

TEXTOS DE APOIO DE LFRA

AULAS TEÓRICAS

S. Ramos 2014 IST

Compilado por P. Assis, 2020

ESTABILIDADE ATÓMICA E NUCLEAR. NÍVEIS DE ENERGIA E TRANSIÇÕES. PROCESSOS E DESINTEGRAÇÕES NUCLEARES.

NOMENCLATURA DAS CAMADAS ATÓMICAS

TABELA DE NUCLÍDEOS

Estabilidade atómica

Em Física Microscópica postula-se o princípio de energia mínima.

Os átomos ou moléculas, os núcleos atómicos , as partículas elementares são (em geral) estáveis no seu estado de energia mínima, E_0 , o estado fundamental.

Devido à quantificação, só valores específicos de energia $E_n > E_0$ permitem estabilidade

→ só podem ocorrer transições entre o estado fundamental e outros níveis de energia, os estados excitados, com valores de energia bem definidos: $\Delta E_n = n \ h \nu$.

Do prº incerteza $\Delta E \Delta t = \hbar \Leftrightarrow \Delta E \Delta x = \hbar c = 197 \text{ MeV} \cdot \text{fm}$

Como as dimensões típicas de átomos e núcleos são:

Átomo : $\Delta x \sim 1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$

Núcleo : $\Delta x \sim 1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$

há 5 ordens de grandeza entre as energias típicas.

Átomos

camadas internas ~ keV

camadas externas ~ eV

Núcleos

~ MeV

Exº: Iodo (do detector de NaI – iodeto de sódio, cristal cintilador que será usado nos trabalhos)

$^{127}\text{I}_{53}$ – energias de ligação das camadas atómicas:

K : 30 keV

L : 5 keV

M : < 1 keV

=> só electrões das camadas atómicas internas contribuem, ao serem removidos do átomo – ionização –, para a energia total do fenómeno em estudo, a energia da radiação ou partícula incidente.

Estabilidade Nuclear

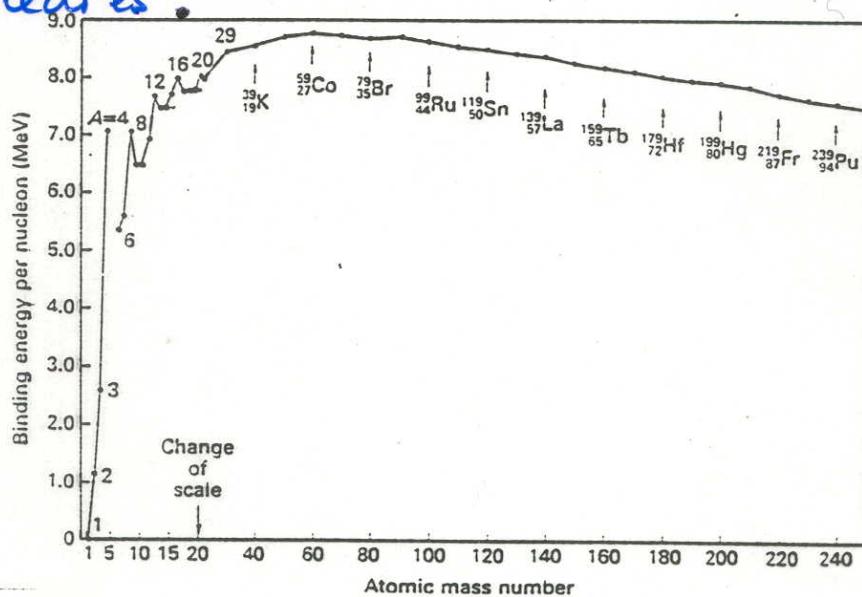
À medida que o número de massa, A , aumenta, os nuclídeos (espécies nucleares) estáveis afastam-se da diagonal $Z = N$ ($Z = \text{nº atómico} = \text{nº protões}$; $N = \text{nº neutrões}$), devido ao efeito repulsivo crescente dos protões.

⇒ nuclídeos estáveis de A intermédio e alto : $N > Z$

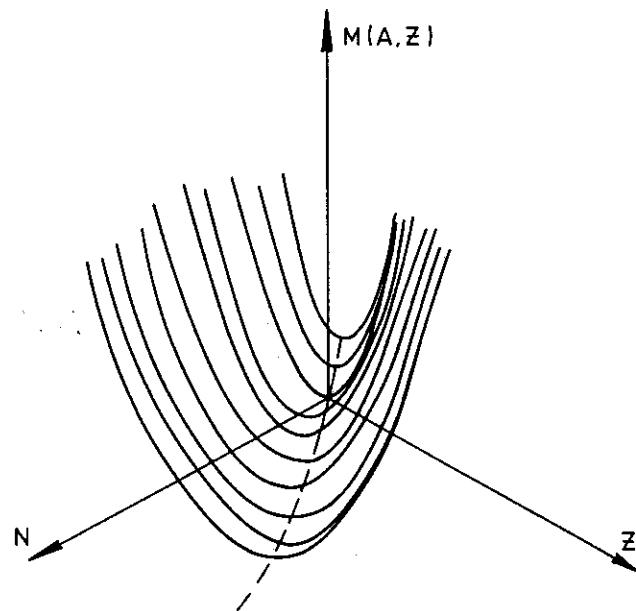
→ ver figuras

Verificam-se desvios às propriedades médias esperadas dos nuclídeos (volume, energia de ligação).

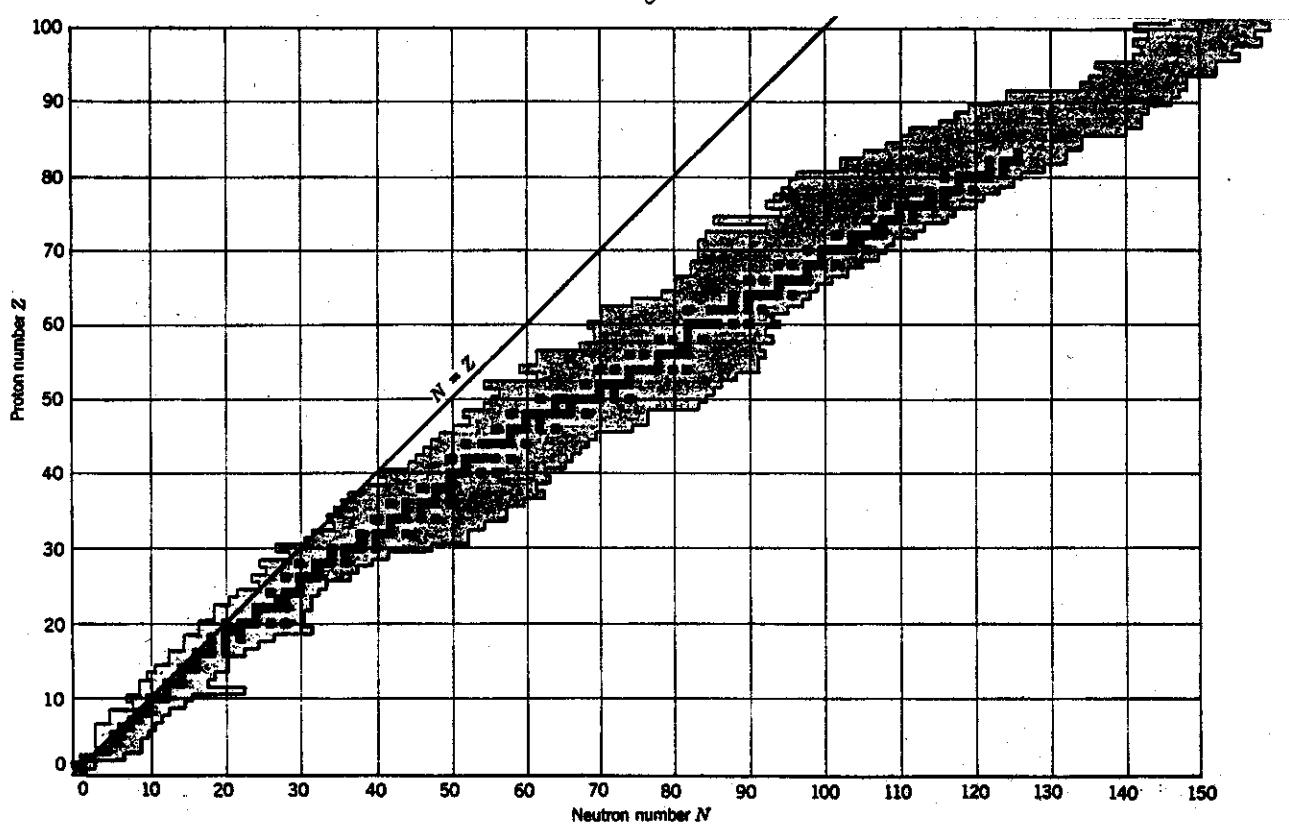
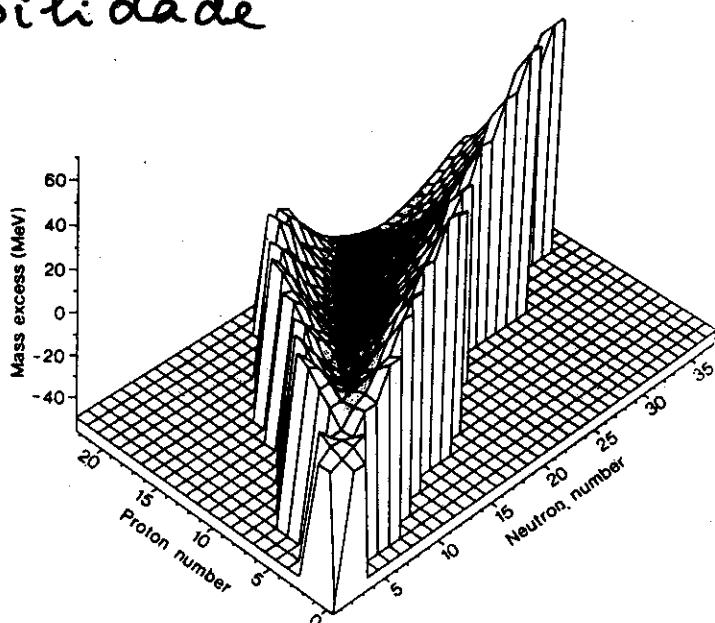
Por exemplo, a energia de ligação por nucleão (protão ou neutrão) em função do nº massa A exibe picos em certos valores ⇒ maior estabilidade para certos Z e/ou N : "números mágicos" nucleares.



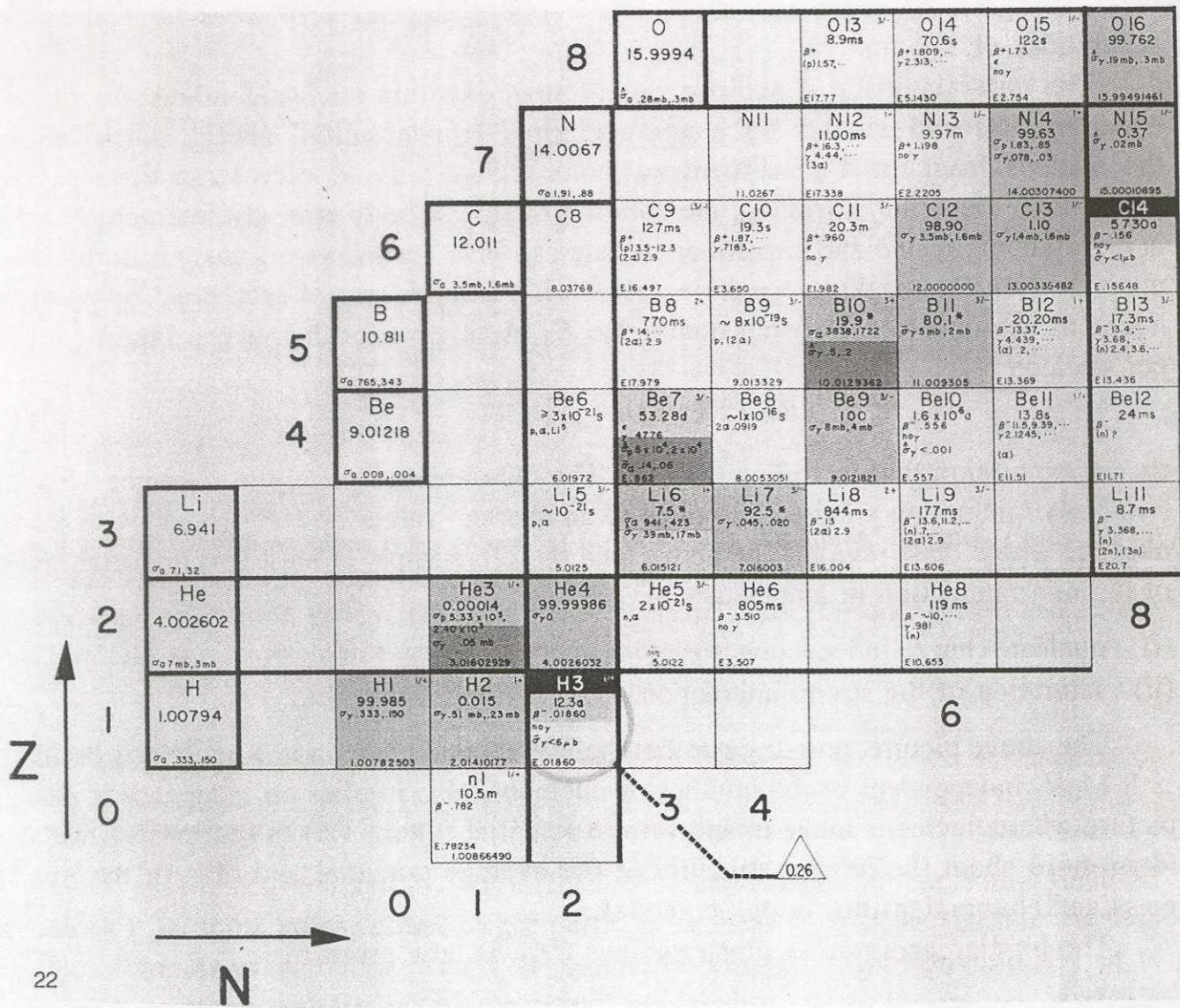
⇒ Grande estabilidade de ${}^4\text{He}$.



○ vale de estabilidade nuclear



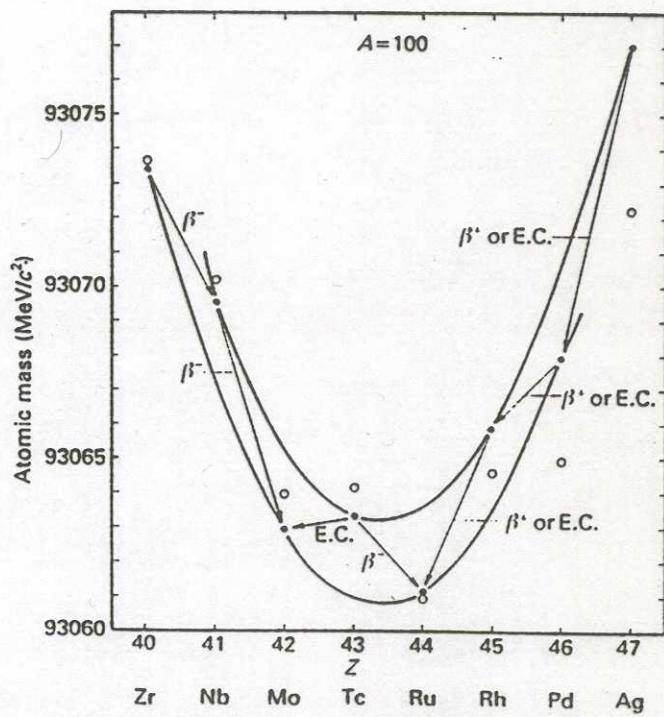
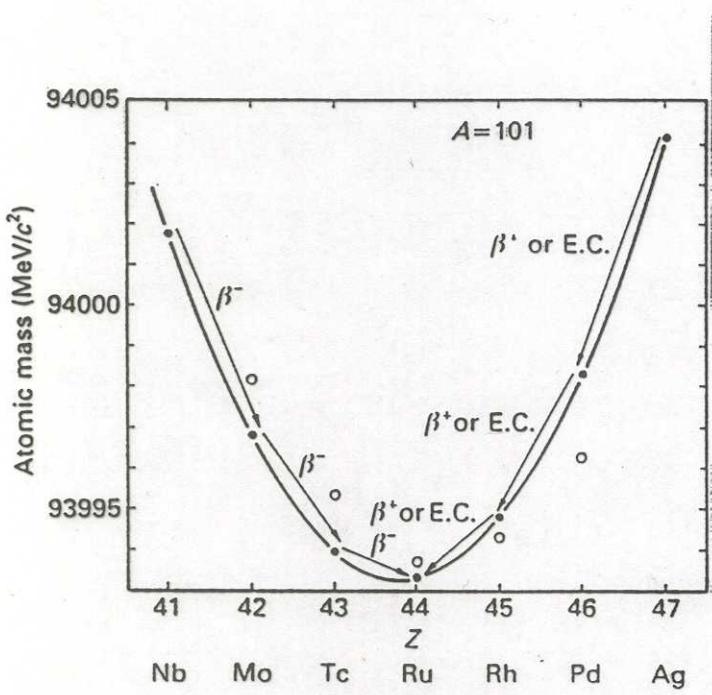
Afastamento da diagonal $N = Z$ para nuclídeos pesados



Seção da carta de espécies nucleares para nuclídeos leves

Transição para a estabilidade

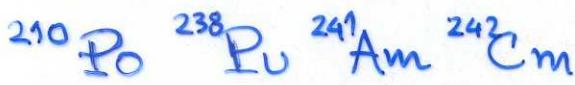
- Emissão β^- (β^+) permite a um núcleo de massa intermédia, mantendo A constante, "subir" ("descer") em Z para encontrar uma posição estável. \rightarrow ver figuras
- Para grandes A ocorre também a emissão de núcleos de hélio, ${}^4\text{He} \equiv$ partículas α .



DESINTEGRAÇÕES NUCLEARES

Decaimento α

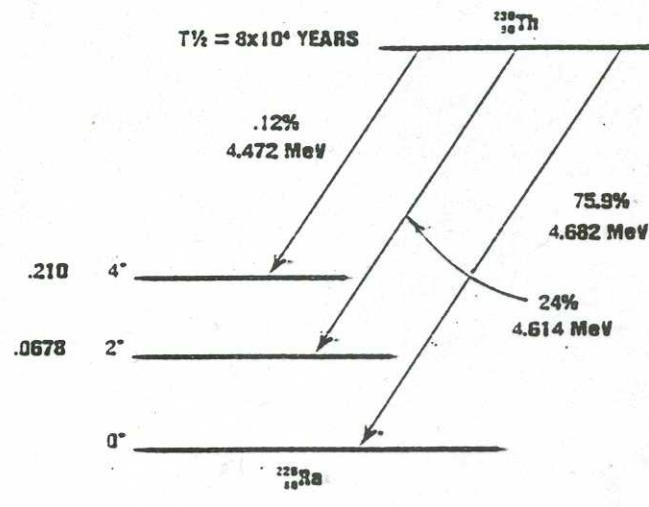
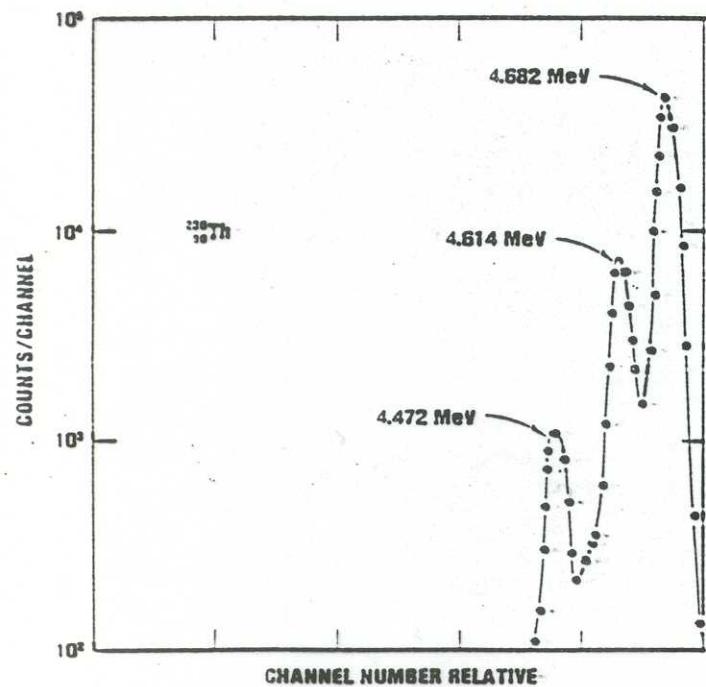
Dá-se em nuclídeos pesados :



Trata-se da emissão de um núcleo de ^4He ($= 2$ protões + 2 neutrões) por efeito de túnel.

Dada a grande estabilidade de ^4He , a sua emissão coerente é energeticamente mais vantajosa que a emissão de nucleões isolados.

O nuclídeo muda de identidade :



Só a partícula α é emitida
 \Rightarrow espectro de energia é discreto.

Energias típicas são da ordem de
 $\sim 4 - 6 \text{ MeV}$

pois a transmissão em barreiras de potencial é função da energia.

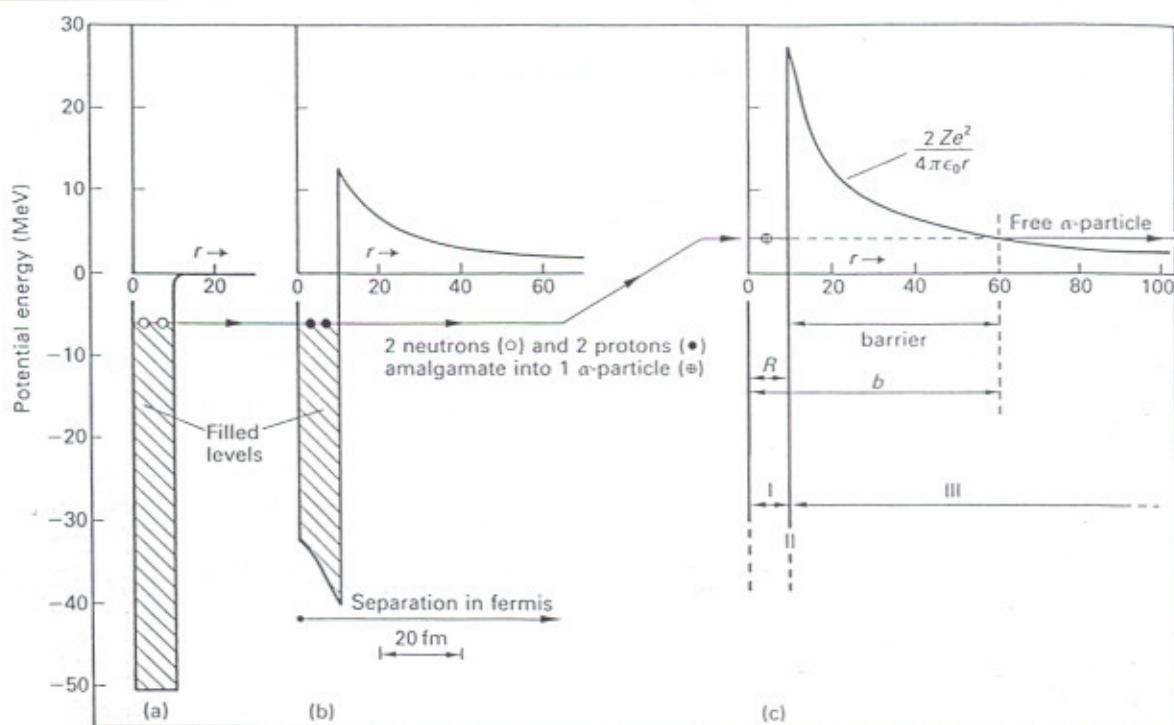
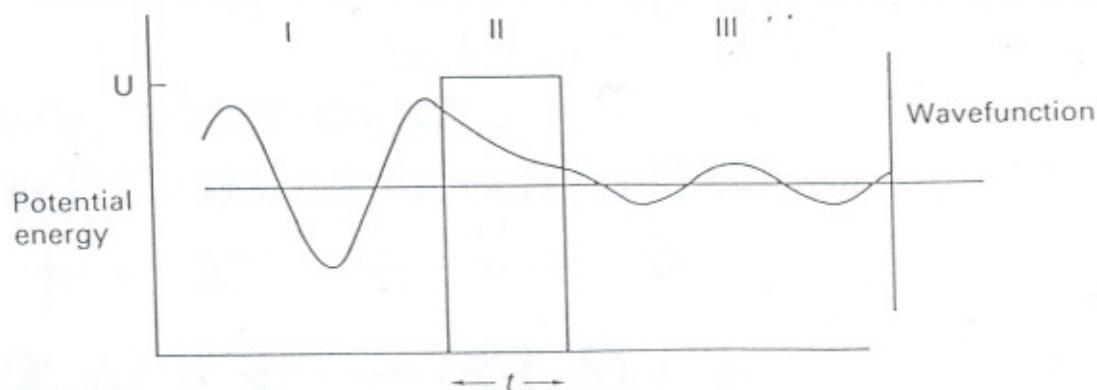


Fig. 6.2 Diagrams of the form of the potential energy versus distance r from the nuclear centre for (a) neutrons and (b) protons in and near a nucleus of $Z=90$, $A \approx 236$. The changing of two protons and two neutrons as they amalgamate to form

an α -particle is shown. If an α -particle is formed, then it is presumed to have a potential energy as a function of distance, as shown in (c). The regions I, II, and III are described in the text.

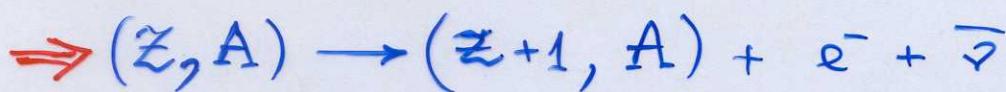
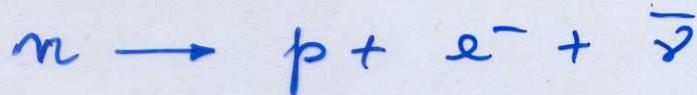
- Probabilidade de transmissão p/ efeito de túnel:

$$T(E) \approx e^{-\frac{2Kt}{\hbar}}, \text{ e } K = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2M(U-E)}$$

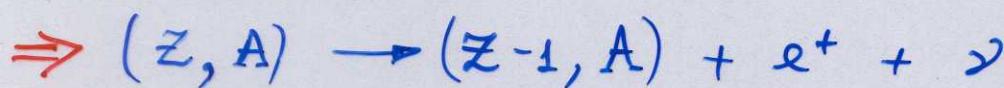
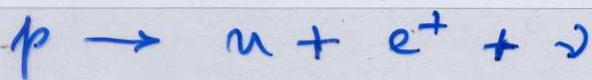


Decaimento β^-

- Num nuclídeo rico em neutrões ocorre o decaimento β^- :

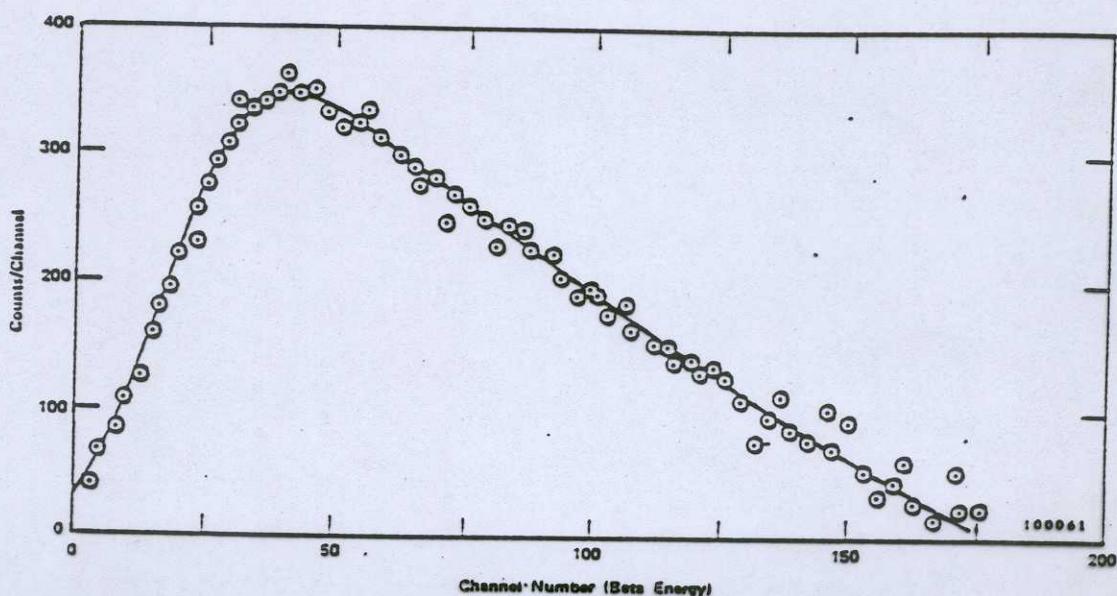
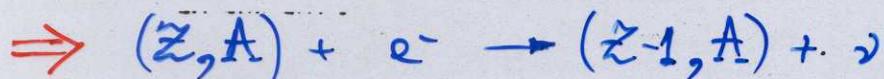
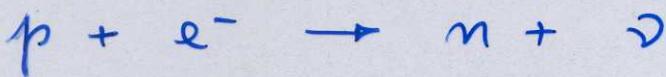


- Num nuclídeo rico em protões dá-se a desintegração β^+ :



ou dá-se a:

captura electrónica, em que o núcleo capta um electrão das orbitais atómicas:



As emissões β^- e β^+ são processos a 2 corpos no estado final (+ nuclídeo final, que recua ligeiramente) \Rightarrow partilha de energia entre o electrão (positrão) e o antineutrino (neutrino).

