

# Aula 08

## Recursão versus Iteração

*Recursão e Iteração em Estruturas Ordenadas*

*Programação II, 2019-2020*

*v1.3, 2020-04-12*

Recursão:  
implementação

Conversão entre  
recursão e iteração  
Iteração para recursão  
Recursão para iteração

Travessia de listas:  
recursão e iteração

Travessia de vectores:  
recursão e iteração

Gestão de listas e  
vectores ordenados

### 1 Recursão: implementação

Recursão:  
implementação

### 2 Conversão entre recursão e iteração

Conversão entre  
recursão e iteração  
Iteração para recursão  
Recursão para iteração

Iteração para recursão

Recursão para iteração

Travessia de listas:  
recursão e iteração

Travessia de vectores:  
recursão e iteração

Gestão de listas e  
vectores ordenados

### 3 Travessia de listas: recursão e iteração

### 4 Travessia de vectores: recursão e iteração

### 5 Gestão de listas e vectores ordenados

- Não há suporte directo para a recursão nas *linguagens de máquina*, isto é, linguagens que são directamente executadas pelos processadores (CPU) existentes nos computadores;
- Assim, para que este mecanismo funcione é necessária uma adequada implementação pelos compiladores (ou interpretadores) das linguagens de programação de mais alto nível (como o Java);

### Recursão: implementação

Conversão entre  
recursão e iteração  
Iteração para recursão  
Recursão para iteração

Travessia de listas:  
recursão e iteração

Travessia de vectores:  
recursão e iteração

Gestão de listas e  
vectores ordenados

## Problema

Garantir uma separação clara entre o contexto do cliente (que invoca o método) e o contexto do método, impedindo a interferência entre diferentes invocações do método (incluindo possíveis invocações recursivas).

## Recursão: implementação

Conversão entre  
recursão e iteração  
Iteração para recursão  
Recursão para iteração

Travessia de listas:  
recursão e iteração

Travessia de vectores:  
recursão e iteração

Gestão de listas e  
vectores ordenados

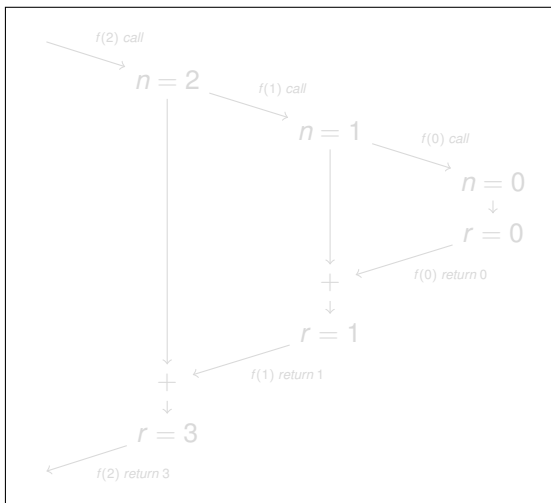
- Este objectivo pode ser atingido fazendo com que os métodos, sempre que são invocados, funcionem com **contextos de execução** próprios onde são armazenadas as suas variáveis locais e parâmetros.
- Podemos fazer uma analogia com a instanciação de objectos, com a diferença de as variáveis do método só existirem durante a execução do método.
  - As variáveis são criadas quando o método inicia a sua execução e descartadas quando termina.
- A implementação mais eficiente para este fim assenta numa estrutura de dados composta designada por *Pilha* (*stack*), que se caracteriza por uma gestão do tipo *LIFO* (*Last In First Out*);

- Vejamos, como exemplo, a seguinte função recursiva  $f(n)$ , que devolve o somatório dos números de 0 a  $n$ :

```
static int f(int n) {  
    assert n >= 0;  
    //out.printf("f(%d)... \n", n);  
    int r = 0;  
    if (n > 0)  
        r = n + f(n-1);  
    //out.printf("f(%d) = %d\n", n, r);  
    return r;  
}
```

