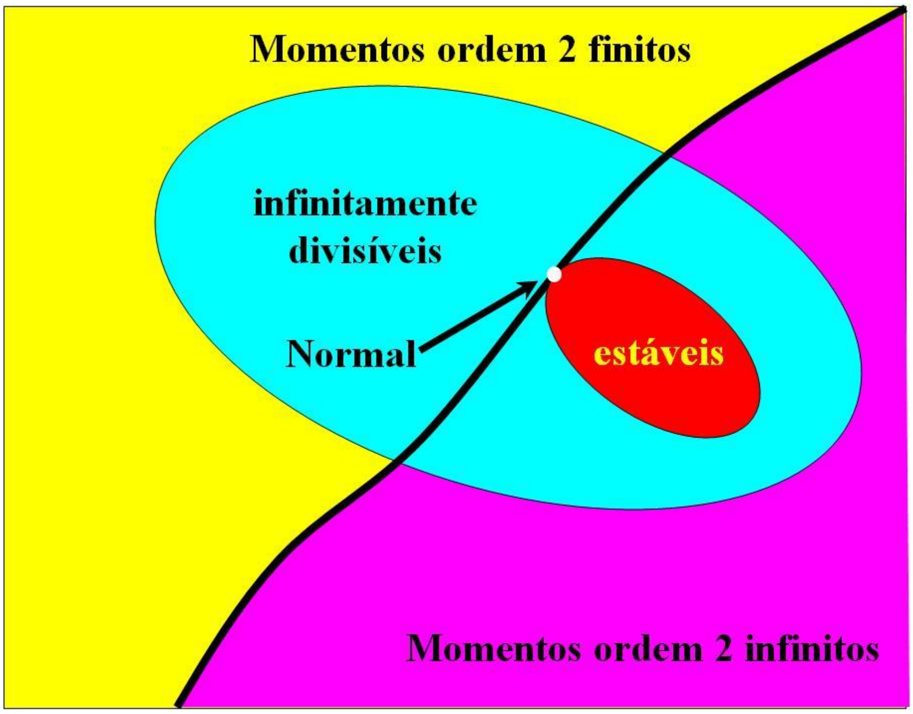


Figura 25 - Conjuntos das distribuições

Se os momentos de ordem 2 são finitos vale o teorema central do limite e a distribuição da soma de n v.a. i.i.d. converge [é atraída] para a normal, a única distribuição estável com variância finita. Dizemos então que a normal é um atrator para essas distribuições. Se as variâncias são infinitas elas convergirão para uma das distribuições estáveis. Para descobrir a distribuição atratora examina-se o comportamento assimptótico nas caudas $x \to -\infty$ e $x \to +\infty$. Se o comportamento for $f\left(x \to \pm\infty\right) \to \frac{C_{\pm}}{|x|^{\alpha}}$ a distribuição atratora será uma distribuição de Lévy com parâmetro α , e parâmetro β dado pela razão $\beta = \frac{C_{+} - C_{-}}{C_{+} + C_{-}}$.

O Teorema Central do Limite Generalizado afirma exatamente isso.

1. Se uma distribuição tem variância finita então a soma de n cópias dessa v.a. tende a distribuição normal.
2. Se a variância é infinita essa soma tende a uma distribuição de Lévy com parâmetros α e β.

1.1.2. Distribuição de Lévy truncada [TLF]

A TLF, Truncated Levy Flight, foi proposta por Mantegna em 1996. A grande dificuldade com as distribuições Lévy são os momentos infinitos de ordem 2 dificilmente observados na prática. Isso levou ao estudo de um processo aleatório em que, com um número pequeno de passos, a distribuição fosse a distribuição de Lévy, mas após um número muito grande passos a distribuição seja a normal. Mantegna e Stanley, os criadores do termo econofísica, foram os primeiros a sugerir o uso da ditribuição de Lévy truncada, ou seja, truncando a distribuição de Lévy simétrica com $\varphi(t)=e^{-q|t|^{\alpha}}$, à partir de determinado determinado ℓ. Nesse caso a distribuição terá momentos finitos e convergirá para a normal, de acordo com o teorema central do limite. A truncagem foi realizada da seguinte forma:

Multiplicando a distribuição de Lévy pelo fator de truncagem dado por:

$$Tr_{\ell}(x)=\frac{1}{\ell}H\left(x-\frac{\ell}{2}\right)H\left(x+\frac{\ell}{2}\right)=\frac{1}{\ell}\begin{cases}1 & se \quad |x|\leq\frac{\ell}{2}\\ 0 & se \quad |x|>\frac{\ell}{2}\end{cases}$$

Note que $\int_{-\infty}^{+\infty}Tr(x)dx=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell/2}^{+\ell/2}dx=1$. Com isso criamos a distribuição de Lévy truncada dada por: $f_{LT}(x)=c_{\ell}f_{L}(x)Tr_{\ell}(x)$. O fator c_{ℓ} é necessário para garantir que $\int_{-\infty}^{+\infty}f_{LT}(x)dx=1$.

Entretanto o que nos interessa é a função característica após a truncagem, pois queremos a distribuição após n passos. A função característica após a truncagem tem a expressão:

$$\varphi_{T}(t)=\frac{c}{2}\int_{0}^{\infty}dt'e^{-qt'^{\alpha}}\left[\frac{\sin\left[\frac{\ell}{2}(t+t')\right]}{\pi\frac{\ell}{2}(t+t')}+\frac{\sin\left[\frac{\ell}{2}(t-t')\right]}{\pi\frac{\ell}{2}(t-t')}\right]$$

Sem uma solução analítica, a receita numérica para obter a distribuição de Lévy truncada segue os seguintes passos:

1. Calcular a função característica de Lévy $\varphi_{L}(t)=e^{-q|t|^{\alpha}}$, nesse caso real e simétrica.
2. Obter a densidade de probabilidade da distribuição de Lévy através da transformada de Fourier inversa, ou seja, $f_{L}(x)=FT^{-1}\left[\varphi_{L}(t)\right]$.
3. Truncar essa distribuição em $\pm\frac{\ell}{2}$ e recalcular a área $1/c$ da nova distribuição.
4. Normalizar a densidade de probabilidade para garantir área unitária $f_{LT}(x)$.
5. Obter a nova função característica $\varphi_{LT}(t)$ da $f_{LT}(x)$.
6. Elevar essa função à n, $\varphi_{LT}^{n}(t)$, para estudar o comportamento da distribuição em função do número de passos.