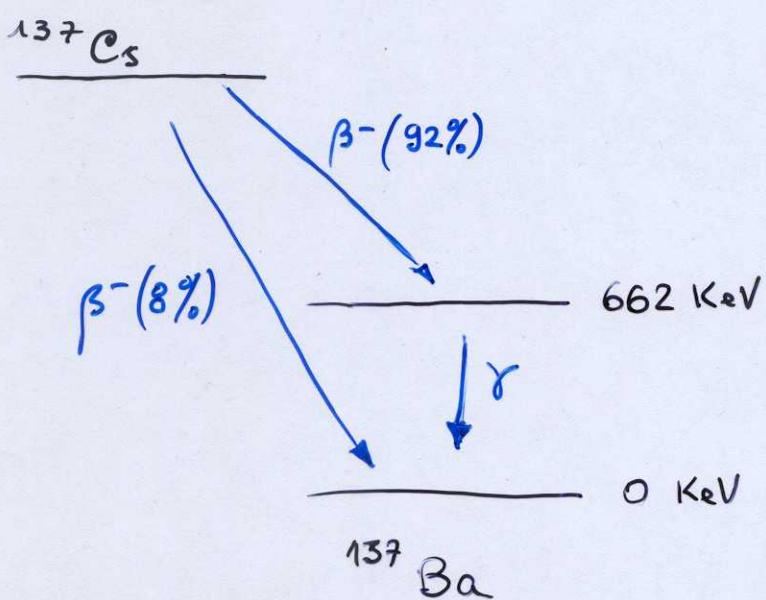
\Rightarrow espectro de energia contínuo para o e^- (e^+) com um valor máximo característico da desintegração em jogo desse nuclídeo (β "end-point").

\rightarrow ver figura

Há nuclídeos que decaem para mais que um estado final do nuclídeo-filho.

Neste caso, há lugar a diversos espectros contínuos de energia, que se sobrepõem de acordo com as suas probabilidades de decaimento

\Rightarrow diversos "end-point"



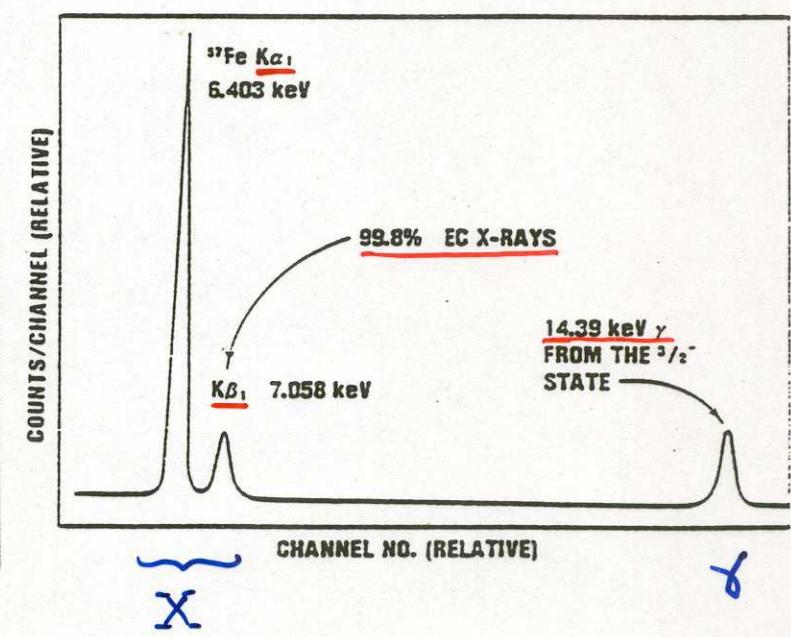
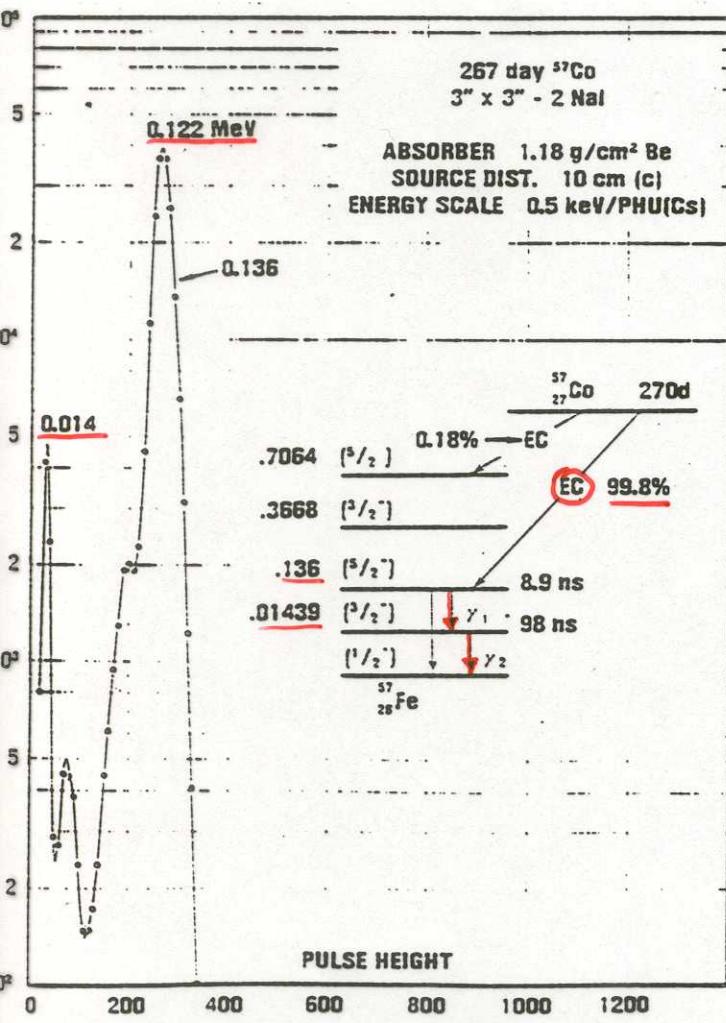
Na captura electrónica há emissão de uma só partícula: o neutrino, de muito difícil detecção... \Rightarrow impossível a observação directa deste modo de decaimento.

Mas, por reordenação dos electrões atómicos, dá-se a emissão de radiação X, conjunto de picos tais que

$$E_X = \phi_L - \phi_K, \text{ ou } \phi_M - \phi_L, \dots$$

ou, de maneira concorrente, de electrões Auger, também monocinéticos.

- E_X e $E_{\text{Auger}} < \text{alguns keV}$



Emissão &

Resulta da transição dos níveis de energia nucleares mais energéticos dos nuclídeos-filhos para o estado fundamental, directamente ou em cascata.

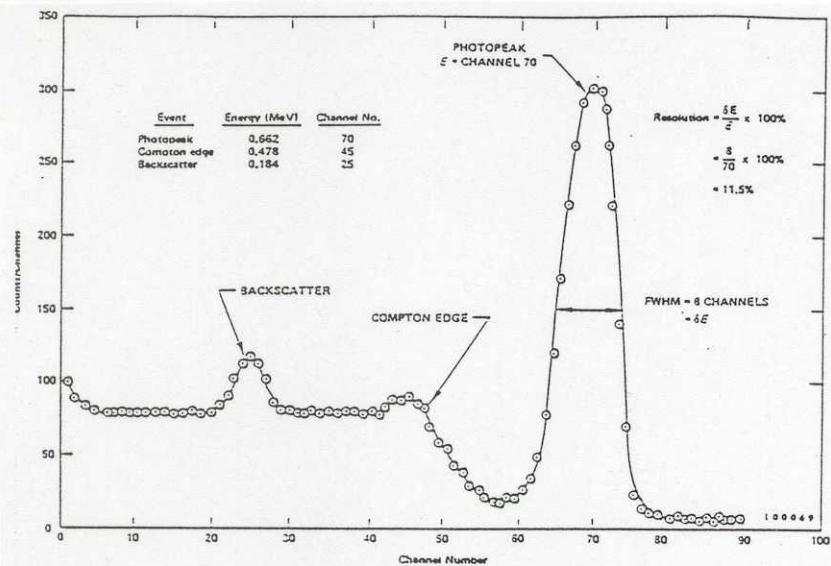
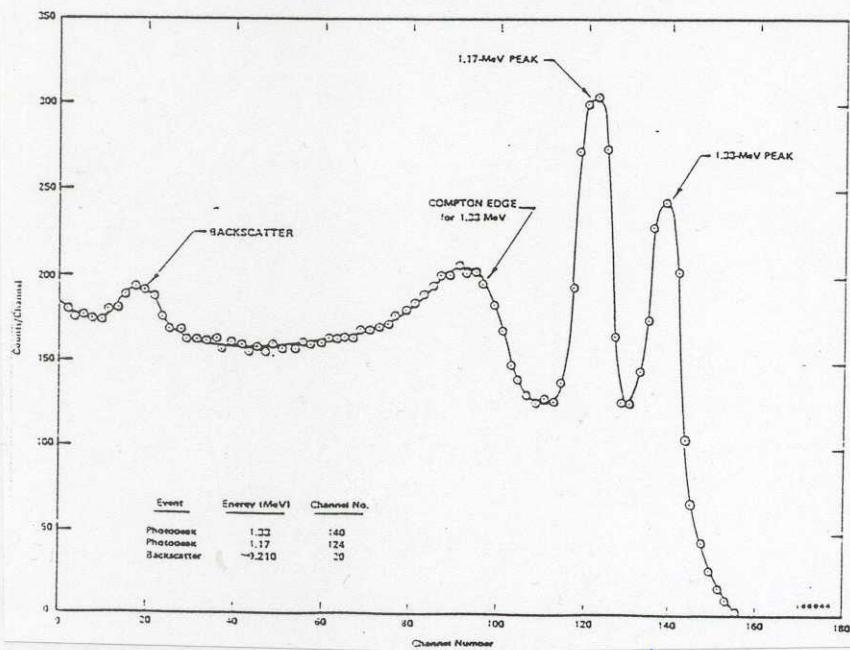


Fig. 3.2. NaI(Tl) Spectrum for ^{137}Cs .



E_{γ} variam entre as dezenas de keV e alguns MeV.

Conversão interna

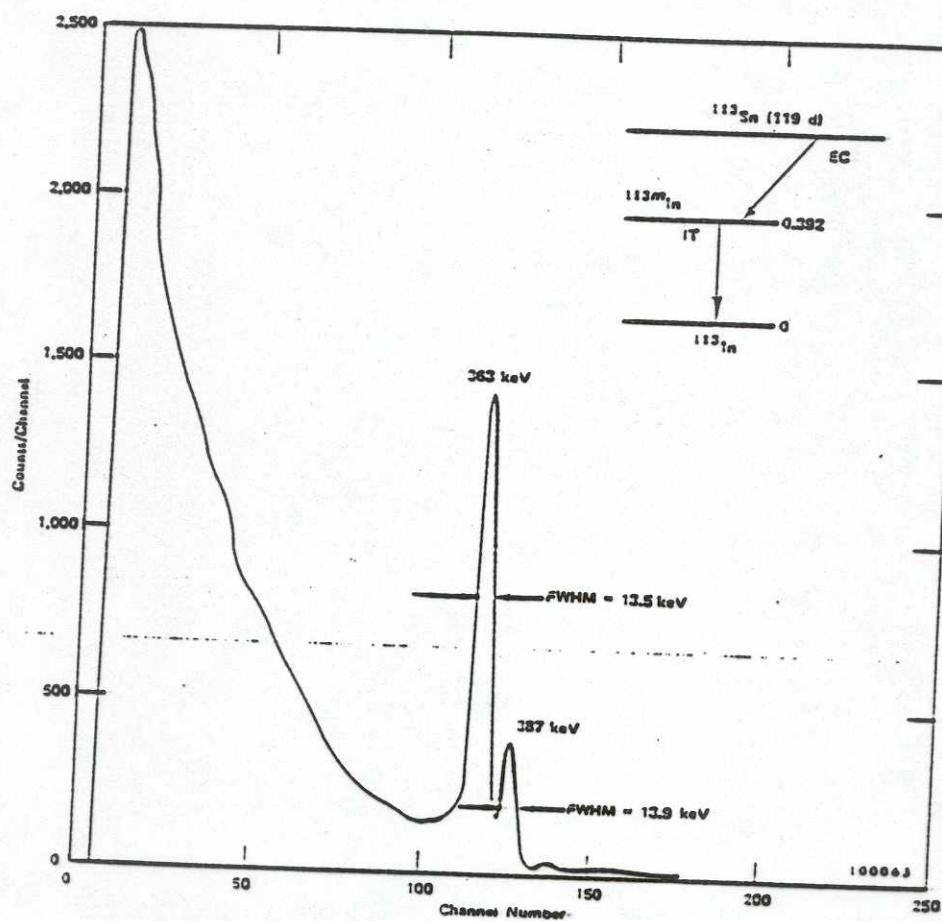
A energia de desexcitação nuclear não sai sob a forma de emissão γ , mas é directamente transferida para um electrão atómico.

É um fenómeno monoenergético:

$$E_e = E_\gamma - \phi_i$$

(ϕ_i : energia de ligação da camada $i = K, L, M, \dots$)

→ formam-se grupos de picos de conversão interna, com espaçamento $\Delta E = \phi_i - \phi_j$, de probabilidade decrescente à medida que E aumenta.

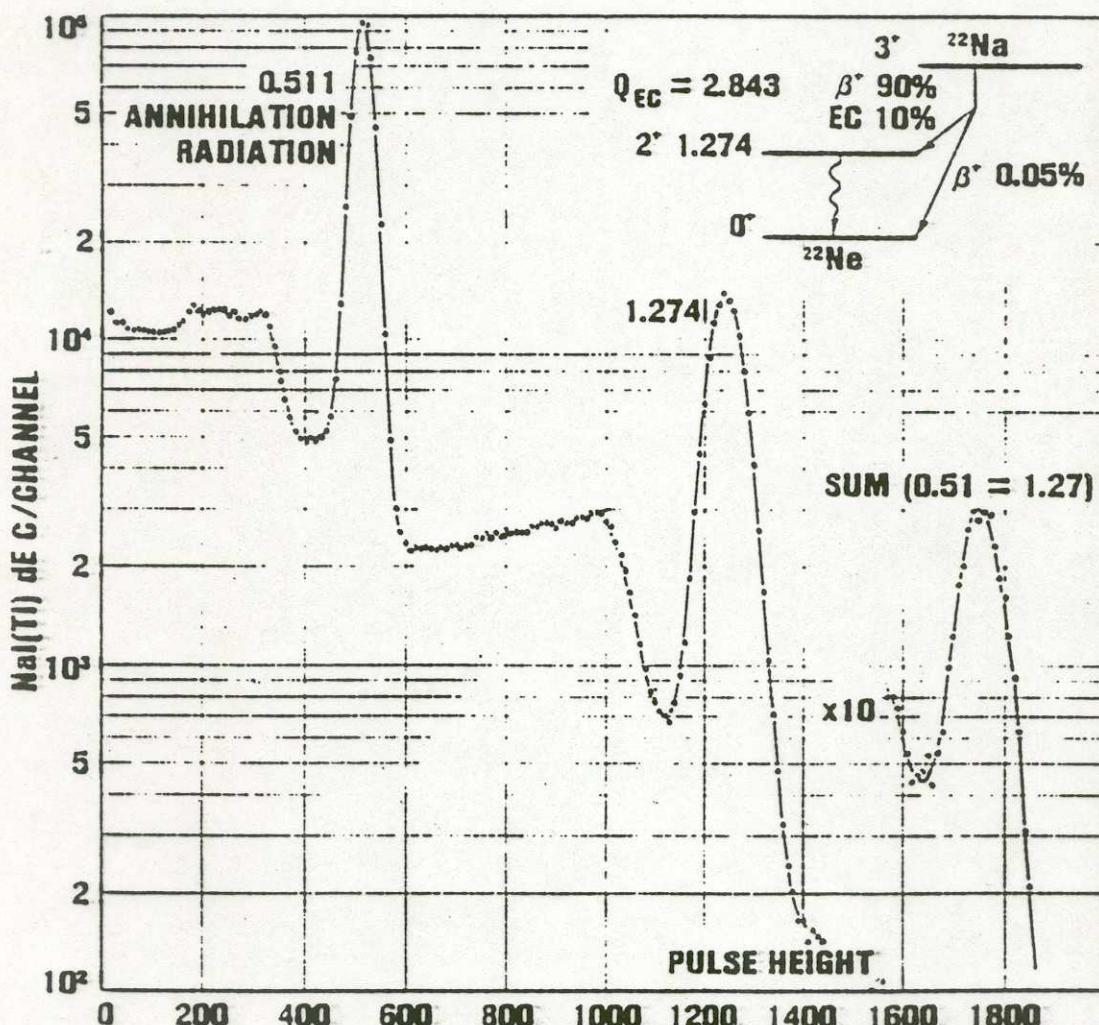


Radiação de aniquilação

No caso da desintegração β^+ , o positrão, sendo uma anti-partícula, tem grande probabilidade de se aniquilar ao encontrar um electrão do material envolucro da fonte ou do próprio detector, produzindo 2 fotões de 511 KeV cada.

$$e^+ e^- \rightarrow \gamma\gamma$$

Os dois fotões, de modo a conservar o momento partem em direções opostas, pelo que só um costuma ser detectado.

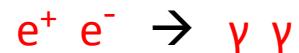


No caso de declíneo β^+ , o positrão interactua com os electrões atómicos do meio, perdendo gradualmente a sua energia em milhares de interacções sucessivas ($> 10^7$).

Quando atinge a energia típica dos electrões atómicos ($\sim 20\text{-}40 \text{ keV}$), captura um e^- , formando um positronium.

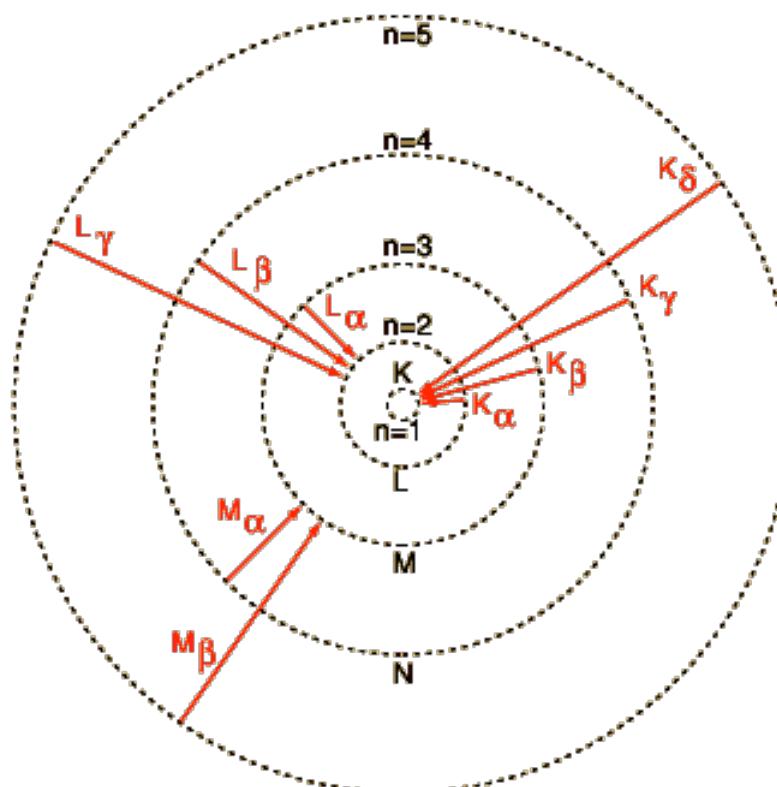
O positronium, sistema ligado $e^+ e^-$, é criado num estado excitado. Como é instável dão-se transições até se atingir o estado de energia mínima ($\sim \text{eV}$), durante o seu tempo de vida ($T_m \sim 1 \text{ ps}$).

É só nesta situação limite (de “repouso”) que se dá a aniquilação:

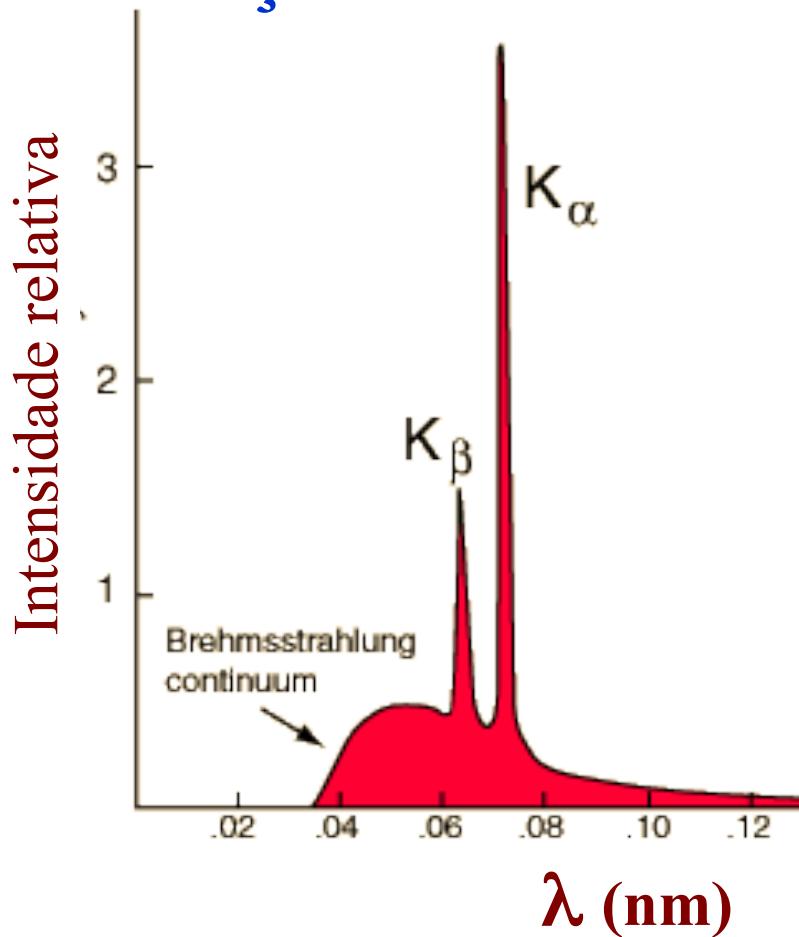


Espectros de Raios X

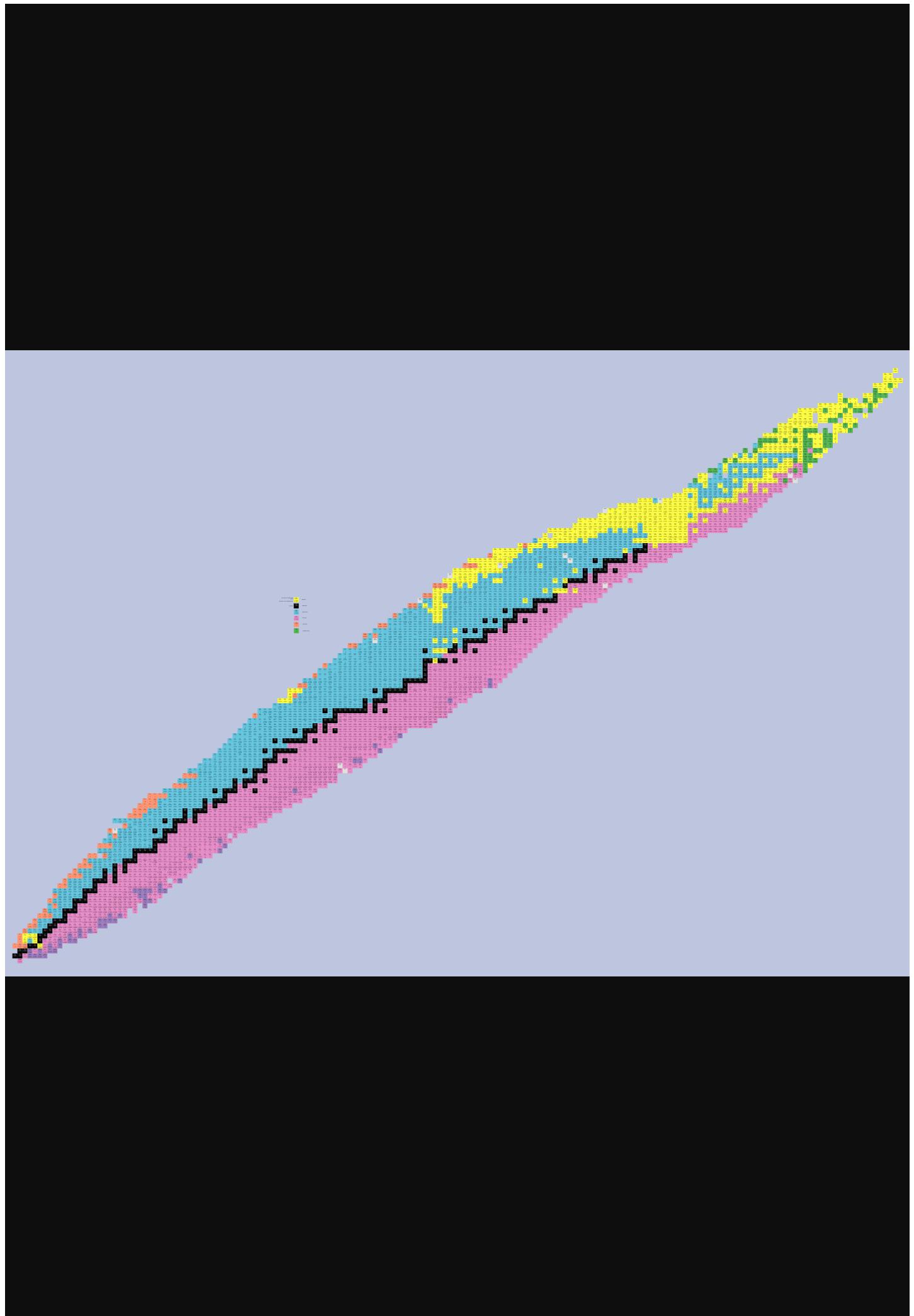
- Os raios X são produzidos em elementos de elevado número atómico, através de transições de electrões nas camadas internas



As riscas K_{α} e K_{β} correspondem a transições de electrões dos níveis L e M para o nível K



Um fundo contínuo existe sob as riscas – radiação Bremsstrahlung



DECAIMENTO RADIOACTIVO: LEI E
DEFINIÇÕES GERAIS.

LEI DE ABSORÇÃO.

Lei do decaimento radioativo

A probabilidade λ de decaimento de um núcleo é constante para cada nuclídeo.

Numa amostra de N núcleos (fonte radioactiva), a sua diminuição num intervalo de tempo Δt é:

$$-\Delta N = N \lambda \Delta t.$$

Num intervalo de tempo infinitesimal:

$$-\frac{dN}{dt} = \lambda N$$

$$\therefore \frac{dN}{N} = -\lambda dt$$

$$\int_{N_0}^{N(t)} \frac{dN}{N} = -\lambda \int_0^t dt$$

$$\Rightarrow \ln N(t) - \ln N_0 = -\lambda t \Leftrightarrow \ln \frac{N(t)}{N_0} = -\lambda t$$

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

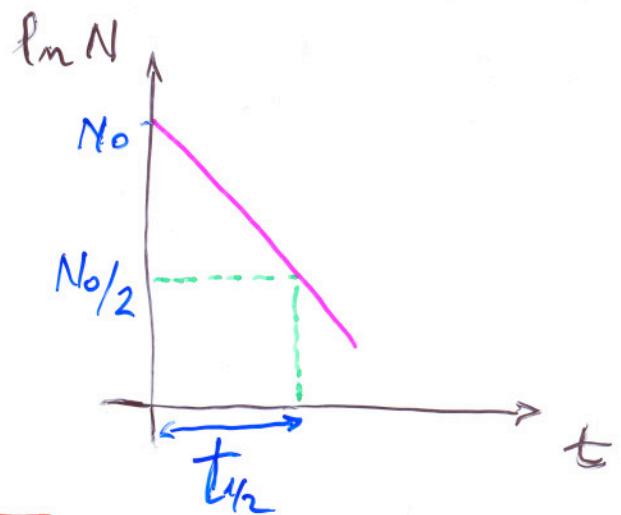
Quer dizer: $N(t)$ é o número de núcleos sobreviventes no instante t numa fonte que possuía N_0 núcleos no instante inicial.

Semi-Vida

Período de tempo $t_{1/2}$ necessário para que o número de núcleos de uma fonte se reduza a metade:

$$\frac{1}{2} N_0 = N_0 e^{-\lambda t_{1/2}}$$

$$\Rightarrow t_{1/2} = \ln 2 / \lambda = 0,693 / \lambda$$



Tempo de vida médio

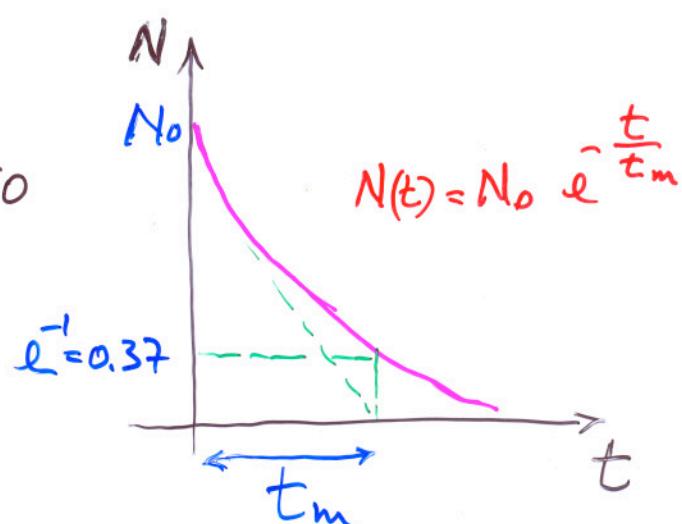
$$t_m = \frac{\int_0^{\infty} N(t) t dt}{\int_0^{\infty} N(t) dt} = \frac{1}{N_0} \int_0^{\infty} N_0 e^{-\lambda t} t dt$$

$$\Rightarrow \boxed{t_m = \frac{1}{\lambda}}$$

A vida média é o inverso da probabilidade de decaimento λ .