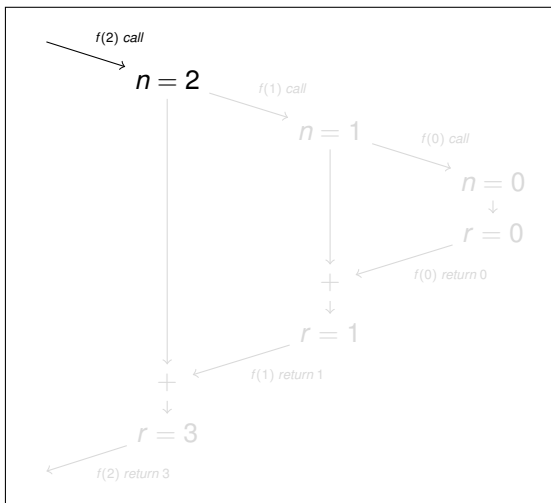
## Exemplo: execução de $f(2)$

(Experimente [este exemplo no Java Tutor](#).)



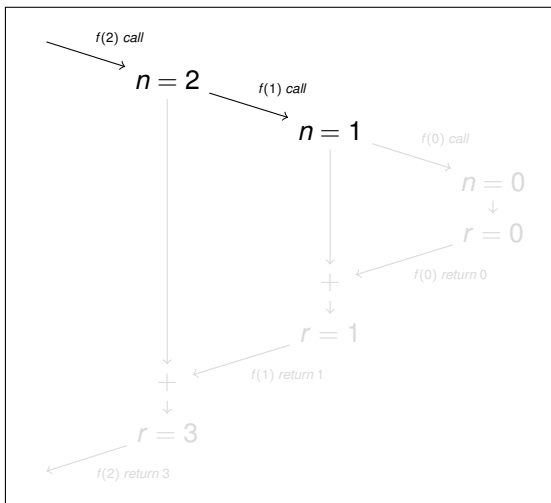
## Exemplo: execução de $f(2)$

(Experimente [este exemplo no Java Tutor](#).)



## Exemplo: execução de $f(2)$

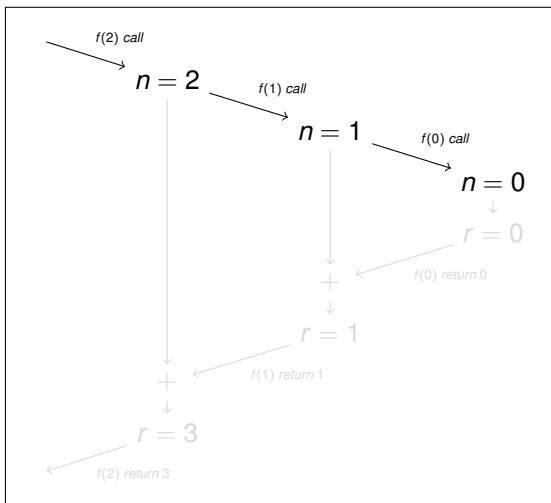
(Experimente [este exemplo no Java Tutor](#).)





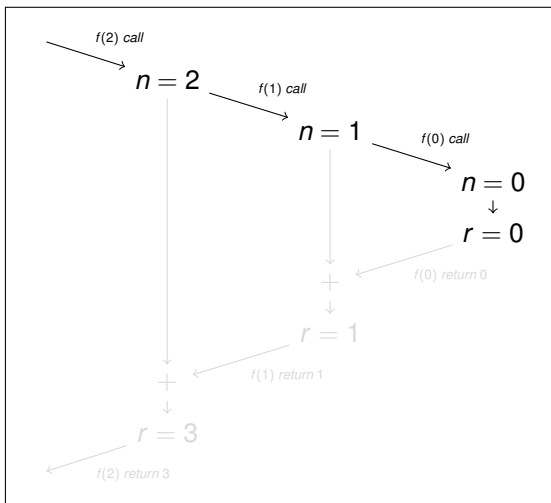
## Exemplo: execução de $f(2)$

(Experimente [este exemplo no Java Tutor](#).)