7. Extrair a transformada de Fourier dessa distribuição para obter a densidade de probabilidade após os n passos.

A figura 26 mostra o processo de truncagem de uma distribuição de Lévy até a etapa 5.

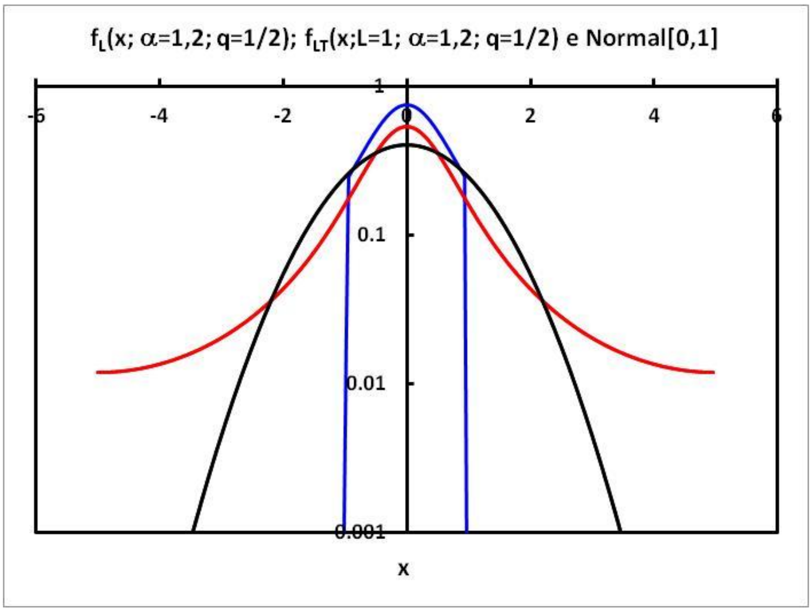


Figura 26 - Distribuições de Lévy, Lévy truncada [em L = 1] e a normal padrão em escala logarítmica

Já as figuras 27 mostram o comportamento do número de passos na distribuição de Lévy truncada dependendo do tamanho do corte.

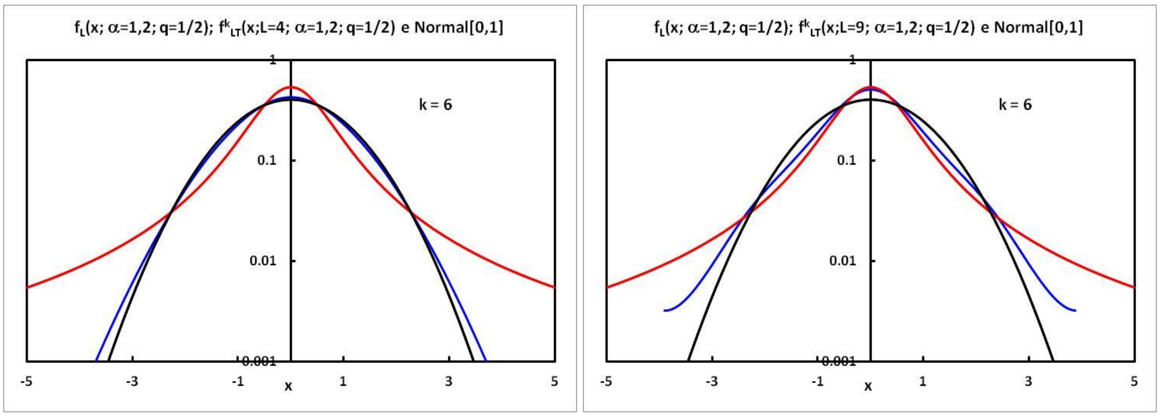


Figura 27 - Efeito do número de passos na distribuição de Lévy truncada.

Para L = 4 depois de 6 passos o processo convergiu para a normal. Já para L = 9 percebemos que a parte central da distribuição contínua a de Lévy enquanto as caudas se situam entre a distribuição de Lévy e a normal.

Distribuição TEMPERADA.

Existem alguma dificuldades com o voo de Lévy truncado. Primeiro percebe-se que a operacionalidade é tediosa e envolve idas e vindas nas transformadas de Fourier. Depois o TLF não é uma distribuição infinitamente divisível. Logo após a proposta de Mantegna Koponen chamou a atenção de que o corte abrupto, além de trazer dificuldades analíticas, não era a desejável. Ele mostrou então que o corte suave das caudas da distribuição através de uma exponencial do tipo $e^{-\frac{|x|}{\ell}}$ gerava uma função característica analítica e infinitamente divisível, que nos permitiria saltar as etapas de 1 a 6, uma vez que a operação elevar à potência n uma distribuição infinitamente divisível é trivial. Essas distribuições foram posteriormente denominadas de distribuições TEMPERADAS. No apêndice xxx mostramos que a função característica da distribuição temperada com parâmetro de corte ℓ é dada por:

$$\ln\varphi(t) = -\frac{q}{\ell^{\alpha}\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}\left[\left(1+\ell^2t^2\right)^{\frac{\alpha}{2}}\cos\left[\alpha\arctan\left(\ell|t|\right)\right]-1\right]$$

Assim a função característica após n passos será dada por:

$$\ln\varphi_n(t) = -\frac{nq}{\ell^{\alpha}\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}\left[\left(1+\ell^2t^2\right)^{\frac{\alpha}{2}}\cos\left[\alpha\arctan\left(\ell|t|\right)\right]-1\right]$$

Note que se $\ell \to \infty$ a cauda exponencial deixaria de existir. Nesse caso $\arctan\left(\ell|t|\right) \to \frac{\pi}{2}$, $\left(1+\ell^2t^2\right)^{\frac{\alpha}{2}} \to \ell^{\alpha}|t|^{\alpha}$ e $\ln\varphi(t) \leftrightarrow -\frac{q}{\ell^{\alpha}\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}\left[\left(\ell^2t^2\right)^{\frac{\alpha}{2}}\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right] = -q|t|^{\alpha}$ e caímos de volta na distribuição de Lévy, como se esperava.