A semi-vida é cerca de 70% da vida média:

$$\boxed{t_{1/2} = 0,693 t_m}$$



Actividade de uma fonte

É o número médio de desintegrações por segundo.

Sendo N o número de núcleos da fonte, e λ a probabilidade de decaimento de um núcleo, então:

$$A = \lambda N = \lambda N_0 e^{-\lambda t}$$

$$\Rightarrow A = A_0 e^{-\lambda t}$$

- Unidade de medida "clássica": o Curie.

$$1 \text{ Ci} = 3.7 \times 10^{10} \text{ desintegrações/s}$$

É uma grande unidade, desajustada para o trabalho de hoje em Laboratório, onde são usadas fontes radioactivas da ordem dos μCi ou dos mCi .

- Unidade do Sistema Internacional: o Becquerel.

$$1 \text{ Bq} = 1 \text{ desintegração/s}$$

A actividade dumha fonte é uma propriedade intrínseca que depende da massa. Não se deve confundir com a dose recebida por um objecto ou um ser vivo.

Seção eficaz

Consideremos que N_1 partículas incidentes de raio r_i atravessam um plano de área unitária A , onde se encontram N_2 esferas de raio r_2 .

A probabilidade de colisão geométrica entre uma partícula incidente e as partículas-alvo será

$$N_2 \frac{\pi(r_i + r_2)^2}{A}.$$

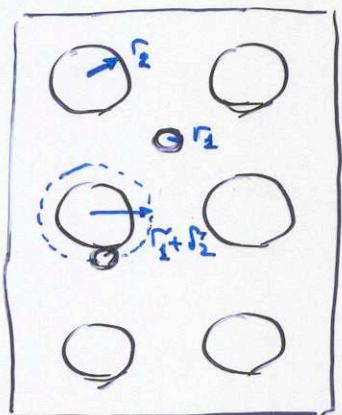
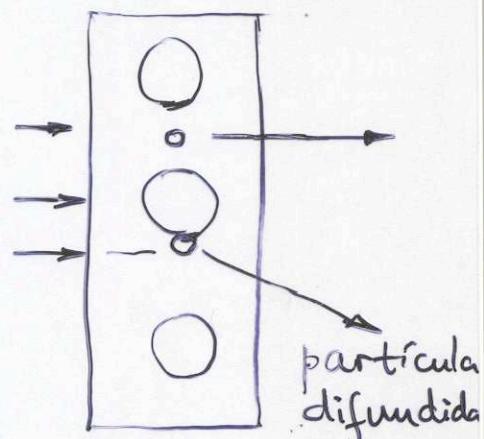
O número total de colisões produzirá N_d partículas difundidas e será:

$$N_d = N_1 N_2 \sigma$$

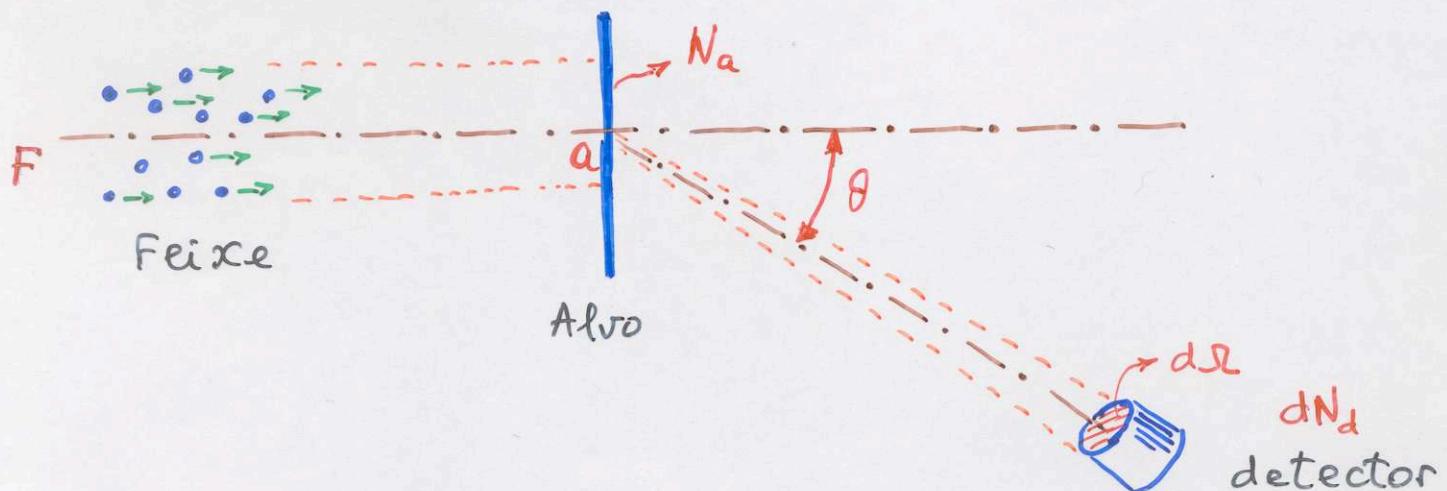
em que $\sigma = \pi(r_i + r_2)^2$ (cm^2) é a seção eficaz, isto é, a área transversa apresentada à colisão pela partícula-alvo.

Em colisões nucleares a área geométrica das partículas envolvidas não corresponde necessariamente à seção eficaz. Mas dá uma ordem de grandeza:

$$\text{Área transversa} \sim (10^{-12})^2 \text{ cm}^2 = 10^{-24} \text{ cm}^2 \equiv 1 \text{ barn}$$



Secção eficaz diferencial



$$dN_d = F \cdot N_a \sigma(\theta, \varphi) d\Omega$$

- F = fluxo incidente : número de partículas incidentes que atravessam uma unidade de área perpendicular ao feixe, numa unidade de tempo.
- N_a = número de partículas-alvo intersectadas pelo feixe
- dN_d = número de partículas secundárias detectadas, i.e., contadas no detector, por unidade de tempo.
- $d\sigma = \sigma(\theta, \varphi) d\Omega \Rightarrow \underline{\sigma(\theta, \varphi)} = \frac{d\sigma}{d\Omega}$ é a secção eficaz diferencial
- $\sigma_{tot} = \int \sigma(\theta, \varphi) d\Omega$ é a secção eficaz total

Absorção de um feixe de partículas na matéria

Seja I a intensidade, i.e., o número de partículas incidentes que atravessa no plano x a unidade de área por unidade de tempo.

A sua diminuição ao atravessar a fatia Δx de matéria é proporcional a:

- σ - probabilidade de interação, ou seção eficaz [cm^2]
- I - número de partículas incidentes
- N_v - nº de centros difusores por unidade de volume do material [cm^{-3}]

Logo seja: $-\Delta I = I \sigma N_v \cdot \Delta x$

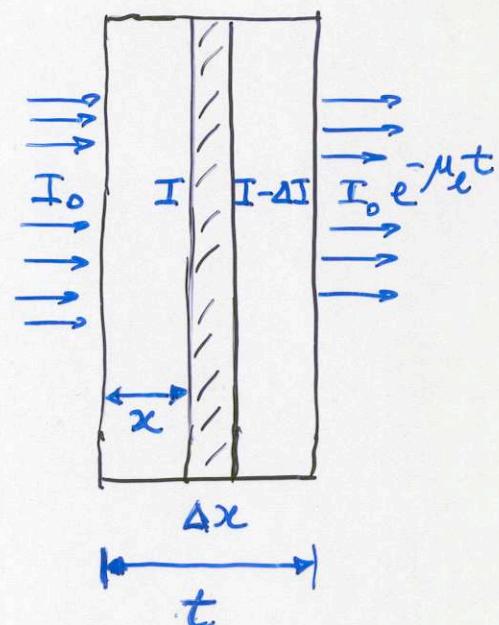
Integrando: $\frac{\Delta I}{I} = -\sigma N_v \Delta x$

$$I = I_0 e^{-\sigma N_v x}$$

ou:

$$I = I_0 e^{-\mu_e x},$$

sendo $\mu_e = \sigma N_v$ o coeficiente de absorção linear ($[\mu] = \text{cm}^{-1}$).



O número de partículas difusoras por unidade de volume N_v pode exprimir-se como:

$$N_v = \frac{\rho}{m} \left\{ \begin{array}{l} = \frac{\rho}{A/N_A} = \rho \frac{N_A}{A} \quad \text{caso do} \\ \qquad \qquad \qquad \text{núcleo atómico} \\ = \frac{\rho}{A/ZN_A} = \rho \frac{ZN_A}{A} \quad \text{caso do electrão} \\ \qquad \qquad \qquad \text{difusor} \end{array} \right.$$

- ρ massa específica do material (g/cm^3)
- m massa de cada partícula difusora (g)
- N_A nº de Avogadro ($= 6,022 \cdot 10^{23}$ partículas/mole)
- A peso atómico (g/mole)

Como a secção eficaz σ de interacção é muito baixa, é usual exprimir-se a espessura de matéria atravessada em g/cm^2 , como se todos os centros difusores estivessem distribuídos no mesmo plano:

$$d_m = x \rho \quad [d_m] = \text{g/cm}^2$$

$$\mu_m = \mu_e / \rho \quad [\mu_m] = \text{cm}^2/\text{g}$$

Então:

$$I = I_0 e^{-\mu_m d_m},$$

μ_m sendo o coeficiente de absorção de massa.

○ coeficiente de absorção linear, μ_e , é tanto maior quanto mais centros difusores por unidade de volume N_v houver, e quanto maior for a secção eficaz σ :

$$\mu_e = \sigma N_v$$

Para o coeficiente de absorção de massa μ_m temos, no caso de núcleos difusores

$$\mu_m = \mu_e / \rho = \sigma N_v / \rho = \sigma \rho \frac{N_A}{A} / \rho = \frac{\sigma N_A}{A}$$

(ou $\mu_m = \sigma \frac{Z N_A}{A}$ para electrões)

Quer dizer: μ_m não depende de ρ , logo é independente do estado físico do material.

Tal como para os processos de desintegração, define-se:

- livre percurso médio

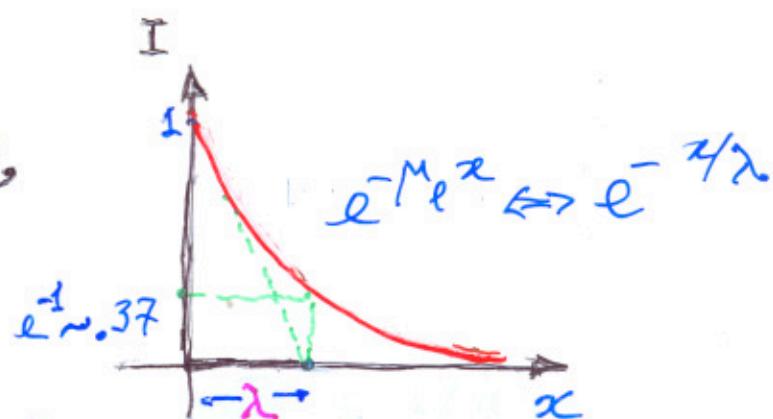
$$\bar{d} = 1/\mu_e = 1/\sigma N_v = \lambda$$

distância média percorrida pela partícula incidente entre duas colisões

ou: $\bar{d}_m = \rho / \mu_e = \rho / \sigma N_v = \lambda_m$

- semi-espesura

$d_{1/2} = 0,693 / \mu_e$ espessura que reduz a metade a intensidade das partículas incidentes.



Decaimentos nucleares em cadeia

Produção e decaimento de um nuclídeo

A equação de balanço de uma espécie nuclear que é criada, p. ex: por bombardeamento de uma espécie estável, à taxa de Q núcleos/s e cuja probabilidade de decaimento é λ , tem 2 componentes:

$$\frac{dN}{dt} = Q - \lambda N,$$

que traduzem as taxas de criação e de destruição do nuclídeo. Reescrevendo-a:

$$\frac{d(Q - \lambda N)}{Q - \lambda N} = -\lambda dt \quad (Q = c^{\frac{1}{\lambda}})$$

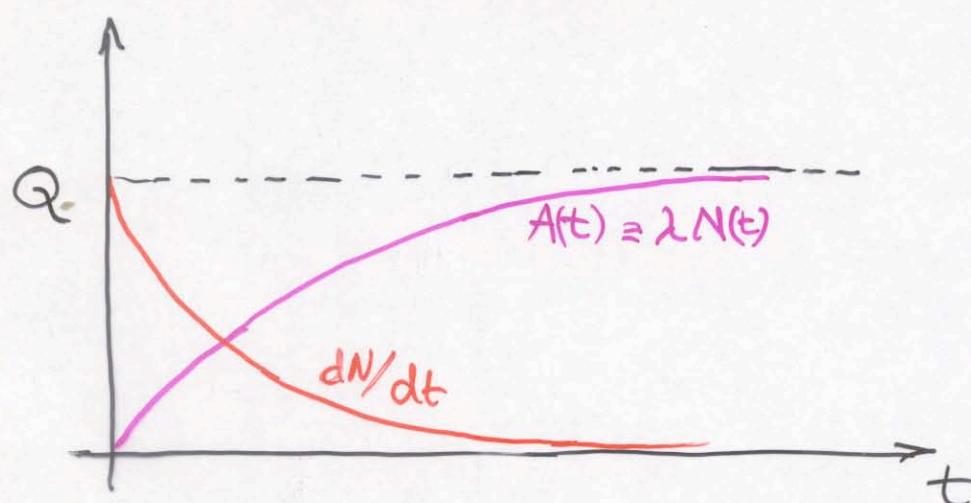
podemos facilmente integrá-la

$$[\ln(Q - \lambda N)]_{N_0}^{N(t)} = -\lambda t \Leftrightarrow Q - \lambda N(t) = (Q - \lambda N_0) e^{-\lambda t}$$

onde:

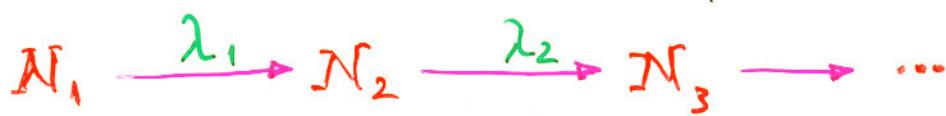
$$N(t) = \frac{Q}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t})$$

(toma-se)
 $N_{t=0} = 0$



Cadeias de decaimentos nucleares

Certos nuclídeos exibem uma família de decaimentos sucessivos do tipo



Considerando o caso em que N_3 é estável, temos:

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= -\lambda_1 N_1 & \frac{dN_2}{dt} &= \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2 \\ && | & \\ && \frac{dN_3}{dt} &= \lambda_2 N_2 - \lambda_3 N_3 \end{aligned}$$

A 2ª equação pode tomar a forma:

$$\lambda_2 \frac{dN_2}{dt} = \lambda_2 (A_1 - A_2) \Leftrightarrow \frac{dA_2}{dt} = \lambda_2 (A_1 - A_2),$$

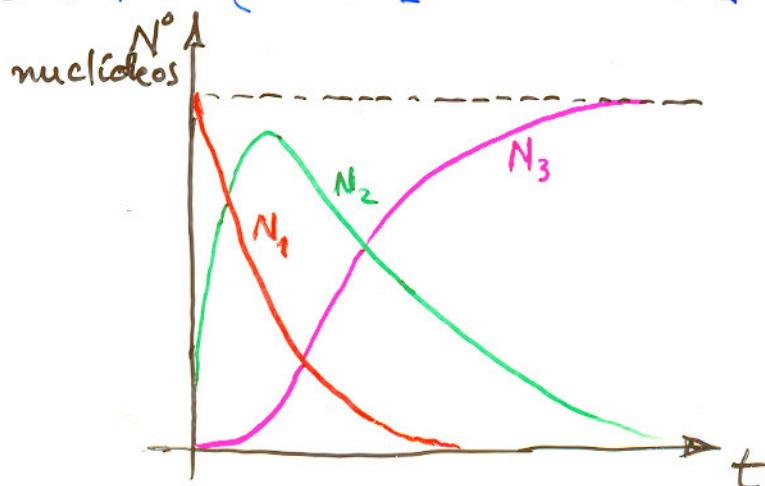
que mostra que o máximo de actividade do nuclídeo-filho ocorre para $A_2 = A_1$.

As soluções gerais para cada nuclídeo são:

$$N_1(t) = N_1^0 e^{-\lambda_1 t}$$

$$N_2(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_1^0 (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})$$

$$N_3(t) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} N_1^0 \left(\frac{1 - e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_1} - \frac{1 - e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_2} \right)$$



Estudemos alguns casos típicos (ver figuras →):

- $\lambda_1 > \lambda_2$: Para $t \gg 1/\lambda_1$, a 1ª exponencial torna-se desprezável:

$$N_2(t) \approx \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} N_1^o e^{-\lambda_2 t}$$

⇒ N_2 decaimará com a sua própria constante λ_2 .

- $\lambda_1 < \lambda_2$: Para $t \gg 1/\lambda_2$ é a 2ª exponencial que se pode desprezar:

$$N_2(t) \approx \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_1^o e^{-\lambda_1 t}$$

⇒ O nuclídeo-filho decai com a constante do pai, λ_1 , pois ele decai ao ritmo a que é formado. E tem-se:

$$\boxed{A_2(t) \approx \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} A_1(t)}$$

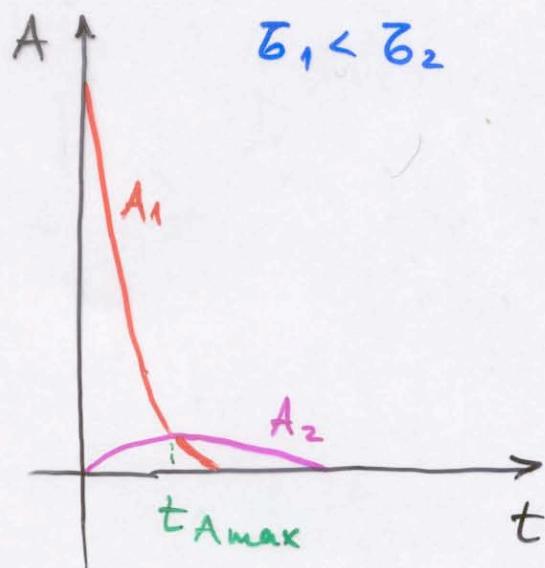
- $\lambda_1 \ll \lambda_2$: No limite temos $A_2(t) \approx A_1(t)$. É o chamado equilíbrio transitório das actividades.

- $\lambda_1 \approx 0, \lambda_1 \ll \lambda_2$: Dá-se o equilíbrio secular, em que, para $t \gg 1/\lambda_2$, tem:

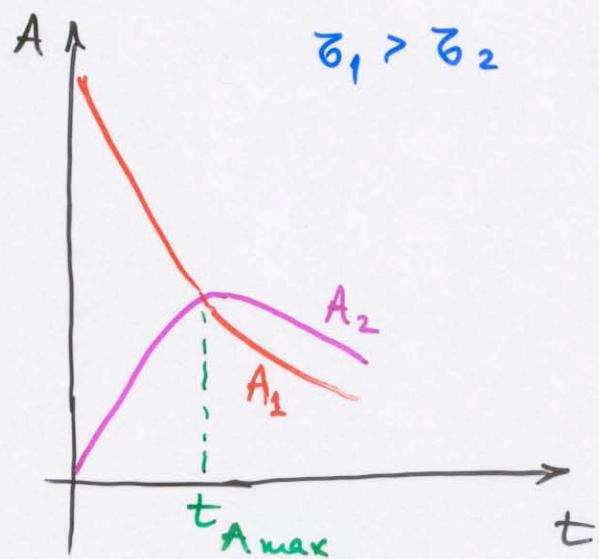
$$\left| \begin{array}{l} N_1(t) = N_1^o \\ N_2(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} N_1^o (1 - e^{-\lambda_2 t}) \end{array} \right. \text{ ou } \left| \begin{array}{l} A_1(t) = A_1^o \\ A_2(t) = A_1^o (1 - e^{-\lambda_2 t}) \end{array} \right.$$

Aqui, a condição de equilíbrio dá-se para $t \gg$, isto é, na saturação.

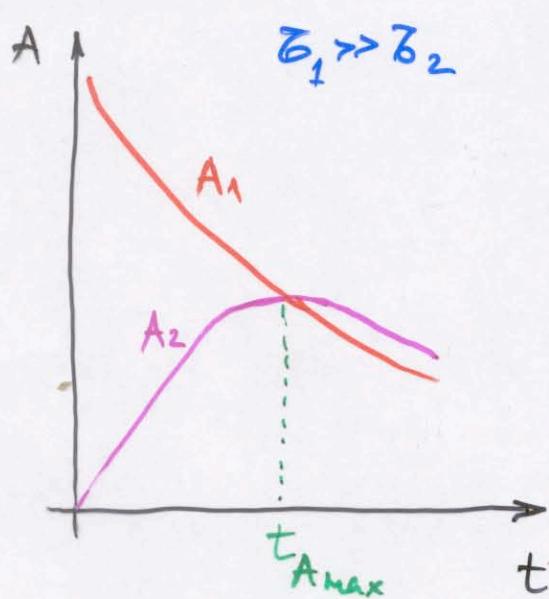
• caso $\lambda_1 > \lambda_2$



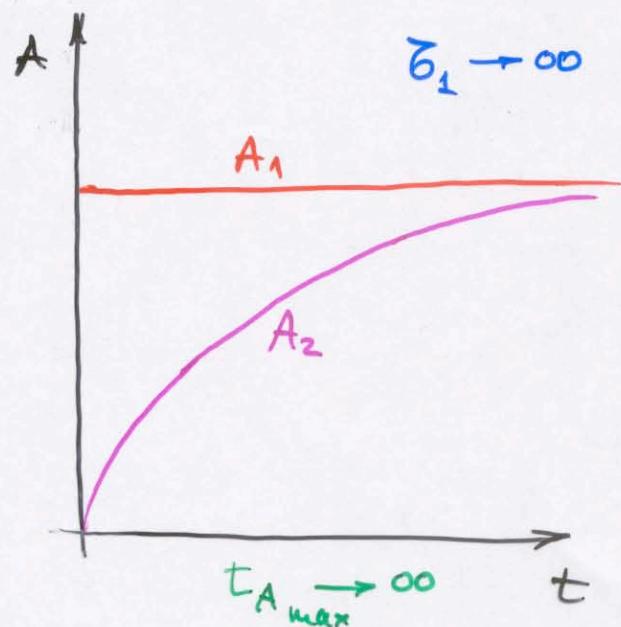
• caso $\lambda_1 < \lambda_2$



• caso $\lambda_1 \ll \lambda_2$



• caso $\lambda_1 \approx 0$ ($\approx \lambda_1 \ll \lambda_2$)



(Vida média $\bar{z} = 1/\lambda$)

INTERACÇÃO DE PARTÍCULAS
CARREGADAS COM A MATÉRIA.

PERDA DE ENERGIA E ALCANCE.

Interacção de partículas carregadas com a matéria

Colisão elástica com o núcleo

A difusão da partícula incidente é devida à sua interacção electromagnética com o núcleo, e é do "tipo Rutherford":

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{E} \right)^2 \cdot \frac{1}{\sin^4 \theta/2} \quad \begin{matrix} (1: \text{incidente}) \\ (2: \text{alvo}) \end{matrix}$$

⇒ difusão a grandes ângulos muito menos provável que difusão a pequenos ângulos.

Ex.: $\frac{d\sigma}{d\Omega} (\theta = 180^\circ) = 10^{-5} \cdot \frac{d\sigma}{d\Omega} (\theta = 6^\circ)$
(retrodifusão)

A variação máxima de energia de uma partícula de massa M_1 ao chocar com outra de massa M_2 em repouso é obtida num choque frontal ($\theta = 180^\circ$):

$$\frac{E'}{E} = \left(\frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} \right)^2 \quad \text{ou} \quad \frac{\Delta E}{E} = \frac{E' - E}{E} = - \frac{4 M_1 M_2}{(M_1 + M_2)^2}$$

Para electrões ou partículas α chocando em núcleos pesados, $M_1 \ll M_2 \Rightarrow \frac{E'}{E} \approx 1$.

\Rightarrow Partículas α e β sofrendo difusão elástica em núcleos só modificam a sua direcção, não tendo perda de energia.

Ora, deflexão angular significa variação de velocidade, logo aceleração (negativa) da partícula:

$$a = \frac{F_{e.m.}}{M_1} \propto \frac{Z_1 Z_2 e^2}{M_1},$$

e produz uma radiação de desaceleração de intensidade I_{rad} ($\propto a^2$):

$$I_{rad} \propto \frac{Z_1^2 Z_2^2 e^4}{M_1^2}$$

$$\Rightarrow \frac{(I_{rad})_\alpha}{(I_{rad})_\beta} = \frac{Z_\alpha^2}{Z_\beta^2} \cdot \frac{M_\beta^2}{M_\alpha^2} \approx 4 \times \frac{1}{64 \times 10^6} = \frac{1}{16} 10^{-6}$$

ou seja, $(I_{rad})_\alpha$ é da ordem de um milhão de vezes menor que $(I_{rad})_\beta$.

A probabilidade de difusão elástica num núcleo comparada com a de difusão inelástica em cada electrão da nívera electrónica do átomo é muito reduzida, dada a relação dos volumes.

Colisão inelástica com um electrão na presença da nívera electrónica do átomo

A troca de energia entre a partícula incidente e um electrão atómico é devida à interacção electromagnética:

⇒ excitação atómica: o electrão transita para os estados mais energéticos e regressa ao estado fundamental (em $\sim 10^{-12} \text{ s} \equiv 1 \text{ ps}$) emitindo um fotão.

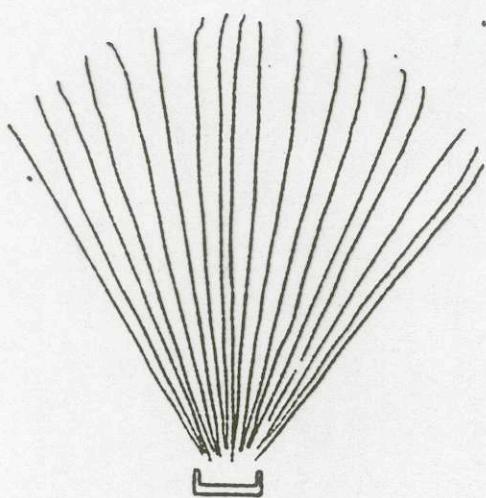
⇒ ionização: electrão é removido do átomo e passa a interagir com electrões de outros átomos (⇒ ionização secundária).

A deflexão depende da diferença de massa das partículas em colisão:

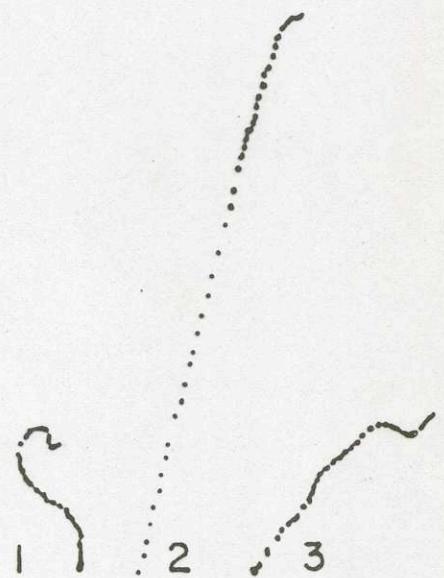
- É máxima se as massas são iguais:
caso electrão - electrão
⇒ electrões são difundidos a grandes ângulos e a sua trajectória é errática.
- Deflexão no caso α -electrão: os ângulos são muito pequenos e as trajectórias são em linha recta.

Trajectórias de partículas carregadas

na matéria



Partículas α



Partículas β

Perda de energia por ionização

Poder de paragem

As partículas carregadas perdem energia em cada colisão inelástica com os electrões do meio e acabam por parar.

A perda de energia, $-\frac{dE}{dx}$, por unidade de comprimento ("stopping power") devida à ionização pode ser obtida na aproximação clássica.

Calculemos o impulso sofrido por um electrão na passagem de uma partícula de carga $Z_1 e$:

$$F \Delta t = \frac{Z_1 e^2}{y^2} \cdot \frac{2y}{v} \quad \begin{array}{c} e \\ | \\ y \\ - \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta t \sim \frac{2y}{v} = \text{tempo de} \\ \text{interacção} \\ y = \text{parâmetro de impacto} \end{array} \right.$$

Então, a energia transferida para o electrão é:

$$E_e = \frac{p^2}{2M_2} = \frac{1}{2M_2} \left(\frac{Z_1 e^2}{y^2} \cdot \frac{2y}{v} \right)^2 = \frac{2 Z_1^2 e^4}{M_2 v^2 y^2}. \quad (1)$$

Considerando um meio contendo N_v átomos por unidade de volume, de número atómico Z_2 , a perda de energia por unidade de comprimento da partícula, devida à sua interacção com os electrões do elemento $2\pi y dy$, vale: $\frac{2 Z_1^2 e^4}{M_2 v^2 y^2} N_v Z_2 \cdot 2\pi y dy = 4\pi \frac{Z_1^2 e^4}{M_2 v^2} N_v Z_2 \frac{dy}{y}$.

Integrando para todos os possíveis y : $y_{\min} \leq y \leq y_{\max}$, vem: $\frac{dE}{dx} = 4\pi \frac{Z_1^2 e^4}{M_2 v^2} N_v Z_2 \cdot \ln \frac{y_{\max}}{y_{\min}}$.

