**Introdução à Econofísica**

**Aula 7**

**Processos estocásticos de Lévy e teoremas limite. Distribuições estáveis**

Consideremos uma distribuição lorentziana:

$$p(x) \;=\; \mathcal{N}\frac{1}{\gamma^2+x^2},$$

onde $\mathcal{N}$ é uma constante de normalização e $\gamma$ é uma constante real positiva. Calculemos $\mathcal{N}$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,\mathcal{N}\frac{1}{\gamma^2+x^2} \;=\; 1,$$

ou seja,

$$\mathcal{N} \;=\; \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,\frac{1}{\gamma^2+x^2}}.$$

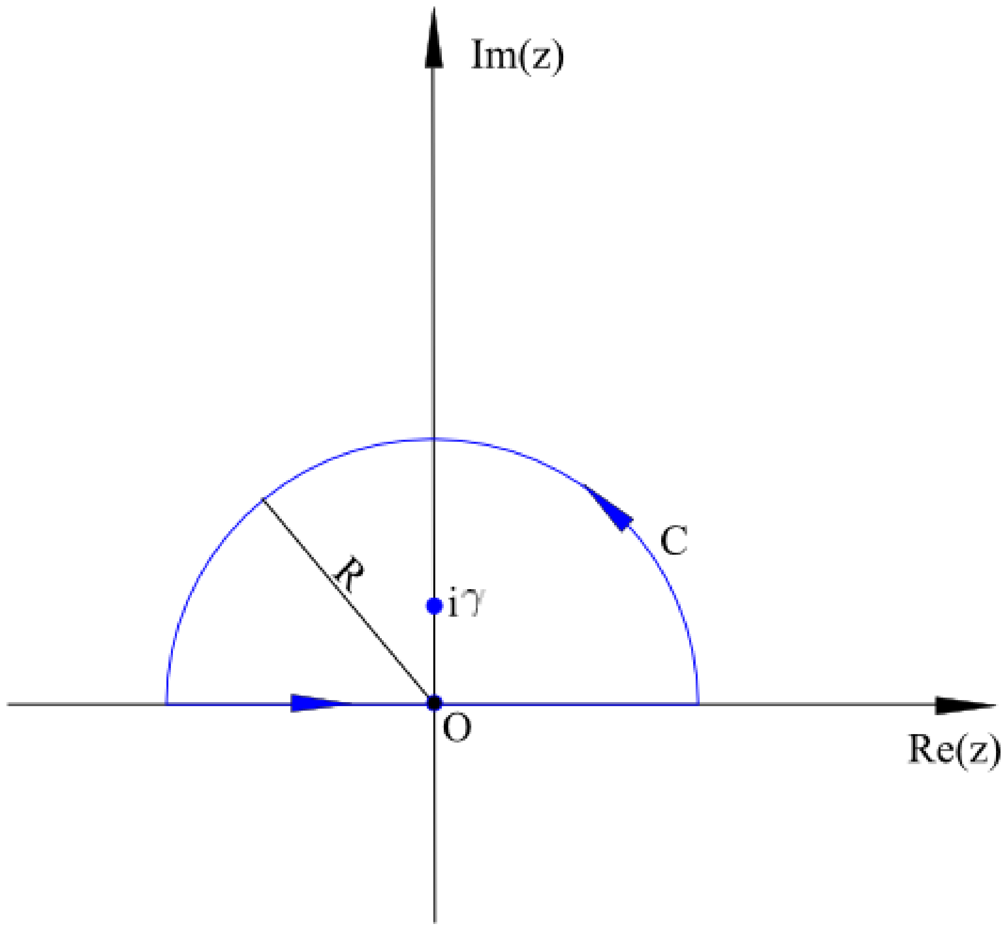
A integral no denominador pode ser escrita se simplificarmos seu integrando:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\gamma^2+x^2} &= \frac{1}{(x+i\gamma)(x-i\gamma)}\\ &= \frac{1}{2i\gamma(x-i\gamma)}-\frac{1}{2i\gamma(x+i\gamma)}.\end{aligned}$$