2. Apêndices

2.1. Apêndice xx: Prova de que a função característica é absolutamente contínua

$$\varphi(t+h)-\varphi(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt}e^{ixh} f(x)\,dx-\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt}\left(e^{ixh}-1\right) f(x)\,dx$$

$$\varphi(t+h)-\varphi(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} 2ie^{ixt}e^{i\frac{xh}{2}}\left(\frac{e^{i\frac{xh}{2}}-e^{-i\frac{xh}{2}}}{2i}\right) f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty} 2ie^{ixt}e^{i\frac{xh}{2}}\sin\left(\frac{xh}{2}\right) f(x)\,dx$$

Assim:

$$\left|\varphi(t+h)-\varphi(t)\right|\le 2\int_{-\infty}^{+\infty}\left|ie^{ixt}e^{i\frac{xh}{2}}\right|\left|\sin\left(\frac{xh}{2}\right)\right| f(x)\,dx=2\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\sin\left(\frac{xh}{2}\right)\right| f(x)\,dx$$

Portanto, $\lim_{h\to 0}\left|\varphi(t+h)-\varphi(t)\right|\le 2\lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\sin\left(\frac{xh}{2}\right)\right| f(x)\,dx=0$, provando o teorema.

2.3. Apêndice xx: Comportamento assimptótico das distribuições de Lévy simétricas

Para analisar no caso da distribuição de Lévy simétrica precisamos do comportamento assimptótico de:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-q|t|^{\alpha}} e^{-itx}dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-q|t|^{\alpha}}\left[\cos(tx)-i\sin(tx)\right]dt$$

Note que $|t|$ é uma função par, logo a integral com o seno, uma função ímpar, será sempre nula por paridade. Por outro lado, o termo com coseno, uma função par será o dobro da integral de $0\ a\ \infty$, logo:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} e^{-qt^{\alpha}}\cos(tx)dt=\frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\left[\int_{0}^{+\infty} e^{-qt^{\alpha}} e^{i|x|t}dt\right]$$

O módulo em t desapareceu por conta do intervalo de integração para t positivos apenas. Mudando a variável para $z=i|x|t$ de onde tiramos $t=\frac{z}{i|x|}=\frac{z}{|x|}e^{-i\frac{\pi}{2}}$ e $dt=-i\frac{dz}{|x|}$ obtemos:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} e^{-q|t|^{\alpha}}\cos(tx)dt=\frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\left[\int_{0}^{+\infty} e^{-q|t|^{\alpha}} e^{i|x|t}dt\right]$$

$$f(x)=\frac{1}{\pi|x|}\mathrm{Re}\left[-i\int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{q}{|x|}e^{-i\frac{\alpha\pi}{2}}z^{\alpha}} e^{-z}dz\right]$$

Queremos o comportamento assimptótico dessa distribuição e sabemos que $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{q}{|x|}e^{-i\frac{\alpha\pi}{2}}z^{\alpha}\right)\to 0$ então vamos expandir a exponencial $e^{-\frac{q}{|x|}e^{-i\frac{\alpha\pi}{2}}z^{\alpha}}$ na série de Taylor

$e^{u}=\sum_{k}\frac{u^{k}}{k!}$, ou seja: $e^{-\frac{q}{|x|}e^{-i\frac{\alpha\pi}{2}}z^{\alpha}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k}}{k!}q^{k}\frac{e^{-i\frac{\alpha\pi k}{2}}}{|x|^{\alpha k}}z^{\alpha k}$. Substituindo na integral acima obtemos:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k}q^{k}}{k!|x|^{\alpha k+1}}\mathrm{Re}\left[-i\,e^{-i\frac{\alpha\pi k}{2}}\int_{0}^{+\infty} z^{\alpha k}e^{-z}dz\right]$$

Mas $\int_{0}^{+\infty} z^{\alpha k}e^{-z}dz=(\alpha k)!=\Gamma(\alpha k+1)$ e $\mathrm{Re}\left[-i\,e^{-i\frac{\alpha\pi k}{2}}\right]=-\sin\frac{\alpha\pi k}{2}$, logo:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}q^{k}\sin\left(\frac{\alpha\pi k}{2}\right)}{k!\pi|x|^{\alpha k+1}}(\alpha k)!$$

Para $k=0 \to \sin\left(\frac{\alpha\pi k}{2}\right)=0$, logo o termo de ordem mais baixa é $k=1$. Para a aproximação em primeira ordem então vemos que $f(x) \simeq \frac{\alpha! q \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{\pi |x|^{\alpha+1}}$ segue uma lei de potência com $f(x) \propto \frac{1}{|x|^{\alpha+1}}$ e o momento de ordem 2 $M_2 \propto \int^{\infty} \frac{x^2}{x^{\alpha+1}} dx = \int^{\infty} x^{1-\alpha} dx = \left.\frac{x^{2-\alpha}}{2-\alpha}\right|^{\infty}$ será finito se $2-\alpha<0$, ou seja, $\alpha>2$. Se $\alpha=2$ então $M_2 \propto \int^{\infty} \frac{1}{x} dx \to \ln x|^{\infty}$ que diverge. Então vemos que se $\alpha>2$ a variância é finita e a distribuição segue o teorema central do limite e vai convergir para a normal. Se $\alpha=2$ caímos na normal diretamente. Se $0<\alpha<2$ a variância será infinita e a distribuição jamais converge para a distribuição normal. A distribuição será estável se $0<\alpha\le 2$ com a normal incluída no caso $\alpha=2$.