Esta expressão pode ser dada em função de $\ln E_e$, usando (1): $dE \propto -\frac{2}{y^3} dy \Rightarrow \frac{dE}{E} = -\frac{2}{y^3} \times y^2 dy = -\frac{2}{y} dy$

$$\therefore 2 \ln \frac{y_{\max}}{y_{\min}} = -\ln \frac{E_{\max}}{E_{\min}}$$

Avaliemos os limites físicos E_{\min} e E_{\max} :

- A variação máxima de velocidade é claramente $\vec{v} \rightarrow \vec{v} \Rightarrow 2v$, pelo que a energia transferida para o electrão não pode exceder $E_{\max} = \frac{M_2}{2}(2v)^2 = 2M_2 v^2$.

- A energia mínima que pode ser transferida para o electrão é a sua energia de ligação no átomo. Para o conjunto dos electrões atómicos usa-se \bar{I} , a energia média de ionização.

Obtemos, então: $\ln \frac{E_{\max}}{E_{\min}} = \ln \frac{2M_2 v^2}{\bar{I}}$ ($\bar{I} \sim 10-15 Z_2 eV$)

Concluindo, a perda de energia por unidade de comprimento de uma partícula carregada não relativista é:

$$-\frac{dE}{dx} = 2\pi \frac{Z_1^2 e^4}{M_2 v^2} n_v z_2 \ln \frac{2M_2 v^2}{\bar{I}}$$

Esta expressão clássica, devida a Bohr, não contém explicitamente M_1 nem E_1 . Mas, para partículas com a mesma energia, $-dE/dx$ é proporcional às suas massas. (cf. figura $dE/dx \rightarrow$)

Ou seja, fazendo $v^2 = 2E/M_1$, temos o comportamento:

$$-\frac{dE}{dx} \propto \frac{1}{E}, \quad \text{ou} \quad E \frac{dE}{dx} = C$$

No caso relativista, obtém-se a expressão geral:

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{2\pi Z_1^2 e^4}{M_2 v^2} n_v z_2 \left(\ln \frac{2M_2 v^2}{\bar{I}(1-\beta^2)} - \beta^2 \right)$$

Expressão de Bethe-Bloch

Para velas cidades relativistas nota-se uma ligeira subida de dE/dx devida a uma deformação do campo eléctrico (diminuição na direcção longitudinal e aumento na transversa).

→ 2^a figura
 dE/dx

Alcance

• Partículas α

Vimos que a perda de energia das partículas α na matéria por colisões elásticas com os núcleos e por radiação de desaceleração é desprezável.

Nas colisões com electrões atómicos a perda de energia das partículas α é, numa colisão frontal:

$$\frac{\Delta E}{E} = - \frac{4 M_1 M_2}{(M_1 + M_2)^2} \quad \xrightarrow{M_1 \gg M_2} \quad \Delta E = \frac{4 M_2}{M_1} E$$

Para $E \approx 5 \text{ MeV}$ (valor típico), vem: $\Delta E = 2.7 \text{ keV}$

⇒ São precisas milhares de colisões (frontais e/ou periféricas) para fazer parar um α .

Quando a velocidade dumha partícula α desce abaixo das dos electrões atómicos, passa a capturá-los e rapidamente se torna num átomo neutro, acabando por parar em colisão com os átomos (vistos como um todo) do material.

A ionização do meio causada pela partícula, em função da sua distância ao ponto de partida, cresce pois, à medida que a velocidade diminui, o tempo de interacção (tempo gasto pelo α perto do átomo) aumenta.

→ fig. ionização

Chama-se alcance ("range") à distância da fonte ao ponto onde foi produzido o último ião. É um fenómeno estatístico, devido à variação de ionização em cada interacção
 \Rightarrow para a mesma E_{inicial} dos α , o alcance pode ter flutuações.

Define-se alcance médio como:

$$\bar{R} = \int_0^{\bar{R}} dx = \int_0^E \frac{1}{-dE/dx} dE$$

Introduzindo a expressão clássica de $-dE/dx$ tem:

$$\bar{R} = \frac{m}{2\pi z^2 e^4 M v Z} \int_{E_i}^0 \frac{v^2 dE}{\ln(2mv^2/\bar{I})}$$

e, fazendo $dE = Mv dr$, obtemos

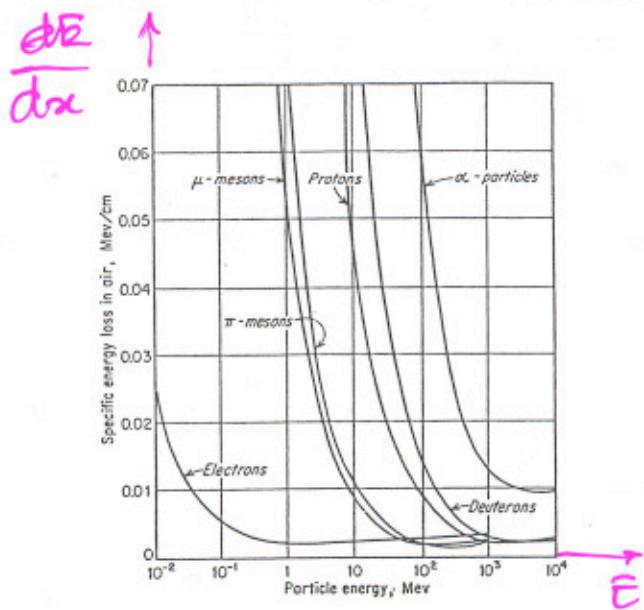
$$\bar{R} = \frac{M m}{2\pi z^2 e^4 M v Z} \int_{v_i}^0 \frac{v^3 dv}{\ln(2mv^2/\bar{I})} \Rightarrow \bar{R} \propto E^2$$

tendo desprezado a lenta dependência logarítmica de v .

Uma melhor descrição dos resultados experimentais é $\bar{R} \propto E^{3/2}$.

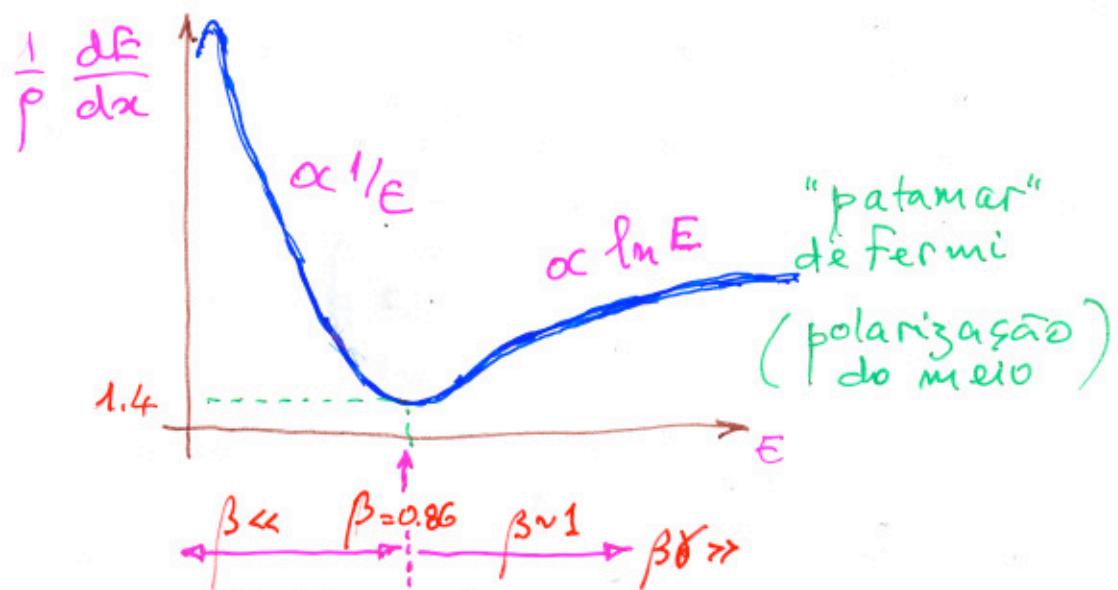
Por exemplo, a P.T.N., o alcance das partículas α no ar é: $\bar{R}(\text{cm}) = 0.32 E^{3/2} (\text{MeV})$ ($\Rightarrow 2-3 \text{ cm}$).

Perda de energia

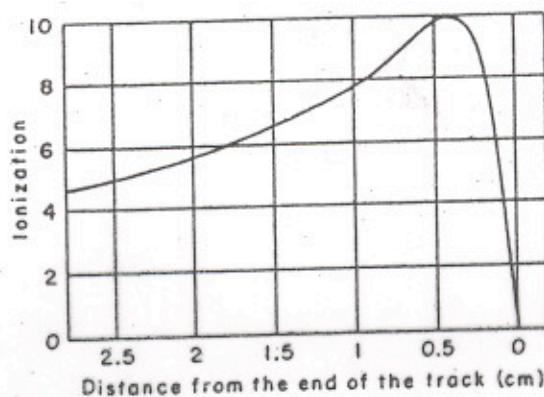


de diferentes partículas no ar

Expresso em MeV/g/cm^2 , o $\frac{dE}{dx} = \frac{1}{\rho} \frac{dE}{dx}$ torna-se independente do material e tem um mínimo em 1.4 MeV/g/cm^2 @ $\beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.86$ (ou $\beta \gamma \approx 3$)



Ionização



de partículas α no ar

Alcance: diferentes conceitos:

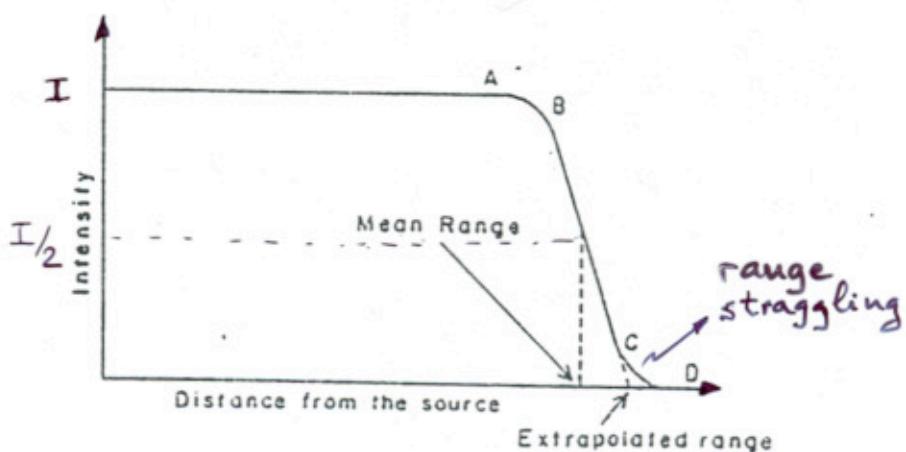


Figure 2-13. Variation of the number of alpha particles as a function of source-counter distance.

Perda de energia de partículas α no ar:

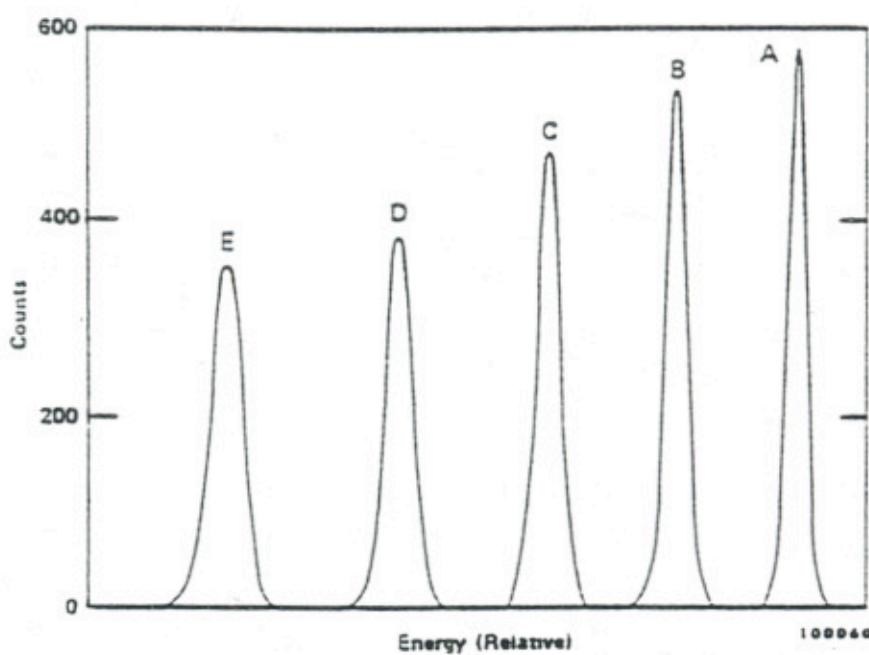


Fig. 5.6. dE/dx for Alpha Particles in Air.

A medida que a camada de ar a travessada aumenta, o valor médio do centróide diminui e aumenta a dispersão da distribuição (energy straggling)

• Radiação β

Como os electrões têm carga menor que os α , ionizam menos o meio, donde:

- chegam mais perto dos núcleos atómicos
- têm trajectórias muito mais longas

\Rightarrow São mais difundidos a grandes ângulos, tanto em colisões e-e como e-núcleo

\Rightarrow perdem muita energia por radiação

$$\bullet 10\% \text{ no Pb a } 1 \text{ MeV} \Leftrightarrow \frac{(dE/dx)_{\text{rad}}}{(dE/dx)_{\text{ioniz}}} = \frac{E_e Z_2}{800} \quad (Z_{\text{Pb}} = 82)$$

A perda de energia por ionização é, mesmo a baixas energias, relativista ($m_e \ll$):

$$\left(-\frac{dE}{dx} \right)_{\text{ioniz}} = \frac{2\pi e^4 N_e Z_2}{m_e v^2} f(E, I)$$

onde $f \propto \ln E/I$ como anteriormente.

(Expressão de Bethe-Bloch)

Por todas estas razões, o alcance da radiação β é pouco definido em comparação com o das partículas α .

INTERACÇÃO DA RADIAÇÃO COM A MATÉRIA. EFEITOS FOTOELÉCTRICO, DE COMPTON E PRODUÇÃO DE PARES.

Interacção da radiação γ com a matéria

• Efeito fotoeléctrico

Fotão é totalmente absorvido por um electrão atómico, que é ejectado com a energia

$$T_e = E_\gamma - \phi$$

$$E = h\nu$$

ϕ = energia ligação

Se o electrão pertence, por exemplo, à camada K, outro da camada L virá ocupar o seu lugar, ficando a energia $\phi_K - \phi_L$ disponível:

► ou para emissão dum raio X, com

$$E_X = \phi_K - \phi_L$$

► ou para emissão dum electrão da camada L, electrão de Auger, com

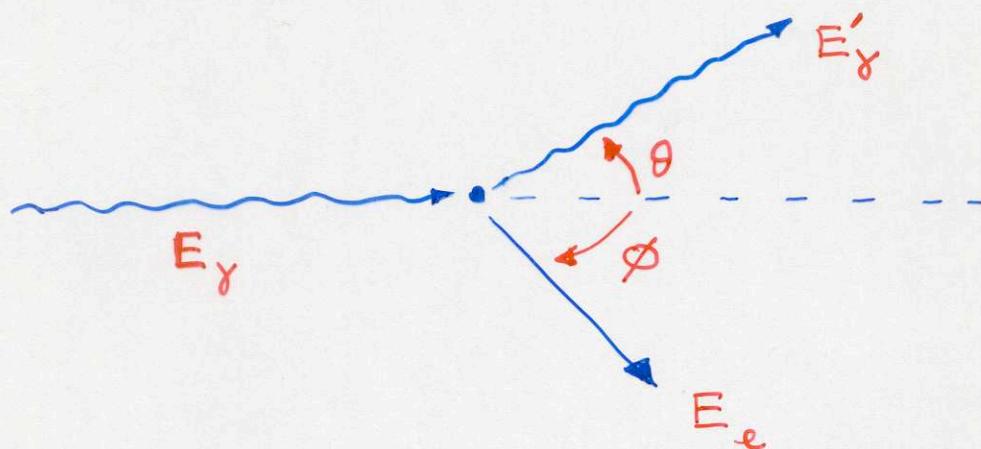
$$E_{\text{Auger}} = (\phi_K - \phi_L) - \phi_L = \phi_K - 2\phi_L$$

É importante para fotões de baixa energia ($\sim 100 \text{ keV}$) e em meios materiais de Z grande (cresce com $\sim Z^4$).

• Difusão de Compton: $\gamma e \rightarrow \gamma e$

O fotão é difundido por um electrão atómico fracamente ligado ao núcleo.

\Rightarrow Cálculo feito no limite em que o electrão é livre e está em repouso ($E_\gamma \gg p$)



Pela conservação da energia e da impulsão :

- $E_\gamma + m_e c^2 = E'_\gamma + E_e$

- $\begin{cases} p_\gamma \\ 0 \end{cases} = \begin{cases} p'_\gamma \cos \theta + p'_e \cos \phi \\ p'_\gamma \sin \theta - p'_e \sin \phi \end{cases}$

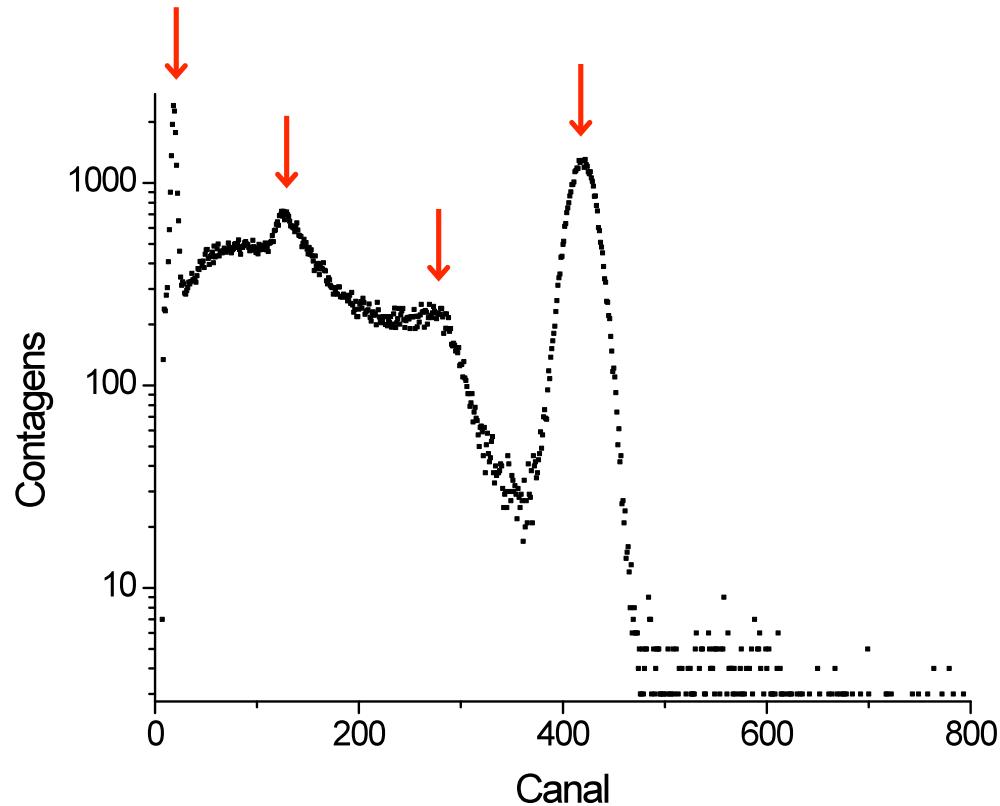
obtém-se :

$$E'_\gamma = \frac{E_\gamma}{1 + \frac{E_\gamma}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)},$$

que nos dá a distribuição de Compton.

(→ ver figura)

Espectro de energia do ^{137}Cs



- Pico de absorção total
- Patamar de Compton,
com:
 - Pico de radiação X
 - Pico de retrodifusão
 - Joelho de Compton

Energia de Retrodifusão ($\Theta=180^\circ$) para $E_\gamma = 662 \text{ keV}$:

$$E_\gamma^{\min} = \frac{E_\gamma}{1 + \frac{2}{511} E_\gamma}$$

$$\begin{aligned} E_{\text{retrod}} &= 184 \text{ keV} \quad (\text{do } \gamma) \\ E_{\text{max}} &= 478 \text{ keV} \quad (\text{do } e^- : \text{Joelho}) \end{aligned}$$

Num choque tangencial ($\theta = 0^\circ$) o electrão não adquire energia:

$$E'_\gamma = E_\gamma \quad \Rightarrow \quad T_e = E_\gamma - E'_\gamma = 0 .$$

Num choque frontal ($\theta = 180^\circ$) dá-se a transferência máxima de energia para o electrão:

$$E'_\gamma(\theta=180^\circ) \equiv E'_{\gamma \text{ min}} = \frac{E_\gamma}{1 + 2 \frac{E_\gamma}{m_e c^2}} \Rightarrow T_e \equiv E_\gamma - E'_{\gamma \text{ min}} = T_{e \text{ max}}$$

em que $T_{e \text{ max}}$ é o "joelho" de Compton ("Compton edge")

Quer dizer, o patamar de Compton varia entre 0 e $T_{e \text{ max}}$.

• Produção de pares

Quando um raios γ de $E_\gamma \geq 1.022 \text{ MeV}$ passa na vizinhança do núcleo, pode criar-se um par electrão-positrão:

$$E_\gamma = 2 m_e c^2 + T_e + T_p .$$

Esta reacção só conserva impulsão na presença do campo eléctrico do núcleo, que absorve uma quantidade de energia desprezável.

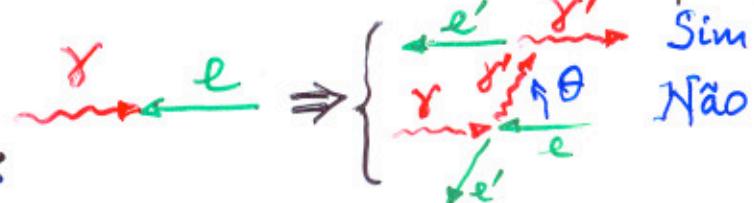
É simétrica da reacção de aniquilação



onde a presença de um 2º γ , produzido no sentido contrário ao do 1º ($\Delta\theta = 180^\circ$), é também necessária.

Distribuição angular de Compton

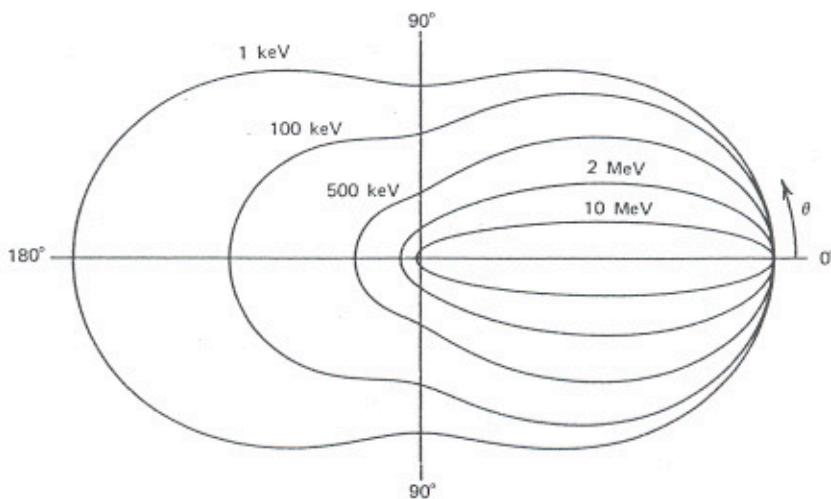
A dependência angular do fotão difundido na interação de Compton é dada pela expressão de Klein-Nishina, obtida no quadro da Mecânica Quântica: há supressões a grandes ângulos devido à conservação da helicidade do fotão:



$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = Zr_0^2 \left(\frac{1}{1 + \alpha(1 - \cos \theta)} \right)^2 \left(\frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \right) \left(1 + \frac{\alpha^2(1 - \cos \theta)^2}{(1 + \cos^2 \theta)[1 + \alpha(1 - \cos \theta)]} \right)$$

em que $\alpha = \frac{Ee}{m_e c^2}$ e $r_0 = \frac{e^2}{m_e c^2} = 2.818 \text{ fm}$
(raio clássico do e^-)

Graficamente:



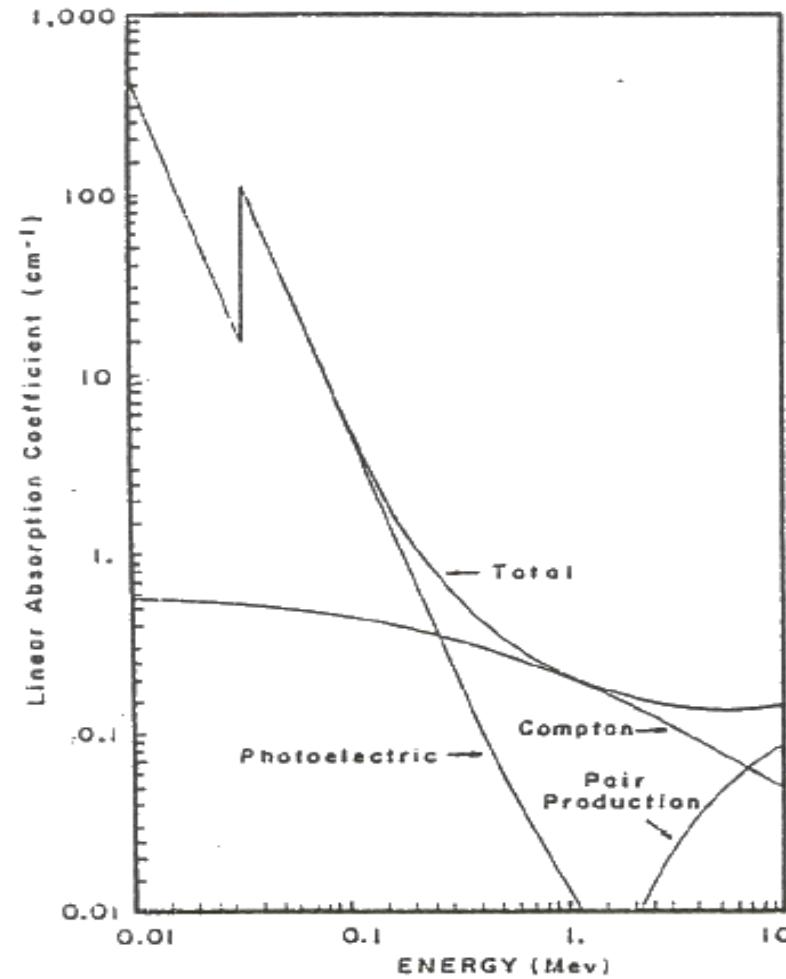
À medida que $E_\gamma \ll m_e c^2$, a dependência angular torna-se mais simétrica e, no limite das baixas energias, integrando em θ , obtém-se:

$$\sigma_C = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = r_0^2 \int_0^\pi 2\pi \sin \theta \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} d\theta = \frac{8}{3} \pi r_0^2$$

a seção eficaz de Thomson. $= 0,665 \text{ barn} \equiv \sigma_T$

Interacção da Radiação com a Matéria

- Difusão de Compton
Processo determinante para
 $\sim 0.5 \text{ MeV} < E_\gamma < \text{alguns MeV}$
- Efeito fotoeléctrico
Só importante para $E_\gamma \approx \Phi_K, \dots$
Ressonância com e^- ligados
 $\Rightarrow E_\gamma < 100 \text{ keV}$
- Produção de pares (e^+e^-)
A partir de $2 m_e$
 $\Rightarrow E_\gamma > 1022 \text{ keV}$



Detector: NaI(Tl)

Secção eficaz

(→ ver figura)

- $\sigma_{\text{fotoel.}}$ decresce com a energia ($\sim E_\gamma^{-3}$), observando-se variações abruptas nos limiares em que $E_\gamma = \phi_{\text{camada atómica}}$.
 - σ_{Compton} exibe forma arredondada, pois depende do ângulo de difusão, logo da energia.
 - $\sigma_{\text{p.pares}}$ cresce logaritmicamente a partir do seu limiar ($E_{\text{lim}} = 1.022 \text{ MeV}$) e torna-se dominante para $E_\gamma > 5 \text{ MeV}$.
- O coeficiente de atenuação linear, μ_l , tem portanto 3 componentes para a radiação γ :

$$\mu_l = \mu_{\text{fotoel.}} + \mu_{\text{Compton}} + \mu_{\text{p.pares}}$$

Espectros de energia

Quando um raio γ entra num detector, diversos casos podem ocorrer: → ver figuras

- ① γ sofre várias difusões de Compton e abandona de seguida o detector \Rightarrow os electrões resultantes depositam a sua energia, mas não há total deposição da energia do γ \Rightarrow contribuição para o patamar de Compton.

② γ sofre diversas difusões de Compton e é depois absorvido por efeito fotoeléctrico \Rightarrow há total deposição de energia do γ \Rightarrow contribuição para o pico fotoeléctrico (ou pico de absorção total).