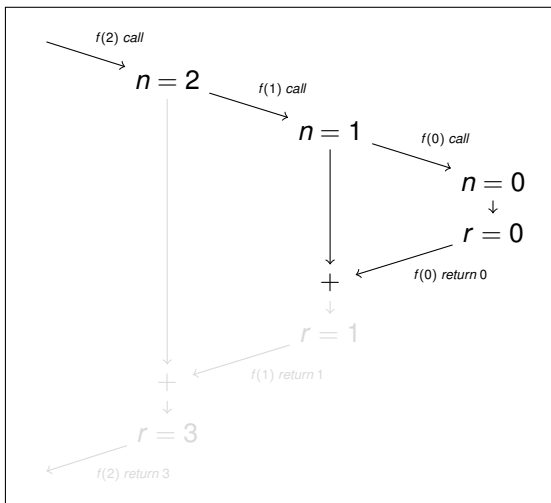
## Exemplo: execução de $f(2)$

(Experimente [este exemplo no Java Tutor](#).)



## Exemplo: execução de $f(2)$

(Experimente [este exemplo no Java Tutor](#).)



Recursão:  
implementação

Conversão entre  
recursão e iteração  
Iteração para recursão  
Recursão para iteração

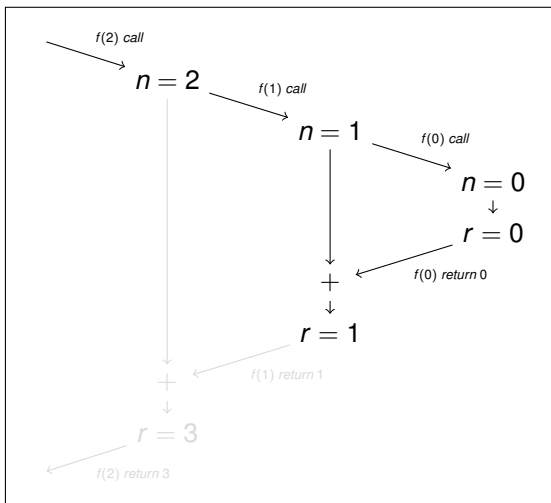
Travessia de listas:  
recursão e iteração

Travessia de vectores:  
recursão e iteração

Gestão de listas e  
vectores ordenados

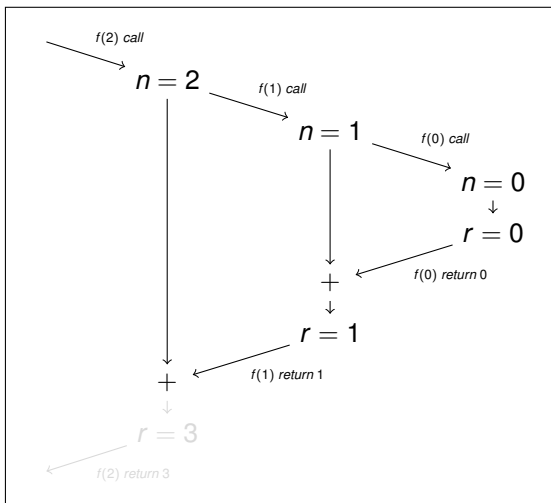
## Exemplo: execução de $f(2)$

(Experimente [este exemplo no Java Tutor](#).)