Podemos também extrair o comportamento das distribuições de Lévy simétricas para $x=0$ através de $f(0)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-qt^\alpha} dt$. Mudando a variável para $z=qt^\alpha$ com $dz=q\alpha t^{\alpha-1}dt$, logo, $dt=\frac{t}{\alpha q t^\alpha}dz=\frac{\left(\frac{z}{q}\right)^{1/\alpha}}{\alpha z}dz=\frac{1}{\alpha q^{1/\alpha}} z^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} dz$ temos:

$$f(0)=\frac{1}{\pi\alpha q^{1/\alpha}}\int_0^{+\infty} z^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} e^{-z} dz = \frac{\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)!}{\pi\alpha q^{1/\alpha}} = \frac{q^{-1/\alpha}}{\pi\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

Pareto já havia percebido no final do século XIX que a distribuição de renda não segue uma normal, mas uma lei de potência com $\frac{1}{x^\alpha}$ e $0<\alpha<2$.

2.4. Apêndice xx: Forma geral das distribuições estáveis

Construindo distribuições infinitamente divisíveis:

Seja $g(t)$ uma função característica qualquer, então $\varphi_n(t) = \left(1-\frac{p}{n}\right)1 + \frac{p}{n}g(t)$ para $0 < p < n$ é uma função característica, pois $\left(1-\frac{p}{n}\right) > 0$, $\frac{p}{n} > 0$ e $\left(1-\frac{p}{n}\right) + \frac{p}{n} = 1$, além do fato de que $g(t)$ e 1 são funções características. A função característica da distribuição degenerada $f(x) = \delta(x)$ é $\varphi_{deg}(t) = 1$. Agora reescrevemos $\varphi_n(t) = 1 + \frac{p\left[g(t)-1\right]}{n}$ e vemos que $\left[\varphi_n(t)\right]^n = \left[1 + \frac{p\left[g(t)-1\right]}{n}\right]^n = e^{p\left[g(t)-1\right]}$. Portanto todas as funções características escritas na forma: $\varphi(t) = e^{p\left[g(t)-1\right]}$ são infinitamente divisíveis.

Daqui podemos mostrar que toda função característica infinitamente divisível pode ser fatorada em distribuições de Poisson dada por: $\varphi_{Poisson}(t) = e^{\lambda\left(e^{it}-1\right)}$.

Prova: $g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} g(x)dx$ e $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx$ significando que $g(t) - 1 = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{itx}-1\right)g(x)dx$ e $p\left[g(t)-1\right] = \lim_{a\to\infty} p\int_{-a}^{+a}\left(e^{itx}-1\right)g(x)dx$. Agora quebramos o intervalo de $-a$ a $+a$ na forma: $-a = a_o < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n = +a$ e notamos que $\int_{-a}^{+a} = \int_{a_o}^{a_1} + \int_{a_1}^{a_2} + \cdots + \int_{a_{n-1}}^{a_n} = \sum_k \int_{a_k}^{a_{k+1}}$. Note que para n muito grande o intervalo $\delta a_k = a_{k+1} - a_k$ vai tendendo à zero, logo $\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)dx = F(a_k + \delta a_k) - F(a_k) = \frac{F(a_k+\delta a_k) - F(a_k)}{\delta a_k}\delta a_k = f(a_k)\delta a_k$ e portanto,

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}}\left(e^{itx}-1\right)g(x)dx = \left(e^{ita_k}-1\right)g(a_k)\delta a_k = \left(e^{ita_k}-1\right)\left[G(a_{k+1}) - G(a_k)\right].$$

Nesse caso $p\int_{-a}^{+a}\left(e^{itx}-1\right)g(x)dx = \sum_k p\left[G(a_{k+1}) - G(a_k)\right]\left(e^{ita_k}-1\right) = \sum_k c_k\left(e^{ita_k}-1\right)$ e $e^{p\int_{-a}^{+a}\left(e^{itx}-1\right)g(x)dx} = \underset{n\to\infty}{Lim}\prod_{k=0}^{n} e^{c_k\left(e^{ita_k}-1\right)}$ foi escrito como um produto de funções características de Poisson.

Representação canônica:

Funções infinitamente divisíveis podem ser escritas como: $\ln\varphi(t) = ita + \int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{itx} - 1 - i\frac{tx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\,d\theta(x)$, onde $\theta(x)$ é real, não decrescente, limitada e $\theta(-\infty) = 0$.

Para $x \to 0$ então $e^{itx} = 1 + itx - \frac{t^2x^2}{2}$ e

$$\left(e^{itx} - 1 - i\frac{tx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2} = \left(1 + itx - \frac{t^2x^2}{2} - 1 - i\frac{tx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2} =$$

$$= \left[itx\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) - \frac{t^2x^2}{2}\right]\frac{1+x^2}{x^2} = \left[itx\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) - \frac{t^2x^2}{2}\right]\frac{1+x^2}{x^2} = itx - \frac{t^2}{2}\left(1+x^2\right)$$

O limite de $\lim_{x\to 0}\left(e^{itx} - 1 - i\frac{tx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2} = -\frac{t^2}{2}$.

Nesse caso:

$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{itx} - 1 - i\frac{tx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\,d\theta(x) = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\left(e^{itx} - 1 - i\frac{tx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\,d\theta(x) + I_\varepsilon$, onde $I_\varepsilon(t) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon<|x|<\frac{1}{\varepsilon}}\left(e^{itx} - 1 - i\frac{tx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}d\theta(x)$.

Mas $\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\left(e^{itx} - 1 - i\frac{tx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\,d\theta(x) = -\frac{t^2}{2}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}d\theta(x) = -\frac{t^2}{2}\left[\theta(0^+) - \theta(0^-)\right]$. Se chamamos a descontinuidade de teta em zero de $\sigma^2 = \left[\theta(0^+) - \theta(0^-)\right]$ temos que $\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\left(e^{itx} - 1 - i\frac{tx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\,d\theta(x) = -\frac{\sigma^2t^2}{2}$.