③ γ sofre uma difusão de Compton com transferência máxima de energia para o electrão (retrodifusão); o electrão com $E_{e\max}$ escapa-se do detector, não depositando a sua energia; o γ resultante é então absorvido por efeito fotoeléctrico \Rightarrow contribuição para um pico fotoeléctrico deslocado:

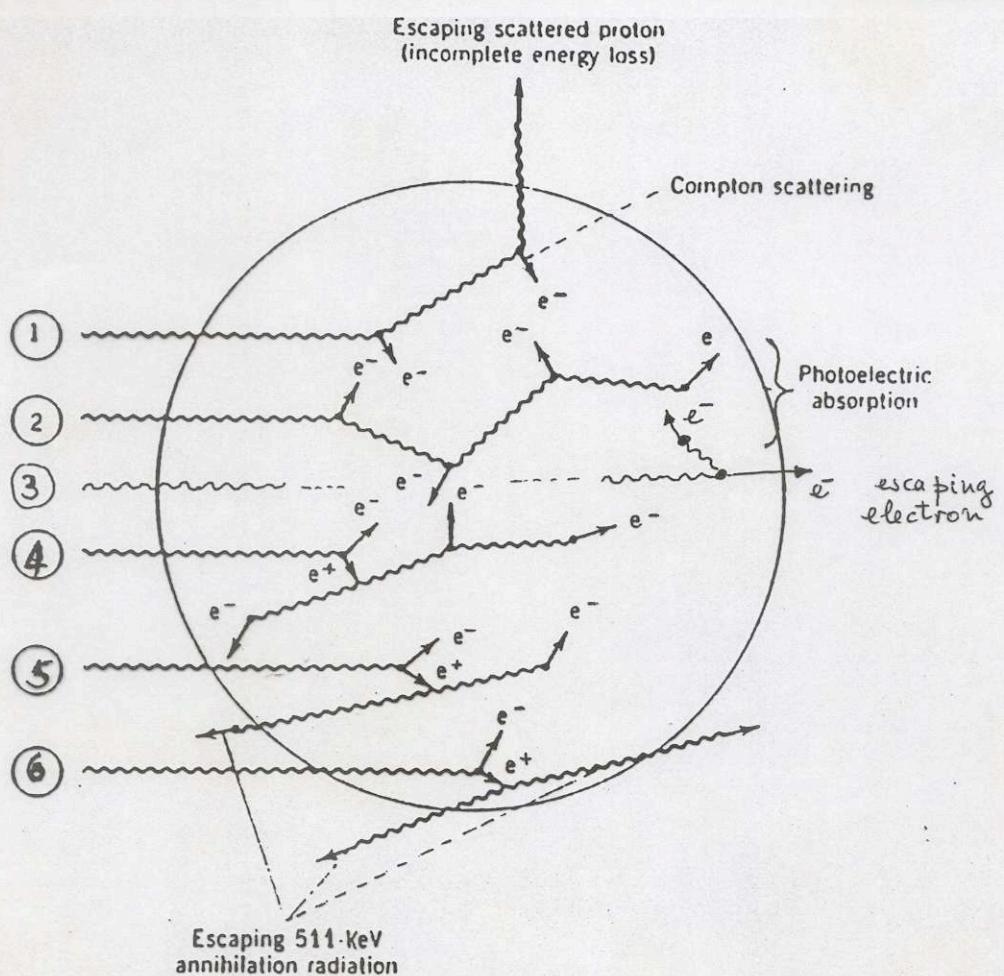
$$E_{\text{backscattering}} = E_{\text{fotoel.}} - E_{e\max \text{ Compton}}.$$

④ γ origina par e^+e^- ; o positrão aniquila-se na matéria ($e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$) e seguem-se as difusões de Compton dos dois γ produzidos, que são mais tarde absorvidos por efeito fotoeléctrico \Rightarrow total recolha de energia do γ inicial \Rightarrow contribuição para o pico de absorção total (o pico fotoeléctrico).

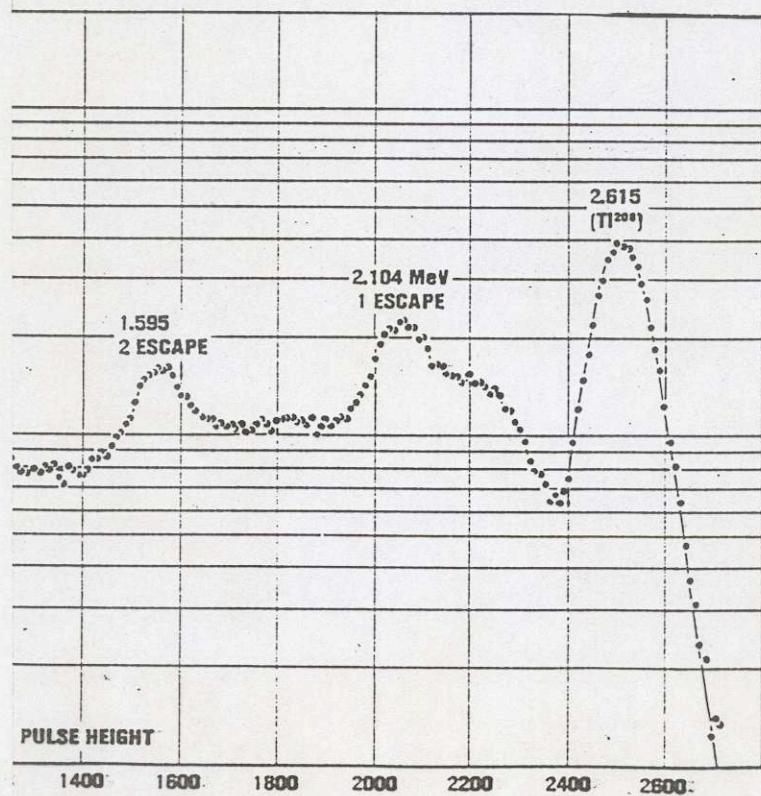
⑤ $\gamma \rightarrow e^+e^-$; e^+ aniquila-se na matéria, mas um dos γ escapa-se do detector \Rightarrow

$$E_{\text{depositada}} = E_\gamma - 511 \text{ keV} \text{ ("single escape peak").}$$

⑥ Idêntico a ⑤ mas os dois γ de aniquilação escapam-se do detector $\Rightarrow E_{\text{deposit}} = E_\gamma - 1022 \text{ keV}$ ("double escape peak").



Diferentes casos contribuindo para os espectros de energia



Espectro de energia do Tálio-208: observam-se os picos de absorção total, de escape simples e duplo.

As amplitudes relativas do pico de absorção total, do patamar de Compton e dos picos de escape simples e escape duplo, dependem do tamanho e da forma do detector. Quanto maior é o detector, maior é a amplitude do pico fotoeléctrico comparada com a área do patamar de Compton ou com a amplitude dos picos de escape simples e duplo.

Recolha de energia com um detector de NaI(Tl) (síntese)

Contribuição para:

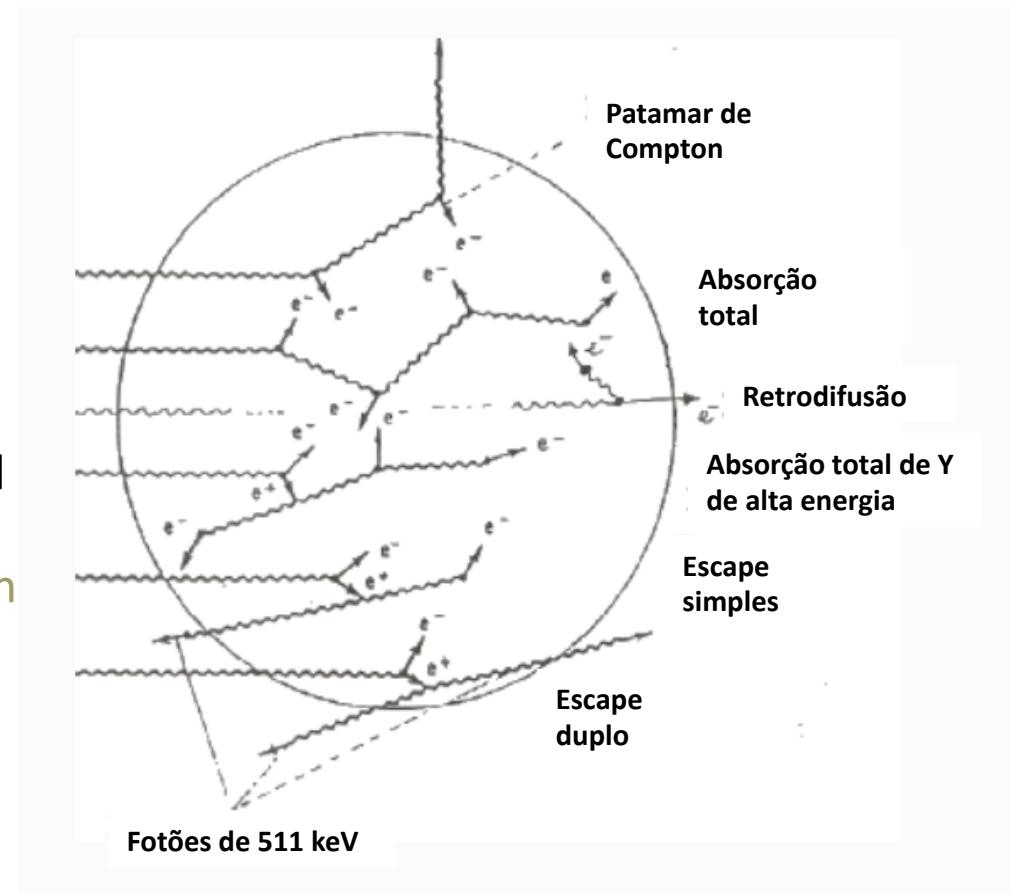
- Pico de absorção total

Recolha total da energia incidente

- Patamar de Compton:

de $E_e = 0$ a E_{max}
choque tangencial a choque frontal
 \downarrow
Joelho de Compton

- “Pico” de retrodifusão
 e^- com E_{max} escapa-se, não depositando energia



DETECTORES: CARACTERÍSTICAS GERAIS.

DETECTORES DE IONIZAÇÃO.

DETECTORES DE CINTILAÇÃO.

DETECTORES SEMICONDUTORES.

DETECTORES

Características Gerais

O princípio básico dos detectores é a transferência de parte ou de toda a energia da radiação incidente para o material do detector, onde é convertida noutra forma, mais acessível à percepção humana.

A transferência da energia incidente faz-se por excitação e ionização dos átomos e/ou moléculas do material do detector.

A sua conversão depende de cada tipo de detector.

- Nos detectores gasosos (Ex.: Geiger-Müller)
 - o electrões de ionização formam directamente o impulso eléctrico que será tratado pela electrónica associada.
- Nos detectores de cintilação (Ex.: plásticos) tanto a excitação como a ionização contribuem para induzir transições moleculares de que resulta emissão de luz.
- Em emulsões fotográficas a ionização induz reacções químicas que permitem visualizar a trajectória da partícula.

Sensibilidade

É a capacidade de os detectores gerarem um sinal utilizável para um dado tipo de radiação

e uma dada energia. Nenhum detector é sensível a todos os tipos de radiação e a todas as energias incidentes.

A sensibilidade dum detector depende de:

- secção eficaz para produção de ionização.
- massa
- ruído electrónico
- material de protecção do seu volume activo.

► As partículas carregadas sendo altamente ionizantes, baixa densidade e pequeno volume podem bastar para um detector (Ex.: detectores de α e β — 1 cm^2 de área transversa e profundidade entre μm e mm)

As partículas neutras devem primeiro interagir no material para produzir partículas carregadas capazes de ionizar o meio. Como essas secções eficazes são mais baixas, os detectores devem ter maiores volumes (Ex.: detectores de γ — diâmetro e profundidade de alguns cm).

► A ionização produzida deve induzir um sinal maior que o do ruído electrónico do detector e cadeia de amplificação.

► A janela de entrada do detector causa absorção da radiação \Rightarrow só energias suficientes podem penetrar e ser detectadas.

• Resposta

Se o detector for suficientemente grande a radiação incidente é completamente absorvida. A ionização produzida, convertida em impulso eléctrico, é integrada no tempo. Esta carga eléctrica é proporcional à energia incidente.

Se a forma dos sinais não variar de evento para evento, a carga colectada é também proporcional à amplitude de cada impulso.

Esta relação amplitude <> energia é a resposta do detector.

Em muitos casos a resposta do detector é linear, ou seja, a relação entre a quantidade medida \bar{Z} e a quantidade inicial Z é de tipo $\bar{Z} = KZ$, em que K é uma constante de calibração. Se K varia com Z , chama-se não-linearidade à sua variação relativa: $\frac{dK}{dZ} / \frac{K}{Z}$.

• Resolução em energia

É uma medida da capacidade do detector em distinguir dois valores de energia próximos.

Como as excitações e ionizações produzidas são fenómenos estatísticos, fluctuam

em torno de valores médios, geralmente de forma gaussiana.

Assim, define-se resolução em energia R (de forma relativa) em termos da largura a meia altura (FWHM) do pico de energia E

$$R \equiv \frac{\Delta E}{E} = \frac{\text{FWHM}}{E}$$

Ex.: Detector de NaI, para raios X de $\sim 1 \text{ MeV}$

$$R = 8 - 9\%$$

→ ver fig.

• Variação da resolução com a energia:

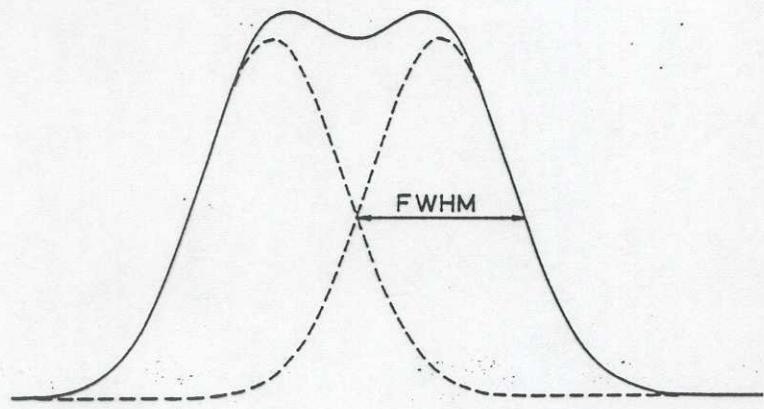
Como o processo de ionização segue a estatística de Poisson, existe uma energia média w para que seja produzida. Então, uma radiação de energia E produz, em média, $J = E/w$ ionizações. Quando E aumenta, o nº médio de ionizações também aumenta \Rightarrow flutuações relativas diminuem:

► No caso mais simples, em que E não é totalmente absorvida, a estatística é verdadeiramente de Poisson (eventos independentes, não há relação de restrição) e tem-se:

$$\sigma^2 = J \Rightarrow R \equiv \frac{\Delta E}{E} = \frac{\Delta J}{J} = \frac{2.35 \sigma}{J} = \frac{2.35}{\sqrt{J}} = 2.35 \sqrt{\frac{w}{E}}$$

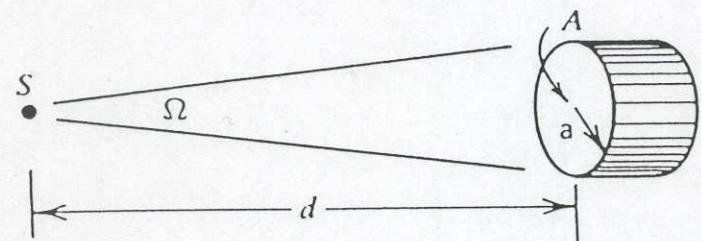
$\Rightarrow R$ varia com $1/\sqrt{E}$

Resolução de 2 picos em energia:



FWHM dos 2 picos "tocam-se".

Eficiência geométrica ou aceitância de um detector:



- Outros factores contribuem para a resolução global do detector: as fluctuações na deriva dos electrões/iões para os electrodos, o ruído electrónico, etc.. São geralmente independentes e de distrib. gaussiana, donde:

$$(\Delta E)^2 = (\Delta E)_{\text{detector}}^2 + (\Delta E)_{\text{electr.}}^2 + \dots$$

• Eficiência

A eficiência total é dada por:

$$\epsilon_{\text{tot}} = \frac{\text{eventos detectados}}{\text{eventos emitidos p/ fonte}}.$$

Pode ser factorizada em 2 componentes

$$\epsilon_{\text{tot}} = \epsilon_{\text{int}} \cdot \epsilon_{\text{geom}}, \text{ tal que:}$$

• Eficiência intrínseca:

$$\epsilon_{\text{int}} = \frac{\text{eventos detectados}}{\text{eventos incidindo no detector}}$$

• Eficiência geométrica ou aceitância:

$$\epsilon_{\text{geom}} = \frac{\text{eventos incidindo no detector}}{\text{eventos emitidos p/ fonte}} \rightarrow \text{ver fig.}$$

A eficiência intrínseca depende das secções eficazes de interacção. Logo, depende do tipo de radiação incidente e da sua energia, bem como do material do detector e seu volume (especialmente para incidentes neutros).

A aceitância depende da configuração geométrica do detector (fracção do ângulo sólido total que o detector define, visto da fonte), bem como da distribuição angular da radiação emitida. Em casos complexos, técnicas de simulação Monte-Carlo são usadas.

- Tempo morto

É o tempo necessário ao detector (e electrónica associada) para processar um evento. O detector pode, ou não, manter-se activo durante o período τ :

- Se se mantém activo, um 2º evento que apareça em τ virá "empilhar-se" com o 1º, distorcendo a forma do sinal e levando à perda de informação relativa aos dois.
- Se o detector se bloqueia, quer quer outros eventos que surjam na janela τ perdem-se.
- Determinemos, neste 2º caso, mais simples e usual, a verdadeira taxa de contagem m , quando o detector regista K contagens num tempo T , i.e., quando a taxa medida é K/T .

Cada contagem gera um tempo morto \bar{z} .
Logo, as K contagens geram um tempo morto total $K\bar{z}$ no intervalo T . Portanto, em T perdem-se $m(K\bar{z})$ contagens.

O número de contagens em T é então na realidade:

$$m T = K + m K \bar{z}$$

ou:

$$m = \frac{K}{T - K \bar{z}} = \frac{K/T}{1 - K/T \cdot \bar{z}} .$$

Se não houver tempo morto:

$$\bar{z} = 0 \Rightarrow m = K/T .$$

Tipos de detectores

• Detectores de ionização

Devido à grande mobilidade de electrões e iões, os gases são o meio mais simples para a recolha da ionização proveniente da radiação incidente.

Os diferentes detectores de ionização, câmara de ionização, contador proporcional, contador Geiger-Müller, são basicamente um só dispositivo que pode trabalhar em diversos regimes de tensão aplicada aos seus terminais, explorando diferentes fenômenos.

Esse dispositivo consiste num cilindro de paredes condutoras (cátodo), cheio de um gás nobre (Ex.: argon), tendo ao longo do eixo um fio condutor (ânodo) de tensão $+V_0$ em relação às paredes, que estão ao potencial nulo.

O campo eléctrico é radial: → ver fig.

$$E = \frac{1}{r} \frac{V_0}{\ln r_{\text{ext}}/r_{\text{int}}}$$

Quando uma radiação atravessa o cilindro, um certo número de pares electrão-ião (em média $1/30 \text{ eV}$) proporcional à energia depositada é criado. Devido ao campo eléctrico, os iões

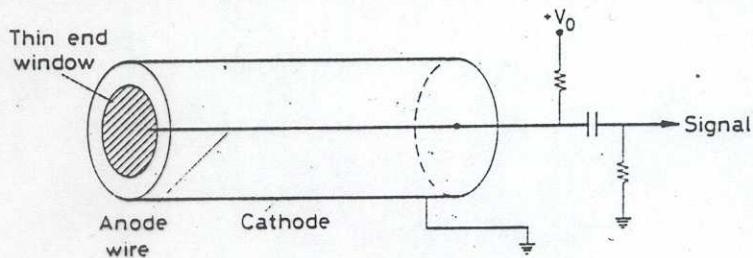
são acelerados para o cátodo e os electrões para o ânodo, onde se convertem num impulso de corrente que, por integração, dá a carga recolhida. Esta depende, pois, de V_0 : → ver fig.

► **Região I:** Se $V_0 \sim 0$, os pares e-ião recombina-se devido à sua própria atração eléctrica \Rightarrow não há carga recolhida.

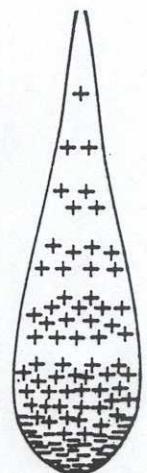
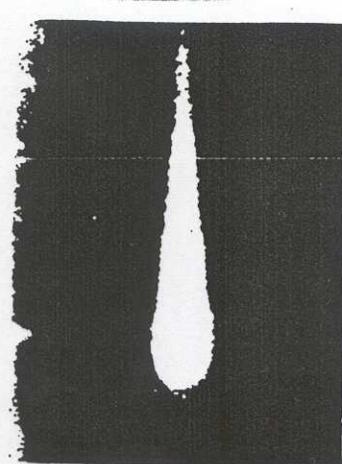
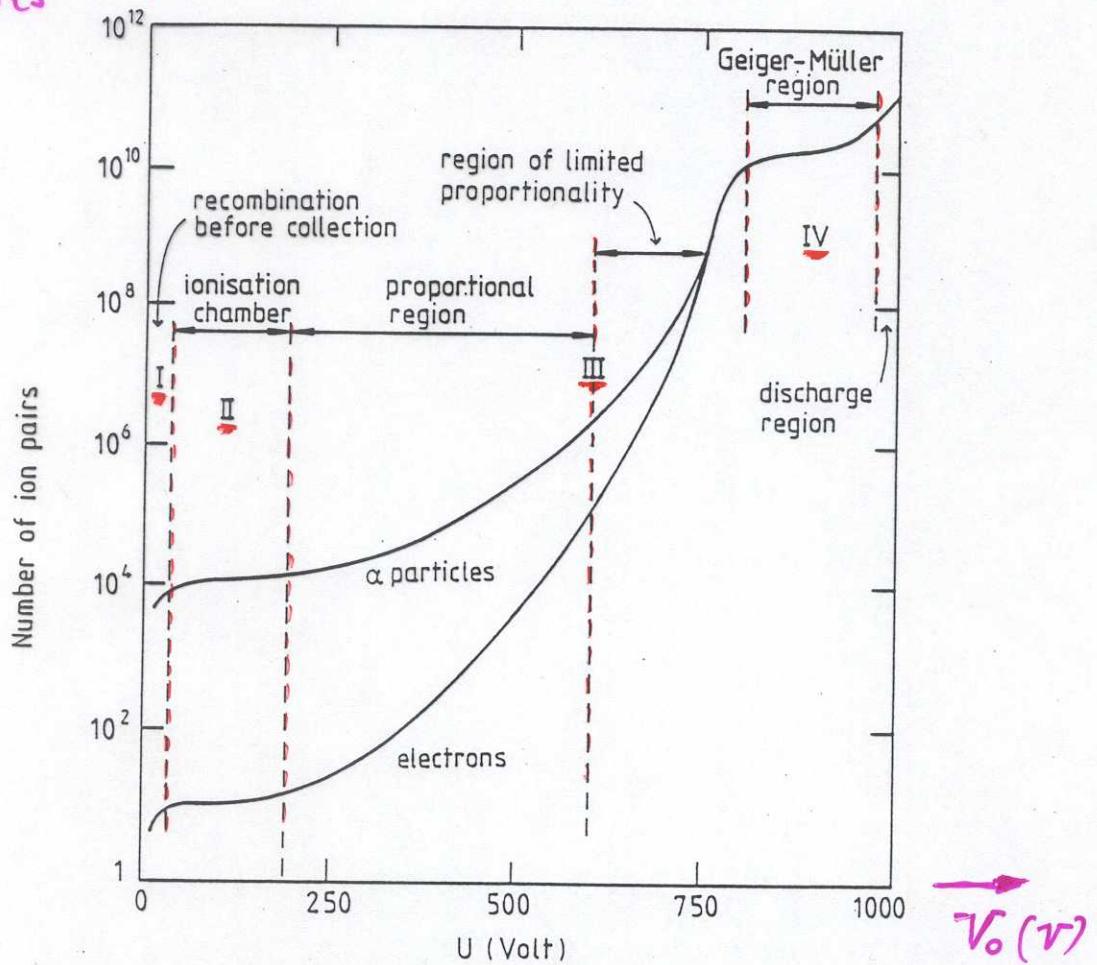
► **Região II:** À medida que V_0 aumenta, cada vez mais pares são recolhidos antes que se possam recombinar. A partir de certo valor, todos os pares formados são recolhidos e um novo aumento de V_0 não produz efeito: estamos no 1º patamar — região de trabalho da câmara de ionização.

► **Região III:** Continuando a aumentar V_0 , o campo eléctrico torna-se suficientemente forte para acelerar os electrões libertados a energias capazes de produzir ionizações secundárias. Os electrões libertados nestas poderão produzir novas ionizações \Rightarrow dá-se a ionização em avalanche.

O campo eléctrico só é muito forte junto ao ânodo, pelo que a avalanche se produz aí, sob a forma de uma gota de cargas positivas e negativas migrando a velocidades diferentes ($v_e \sim 10^3 v_{ion}$) e em sentidos opostos. → ver fig.



pares de iones ↑



O sinal de corrente produzido é proporcional à ionização primária, com uma amplificação da ordem de 10^4 - 10^6 — é a região de trabalho do contador proporcional.

Na parte final de III a proporcionalidade começa a perder-se devido ao aumento excessivo de carga espacial, o que distorce o campo eléctrico em redor do ânodo: é a sub-região de proporcionalidade limitada.

► Região IV: Tornando a subir V_0 ocorre uma descarga no gás: em vez de uma só avalanche localizada dão-se muitas avalanches ao longo do fio, devido a fotões de desexcitação moleculares que vão iniciar o processo de ionização com multiplicação noutro local. O sinal em corrente **satura**, sendo apenas controlado pela capacidade **C** do contador ($Q = CV_0$) — é a região de disruptão ou de Geiger-Müller.

► Região V: não se trata de uma região de trabalho dado haver disruptão contínua com ou sem radiação incidente.

• Detectores de cintilação

Certos materiais, quando bombardeados com partículas carregadas ou radiações, emitem pequenos flashes de luz, isto é, cintilam.

Acoplados a um dispositivo de amplificação (como o fotomultiplicador - PM) as cintilações são convertidas em impulsos eléctricos que são tratados pela cadeia electrónica associada.

As suas mais importantes características gerais são:

- sensibilidade: acima de um limiar em energia, muitos cintiladores exibem uma resposta quase linear à energia incidente
⇒ bons como espectrómetros de energia.
- Resposta em tempo: são rápidos, pois têm tempos de resposta e de recuperação muito pequenos (comparados com outros tipos de detectores)
⇒ bons para altas taxas de contagem, mantendo um tempo morto reduzido.
⇒ bons para definição em tempo dos eventos.

Os materiais cintiladores são luminescentes, isto é, quando sujeitos à luz, calor, radiação, etc, absorvem a energia e reemitem-na sob a forma de luz visível.

- Se a reemissão ocorre imediatamente ($\sim 10\text{ ns}$), tempo típico das transições atómicas, dá-se a **fluorescência**
- Se a reemissão for atrasada (alguns μs a horas) por criação de estados excitados metastáveis, dá-se a **fotofluorescência**.

Em muitos cintiladores há 2 componentes de reemissão, a **rápida** e a **lenta**, sendo a 1^ª geralmente dominante.

Nem todos os materiais cintiladores servem para detectores. Os requisitos são:

- grande eficiência na conversão da energia em radiação fluorescente.
- transparência à radiação fluorescente para boa transmissão da luz ao photocátodo do PM.
- emissão numa **região espectral** adequada à do material do photocátodo do PM.
- uma componente rápida de reemissão de **pequena constante de decaimento**.

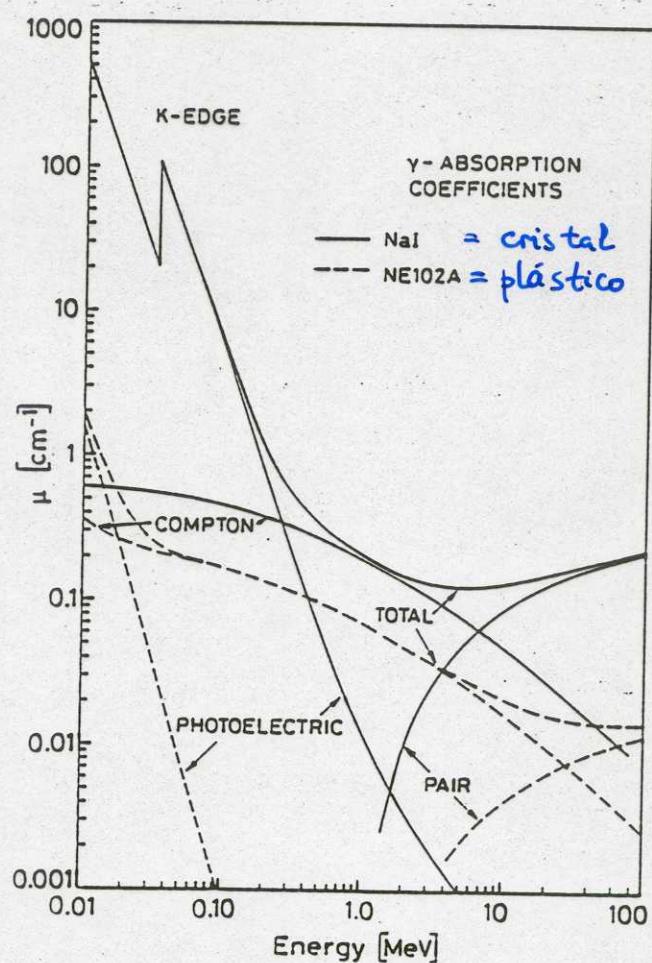
Os tipos de cintiladores usados são: cristais e líquidos orgânicos, plásticos, cristais inorgânicos, gases e vidros.

A título de exemplo, tabelam-se as diferenças entre plásticos e cristais inorgânicos.

→ ver figs.