Podemos utilizar o seguinte truque:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\gamma^2+x^2} &= \lim_{\varepsilon\to o^+}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,\frac{\exp(i\varepsilon x)}{\gamma^2+x^2}\\ &= \lim_{\varepsilon\to o^+}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,\left[\frac{\exp(i\varepsilon x)}{2i\gamma(x-i\gamma)}-\frac{\exp(i\varepsilon x)}{2i\gamma(x+i\gamma)}\right]\\ &= \lim_{\varepsilon\to o^+}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,\frac{\exp(i\varepsilon x)}{2i\gamma(x-i\gamma)}-\lim_{\varepsilon\to o^+}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,\frac{\exp(i\varepsilon x)}{2i\gamma(x+i\gamma)}.\end{aligned}$$

Consideremos o contorno no plano complexo da figura abaixo:




É fácil provar que vale o limite:

$$\lim_{R\to\infty}\oint_C dz\,\frac{\exp(i\varepsilon z)}{(z-i\gamma)} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\,\frac{\exp(i\varepsilon x)}{(x-i\gamma)},\ \text{para } \varepsilon,\gamma>0.$$

Usando o teorema dos resíduos, vem:

$$\oint_C dz\,\frac{\exp(i\varepsilon z)}{(z-i\gamma)} = 2\pi i\exp(-\varepsilon\gamma)\,.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,\frac{\exp(i\varepsilon x)}{(x-i\gamma)} &= \lim_{R\to\infty}\oint_C dz\,\frac{\exp(i\varepsilon z)}{(z-i\gamma)}\\ &= \lim_{R\to\infty}\left[2\pi i\exp(-\varepsilon\gamma)\right]\\ &= 2\pi i\exp(-\varepsilon\gamma)\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x-i\gamma)} &= \lim_{\varepsilon\to o^+}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,\frac{\exp(i\varepsilon x)}{(x-i\gamma)}\\ &= \lim_{\varepsilon\to o^+}\left[2\pi i\exp(-\varepsilon\gamma)\right]\\ &= 2\pi i.\end{aligned}$$

Também temos (um bom exercício):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x+i\gamma)} = 0.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \frac{1}{\gamma^2+x^2} &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \frac{1}{2i\gamma\,(x-i\gamma)} - \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \frac{1}{2i\gamma\,(x+i\gamma)} \\
&= \frac{2\pi i}{2i\gamma} - \frac{0}{2i\gamma} \\
&= \frac{\pi}{\gamma}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\mathcal{N} &= \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \frac{1}{\gamma^2+x^2}} \\
&= \frac{\gamma}{\pi}.
\end{aligned}$$

A densidade de probabilidade que vamos considerar, normalizada, fica:

$$p\,(x) = \frac{\gamma}{\pi}\frac{1}{\gamma^2+x^2}. \tag{1}$$

Sigamos agora um procedimento análogo ao da aula passada: consideremos a variável

$$X = x_1 + x_2$$

e calculemos a densidade de probabilidade para $X$, quando $x_1$ e $x_2$ são variáveis estocásticas independentes, identicamente distribuídas segundo a Eq. (1). Assim,

$$P\,(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2\, p\,(x_1)\, p\,(x_2)\, \delta\,(X - x_1 - x_2)\,.$$

É mais simples considerarmos a transformada de Fourier de $P\,(X)$, também chamada de função característica da densidade de probabilidade $P\left(X\right)$:

$$\begin{aligned}
\Phi\left(q\right) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dX\, P\left(X\right)\exp\left(iqX\right) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} dX\, \left[\int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2\, p\left(x_1\right) p\left(x_2\right) \delta\left(X - x_1 - x_2\right)\right] \exp\left(iqX\right) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2\, p\left(x_1\right) p\left(x_2\right) \int_{-\infty}^{+\infty} dX\, \exp\left(iqX\right)\delta\left(X - x_1 - x_2\right) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2\, p\left(x_1\right) p\left(x_2\right) \exp\left[iq\left(x_1 + x_2\right)\right] \\
&= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} dx_1\, p\left(x_1\right)\exp\left(iqx_1\right)\right]\left[\int_{-\infty}^{+\infty} dx_2\, p\left(x_2\right)\exp\left(iqx_2\right)\right] \\
&= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, p\left(x\right)\exp\left(iqx\right)\right]^2 .
\end{aligned}$$