Agora vamos analisar o $I_\varepsilon(t)$. Note que:

$$I_\varepsilon(t) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{\varepsilon<|x|<\frac{1}{\varepsilon}}\left(e^{itx} - 1\right)\frac{1+x^2}{x^2}d\theta(x) - it\int_{\varepsilon<|x|<\frac{1}{\varepsilon}}\frac{x}{1+x^2}\frac{1+x^2}{x^2}d\theta(x)\right] =$$

$$I_\varepsilon(t) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{\varepsilon<|x|<\frac{1}{\varepsilon}}\left(e^{itx} - 1\right)\frac{1+x^2}{x^2}d\theta(x) - it\int_{\varepsilon<|x|<\frac{1}{\varepsilon}}\frac{d\theta(x)}{x}\right]$$

Portanto, $I_\varepsilon(t) = \sum_k\left[\lambda_k\left(e^{itx_k} - 1\right) - i\mu_k t\right]$ com $\lambda_k = \frac{1+x_k^2}{x_k^2}\left[\theta(x_{k+1}) - \theta(x_k)\right]$ e $\mu_k = \frac{1}{x_k}\left[\theta(x_{k+1}) - \theta(x_k)\right]$ e $e^{I_\varepsilon} = e^{-i\mu t}\prod_k e^{\lambda_k\left(e^{itx_k} - 1\right)}$ com $\mu = \sum_k \mu_k$ é uma função característica infinitamente divisível.

Então $\ln\varphi(t)=I_\varepsilon+ita-\frac{t^2}{2}\delta\theta(0)$ é o logaritmo do produto de uma função infinitamente divisível por uma normal, também infinitamente divisível, logo, $\ln\varphi(t)=ita+\int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{itx}-1-i\frac{tx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\ d\theta(x)$ corresponde ao logaritmo da função caraterística de uma distribuição $\infty-$divisível.

O teorema é mais forte ainda do que se supõe. Podemos mostrar mais que as constantes a e a função $\theta(x)$ são univocamente determinadas pela $\varphi(t)$. Ou seja, sabendo $\varphi(t)$ podemos calcular a e $\theta(x)$. Para mostrar isso vamos chamar $\phi(t)=\ln\varphi(t)$.

Note que:

$$\phi(t)-\frac{\phi(t+h)+\phi(t-h)}{2}=ita+\int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{itx}-1-i\frac{tx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\ d\theta(x)+$$

$$-\frac{ita}{2}-\frac{iha}{2}-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{itx}e^{ihx}-1-i\frac{tx}{1+x^2}-i\frac{hx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\ d\theta(x)+$$

$$-\frac{ita}{2}+\frac{iha}{2}-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{itx}e^{-ihx}-1-i\frac{tx}{1+x^2}+i\frac{hx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\ d\theta(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}\left(1-\frac{e^{ixh}+e^{-ixh}}{2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\ d\theta(x)$$

$$\phi(t)-\frac{\phi(t+h)+\phi(t-h)}{2}=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}(1-\cos xh)\frac{1+x^2}{x^2}\ d\theta(x)$$

Definindo $\lambda(t)=\int_0^1\left[\phi(t)-\frac{\phi(t+h)+\phi(t-h)}{2}\right]dh$ temos que

$$\lambda(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}\frac{1+x^2}{x^2}d\theta(x)\int_0^1(1-\cos xh)dh=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)\frac{1+x^2}{x^2}d\theta(x)$$

Se $\Gamma(x)=\int_{-\infty}^{x}\left(1-\frac{\sin y}{y}\right)\frac{1+y^2}{y^2}d\theta(y)$ então $d\theta(x)=\frac{x^2}{(1+x^2)\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)}d\Gamma(x)$ e

$\theta(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{y^2}{(1+y^2)\left(1-\frac{\sin y}{y}\right)}d\Gamma(y)$. Além disso $\lambda(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}\,d\Gamma(x)$ e $\Gamma(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}\lambda(t)dt$.

Vamos analisar o comportamento de $\Gamma(x)$. Para $y\to0$ $\left(1-\frac{\sin y}{y}\right)\cong1-\frac{y-\frac{y^3}{3!}}{y}=\frac{y^2}{3!}$ e $\left(1-\frac{\sin y}{y}\right)\frac{1+y^2}{y^2}\cong\frac{y^2}{3!}\frac{1+y^2}{y^2}\cong\frac{1}{3!}$. Além disso, como $\sin y\le y$ então $\left(1-\frac{\sin y}{y}\right)\ge0$ é sempre positivo com a igualdade valendo apenas para $y=0$. Por outro lado para $y\to\infty$

$\left(1-\frac{\sin y}{y}\right)\frac{1+y^2}{y^2}\cong 1$ e $\frac{1+y^2}{y^2}>1$. Então $f\left(y\right)=\left(1-\frac{\sin y}{y}\right)\frac{1+y^2}{y^2}$ possui mínimo e máximo positivos, ou seja, $0<c_1\leq\left(1-\frac{\sin y}{y}\right)\frac{1+y^2}{y^2}\leq c_2$. Como $\theta(x)$ é não decrescente, limitada e $\theta(-\infty)=0$ então $c_1\int_{-\infty}^{x}d\theta(y)\leq\Gamma(x)\leq c_2\int_{-\infty}^{x}d\theta(y)$ logo $c_1\theta(x)\leq\Gamma(x)\leq c_2\theta(x)$, ou seja, $\Gamma(x)$ também é não decrescente, limitada, i.e. $\Gamma(+\infty)=c$ finito, e $\Gamma(-\infty)=0$. Note então que a função $F\left(x\right)=\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(+\infty)}$ tem as propriedades de uma função distribuição de probabilidades: é não decrescente, $F\left(x\right)\geq 0$, $F\left(-\infty\right)=0$ e $F\left(+\infty\right)=1$.

Ainda mais $\frac{\lambda(t)}{\Gamma(+\infty)}=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}\,dF\left(x\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}\,f\left(x\right)dx$ é a função característica de $f\left(x\right)=\frac{1}{2\pi\Gamma(+\infty)}\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda\left(t\right)e^{-itx}dt$.