Deteção de γ :

Comparação dos coeficientes de absorção linear entre um plástico (NE102A) e um cristal inorgânico (NaI)



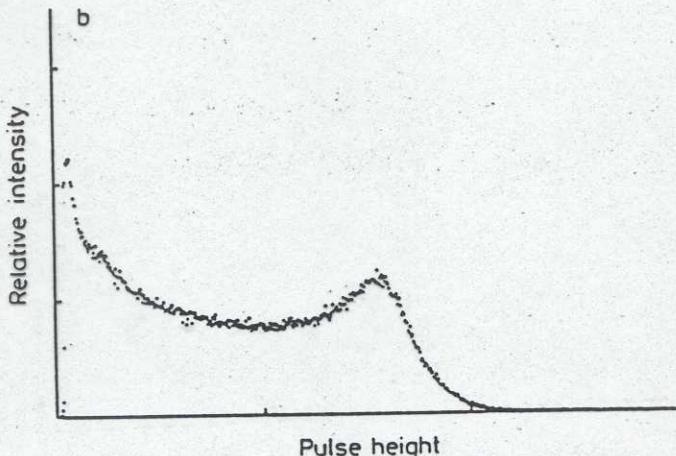
Comportamento típico das seções eficazes:

$$\sigma_{\text{fotoelétrico}} \propto Z^5$$

$$\sigma_{\text{Compton}} \propto Z$$

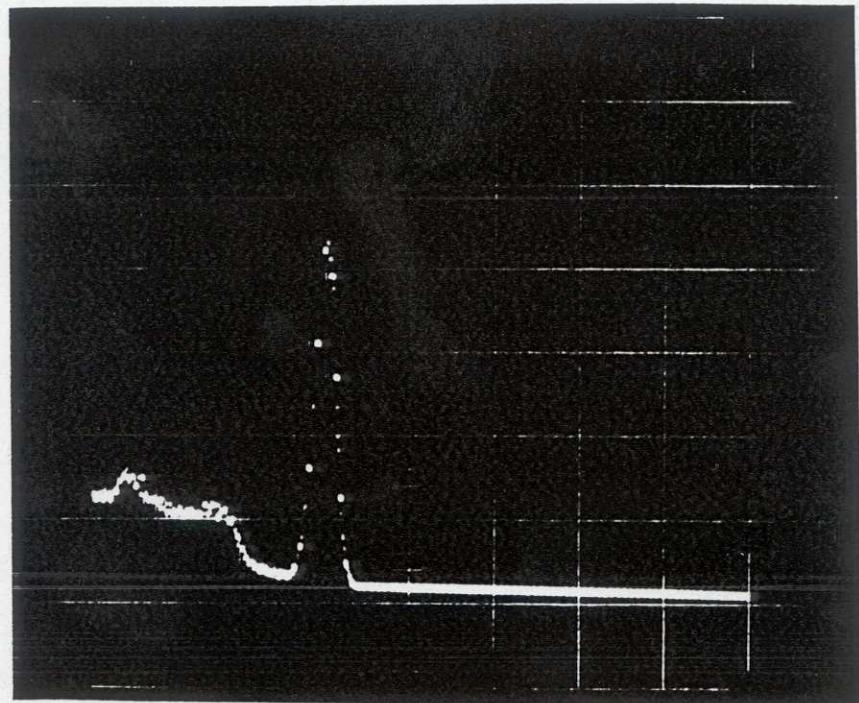
$$\sigma_{\text{prod. pares}} \propto Z^2$$

Detecção de γ :



Plásticos:

Baixo $Z \Rightarrow$ Má eficiência de recolha do sinal
Pouca cintilação \Rightarrow Má resolução dos picos e distribuições



Cristais:

Alto $Z \Rightarrow$ Boa eficiência na recolha da energia do γ
Muita cintilação \Rightarrow Boa resolução

plásticos cristais inorgânicos

Consequências

Z	baixo	alto	plásticos bons para e- cristais bons para γ
índice refracção	~ 1.58	~ 1.78	boas transparências
luz refletida	1	1 - 10	cristais: boa resolução em energia $NaI(Tl) = 2.3$
compr. rápida (const. decaim.)	2-4 ms	60-1000 ms	$NaI(Tl) = 230 \text{ ns}$
compr. onda (máxima emissão)	370-430 nm	300-450 nm	$NaI(Tl) = 413 \text{ nm}$
material higroscópico	não	sim (em geral)	$NaI(Tl)$ sim BGO não

• Cristais inorgânicos :

Os cintiladores inorgânicos são frequentemente cristais dopados com uma pequena quantidade de impurezas activadoras. O mais usado é o $NaI(Tl)$.

Enquanto a cintilação dos materiais orgânicos é de origem molecular, nos cintiladores inorgânicos é devida à estrutura de bandas

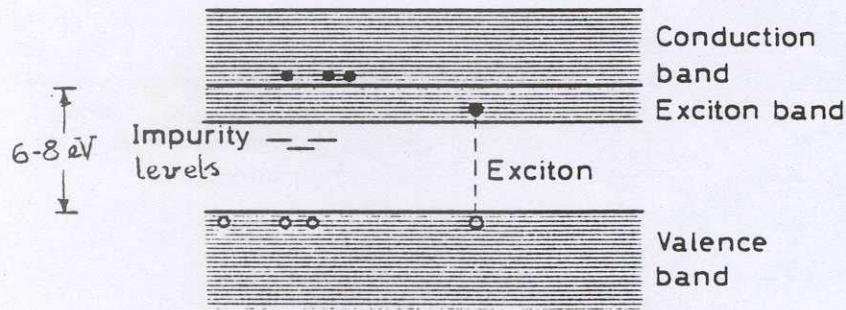


Fig. 7.7. Electronic band structure of inorganic crystals. Besides the formation of free electrons and holes, loosely coupled electron-hole pairs known as excitons are formed. Excitons can migrate through the crystal and be captured by impurity centers

electrónicas dos cristais.

Dois processos podem ocorrer quando um cristal é bombardeado por radiação:

→ ver fig.

- Ou ioniza o cristal removendo um electrão da banda de valência para a de condução, criando um electrão livre e um buraco livre.
- Ou cria um par electrão - buraco ligado (excitação) que pode mover-se livremente no cristal, mas como um todo.

Estes pares, ao encontrarem um átomo da substância activadora, excitam-no. É da sua desexcitação que resulta a emissão de luz na banda necessária à excitação do photocátodo dos PMs.

Fotomultiplicador (PM)

→ ver fig.

É um tubo de vidro, sob vácuo, constituído por um photocátodo que recebe os impulsos luminosos do cintilador e liberta electrões por efeito fotoeléctrico, e por um sistema de multiplicação formado por um conjunto de electrodos (10 a 14), os díodos, que termina num ânodo, onde se recolhe o sinal.

- O photocátodo é uma liga semicondutora formada por um ou mais metais alcalinos

(Na, K, Cs) e materiais do grupo V (geralmente Sb).

A propriedade básica dum photocátodo é a sua eficiência quântica: número de elétrões libertados por fóton incidente. Os photocátodos bialcalinos atingem máximos de $\eta = 27\%$ para comprimentos de onda $\lambda = 380 \text{ nm}$. → ver fig.

► Diferentes configurações geométricas podem ser usadas para colectar, focar e acelerar os elétrões para o 1º díodo.

Os díodos são electrodos feitos de metal revestido por um material com alto coeficiente de emissão electrónica secundária (Exos: Ag-Mg, Cu-Be, Sb-Cs). Um elétrão de 100 - 200 eV arranca 3 a 5 elétrões secundários. Com 14 díodos e diferenças de potencial entre andares de 100 - 150 V, obtém-se um ganho de 10^8 . → ver fig.

► O ruído dum PM tem 2 componentes:

- Corrente negra, presente mesmo quando o PM não é iluminado, devida essencialmente à emissão termiônica do cátodo e díodos

$$I = A T^2 \exp(-e\phi/kT)$$

- ruído estatístico, devido às flutuações em torno do valor médio da emissão fotoeléctrica do cátodo e das emissões secundárias de cada díodo.

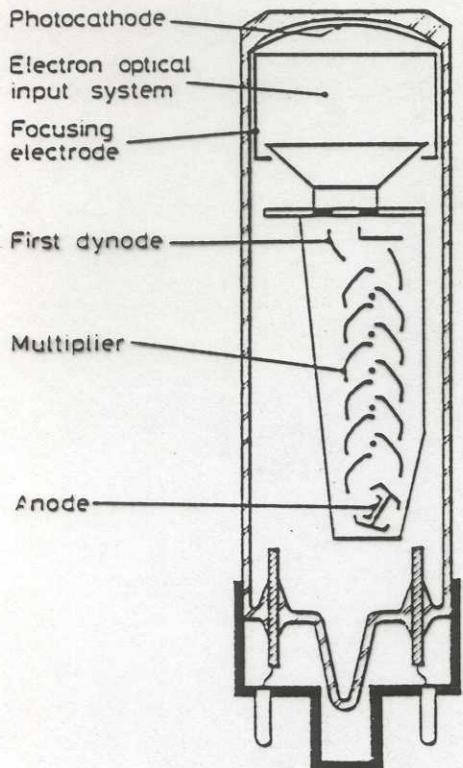


Fig. 8.1. Schematic diagram of a photomultiplier tube (from Schonkeren [9.1])

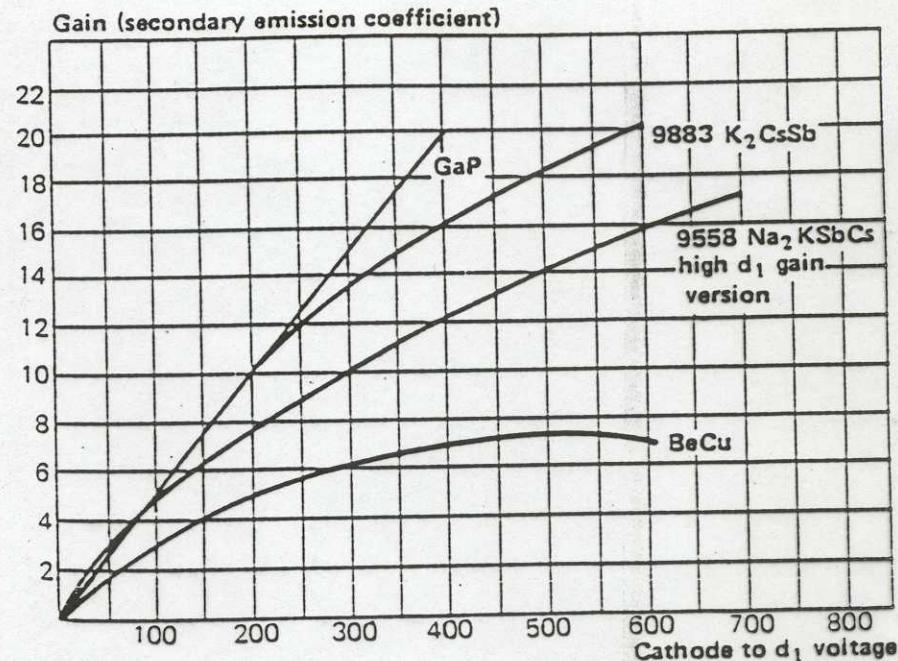


Fig. 8.9. Secondary emission factor for several dynode materials (from EMI Catalog [8.2])

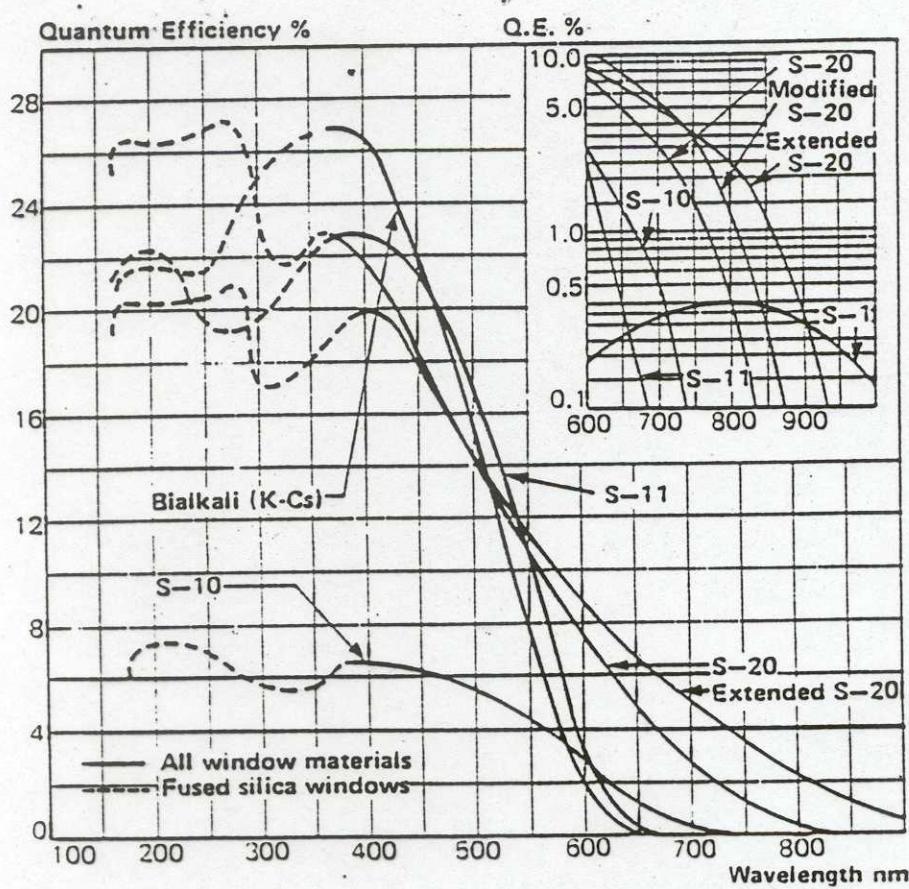


Fig. 8.2. Quantum efficiency of various photocathode materials (from EMI Catalog [8.2])

• Detectores semicondutores

• Semicondutores de tipo p e n:

Se se substitui um átomo da rede cristalina de um semicondutor por uma impureza com 5 electrões de valência (+1 que o semicondutor) cria-se um semicondutor extrínseco ou dopado de tipo n, ou dador de electrões, com um nível de energia da impureza muito perto da banda de condução — 0,05 eV para o silício (Ex.: arsénio). → ver fig.

Se se injectam impurezas com 3 electrões de valência cria-se um semicondutor de tipo p, ou aceitador de electrões, com o nível adicional de energia muito perto da banda de valência (Ex.: gálio).

• Junção p-n:

Quando se juntam dois semicondutores extrínsecos de tipos diferentes, p e n, na zona de contacto há difusão de electrões para o lado p e difusão de buracos para o lado n. Estas difusões são impôr recombinações electrão-buraco nas duas regiões. Mas como os materiais eram inicialmente neutros, criam-se cargas eléctricas dum lado e do outro da

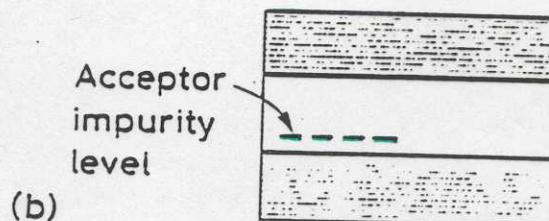
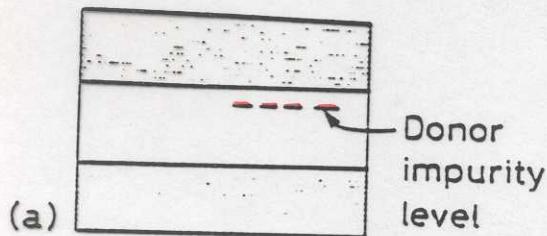
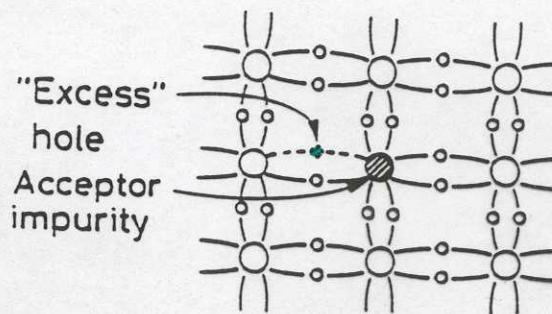
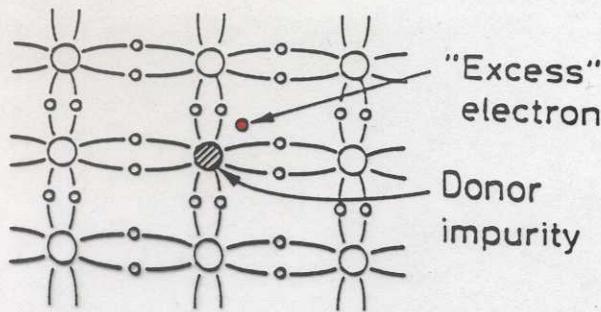


Fig. 10.4. (a) Addition of donor impurities to form n-type semiconductor materials. The impurities add excess electrons to the crystal and create donor impurity levels in the energy gap. (b) Addition of acceptor impurities to create p-type material. Acceptor impurities create an excess of holes and impurity levels close to the valence band

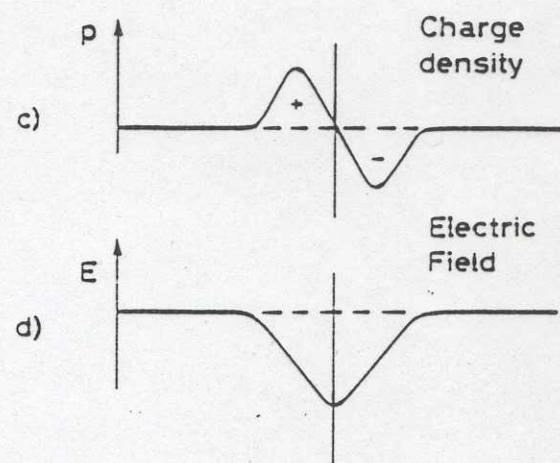
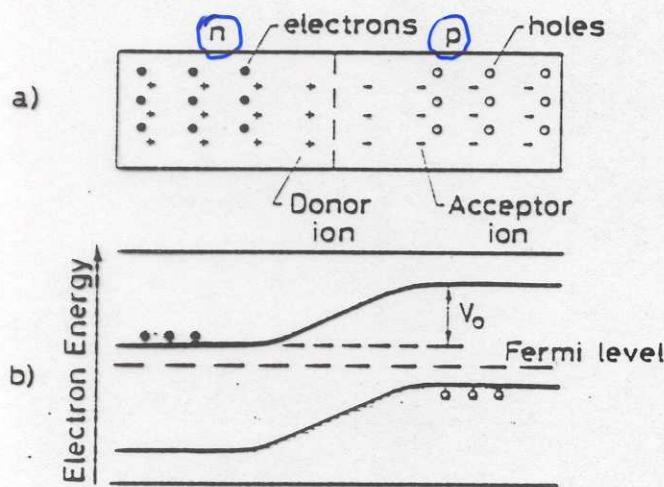


Fig. 10.5. (a) Schematic diagram of an np junction. (b) diagram of electron energy levels showing creation of a contact potential V_0 , (c) charge density, (d) electric field intensity

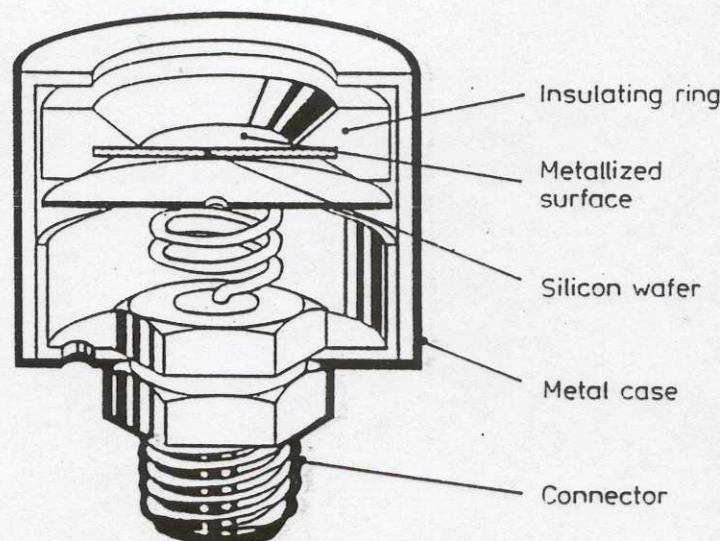
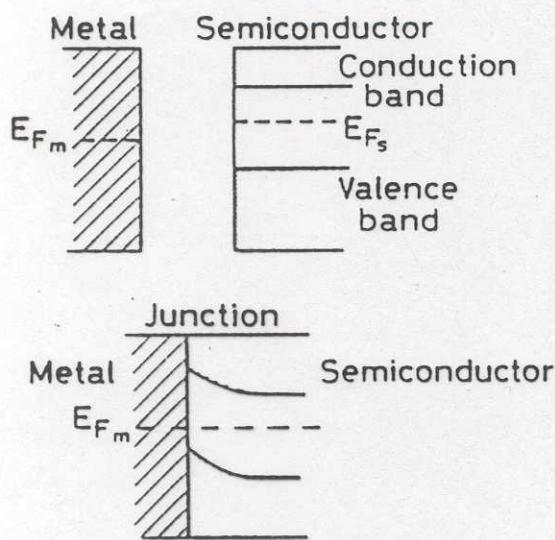


Fig. 10.11

Fig. 10.12

junção:

- A região p, invadida por electrões torna-se negativa.
- A região n, devido aos buracos torna-se positiva.

→ ver fig.

Quer dizer, cria-se um potencial de contacto na junção, que vai impedir a migração de mais portadores de carga: repele os electrões para a zona n e os buracos para a p. Cria-se uma região livre de portadores de carga em movimento: é a zona de depleção ou de ausência de carga espacial. Qualquer electrão ou buraco entrando nesta zona é varrido dela.

→ é uma propriedade interessante para detectores. A radiação, ao entrar na zona de depleção, cria pares e-buraco (3.6 eV/pár) que são varridos para os lados, onde contactos eléctricos em cada extremo da junção recolhem um sinal de corrente proporcional à energia da radiação incidente.

► Os detectores de barreira de superfície são detectores de junção formada entre semicondutor e metal. Geralmente são

de Si - tipo n e ouro ou de Si - tipo p e aluminio.

Devido aos diferentes níveis de Fermi entre estes materiais, quando em contacto as bandas do semicondutor baixam, formando-se também uma zona de depleção com as mesmas propriedades da junção p n. → ver fig.

• Características da zona de depleção

Usando para a junção um modelo de distribuição uniforme de carga:

$$\text{em que } N_A x_p = N_D x_n$$

por conservação de carga,

e fazendo uma dupla integração da equação de Poisson

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{1}{\epsilon} \rho(x)$$

obtemos $V(x) \propto -x^2$, com:

$$\bullet x=0: V^+ = V^-$$

$$\bullet x=x_n: V(x_n) = V_c$$

$$\bullet x=-x_p: V(-x_p) = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \Delta V = V_c \\ \rightarrow \text{potencial de contacto} \end{array} \right.$$

ou seja:

cálculos decorrentes do modelo:

$$V_c \propto x^2$$

$$V_c = \frac{\rho}{2\epsilon} (N_D x_n^2 + N_A x_p^2)$$

e, fazendo $d = x_n + x_p$:

$$d \propto V_c^{1/2}$$

$$d = \left(\frac{2\epsilon}{\rho} V_c \frac{N_A + N_D}{N_A N_D} \right)^{1/2}$$

d - profundidade total de depleção

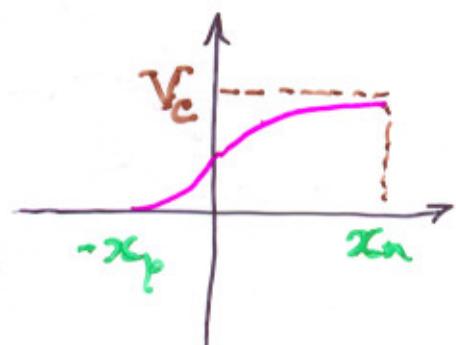
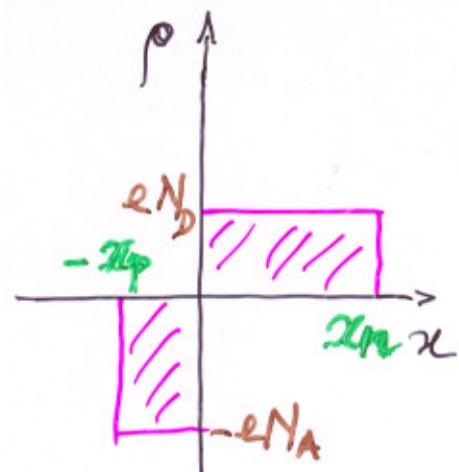
A capacidade da junção é, então:

$$C = \epsilon \frac{A}{d} \propto V_c^{-1/2}$$

isto é, numa geometria planar:

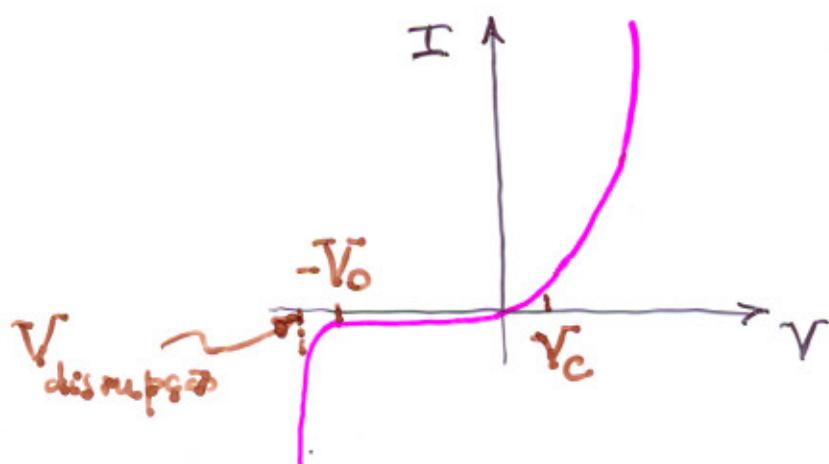
$$C \propto \text{Área}$$

\Rightarrow A capacidade da junção é não-linear



- Potencial de contacto V_c pequeno \Rightarrow junção funciona como detector ineficiente
- Como V_c é pequeno, a capacidade C_{det} é grande, o que aumenta o ruído na saída da junção.

Solução: Aplica-se uma tensão externa negativa à junção:



A tensão negativa não pode atingir o valor da tensão de disruptão.

Para um semicondutor Si-tipo n:

$$d = 0.53 (\rho_n V_c)^{1/2} \mu\text{m}$$

em que $\rho \approx$ resistividade $\sim 20 \text{ k}\Omega \cdot \text{cm}$
 típica $\Rightarrow d \approx 75 \mu\text{m}$

Aplicando $V_0 \approx 50 \text{ V} \Rightarrow d \approx 500 \mu\text{m}$,
ou seja, d grande \Rightarrow

- detector c/ maior volume sensível
- mais eficiente recolha de carga

RADIAÇÕES E SEUS EFEITOS BIOLÓGICOS.

Radiações e seus efeitos biológicos

A radiação interage com a matéria por ionização e excitação dos átomos e moléculas do material.

- ⇒ as unidades dosimétricas baseiam-se pois na:
- quantidade de ionização produzida
 - quantidade de energia depositada

• Medida de exposição

Chama-se Roentgen (R) à quantidade de raios X e γ produzindo no ar uma ionização, por criação de pares electrão-ião, de 1 ues/cm^3 :

$$1 R \equiv 1 \text{ ues/cm}^3 = 3.33 \cdot 10^{-10} \text{ C/cm}^3 \\ = \frac{3.33 \cdot 10^{-10}}{1.60 \cdot 10^{19}} \text{ pares/cm}^3 = 2.08 \cdot 10^9 \text{ pares/cm}^3$$

A taxa de deposição de uma fonte radiando isotropicamente é dada por:

$$K \frac{A}{d^2},$$

em que A é a sua actividade e d a distância à fonte.

Como a ionização produzida no ar resulta principalmente da perda de energia dos electrões produzidos por difusão de Compton, a constante K depende das particularidades de cada fonte

(esquema de decaimento, energia dos γ , ...) e está tabelada nas unidades $[K] = \text{Roentgen} \cdot \text{cm}^2 / \text{hora} \cdot \text{mCi}$.

• Medida de dose absorvida

A dose absorvida é uma quantidade que mede a energia total absorvida por unidade de massa.

É mais importante do ponto de vista dos efeitos da radiação.

Há 2 unidades:

$$\begin{aligned} \blacktriangleright 1 \text{ rad} &= 100 \text{ erg/g} \\ \blacktriangleright 1 \text{ Gray (Gy)} &= 1 \text{ joule/kg} \\ &= 10^7 \text{ erg} / 10^3 \text{ g} = 100 \text{ rad} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{de energia absorvida} \\ \text{de energia absorvida} \end{array} \right\}$$

• Conversão entre medida de ionização e de dose absorvida

No ar, a energia média para os electrões criarem pares ião-electrão é de 32 eV.

$$\Rightarrow 32 \text{ eV/pár} \times 2.08 \times 10^9 \text{ pares/cm}^3 = 66.6 \times 10^9 \text{ eV/cm}^3$$

Como $\left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ eV} = 1 \text{ Joule} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J} = 1.6 \times 10^{-12} \text{ erg} \\ \text{pár} = 1.2 \text{ mg/cm}^3 \end{array} \right.$, vem

$$\begin{aligned} \text{dose absorvida} &= 66.6 \times 10^9 \times \frac{1.6 \times 10^{-12}}{1.2 \times 10^{-3}} = 88.8 \text{ erg/g} \\ &= 0.89 \text{ rad} \end{aligned}$$

• Exemplo

Sabendo que os tecidos biológicos (exceptuando ossos) absorvem 93 erg/g quando expostos a 1 R de radiação γ , calcular a taxa de dose absorvida por trabalharmos a uma distância média de 50 cm dumha fonte de 1 μCi de ^{22}Na .

■ Taxa de exposição = $K \frac{A}{d^2}$

$$= 12 \times \frac{10^{-3}}{50^2} = 4.8 \mu\text{R/hora}$$

$[A] = \text{mCi}$
 $[d] = \text{cm}$

■ Taxa de absorção = dose absorvida/R \times taxa exposição

$$= 93 \text{ erg/g/R} \times 4.8 \cdot 10^{-6} \text{ R/hora}$$
$$= 446.4 \times 10^{-6} \text{ erg/g-hora} = 4.5 \mu\text{rad/hora}$$

• Dose equivalente (para tecidos biológicos)

As unidades dosimétricas já definidas não têm em conta a natureza da radiação incidente. Ora, os diferentes tipos de radiação produzem lesões biológicas de diferente gravidade.