Calculemos a transformada de Fourier, ou a função característica, da lorentziana da Eq. (1):

$$\begin{aligned}
\varphi\left(q\right) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, p\left(x\right)\exp\left(iqx\right) \\
&= \frac{\gamma}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \frac{\exp\left(iqx\right)}{\gamma^2 + x^2}.
\end{aligned}$$

Aqui, devemos considerar dois casos: $q > 0$ e $q < 0$. No primeiro caso, temos:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \frac{\exp\left(iqx\right)}{\gamma^2 + x^2} &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \frac{\exp\left(iqx\right)}{2i\gamma\left(x - i\gamma\right)} - \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \frac{\exp\left(iqx\right)}{2i\gamma\left(x + i\gamma\right)} \\
&= \frac{\pi\exp\left(-q\gamma\right)}{\gamma}.
\end{aligned}$$

No segundo caso:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \frac{\exp\left(iqx\right)}{\gamma^2 + x^2} = \frac{\pi\exp\left(q\gamma\right)}{\gamma}.$$

Em todo caso, portanto,

$$\begin{aligned}
\varphi\left(q\right) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, p\left(x\right)\exp\left(iqx\right) \\
&= \exp\left(\gamma\left|q\right|\right).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\Phi\left(q\right) &= \left[\varphi\left(q\right)\right]^2 \\
&= \exp\left(-2\gamma\left|q\right|\right).
\end{aligned}$$

Para obtermos a distribuição da variável $X$, basta calcularmos a transformada de Fourier inversa:

$$\begin{aligned}
P(X) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dq\Phi(q)\exp(-iqX) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dq\exp(-2\gamma|q| - iqX) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} dq\exp(2\gamma q - iqX) \\
&+ \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty} dq\exp(-2\gamma q - iqX) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{2\gamma - iX} + \frac{1}{2\gamma + iX}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{2\gamma + iX + 2\gamma - iX}{(2\gamma - iX)(2\gamma + iX)} \\
&= \frac{2\gamma}{\pi}\frac{1}{(2\gamma)^2 + X^2}.
\end{aligned}$$

Logo, a densidade de probabilidade para a variável $X$ é também lorentziana, com apenas uma mudança de escala:

$$\gamma \;\to\; 2\gamma.$$

Dizemos, nesse caso, que a densidade de probabilidade lorentziana é uma distribuição estável, pois sua convolução resulta em na mesma distribuição, com uma mudança de escala apenas.

A distribuição gaussiana também é estável. Para verificarmos isso, tomemos:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right]$$

e consideremos a distribuição da variável

$$X = x_1 + x_2.$$

A função característica correspondente é dada por:

$$\begin{aligned}
\Phi(q) &= [\varphi(q)]^2 \\
&= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, p(x)\exp(iqx)\right]^2.
\end{aligned}$$

Mas,

$$
\begin{aligned}
\varphi(q) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, p(x) \exp(iqx) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\ \exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma^2} + iqx\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\ \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(x^2 - 2i\sigma^2 qx\right)\right] \\
&= \frac{\exp\left[-\frac{1}{2}\sigma^2 q^2\right]}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\ \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(x - i\sigma^2 q\right)^2\right] \\
&= \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 q^2\right)}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \sqrt{2\pi\sigma^2} \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 q^2\right)
\end{aligned}
$$

e, portanto,

$$
\begin{aligned}
\Phi(q) &= \left[\varphi(q)\right]^2 \\
&= \exp\left(-\sigma^2 q^2\right).
\end{aligned}
$$