A receita para determinar $\theta(x)$ então é:

1. Encontrar $\lambda(t)$ através de $\lambda\left(t\right)=\int_0^1\left[\phi(t)-\frac{\phi(t+h)+\phi(t-h)}{2}\right]dh$ uma vez que se conhece $\phi(t)=\ln\varphi(t)$.
2. Determinar a função $\Gamma(x)$ univocamente pela $\lambda(t)$ através da transformada $\Gamma(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}\lambda\left(t\right)dt$.
3. Determinar $\theta(x)$ da função $\Gamma(x)$ através de $\theta(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{y^2}{\left(1+y^2\right)\left(1-\frac{\sin y}{y}\right)}d\Gamma(y)$
4. Utilizar o $\theta(x)$ na equação $\ln\varphi(t)=ita+\int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{itx}-1-i\frac{tx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\,d\theta(x)$ para extrair a.

O teorema de Lévy-Khinchine garante que a relação é biúnivoca, ou seja, uma função é infinitamente divisível se, e somente se $\ln\varphi(t)=ita+\int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{itx}-1-i\frac{tx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\,d\theta(x)$.

Uma outra forma de escrever essa equação, isolando a região em torno de $x=0$ é:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{itx}-1-i\frac{tx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\,d\theta(x)=\int_{-\infty}^{0^-}\left(e^{itx}-1-i\frac{tx}{1+x^2}\right)dM(x)+$$
$$+\int_{0^+}^{+\infty}\left(e^{itx}-1-i\frac{tx}{1+x^2}\right)dN(x)-\frac{\sigma^2t^2}{2}$$

Com $\sigma^2=\left[\theta(0^+)-\theta(0^-)\right]>0$, $M(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1+y^2}{y^2}d\theta(y)$ para $x<0$ e $N(x)=\int_{x}^{+\infty}\frac{1+y^2}{y^2}d\theta(y)$ para $x>0$. Como $\frac{1+y^2}{y^2}>1\quad\forall y$ e $\theta(y)$ é não decrescente então $M(x)$ e $N(x)$ também são não decrescentes. Além disso, dos limites de integração percebemos que $M(-\infty)=0$ e $N(+\infty)=0$. As integrais poderiam ter problemas de convergência para $x\to 0$ por conta do fator $\frac{1}{x^2}$.

2.5. Apêndice xx: distribuição temperada

Uma distribuição infinitamente divisível tem a forma:

$$\ln\varphi(t) = ita + \int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{itx} - 1 - i\frac{tx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\ d\theta(x)$$

Queremos uma distribuição simétrica e centrada na origem então faremos $a = 0$.

Escolhendo $\frac{1+x^2}{x^2}d\theta(x) = A\frac{e^{-\frac{|x|}{\ell}}}{|x|^{\alpha+1}}dx \quad 0 < \alpha \le 2$ temos que:

$$\ln\varphi(t) = -itA\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\frac{e^{-\frac{|x|}{\ell}}}{|x|^{\alpha+1}}dx - A\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1-e^{itx}\right)\frac{e^{-\frac{|x|}{\ell}}}{|x|^{\alpha+1}}dx\,.$$

A integral $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\frac{e^{-\frac{|x|}{\ell}}}{|x|^{\alpha+1}}dx = 0$ por paridade e o resultado fica como:

$$\ln\varphi(t) = -A\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1-e^{itx}\right)\frac{e^{-\frac{|x|}{\ell}}}{|x|^{\alpha+1}}dx$$

Note que $1-e^{\pm itx} = \left[1-\cos(tx)\right] - i\sin(tx)$ é a soma de uma função par $\left[1-\cos(tx)\right]$ com uma função ímpar $\sin(tx)$ e que pode a função $\frac{e^{-\frac{|x|}{\ell}}}{|x|^{\alpha+1}}$ é par, logo a integral com a função ímpar é nula por paridade. Nesse caso:

$$\ln\varphi(t) = -A\int_{-\infty}^{+\infty}\left[1-\cos(tx)\right]\frac{e^{-\frac{|x|}{\ell}}}{|x|^{\alpha+1}}dx = -2A\int_{0}^{+\infty}\left[1-\cos(tx)\right]\frac{e^{-\frac{x}{\ell}}}{x^{\alpha+1}}dx$$

Agora uma álgebra direta de substituição de variáveis partindo de

$$\int_{0}^{+\infty}\left[1-\cos(tx)\right]\frac{e^{-\frac{x}{\ell}}}{x^{\alpha+1}}dx = \int_{0}^{+\infty}x^{-\alpha-1}e^{-\frac{x}{\ell}}dx - \mathrm{Re}\left[\int_{0}^{+\infty}e^{itx}\frac{e^{-\frac{x}{\ell}}}{x^{\alpha+1}}dx\right]$$

Usando a função gama $\int_0^{+\infty} u^{-\alpha-1}e^{-u}du = (-\alpha-1)!$ chegamos ao resultado:

$$\int_0^{+\infty}\left[1-\cos(tx)\right]\frac{e^{-\frac{x}{\ell}}}{x^{\alpha+1}}dx = \frac{1}{\ell^{\alpha}}\left\{1-\mathrm{Re}\left[(1-i\ell t)^{\alpha}\right]\right\}(-\alpha-1)!$$

Aqui também foi necssário usar a fórmula de duplicação do fatorial de Legendre [não demonstrada nesse trabalho] $z!(-z)! = \frac{\pi z}{\sin(\pi z)}$ para escrever $(-\alpha-1)! = -\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}\frac{1}{\alpha!}$. Escrevendo a parte real de um número complexo z como $\mathrm{Re}[z] = \frac{z+z^*}{2}$ chegamos ao resultado:

$$\int_0^{+\infty}\left[1-\cos(tx)\right]\frac{e^{-\frac{x}{\ell}}}{x^{\alpha+1}}dx = \frac{\pi}{\alpha!\ell^{\alpha}2\sin(\pi\alpha)}\left[(1-i\ell t)^{\alpha}+(1+i\ell t)^{\alpha}-2\right]$$