A razão está na concentração da energia absorvida pelos tecidos. Grandes concentrações ao longo da trajectória da radiação causam graves lesões. Se a energia absorvida for mais disseminada pelos tecidos colaterais, as lesões serão mais benignas.

As unidades dosimétricas relevantes são então:

- $1 \text{ rem} = 1 \text{ rad} \times w_R$
- $1 \text{ Sievert (Sr)} = 1 \text{ Gray} \times w_R = 100 \text{ rem}$

em que o factor de ponderação das radiações w_R vale tipicamente:

Raios X e γ	1
electrões e muões	1
protões	5
neutrões leitos / rápidos	5-20
α e núcleos pesados	20

• Doses típicas ambientais

A radioactividade ambiente devido a causas naturais e artificiais não é desprezável. Dão-se alguns exemplos:

Fontes naturais (85%)	$\sim 200 \text{ mrem/ano}$
(raios cósmicos, minerais da crosta terrestre - U, Th, Ra, elementos ingeridos - ^{40}K , ^{14}C)	30
	130
	30

Fontes artificiais (15%)

1 radiografia	$\sim 100 \text{ mrem}$
tratamentos médicos	40/ano
testes nucleares	$14 \rightarrow .5/\text{ano}$

⇒ Com a fonte de 1 puli de ^{22}Na ($\sim 4.5 \mu\text{rad/hora}$) apurariam a dose ($w_R=1$) de $\sim 4.5 \mu\text{rem/hora} \Leftrightarrow 40 \text{ mrem/ano}$ ou seja ~ 0.5 radiografias!

ELECTRÓNICA NUCLEAR:
NORMAS ELECTRÓNICAS.
MÓDULOS ELECTRÓNICOS USADOS.
ANALISADORES MONOCANAIS E
MULTICANAIS.

Electrónica Nuclear

Normas electrónicas

Os aparelhos electrónicos concebidos para a Física Nuclear e a Física das Partículas Elementares obedecem a standards ou normas internacionais.

Os standards fixam o tamanho das unidades electrónicas, de modo a estas poderem entrar nas gavetas (ou crates) de alimentação e serem permutadas à vontade ou trocadas facilmente em caso de avaria.

Os crates, de dimensões padronizadas, armazem e alimentam os circuitos dos módulos electrónicos, fornecendo as tensões $\pm 24V$ e $\pm 12V$ (e $\pm 6V$).

Cada módulo electrónico aceita e/ou gera sinais, lógicos ou analógicos.

A mais antiga e simples é a norma NIM (Nuclear Instrument Module), ainda hoje usada.

- A norma NIM impõe aos sinais lógicos lentos, usados em Física Nuclear (largura $\sim 1\mu s$) valores positivos:

$$1 \equiv +4 \text{ a } +12V \quad \Rightarrow \quad \sim 5V \quad (\text{família TTL})$$
$$0 \equiv +1 \text{ a } -2V \quad \Rightarrow \quad \sim 0V$$

Exemplo: sinal de saída dum analisador monocanal.

Os sinais lógicos rápidos (usados em física de Partículas) possuem uma norma NIM negativa. São concretizados pela família ECL, a mais rápida lógica digital conhecida (larguras de alguns ns):

$$1 \equiv -1.75 \text{ V}$$

$$0 \equiv -0.90 \text{ V}$$

- Os sinais analógicos NIM usam geralmente a gama de 0 a 10 V.

Exemplo: gerador de impulsos, multicanal, ...

- À norma NIM seguiram-se outras:
 - Norma CAMAC — que define um bus na parte traseira do crante interligando os módulos, e que permite o controlo remoto dos módulos por um computador.
 - Norma VME — que define um bus mais versátil e que permite a diferentes microprocessadores controlarem os mesmos módulos, gerindo entre si os tempos de controlo e de fluxo de dados (arbitragem).

Tipos de módulos processadores de sinais

Os impulsos eléctricos provenientes do detector são processados pela cadeia electrónica a ele associada. Descreverem-se de seguida as funções básicas de cada componente NIM dessa cadeia.

• Préamplificador

Amplifica com pouco ganho os sinais, geralmente muito fracos, vindos dos detectores. Como o sinal é fraco, o ruído electrónico deve ser mínimo \Rightarrow o préamplificador deve estar junto dos detectores, para minimizar o comprimento dos cabos.

Os dois tipos mais usados são:

- préamplificador de tensão.
- préamplificador de carga.

► O préamplificador de tensão usa-se quando os detectores têm uma capacidade C_{det} estável. Exemplo: fotomultiplicadores, contadores Geiger-Müller. Como estes detectores produzem carga Q ($Q = \int i dt$), a tensão à entrada do préamplif. é $V = Q / C_{det}$, proporcional à carga colectada.

→ ver fig.

► O préamplif. de carga usa-se para os detectores que não têm C_{det} estável. Nos detectores semicondutores, a capacidade intrínseca da junção é altamente sensível às variações de temperatura. Neste caso, a corrente do

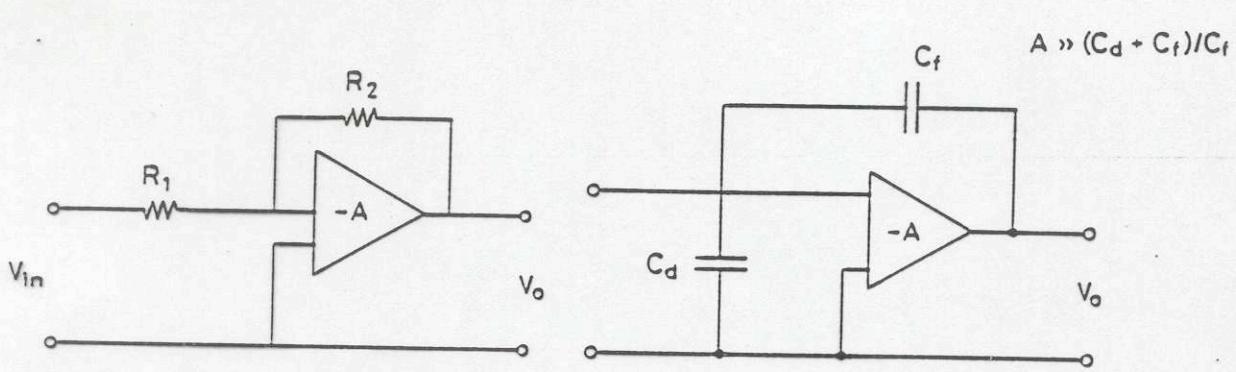


Fig. 14.1. Schematic diagram of a voltage-sensitive preamplifier

Fig. 14.2. Schematic diagram of a charge-sensitive preamplifier. To discharge the capacitor C_f , a resistor is also usually placed in parallel with C_f . This results in the exponential *tail* pulse.

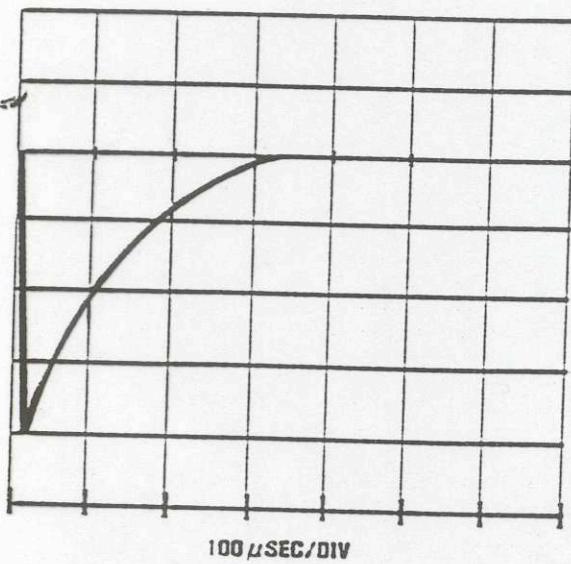


Figure 20.2. Typical negative output from a pulse detector.

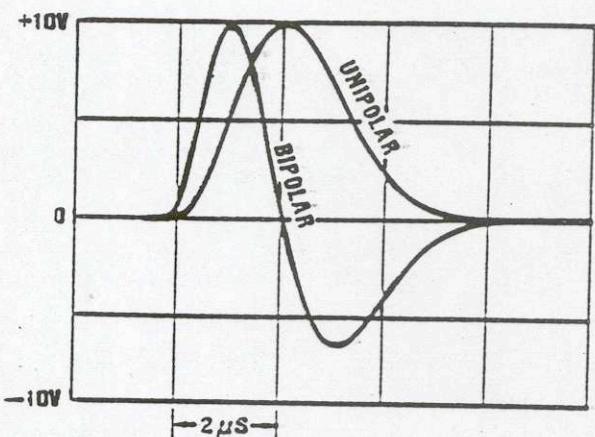


Figure 20.1. Typical output pulse shapes of a nuclear amplifier.

detector é integrada na própria capacidade do préamplificador.

- Amplificador linear

A amplitude do sinal de entrada é proporcional à energia da partícula que lhe deu origem.

- O amplif. linear deve amplificar esse sinal, de modo a que o sinal de saída seja ajustado à gama de tensões (0 - 10 V) do analisador espectral (multicanal). Para tal, o seu ganho tem de manter a proporcionalidade entre os sinais de entrada e de saída.

- O amplif. linear deve ainda alterar a forma do sinal vindo do préamplif.,
 $\propto e^{-t/\tau}$ com $\tau \sim 1 \mu s - 100 \mu s$,
de modo a evitar uma cauda tão longa,
o que facilita o empilhamento.

→ ver fig.

A nova forma do impulso minimiza também os efeitos do ruído electrónico, isto é, optimiza a relação sinal/ruído.

- Esta formatação (shaping) dos impulsos é geralmente feita com uma cascata de circuitos CR (filtro passa-alto) e RC (filtro passa-baixo) obtendo-se um sinal unipolar.

→ ver fig.

Este novo impulso tende às vezes para zero lentamente por valores negativos (undershoot)
⇒ Se aparece outro impulso, a sua amplitude fica subestimada.

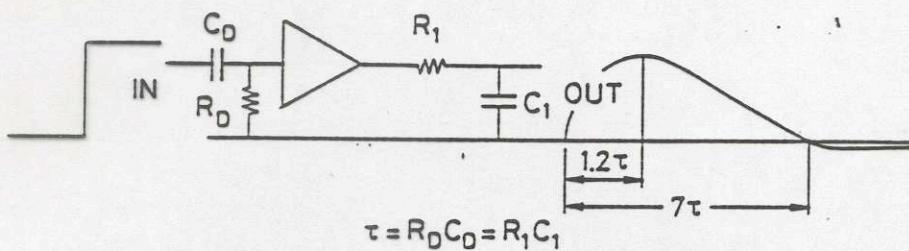


Fig. 14.5. CR-RC pulse shaping network. Because of residual differentiations in the preamplifier, the width and cross-over point of the resultant signal are not those calculated theoretically (from Ortec catalog [14.1])

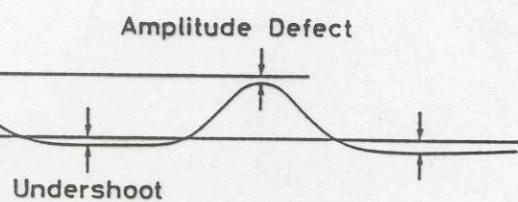


Fig. 14.6. Amplitude defect arising from undershoot in CR-RC pulse shaping

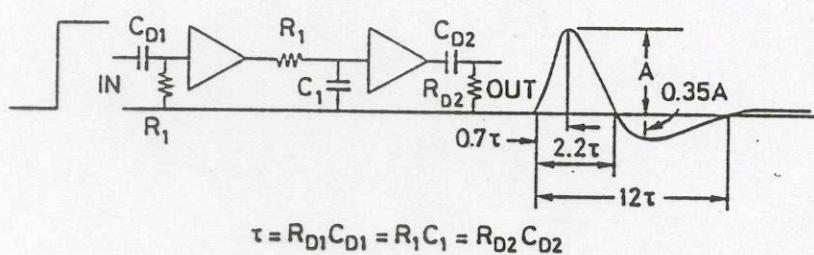
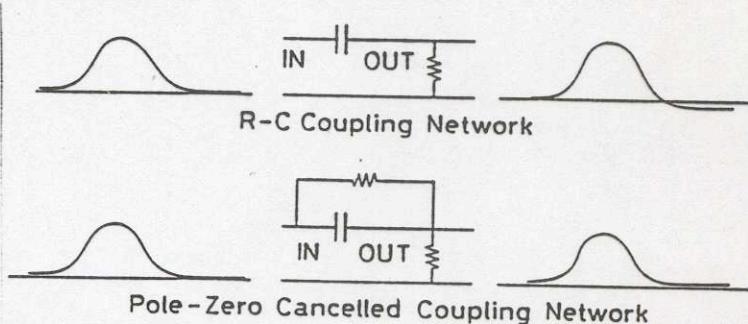


Fig. 14.9. Double differentiation pulse shaping network (from Ortec catalog [14.1])

- Uma solução é acoplar ao condensador do andar CR uma resistência variável, controlada pelo utilizador (ajuste polo-zero). → ^{ver} figs.
- Outra solução é, após a passagem do impulso, forçar o condensador a descarregar-se rapidamente através dum curto-círcuito para a massa (restauração da linha de base - BLR).
- Uma outra maneira de formar o impulso de entrada do amplif. é juntar um andar CR adicional à cascata CR-RC. Esta solução CR-RC-CR é mais usada quando são necessárias referências precisas em tempo (timing), pois produz um sinal bipolar. → ver fig.

• Amplificador de janela ('biased')

Quando se pretende fazer uma análise de amplitudes dos sinais apenas numa certa gama aplica-se um limiar ao sinal, rejeitando a gama de amplitudes sem interesse, de modo a podermos expandir só a região que se pretende estudar.

É o que acontece na análise de sinais resultantes do declínio α , que têm grande energia ($\sim 5 \text{ MeV}$). Como o multicanal analisa espectros de energia entre 0 - 10 V, para expandirmos, por exemplo, a região entre 4 e 6 V, regularmos o limiar do amplificador para 4 V (as amplitudes 4-6 V passam a 0-2 V) e regularmos o ganho para 5x, de modo a

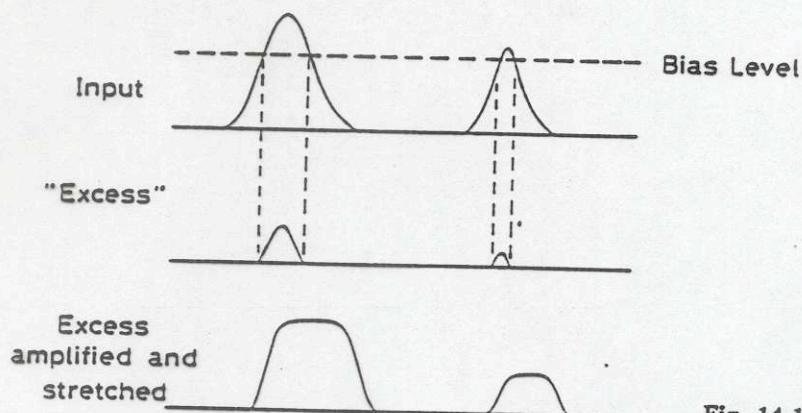


Fig. 14.11. Biased amplifier operation

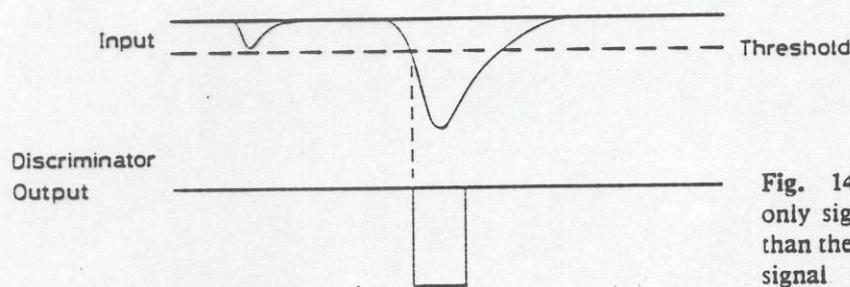


Fig. 14.14. Discriminator operation: only signals whose amplitude is greater than the fixed threshold trigger an output signal

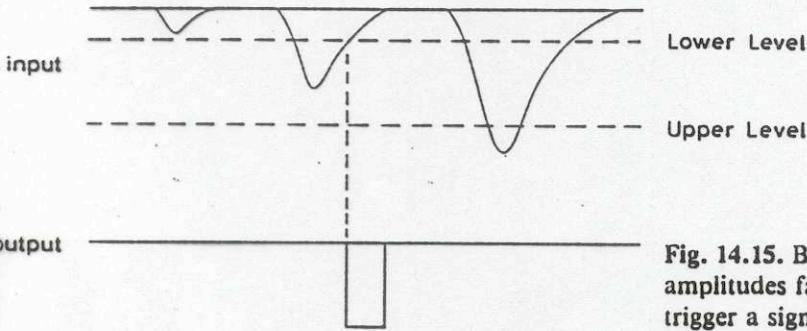


Fig. 14.15. Basic operation of a single channel analyzer (SCA): only signals whose amplitudes fall within the window defined by the upper and lower level threshold trigger a signal

expandir os 2 V interessantes na gama dos 10 V disponíveis. Ganhamos assim um factor 5 na separação entre os picos, evitando que se apresentem sobrepostos.

- Discriminador

É uma unidade que gera um sinal de saída lógico, isto é, de norma NIM positiva (+ 5 V, 0.5 μs), se o sinal analógico de entrada tiver uma amplitude maior que um certo limiar. Este limiar é regulável e serve para rejeitar sinais de ruído (geralmente de fraca amplitude).

→ ver fig.

- Analizador monocanal (SCA)

É um discriminador diferencial. Recebe sinais analógicos e gera um sinal lógico caso a amplitude V do sinal de entrada esteja entre os limiares dos seus 2 discriminadores: $V_1 < V < V_2$.

Têm vários modos de funcionamento: → ver fig.

► modo normal: ambos os discrim. (LLD e ULD) são ajustados independentemente numa escala de 0 - 10 V.

► modo de janela: o valor do 2º discrim. é tomado como a largura dumha janela ΔV referida ao valor, entre 0-10 V, do 1º discrim. Quer dizer, o 1º limiar é V_1 e o 2º limiar é automaticamente regulado a $V_1 + \Delta V$.

► modo integral: o valor do 2º discrim.

não é considerado e o analisador monocanal funciona como um discriminador simples cujo limiar é dado pelo 1º discriminador (LLD).

- Analisador multicanal (MCA)

É um dispositivo complexo que digitiza as amplitudes dos sinais análogicos de entrada num certo número de canais (≥ 1024), cada qual associado a uma memória, de modo a contar o número de sinais de cada amplitude discretizada. Estes conteúdos são exibidos num ecrã. Permite, pois, analisar os espectros de energia das partículas (ou radiações) resultantes dos declínios dos nuclídeos radioactivos.

O elemento central do MCA é um conversor analógico-digital (ADC). Se o ADC tem, por ex^o, 10 bits, converte a amplitude do sinal análogo num número de 10 bits que é um dos $1024 = 2^{10}$ canais possíveis para a digitalização. Como o ADC costuma aceitar sinais na gama 0-10V de amplitude, cada canal tem a largura $10/1024 \approx 10 \text{ mV} \Rightarrow$ sinal de 3V será representado pelo ADC pelo um número binário equivalente a 300.

Os ADCs de espectroscopia devem ter uma boa linearidade diferencial, isto é, a largura ΔV de cada canal deve ser constante, a menos de 1%. Este erro sistemático na atribuição do canal permite uma estatística máxima de 10^4 conta-

gens/canal ($\Rightarrow \sqrt{N}/N = 1\%$). A partir deste valor a dispersão estatística torna-se menor que o erro sistemático e já não tem sentido aumentar as contagens.

A conversão analógico-digital de melhor linearidade diferencial é obtida pelo método de descarga dum condensador em rampa. O seu tempo de descarga é contado por um oscilador de alta frequência ($\sim 100\text{ MHz}$). Dado o número de canais, o tempo de conversão do ADC é de dezenas de μs ($\sim 1000 \times 10\text{ ns}$). → ver fig.

O MCA é, pois, um dispositivo lento. Para altas taxas de contagem ($\sim 10^5/\text{s}$), exibe tempo morto.

- Porta linear

É um circuito que permite a validação do sinal analógico em processamento por um sinal de controlo que só existe se certa condição se realiza. → ver fig.

- Unidade de coincidências

É um módulo que gera um sinal lógico se 2 ou mais sinais lógicos se apresentam à entrada em coincidência, isto é, se se recobrem minimamente em tempo. → ver fig.

É uma porta lógica que executa a operação lógica AND. Outros módulos electrónicos executam OR, NOT, ou combinações delas.

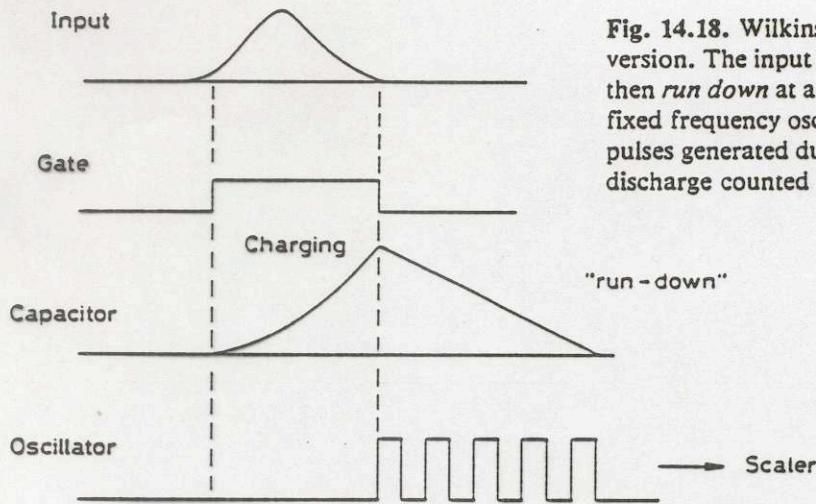


Fig. 14.18. Wilkinson method of analog-to-digital conversion. The input is used to charge a capacitor which is then *run down* at a constant current. At the same time, a fixed frequency oscillator is gated on and the number of pulses generated during the time it takes the capacitor to discharge counted

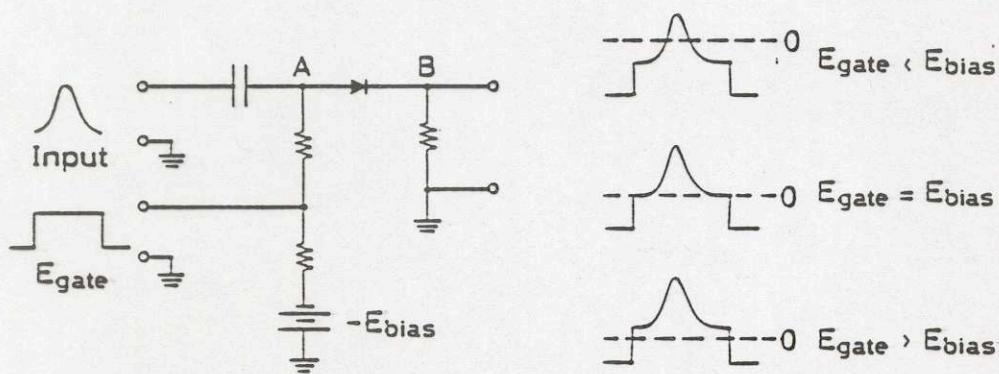


Fig. 14.13.
Basic linear gate

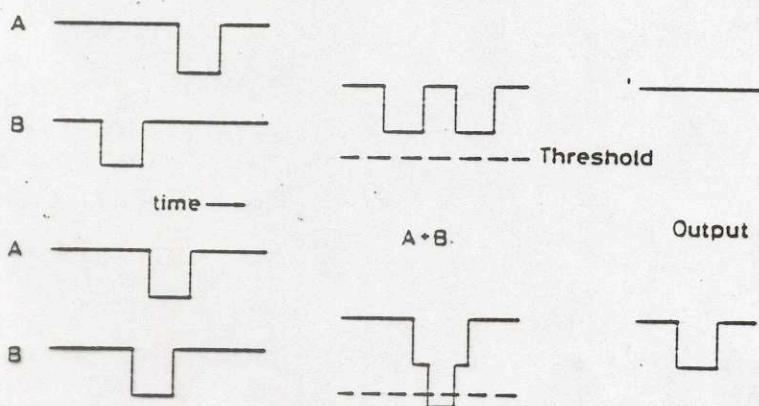


Fig. 14.23. The summing method for determining the coincidence of two signals. The pulses are first summed and then sent through a discriminator set at a level just below twice the logic signal amplitude

ESTATÍSTICA DE CONTAGENS,
TRATAMENTO DE DADOS,
ERROS E SUA PROPAGAÇÃO,
MINIMIZAÇÃO E AJUSTES.

Estatística e tratamento de dados

Fenómenos aleatórios, como lançar um dado, ou o número de desintegrações duma fonte radioactiva em cada unidade de tempo, fluctuam de ensaio para ensaio. São caracterizados por uma variável aleatória x , que pode tomar um conjunto de valores discretos ou contínuos e por uma distribuição de frequências na ocorrência de cada valor possível de x , $P(x)$.

Por exemplo, no caso do dado x é uma variável aleatória discreta tal que $P(x) = 1/6$ é a distribuição de frequências de x .

Se x for contínua, a distribuição $P(x)$ será uma densidade de probabilidade, tal que a probabilidade de x se encontrar entre x e $x + dx$ é $P(x) dx$.

Como x deve tomar um dos seus possíveis valores, a soma das frequências (ou o integral da densidade de probabilidade) estendido a todo o seu domínio dá a unidade:

variável discreta

$$\sum_{i=1}^N P(x_i)$$

variável contínua

$$\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} P(x) dx$$

Para caracterizar uma distribuição completamente seria preciso um grande número de ensaios ($N \rightarrow \infty$). → ver fig.

Em vez disso podem avaliar-se certos parâmetros que caracterizam uma distribuição, como sejam a sua média e a sua dispersão (ou largura), utilizando N ensaios.

• Média

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^N x_i P(x_i)$$

$$\text{ou} \quad \bar{x} = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} x P(x) dx$$

É o melhor estimador do verdadeiro valor central da distribuição, $X : \bar{x} \rightarrow X$ quando $N \rightarrow \infty$.

Se calcularmos o valor médio dos desvios Δx em relação à média, obtemos:

$$\Delta x = x - \bar{x}$$

$$\Rightarrow \overline{\Delta x} = \overline{x - \bar{x}} = \bar{x} - \bar{x} = 0$$

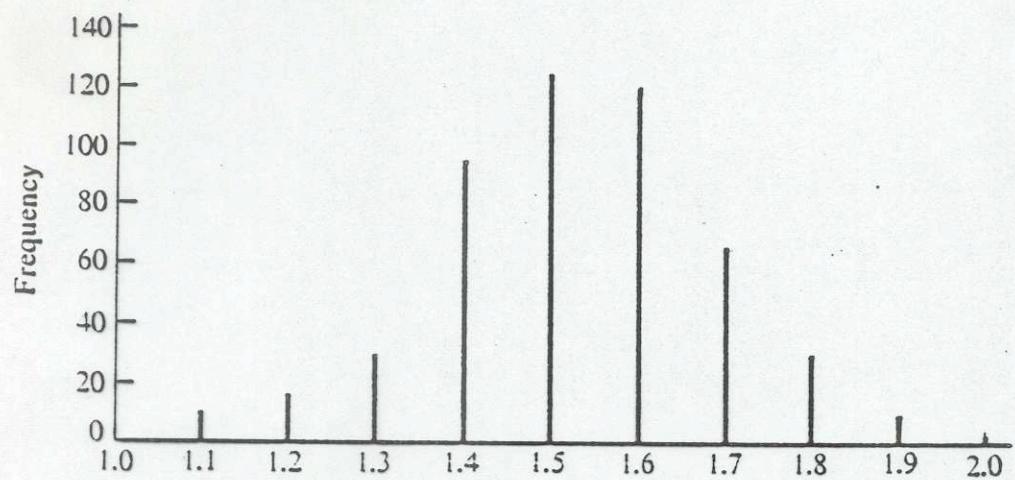
ou seja, o desvio médio é nulo.

• Desvio padrão

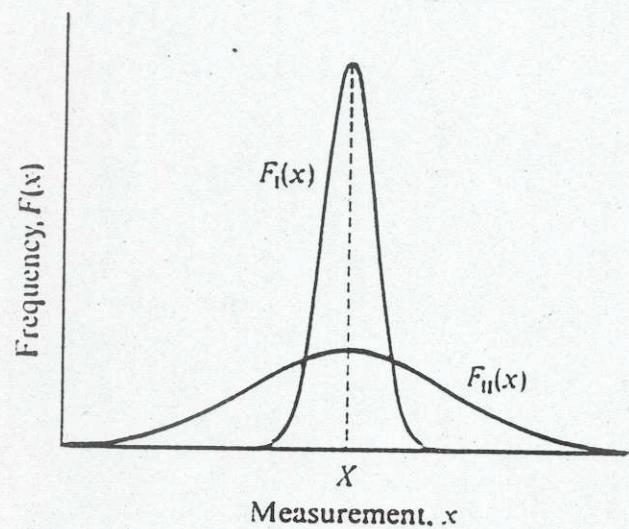
A largura duma distribuição não pode, pois, ser caracterizada pelo desvio médio. Mas se definirmos um desvio quadrático médio já é uma quantidade positiva:

$$\sigma^2 = \overline{(\Delta x)^2} = \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 P(x_i) \geq 0$$

→ ver fig.



Amostra de distribuição discreta



Distribuições contínuas, com diferentes dispersões, normalizadas.