## Exemplo: execução de $f(2)$

(Experimente [este exemplo no Java Tutor.](#))



Recursão:  
implementação

Conversão entre  
recursão e iteração

Iteração para recursão

Recursão para iteração

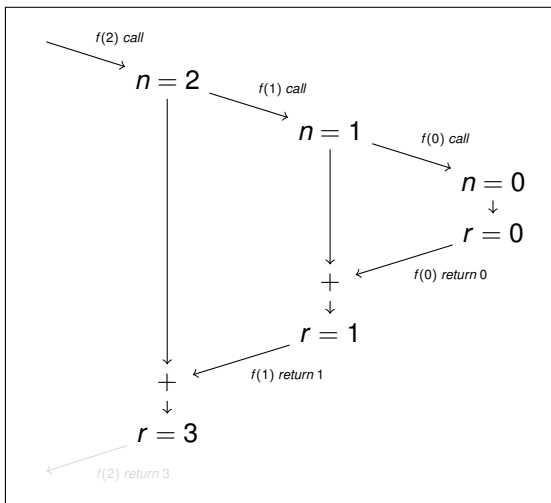
Travessia de listas:  
recursão e iteração

Travessia de vectores:  
recursão e iteração

Gestão de listas e  
vectores ordenados

## Exemplo: execução de $f(2)$

(Experimente [este exemplo no Java Tutor](#).)



Recursão:  
implementação

Conversão entre  
recursão e iteração

Iteração para recursão

Recursão para iteração

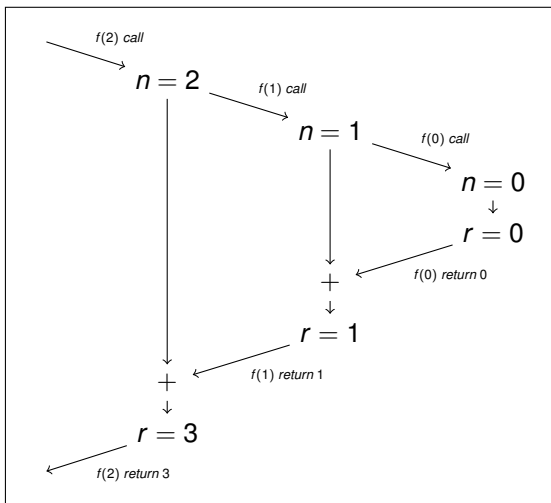
Travessia de listas:  
recursão e iteração

Travessia de vectores:  
recursão e iteração

Gestão de listas e  
vectores ordenados

## Exemplo: execução de $f(2)$

(Experimente [este exemplo no Java Tutor.](#))



Recursão:  
implementação

Conversão entre  
recursão e iteração  
Iteração para recursão  
Recursão para iteração

Travessia de listas:  
recursão e iteração

Travessia de vectores:  
recursão e iteração

Gestão de listas e  
vectores ordenados

## Exemplo: execução de $f(2)$

Recursão:  
implementação

Conversão entre  
recursão e iteração

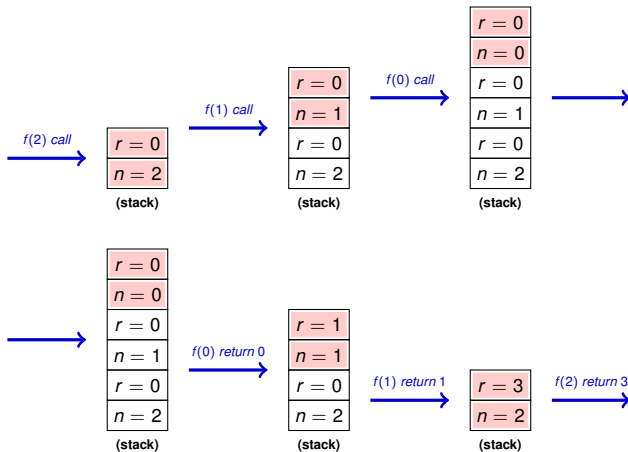
Iteração para recursão

Recursão para iteração

Travessia de listas:  
recursão e iteração

Travessia de vectores:  
recursão e iteração

Gestão de listas e  
vectores ordenados





# Iteração para recursão

- Como já foi referido, um algoritmo recursivo tem sempre uma versão iterativa e vice-versa.
- Uma forma genérica de converter um ciclo (estruturado) numa função recursiva é a seguinte:

## Implementação Iterativa

```
for (INIT; COND; UPDATE) {  
    BODY  
}  
...
```

## Implementação Recursiva

```
INIT  
loopEquiv (ARGS)  
...  
  
static void loopEquiv (ARGS decl) {  
    if (COND) {  
        BODY  
        UPDATE  
        loopEquiv (ARGS);  
    }  
}
```

- A função recursiva tem de declarar argumentos formais correspondentes às variáveis utilizadas no ciclo.
- Os valores dessas variáveis têm de ser passados como argumentos da função.

# Iteração para recursão: exemplo

Recursão versus  
Iteração

Recursão:  
implementação

Conversão entre  
recursão e iteração

recursão  
iteração

listas:  
eração

vectores:  
eração

tas e  
enados

## Implementação Iterativa

```
// int[] arr
for(int i=0; i<arr.length; i++)
    out.println(arr[i]);
...
```

## Implementação Recursiva

```
int i = 0;
loopEquiv(arr, i);
...

static void loopEquiv(int[] arr, int i) {
    if (i < arr.length) {
        out.println(arr[i]);
        i++;
        loopEquiv(arr, i);
    }
}
```

- Podemos melhorar esta implementação substituindo o incremento de `i` pela passagem de `i+1` para a função.

Recursão:  
implementação

Conversão entre  
recursão e iteração  
Iteração para recursão

Recursão para iteração

Travessia de listas:  
recursão e iteração

Travessia de vectores:  
recursão e iteração

Gestão de listas e  
vectores ordenados

- A conversão de algoritmos recursivos para ciclos é, em geral, mais complexa do que a transformação inversa.
- Uma forma geral de fazer essa conversão faz uso de uma *pilha* para armazenar explicitamente os contextos de execução da função recursiva (contendo os argumentos e variáveis locais da função) e substitui as chamadas das funções por instruções do tipo *salto* (*goto*).
- No entanto, o algoritmo resultante fica muito **menos legível**.
- Alguns tipos particulares de recursividade, como é o caso da *recursão de cauda* (*tail recursion*) prestam-se a optimizações interessantes (já que podemos prescindir do armazenamento de algum contexto).
- Mas isso sai fora do âmbito desta disciplina.

# Recursão para iteração: exemplo

- Certas funções recursivas (como o cálculo dos números de Fibonacci ou o factorial) são, no entanto, facilmente convertidas em ciclos:
  - Basta fazer a iteração desde o(s) caso(s) limite até ao valor desejado, e ir armazenando os valores calculados num array.
  - E substituir as invocações recursivas por acessos ao array.

## Implementação Recursiva

```
static int factorial(int n) {  
    assert n >= 0;  
    int res;  
  
    if (n <= 1)  
        res = 1;  
    else  
        res = n * factorial(n-1);  
  
    return res;  
}
```

## Implementação Iterativa (com array)

```
static int factorial(int n) {  
    assert n >= 0;  
    int[] arr = new int[n+1];  
    for(int i = 0; i <= n; i++) {  
        if (i <= 1) // casos limite  
            arr[i] = 1;  
        else  
            arr[i] = i * arr[i-1];  
    }  
    return arr[n];  
}
```

Recursão:  
implementação

Conversão entre  
recursão e iteração  
Iteração para recursão

Recursão para iteração

Travessia de listas:  
recursão e iteração

Travessia de vectores:  
recursão e iteração

Gestão de listas e  
vectores ordenados

# Travessia de listas: recursão e iteração

Recursão versus  
Iteração

- Embora as listas sejam estruturas de dados recursivas, é possível utilizar algoritmos iterativos.
- Vejamos novamente a função `contains()` da classe `LinkedList`, da aula anterior, comparando com uma versão iterativa equivalente.