Agora mudamos essa expressão usando: $(1\pm i\ell t) = \rho e^{i\phi}$ com $\rho\cos\phi = 1$ e $\rho\sin\phi = \pm\ell t$, logo $\rho = \left(1+\ell^2t^2\right)^{\frac{1}{2}}$ e $\tan\phi = \pm\ell t$, ou seja, $\phi = \pm\arctan(\ell t)$. Dessa forma $(1\pm i\ell t) = \left(1+\ell^2t^2\right)^{\frac{1}{2}}e^{\pm i\arctan(\ell t)}$. Substituindo temos:

$$\left[(1-i\ell t)^{\alpha}+(1+i\ell t)^{\alpha}-2\right] = 2\left[\left(1+\ell^2t^2\right)^{\frac{\alpha}{2}}\cos\left[\alpha\arctan(\ell t)\right]-1\right]$$

De onde obtemos a função característica de uma distribuição TEMPERADA:

$$\varphi(t) = e^{-A\frac{2\pi}{\ell^{\alpha}\alpha!\sin(\pi\alpha)}\left[\left(1+\ell^2t^2\right)^{\frac{\alpha}{2}}\cos\left[\alpha\arctan(\ell|t|)\right]-1\right]}$$

Vamos analisar o caso em que $\ell\to\infty$ em que a cauda exponencial deixaria de existir. Nesse caso $\arctan(\ell|t|)\to\frac{\pi}{2}$, $\left(1+\ell^2t^2\right)^{\frac{\alpha}{2}}\to\ell^{\alpha}|t|^{\alpha}$ e:

$$\frac{2\pi}{\ell^{\alpha}\alpha!\sin(\pi\alpha)}\left[\left(1+\ell^2t^2\right)^{\frac{\alpha}{2}}\cos\left[\alpha\arctan\left(\ell|t|\right)\right]-1\right]\to\frac{\pi}{\alpha!\sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}|t|^{\alpha}$$

Nos levando de volta à distribuição de Lévy com $q=\frac{\pi}{\alpha!\sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}A$. Substituindo $A=q\frac{\alpha!\sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}{\pi}$ na equação acima obtemos uma expressão analítica para a função característica da distribuição da distribuição TEMPERADA:

$$\varphi(t)=e^{-\frac{q}{\ell^{\alpha}\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}\left[\left(1+\ell^2t^2\right)^{\frac{\alpha}{2}}\cos\left[\alpha\arctan\left(\ell|t|\right)\right]-1\right]}$$

Agora a função característica após n passos será dada por:

$$\varphi(t)=e^{-\frac{nq}{\ell^{\alpha}\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}\left[\left(1+\ell^2t^2\right)^{\frac{\alpha}{2}}\cos\left[\alpha\arctan\left(\ell|t|\right)\right]-1\right]}$$

Vamos fazer uma análise dimensional dos parâmetros dessa expressão. Primeiro notamos que e^{ixt} tem que ser adimensional significando que $[t]=\frac{1}{[x]}$. Também exigimos que $e^{-\frac{|x|}{\ell}}$ seja adimensional portanto am $[\ell]=[x]$. Finalmente, exigindo que a distribuição de Lévy simétrica $\varphi(t)=e^{-q|t|^{\alpha}}$ seja adimensional vemos que $[q]=\frac{1}{\left[t^{\alpha}\right]}=\left[x^{\alpha}\right]$, ou seja, percebemos que $\frac{q}{\ell^{\alpha}}$ é uma grandeza adimensional.

Variância da distribuição temperada:

$$\varphi(t)=e^{-\frac{q}{\ell^{\alpha}\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}\left[\left(1+\ell^2t^2\right)^{\frac{\alpha}{2}}\cos\left[\alpha\arctan\left(\ell|t|\right)\right]-1\right]}$$

$$\frac{d}{dt}\varphi(t)=e^{-\frac{q}{\ell^{\alpha}\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}\left[\left(1+\ell^{2}t^{2}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\cos\left[\alpha\arctan\left(\ell|t|\right)\right]-1\right]}\times$$

$$\times\frac{d}{dt}\left\{-\frac{q}{\ell^{\alpha}\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}\left[\left(1+\ell^{2}t^{2}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\cos\left[\alpha\arctan\left(\ell|t|\right)\right]-1\right]\right\}$$

$$\frac{d}{dt}\varphi(t)=\varphi(t)\times\frac{d}{dt}\left\{-\frac{q}{\ell^{\alpha}\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}\left[\left(1+\ell^{2}t^{2}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\cos\left[\alpha\arctan\left(\ell|t|\right)\right]-1\right]\right\}$$

$$\frac{d}{dt}\varphi(t)=-\frac{q}{\ell^{\alpha}\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}\varphi(t)\times$$

$$\times\left[\cos\left[\alpha\arctan\left(\ell|t|\right)\right]\frac{d}{dt}\left(1+\ell^{2}t^{2}\right)^{\frac{\alpha}{2}}+\left(1+\ell^{2}t^{2}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\frac{d}{dt}\cos\left[\alpha\arctan\left(\ell|t|\right)\right]\right]$$

$$\frac{d}{dt}\varphi(t)=-\frac{q}{\ell^{\alpha}\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}\varphi(t)\times$$

$$\times\left[\frac{\alpha}{2}2\ell^{2}t\left(1+\ell^{2}t^{2}\right)^{\frac{\alpha}{2}-1}\cos\left[\alpha\arctan\left(\ell|t|\right)\right]-\left(1+\ell^{2}t^{2}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\sin\left[\alpha\arctan\left(\ell|t|\right)\right]\alpha\frac{d}{dt}\arctan\left(\ell|t|\right)\right]$$

$$\frac{d}{dt}\varphi(t)=-\frac{q}{\ell^{\alpha}\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}\varphi(t)\times$$

$$\times\alpha\ell\left[\ell t\left(1+\ell^{2}t^{2}\right)^{\frac{\alpha}{2}-1}\cos\left[\alpha\arctan\left(\ell|t|\right)\right]-\left(1+\ell^{2}t^{2}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\sin\left[\alpha\arctan\left(\ell|t|\right)\right]\frac{1}{1+\ell^{2}t^{2}}\frac{d}{dt}|t|\right]$$

$$\frac{d}{dt}\varphi(t) = -\frac{q}{\ell^{\alpha}\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}\varphi(t)\times$$

$$\times\alpha\ell\left(1+\ell^2t^2\right)^{\frac{\alpha}{2}-1}\left[\ell t\cos\left[\alpha\arctan\left(\ell|t|\right)\right]-\sin\left[\alpha\arctan\left(\ell|t|\right)\right]\frac{d}{dt}|t|\right]$$

Agora podemos ver que essa derivada é nula para $t \to 0$ como se espera de uma distribuição simétrica, pois $\varphi(0)=1$, $\ell t\cos\left[\alpha\arctan\left(\ell|t|\right)\right]=0$ e $\sin\left[\alpha\arctan\left(\ell|t|\right)\right]=0$.