Note-se que temos

$$\sigma^2 = \frac{(x - \bar{x})^2}{N} = \frac{x^2 - 2x\bar{x} + \bar{x}^2}{N} = \bar{x}^2 - 2\bar{x}\bar{x} + \bar{x}^2 = \bar{x}^2 - \bar{x}^2 \geq 0$$

⇒ Quanto mais disseminados forem os valores de x_i , maior a dispersão da distribuição.

Para conhecemos com exactidão a distribuição seria preciso conhecermos, por exemplo, todos os desvios da forma $(\Delta x)^n$. Na prática é muita vezes suficiente conhecer-se a média \bar{x} e o desvio padrão σ ($\sigma = \sqrt{\text{variância}} \equiv \sqrt{\sigma^2}$).

Distribuições de probabilidade mais usadas

• Distribuição binomial

É usada em situações em que cada ensaio independente, repetido N vezes, só tem 2 possibilidades (sim ou não, cara ou coroa, dentro ou fora ...)

- p é a probabilidade de cada ensaio ter sucesso
- $q = 1-p$ probabilidade de cada ensaio falhar

⇒ a probabilidade de uma dada sequência de r sucessos e $N-r$ falhanços será:

$$\underbrace{p \cdots p}_{r \text{ factores}} \underbrace{q \cdots q}_{N-r \text{ factores}} = p^r (1-p)^{N-r}$$

Mas há muitas maneiras diferentes de se obterem r sucessos e $N-r$ falhanços com N ensaios:

$${}^N C_r = {}^N C_{N-r}$$

$$\therefore P(r) = {}^N C_r p^r (1-p)^{N-r} = \frac{N!}{r!(N-r)!} p^r (1-p)^{N-r}$$

► Repare-se que a distribuição $P(r)$ está normalizada à unidade (binómio de Newton):

$$\sum_{r=0}^N P(r) = \sum_{r=0}^N {}^N C_r p^r (1-p)^{N-r} = [p + (1-p)]^N = 1^N = 1$$

► A sua média, ou seja, o valor médio dos sucessos vale:

$$\bar{r} = \sum_{r=0}^N r P(r) = Np ,$$

o que é intuitivo dado termos N ensaios independentes, cada qual com a probabilidade p de sucesso.

→ ver fig.

Quer dizer, da observação de uma distribuição de N ensaios com valor médio \bar{r} podemos inferir a sua probabilidade $p = \bar{r} / N$.

► A sua variância vale:

$$\sigma^2 = \sum_{r=0}^N (r - \bar{r})^2 P(r) = \bar{r}^2 - \bar{r}^2 = Np(1-p)$$

Relacionando média e variância vem:

$$\sigma^2 = Np(1-p) = \bar{r}(1-p)$$

$$\therefore \sigma^2 \leq \bar{r} \quad \rightarrow \text{ver fig.}$$

O desvio padrão é $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{Np(1-p)}$

⇒ A largura relativa da distribuição será:

$$\frac{\sigma}{\bar{r}} = \frac{\sqrt{Np(1-p)}}{Np} = \sqrt{\frac{1-p}{p}} \cdot \frac{1}{\sqrt{N}}$$

No caso importante $p = 1-p = 1/2$ tem-se $\frac{\sigma}{\bar{r}} = \frac{1}{\sqrt{N}}$

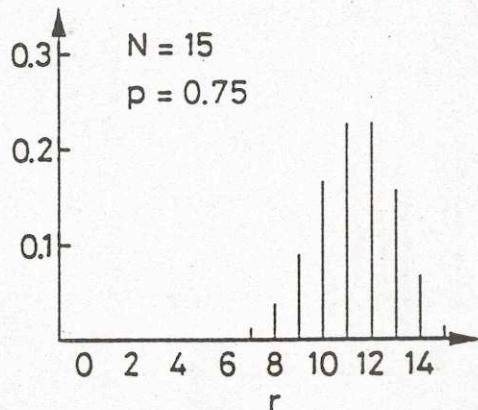
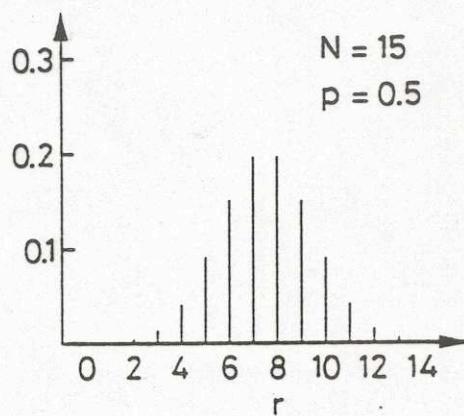
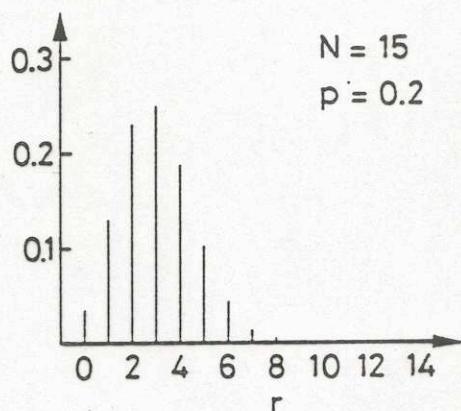


Fig. 4.1. Binomial distribution for various values of N and p

$$\therefore \bar{r} \uparrow N ; \sigma \uparrow \sqrt{N} ; \sigma/\bar{r} \downarrow 1/\sqrt{N} .$$

• Nota sobre cálculo de \bar{x} e σ

► Para demonstrar que

$$\bar{x} = \sum_r r P(r) = \sum_r r^N C_r p^r (1-p)^{N-r} = Np$$

faz-se $r p^r = p \frac{\partial}{\partial p} (p^r)$ e aplique-se a fórmula do binómio.

► Para provar que $\sigma^2 = Np(1-p)$, sabendo já que $\bar{r}^2 = N^2 p^2$, faz-se para o cálculo do outro termo: $\sum_r r^2 N^r C_r p^r (1-p)^{N-r}$, a substituição $r^2 p^r = r (p \frac{\partial}{\partial p}) (p^r) = (p \frac{\partial}{\partial p})^2 (p^r)$.

• Para grandes valores de N a distribuição binomial é de difícil tratamento, pelo que é frequente serem usadas as seguintes distribuições limites:

► $N \rightarrow \infty$ e $p \rightarrow 0$ com $\mu = Np = \text{constante}$:
distr. Binomial \rightarrow distr. Poisson

► $N \rightarrow \infty$ e $p = \text{constante}$:

distr. Binomial \rightarrow distr. Gauss (ou normal)

• Distribuição de Poisson

A probabilidade de se obterem r eventos se em média se obtém μ é:

$$P(r) = \frac{\mu^r}{r!} e^{-\mu}$$

Trata-se de uma distribuição discreta definida

para $r = \{0, \infty\}$. Exemplo típico é o decaimento radioativo: a probabilidade de um núcleo não decair (sobreviver) num período de tempo t é

$$P(r=0) = \frac{\mu^0}{0!} e^{-\mu} = e^{-\lambda t},$$

com $\mu = \lambda t$ e em que $\lambda \ll$. Como há muitos núcleos, mesmo numa amostra ínfima, vem $\mu = Np = N\lambda t$ finito, isto é, $\mu \neq 0$ apesar de $\lambda \ll$.

A probabilidade de um ou mais núcleos decairem é

$$P(r \geq 1) = P(1) + P(2) + \dots = 1 - P(0) = 1 - e^{-\lambda t}$$

Como só a média μ aparece na expressão da distr. Poisson, o conhecimento de N ou p não é necessário.

\Rightarrow caso normal em processos radioativos ou em colisões com feixes de partículas, onde as taxas de contagem são mais facilmente obtidas que o número de núcleos ou de partículas do feixe.

• Nota sobre limite Binomial \rightarrow Poisson

$$\blacktriangleright \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N!}{(N-r)!} = \lim_{N \rightarrow \infty} N(N-1)(N-2) \cdots (N-r+1) \simeq N^r$$

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \lim_{N \rightarrow \infty} (1-p)^{N-r} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N-r} \frac{(N-r)!}{k!(N-r-k)!} (-p)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(N-r)^k}{k!} (-p)^k \simeq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-Np)^k}{k!} = e^{-Np} \end{aligned}$$

$$\therefore P(r) = \lim_{\substack{p \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \frac{N!}{r!(N-r)!} p^r (1-p)^{N-r} = \frac{N^r p^r}{r!} e^{-Np} = \frac{\mu^r}{r!} e^{-\mu}$$

- Norma: $\sum_r P(r) = \sum_r \frac{\mu^r}{r!} e^{-\mu} = e^{-\mu} \sum_r \frac{\mu^r}{r!} = e^{-\mu} e^\mu = 1$
- Média: $\bar{r} \equiv \sum_r r P(r) = \sum_r r \frac{\mu^r}{r!} e^{-\mu} = e^{-\mu} \sum_r \frac{\mu^r}{(r-1)!}$
 $= e^{-\mu} \mu \cdot \sum_r \frac{\mu^{r-1}}{(r-1)!} = e^{-\mu} \mu e^\mu = \mu$
- Variância: $\sigma^2 = \sum_r (r - \bar{r})^2 P(r) = \bar{r}^2 - \bar{r}^2 = (\mu^2 + \mu) - \mu^2 = \mu$

∴ desvio padrão: $\sigma = \sqrt{\mu}$

⇒ Esta é a base para os valores da estatística de contagens e suas flutuações:

$$n \pm \sqrt{n} \quad \rightarrow \text{ver fig.}$$

A distr. de Poisson não é simétrica

⇒ valor máximo \neq média.

Mas, à medida que $\mu \gg$, a distr. Poisson torna-se cada vez mais simétrica e tende para a distr. de Gauss.

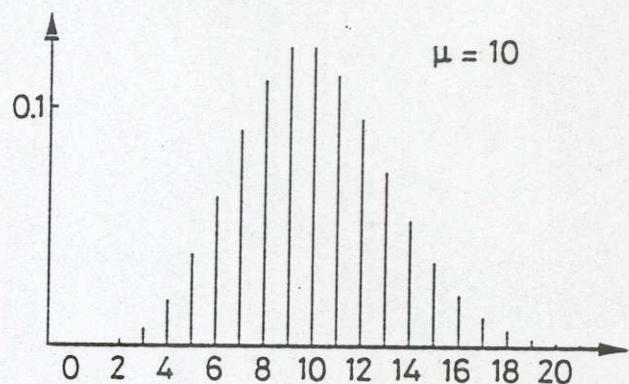
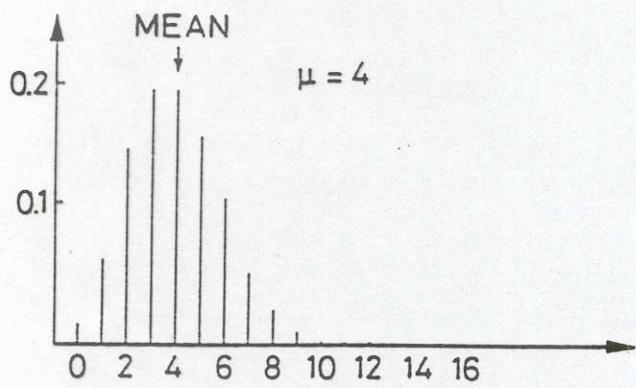
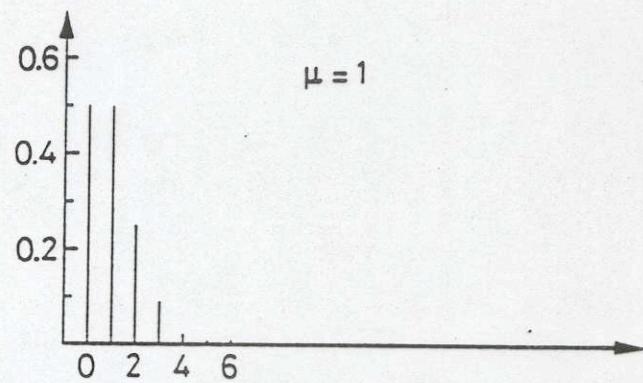
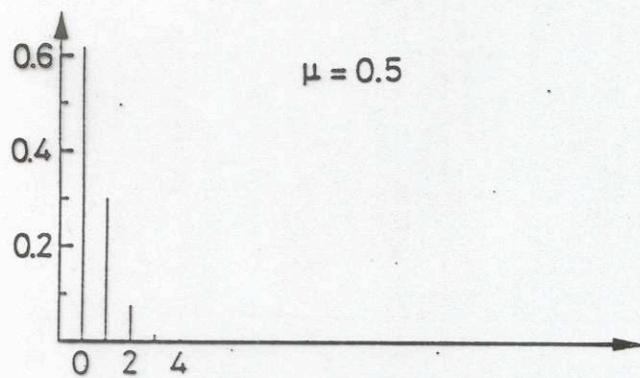
Distribuição de Gauss (ou normal)

Quando $N \rightarrow \infty$ com p constante, quer dizer, quando $Np \rightarrow \infty$ (na verdade $\mu \equiv Np \sim 10$ já basta!) estamos no limite da distr. Gauss:

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} .$$

É uma distribuição contínua com $-\infty < x < \infty$, simétrica em relação ao valor médio μ . σ é o desvio padrão

A maior parte dos erros instrumentais têm



Distribuições de Poisson
com médias μ crescentes:

distrib. Poisson $\xrightarrow{\mu \gg}$ distrib. Gauss

distribuição gaussiana. Na medida de comprimentos, tempos, temperaturas, tensões, correntes, etc, os ensaios seguem a distr. normal.

Na estatística de contagens, além do desvio padrão σ , usa-se a largura do pico a meia altura ($FWHM = \text{full width half maximum}$), tal que:

$$FWHM = 2.35 \sigma \quad \rightarrow \text{ver figs.}$$

O significado estatístico de σ é tal que o integral da densidade de probabilidade $P(x)$ entre:

$$\bar{x} - \sigma \longleftrightarrow \bar{x} + \sigma : 68.3\%$$

$$\bar{x} - 2\sigma \longleftrightarrow \bar{x} + 2\sigma : 95.5\%$$

$$\bar{x} - 3\sigma \longleftrightarrow \bar{x} + 3\sigma : 99.7\%$$

→ ver figs.

OU seja, se um resultado é dado na forma $x \pm \sigma$, isso quer dizer que em 100 novos ensaios da variável x só 68 deverão cair dentro das barras de erro $\Rightarrow \sim 1/3$ cai fora.

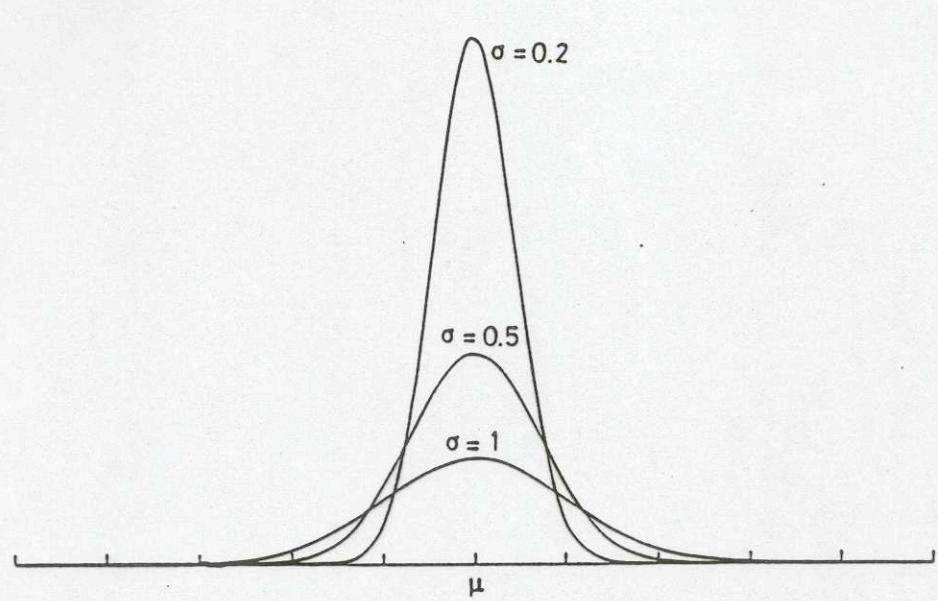


Fig. 4.3. The Gaussian distribution for various σ . The standard deviation determines the width of the distribution

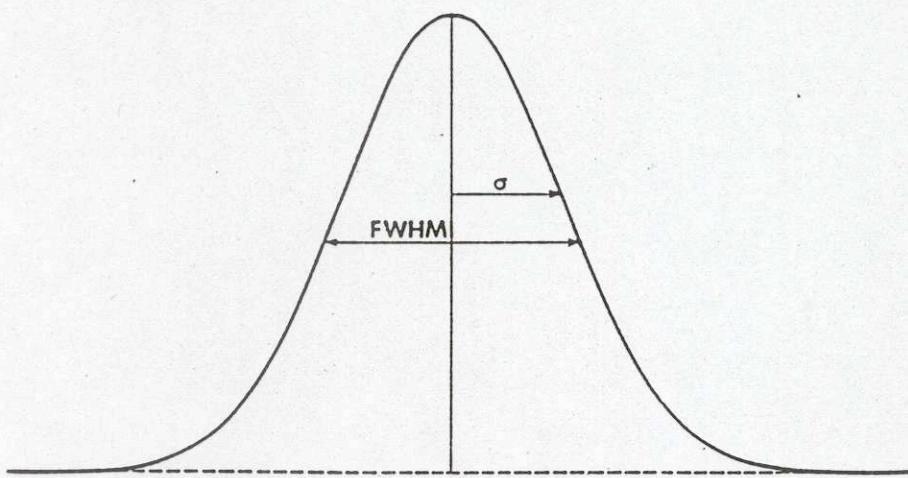
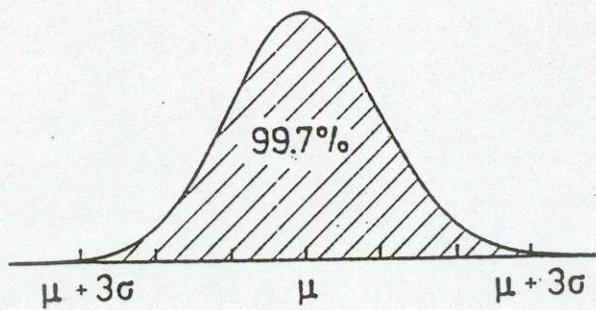
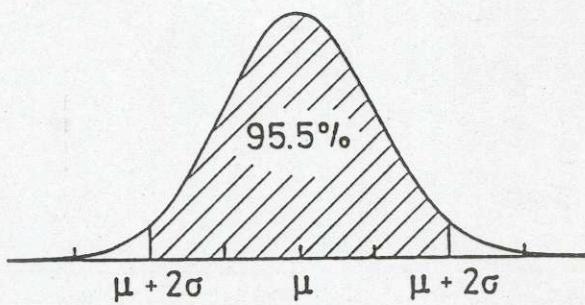
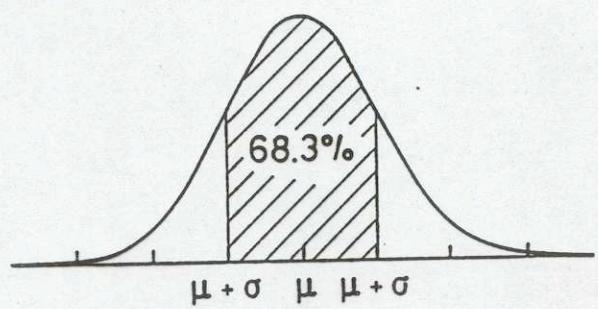


Fig. 4.4. Relation between the standard deviation σ and the full width at half-maximum (FWHM)



Distribuição de Gauss: significado estatístico do integral de $P(x)$ em torno da média μ para os limites $\mu \pm \sigma$, $\mu \pm 2\sigma$ e $\mu \pm 3\sigma$.

• Distribuição do χ^2

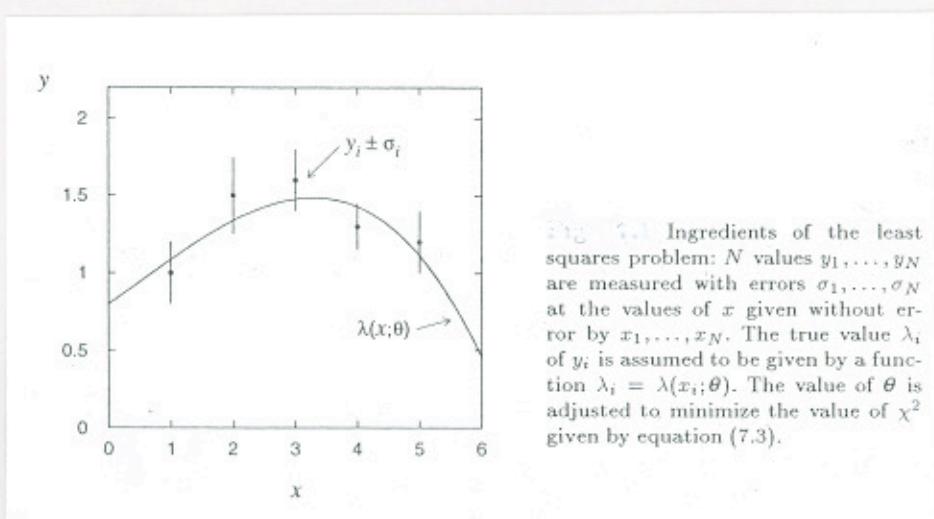
Quando se compara uma fórmula teórica $y = f(x)$ com dados experimentais costumam usar-se estimadores da qualidade do ajuste.

Um deles é o χ^2 :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - y_{\text{teórico}})^2}{\sigma_i^2}$$

Quer dizer, é a diferença quadrática entre valores experimentais e teóricos, para cada ponto experimental (n pontos ao todo), normalizada ao respectivo erro experimental e somada para todos.

Quanto menor for o χ^2 , melhor o ajuste. Mas, devido ao significado estatístico de σ , espera-se: $\chi^2/\nu \sim 1$ ($\nu = \text{nº graus de liberdade} = (n - \text{nº parâmetros da eq. de ajuste})$)



Aplicação ao ajuste dos mínimos quadráticos linear

Se a expressão teórica se puder exprimir na forma
 $y_{teor} = a x + b$, o estimador χ^2 escreve-se:

$$\chi^2 = \sum_i^n \frac{(y_i - ax_i - b)^2}{\sigma_i^2}$$

Pretende minimizar-se a função χ^2 em ordem aos coeficientes a e b , simultaneamente:

$$\begin{cases} \frac{\partial \chi^2}{\partial a} = \dots = 0 \\ \frac{\partial \chi^2}{\partial b} = \dots = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

de modo a extraír-se os valores de a e b e estimar os erros respectivos quadraticamente

Calculando, obtém-se:

$$\begin{cases} a = \frac{C_1 C_5 - C_3 C_4}{\Delta} \\ b = \frac{C_2 C_4 - C_1 C_3}{\Delta} \end{cases}, \quad \begin{cases} \sigma_a^2 = \frac{C_5}{\Delta} \\ \sigma_b^2 = \frac{C_2}{\Delta} \end{cases}$$

com: $\Delta = C_2 C_5 - C_3^2$ e:

$$\begin{cases} C_1 = \sum_i^n \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2} \\ C_2 = \sum_i^n \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} \\ C_3 = \sum_i^n \frac{x_i}{\sigma_i^2} \\ C_4 = \sum_i^n \frac{y_i}{\sigma_i^2} \end{cases} \quad C_5 = \sum_i^n \frac{1}{\sigma_i^2}$$

Análise dimensional

Ex.: $[x] = [y] = L = [\sigma_x] = [\sigma_y]$

$\therefore [b] = L ; [a] = 1$

Logo: $[\sigma_b^2] = \frac{[C_2]}{[\Delta]}$

$L^2 = \frac{1}{L^{-2}}$

Estimação dos parâmetros de uma distribuição

Para determinar os parâmetros dum a distribuição desconhecida faz-se uma amostragem, isto é, obtém-se um conjunto de dados representativo.

Como já se disse, $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$, média da amostra, é o melhor estimador da verdadeira média X da distribuição.

Mas, como a amostra é finita, se efectuarmos outra amostragem obteremos um \bar{x} diferente. Pretende saber-se qual a precisão de \bar{x} , ou seja, qual a sua variância:

$$\sigma^2(\bar{x}) = \overline{(\bar{x} - X)^2}$$

$$\text{Ora } \overline{(\bar{x} - X)^2} = \overline{\left(\frac{1}{n} \sum_i^n x_i - X\right)^2} = \frac{1}{n^2} \overline{\left(\sum_i^n x_i - nX\right)^2} = \\ = \frac{1}{n^2} \left[\overline{\sum_i^n (x_i - X)} \right]^2$$

$$\text{Como } \left[\sum_i (x_i - X) \right]^2 = \sum_i (x_i - X)^2 + \sum_i \sum_{j \neq i} (x_i - X)(x_j - X),$$

vem:

$$\sigma^2(\bar{x}) = \frac{1}{n^2} \sum_i (x_i - X)^2 = \frac{1}{n^2} \sum_i (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n^2} n \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n},$$

em que os termos cruzados têm valor médio nulo.

\Rightarrow O desvio padrão do valor médio é:

$$\sigma(\bar{x}) = \sigma / \sqrt{n}$$

A precisão do valor médio \bar{x} é a largura da distribuição dividida pelo tamanho da amostra:
 $n \uparrow \uparrow \Rightarrow \bar{x}$ mais fiável

• Propagação de erros

Dada uma quantidade z calculável a partir de variáveis x e y directamente medidas, isto é, tal que $z = f(x, y)$, pretende calcular-se o erro associado a z , σ_z . Quanto ao valor médio de z , \bar{z} , ele é obtido directamente por aplicação da função f :

$$\bar{z} = f(\bar{x}, \bar{y})$$

O desvio de z em relação à média $z - \bar{z}$ é, em 1ª ordem,

$$z - \bar{z} = (x - \bar{x}) \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{\bar{x}} + (y - \bar{y}) \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{\bar{y}},$$

em que as derivadas parciais são calculadas nos pontos médios respectivos.

Como $\sigma_z^2 = \overline{(z - \bar{z})^2}$, quadrando e extraiendo a média, vem:

$$\overline{(z - \bar{z})^2} = \overline{(x - \bar{x})^2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \overline{(y - \bar{y})^2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + 2 \overline{(x - \bar{x})(y - \bar{y})} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}$$

ou:

$$\sigma_z^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{\bar{x}}^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{\bar{y}}^2 \sigma_y^2 + 2 \text{cov}(x, y) \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{\bar{x}} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{\bar{y}},$$

em que a covariância de x e y , $\text{cov}(x, y)$ é dada por:

$$\text{cov}(x, y) = \overline{(x - \bar{x})(y - \bar{y})},$$

e é nula caso x e y sejam independentes. Caso sejam proporcionais, $\text{cov}(x, y) = \sigma_x \sigma_y$.

Combinação de diferentes resultados experimentais

Se possuirmos N diferentes amostras x_1, x_2, \dots, x_N da mesma distribuição, de desvios padrão $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N$ (os métodos experimentais podem ser diferentes), para obtermos a média das médias das amostras devemos usar a

média ponderada : $\bar{x} = \frac{\sum_i^N x_i / \sigma_i^2}{\sum_i^N 1 / \sigma_i^2}$

e a sua

variância : $\sigma^2(\bar{x}) = \frac{1}{\sum_i^N 1 / \sigma_i^2}$

⇒ Deve dar-se menos peso às amostras com maiores dispersões (medidas com instrumentos menos precisos).

A variância $\sigma^2(\bar{x})$ obtém-se directamente da média ponderada, aplicando-a esta a expressão quadrática de propagação dos erros.

Se todas as amostras têm a mesma dispersão, vem

$$\bar{x} = \frac{\sum_i^N x_i}{N}$$

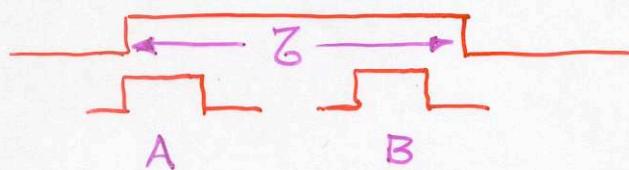
$$\sigma^2(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{N} \quad \text{ou} \quad \sigma(\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

Aplicação da distribuição de Poisson: coincidências fortuitas

Sejam N_A e N_B o nº de eventos de dois sinais aleatórios e independentes observados no tempo de aquisição T .

Pretende obter-se no tempo T o nº de sinais em coincidência $N_C = N_A * N_B$.

A probabilidade de 1 ou mais eventos de A (ou B) estarem contidos num intervalo de tempo τ (porta electrónica da unidade de coincidências) é:



$$P_A(r \geq 1) = \sum_{r=1}^{\infty} P_A(r) = 1 - P_A(r=0)$$
$$= 1 - \frac{\mu^0 e^{-\mu}}{0!} = 1 - e^{-\mu},$$

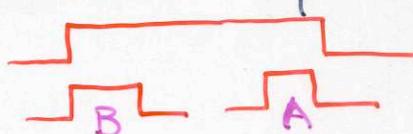
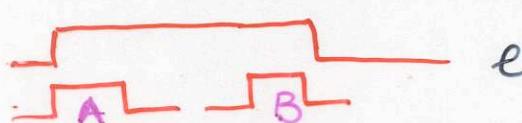
com $\mu = \lambda \tau =$ média dos eventos em $\tau = \frac{N_A}{T} \tau$.

Como $\mu \ll 1$, vem $P_A(r \geq 1) \approx 1 - (1 - \mu) = \mu$.

A probabilidade conjunta em τ será o produto das probabilidades independentes:

$$P_C = 2 \cdot P_A(r \geq 1) \cdot P_B(r \geq 1) = 2 N_A N_B \tau^2 / T^2$$

Factor 2: Duas maneiras de abrir a porta electrónica:



Como $N_C = P_C \cdot T / \tau$, vem: $\underline{N_C = 2 N_A N_B \tau / T}$.