Recursão:  
implementação

Conversão entre  
recursão e iteração

Iteração para recursão

Recursão para iteração

Travessia de listas:  
recursão e iteração

Travessia de vectores:  
recursão e iteração

## Implementação Iterativa

```
public class LinkedList<E> {  
    ...  
    public boolean contains(E e) {  
        boolean found = false;  
        Node<E> n = first;  
        while (n!=null && !found) {  
            if (n.elem.equals(e))  
                found = true;  
            n = n.next;  
        }  
        return found;  
    }  
    ...  
}
```

## Implementação Recursiva

```
public class LinkedList<E> {  
    ...  
    public boolean contains(E e) {  
        return contains(first, e);  
    }  
    private boolean contains(Node<E> n, E e) {  
        if (n == null) return false;  
        if (n.elem.equals(e)) return true;  
        return contains(n.next, e);  
    }  
    ...  
}
```

s

## Um padrão que se repete ...

- Muitas funções têm de fazer uma *travessia* da lista.
- Essa travessia segue um padrão que convém assimilar.

Recursão versus  
Iteração

Recursão:  
implementação

Conversão entre  
recursão e iteração

Iteração para recursão  
recursão para iteração

Travessia de listas:  
recursão e iteração

Travessia de vectores:  
recursão e iteração

Travessia de listas e  
vectores ordenados

### Implementação Iterativa

```
public class LinkedList<E> {  
    ...  
    public ... xpto(...) {  
        ...  
        Node<E> n = first;  
        while (n!=null && ...) {  
            ...  
            n = n.next;  
        }  
        return ...;  
    }  
    ...  
}
```

### Implementação Recursiva

```
public class LinkedList<E> {  
    ...  
    public ... xpto(...) {  
        return xpto(first, e);  
    }  
    private ... xpto(Node<E> n, ...) {  
        if (n == null) return ...;  
        ...  
        ... xpto(n.next, ...);  
        return ...  
    }  
    ...  
}
```

## Travessia (= percurso)

Algoritmo que percorre potencialmente todos os elementos de uma estrutura de dados visitando cada um apenas uma vez.

# Travessia de vetores: recursão e iteração

Recursão versus  
Iteração

- Como faríamos uma pesquisa sequencial num vector?
- Aqui, em vez de passarmos de `n` a `n.next`, passamos de `i` a `i+1`.
- E, em vez de compararmos com `n.elem`, comparamos com o elemento `v[i]` do vector.

Recursão:  
implementação

Conversão entre  
recursão e iteração

Iteração para recursão

Recursão para iteração

Travessia de listas:  
recursão e iteração

Travessia de vectores:  
recursão e iteração

Gestão de listas e  
res ordenados

## Implementação Iterativa

```
public static
boolean contains(E[] v, E e) {
    int i=0;
    while (i < v.length) {
        if (v[i].equals(e))
            return true;
        i++;
    }
    return false;
}
```

## Implementação Recursiva

```
public static
boolean contains(E[] v, E e) {
    return contains(v, e, 0);
}

private static
boolean contains(E[] v, E e, int i) {
    if (i >= v.length) return false;
    if (v[i].equals(e)) return true;
    return contains(v, e, i+1);
}
```

Recursão:  
implementação

Conversão entre  
recursão e iteração  
Iteração para recursão  
Recursão para iteração

Travessia de listas:  
recursão e iteração

Travessia de vectores:  
recursão e iteração

Gestão de listas e  
vectores ordenados

- Em muitas aplicações, dá jeito ter estruturas ordenadas.
  - O problema coloca-se quer para vectores, quer para listas.
- Na próxima aula, vamos ver diversos algoritmos de ordenação.
- Um problema mais simples é o de criar e manter uma estrutura sempre ordenada.
  - Dependendo da aplicação, pode ser preferível.
- Por simplicidade, vamos trabalhar com listas e vectores de elementos inteiros.