Tomando a transformada de Fourier inversa, obtemos a densidade de probabilidade para a variável $X$:

$$
\begin{aligned}
P(X) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dq \Phi(q) \exp(-iqX) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dq \exp\left(-\sigma^2 q^2 - iqX\right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dq \exp\left[-\sigma^2\left(q^2 - \frac{iq}{\sigma^2}X\right)\right] \\
&= \frac{\exp\left[\sigma^2\left(\frac{iX}{2\sigma^2}\right)^2\right]}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dq \exp\left[-\sigma^2\left(q - \frac{iX}{2\sigma^2}\right)^2\right] \\
&= \frac{\exp\left(-\frac{X^2}{4\sigma^2}\right)}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{\sigma^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{X^2}{4\sigma^2}\right),
\end{aligned}
$$

que também é uma gaussiana, porém com uma escala diferente:

$$
\sigma^2 \ \rightarrow \ 2\sigma^2.
$$

Logo, a distribuição gaussiana também é estável.

Depois de estudar esses dois exemplos, podemos perguntar: quais são as distribuições estáveis? Existem outras? As respostas a essas questões foram dadas por Paul Pierre Lévy (há fotos) e Aleksandr Khinchin nas décadas de 1920 e 1930. Segundo o livro-texto adotado neste curso, eles encontraram que a forma mais geral de uma função característica de um processo estável é dada por:

$$\ln\left[\varphi\left(q\right)\right] = \begin{cases} i\mu q-\gamma\left|q\right|^{\alpha}\left[1-i\beta\frac{q}{|q|}\text{tg}\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)\right] & \text{se } \alpha\neq 1 \\ i\mu q-\gamma\left|q\right|\left[1+i\beta\frac{q}{|q|}\frac{2}{\pi}\ln\left(|q|\right)\right] & \text{se } \alpha=1 \end{cases},$$

onde

$$0<\alpha\leqslant 2,$$

$\gamma$ é um fator de escala positivo, $\mu$ é um número real qualquer (valor esperado) e $\beta$ é um parâmetro de assimetria que varia no intervalo de $-1$ a 1. O livro-texto afirma que só são conhecidas as formas analíticas das distribuições de Lévy com os parâmetros:

- $\alpha=1$ e $\beta=1$ (distribuição de Lévy-Smirnov);
- $\alpha=1$ e $\beta=0$ (distribuição lorentziana);
- $\alpha=2$ (distribuição gaussiana).

O livro-texto então informa que, no caso simétrico, isto é, quando $\beta=0$ e com média zero, ou seja, $\mu=0$, a distribuição estável, para $x$ muito grande, tem a forma assintótica:

$$P\left(|x|\right) \sim |x|^{-(1+\alpha)}.$$

Uma consequência importante desse resultado é que o valor esperado de

$$|x|^{n}$$

diverge para

$$n \geqslant \alpha$$

quando $\alpha<2$. Assim, em particular, todos os processos estáveis de Lévy com $\alpha<2$ têm variâncias infinitas. Por exemplo, a distribuição lorentziana da Eq.

(1) dá uma variância infinita:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{var}(x) &= \left\langle x^2 \right\rangle - \langle x \rangle^2 \\
&= \frac{\gamma}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \frac{x^2}{\gamma^2 + x^2} - \left[ \frac{\gamma}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \frac{x}{\gamma^2 + x^2} \right]^2 \\
&= \frac{\gamma}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \frac{x^2 + \gamma^2 - \gamma^2}{\gamma^2 + x^2} - 0 \\
&= \frac{\gamma}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \frac{x^2 + \gamma^2}{\gamma^2 + x^2} - \frac{\gamma}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \frac{\gamma^2}{\gamma^2 + x^2} \\
&= \frac{\gamma}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx - \gamma^2 \to \infty .
\end{aligned}
$$