Para calcular a variância precisamos da segunda derivada em $t=0$. Mas já sabendo que:

$\left.\frac{d}{dt}\varphi(t)\right|_{t=0} = 0$ e que $\left[\ell t\cos\left[\alpha\arctan\left(\ell|t|\right)\right]-\sin\left[\alpha\arctan\left(\ell|t|\right)\right]\frac{d}{dt}|t|\right]_{t=0} = 0$

simplificamos a segunda derivada para:

$$\frac{d^2}{dt^2}\varphi(t) = -\frac{q}{\ell^{\alpha}\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}\frac{d}{dt}\varphi(t)\times$$

$$\times\alpha\ell\left(1+\ell^2t^2\right)^{\frac{\alpha}{2}-1}\left[\ell t\cos\left[\alpha\arctan\left(\ell|t|\right)\right]-\sin\left[\alpha\arctan\left(\ell|t|\right)\right]\frac{d}{dt}|t|\right]+$$

$$-\frac{q}{\ell^{\alpha}\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}\varphi(t)\times\alpha\ell\left[\ell t\cos\left[\alpha\arctan\left(\ell|t|\right)\right]-\sin\left[\alpha\arctan\left(\ell|t|\right)\right]\frac{d}{dt}|t|\right]\frac{d}{dt}\left(1+\ell^2t^2\right)^{\frac{\alpha}{2}-1}+$$

$$-\frac{q}{\ell^{\alpha}\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}\varphi(t)\times\alpha\ell\left(1+\ell^2t^2\right)^{\frac{\alpha}{2}-1}\frac{d}{dt}\left[\ell t\cos\left[\alpha\arctan\left(\ell|t|\right)\right]-\sin\left[\alpha\arctan\left(\ell|t|\right)\right]\frac{d}{dt}|t|\right]$$

Anulando vários termos sobra apenas:

$$\left.\frac{d^2}{dt^2}\varphi(t)\right|_{t=0}=-\frac{q\alpha\ell}{\ell^{\alpha}\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}\frac{d}{dt}\left[\ell t\cos\left[\alpha\arctan\left(\ell|t|\right)\right]-\sin\left[\alpha\arctan\left(\ell|t|\right)\right]\frac{d}{dt}|t|\right]\Bigg|_{t=0}$$

$$\left.\frac{d^2}{dt^2}\varphi(t)\right|_{t=0}=-\frac{q\alpha\ell}{\ell^{\alpha}\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}\left[\begin{array}{l}\ell\cos\left[\alpha\arctan\left(\ell|t|\right)\right]+\ell t\frac{d}{dt}\cos\left[\alpha\arctan\left(\ell|t|\right)\right]+\\-\sin\left[\alpha\arctan\left(\ell|t|\right)\right]\frac{d^2}{dt^2}|t|-\frac{d}{dt}|t|\frac{d}{dt}\sin\left[\alpha\arctan\left(\ell|t|\right)\right]\end{array}\right]\Bigg|_{t=0}$$

Sem os termos nulos obtemos:

$$\left.\frac{d^2}{dt^2}\varphi(t)\right|_{t=0}=-\frac{q\alpha\ell}{\ell^{\alpha}\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}\left[\ell\cos\left[\alpha\arctan\left(\ell|t|\right)\right]-\frac{d}{dt}|t|\frac{d}{dt}\sin\left[\alpha\arctan\left(\ell|t|\right)\right]\right]\Bigg|_{t=0}$$

$$\left.\frac{d^2}{dt^2}\varphi(t)\right|_{t=0}=-\frac{q\alpha\ell}{\ell^{\alpha}\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}\times$$

$$\times\left[\ell\cos\left[\alpha\arctan\left(\ell|t|\right)\right]-\alpha\left(\frac{d}{dt}|t|\right)\cos\left[\alpha\arctan\left(\ell|t|\right)\right]\frac{d}{dt}\arctan\left(\ell|t|\right)\right]\Bigg|_{t=0}$$

$$\left.\frac{d^2}{dt^2}\varphi(t)\right|_{t=0}=-\frac{q\alpha\ell}{\ell^{\alpha}\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}\times$$

$$\times\left[\ell\cos\left[\alpha\arctan\left(\ell|t|\right)\right]-\alpha\left(\frac{d}{dt}|t|\right)\cos\left[\alpha\arctan\left(\ell|t|\right)\right]\frac{\ell}{1+\ell^2t^2}\left(\frac{d}{dt}|t|\right)\right]\Bigg|_{t=0}$$

$$\left.\frac{d^2}{dt^2}\varphi(t)\right|_{t=0}=-\frac{q\alpha\ell^2}{\ell^{\alpha}\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}\left[\cos\left[\alpha\arctan\left(\ell|t|\right)\right]\left[1-\frac{\alpha}{1+\ell^2t^2}\left(\frac{d}{dt}|t|\right)^2\right]\right]\Bigg|_{t=0}$$

Agora $\left(\frac{d}{dt}|t|\right)=sign(t)$, logo $\left(\frac{d}{dt}|t|\right)^2=1$, então $\frac{d^2}{dt^2}\varphi(t)\Big|_{t=0}=i^2\frac{q\alpha(1-\alpha)\ell^2}{\ell^\alpha\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}$ e a variância vale:

$$\sigma_{temp}^2=\frac{\alpha(1-\alpha)}{\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}\frac{q}{\ell^\alpha}\ell^2$$