Recursão:  
implementação

Conversão entre  
recursão e iteração

Iteração para recursão

Recursão para iteração

Travessia de listas:  
recursão e iteração

Travessia de vectores:  
recursão e iteração

Gestão de listas e  
vectores ordenados

- **insert(e)** - inserir o elemento dado.
  - Pré-condição: `isSorted()`
  - Pós-condição: `contains(e) && isSorted()`
- **removeFirst()** - remover o primeiro elemento.
  - Pré-condição: `!isEmpty()`
- **first()** - consultar o primeiro elemento.
  - Pré-condição: `!isEmpty()`
- **remove(e)** - remover o elemento dado.
  - Pré-condição: `contains(e) && isSorted()`
  - Pós-condição: `isSorted()`

Recursão:  
implementação

Conversão entre  
recursão e iteração  
Iteração para recursão  
Recursão para iteração

Travessia de listas:  
recursão e iteração

Travessia de vectores:  
recursão e iteração

Gestão de listas e  
vectores ordenados

- **insert(v, ne, e)** - inserir o elemento dado.
  - Pré-condição: `isSorted(v, ne) && !isFull(v, ne)`
  - Pós-cond.:  
`contains(v, ne, e) && isSorted(v, ne)`
- **removeFirst(v, ne)** - remover o primeiro elemento.
  - Pré-condição: `!isEmpty(v, ne)`
- **first(v)** - consultar o primeiro elemento.
  - Pré-condição: `!isEmpty(v, ne)`
- **remove(v, ne, e)** - remover o elemento dado.
  - Pré-cond.:  
`contains(v, ne, e) && isSorted(v, ne)`
  - Pós-condição: `isSorted(v, ne) && !isFull(v, ne)`
- ( `v` = vector, `ne` = número de elementos, `e` = elemento )

## Verificar se uma lista está ordenada: recursão e iteração

- Numa lista ordenada, qualquer função deve manter a lista ordenada.
- Precisamos assim de uma função que verifique isso.
- Essa verificação pode ser usada em asserções.
- Em cada passo, precisamos de conhecer o elemento anterior (p).

Recursão versus  
Iteração

Recursão:  
implementação

Conversão entre  
recursão e iteração

Iteração para recursão

Recursão para iteração

Travessia de listas:  
recursão e iteração

Travessia de vectores:  
recursão e iteração

### Implementação Iterativa

```
public class SortedListInt {  
    ...  
    public boolean isSorted() {  
        if (size < 2)  
            return true;  
        NodeInt p = first;  
        NodeInt n = first.next;  
        while (n!=null) {  
            if (n.elem<p.elem)  
                return false  
            p = n; //previous  
            n = n.next;  
        }  
        return true;  
    }  
    ...  
}
```

### Implementação Recursiva

```
public class SortedListInt {  
    ...  
    public boolean isSorted() {  
        if (size < 2) return true;  
        return isSorted(first, first.next);  
    }  
    private  
    boolean isSorted(NodeInt p, NodeInt n) {  
        if (n == null) return true;  
        if (n.elem < p.elem) return false;  
        return isSorted(n, n.next);  
    }  
    ...  
}
```

is e  
ados

# Verificar se um vector está ordenado: recursão e iteração

Recursão versus  
Iteração

Recursão:  
implementação

Conversão entre  
recursão e iteração

Iteração para recursão

Recursão para iteração

Travessia de listas:  
recursão e iteração

Travessia de vectores:  
recursão e iteração

Gestão de listas e  
vectores ordenados

## Implementação Iterativa

```
public static
boolean isSorted(int[] v)
{
    if (v.length < 2)
        return true;
    int i = 1;
    boolean sorted = true;
    while (i!=v.length && sorted) {
        if (v[i] < v[i-1])
            sorted = false;
        i++;
    }
    return sorted;
}
```

## Implementação Recursiva

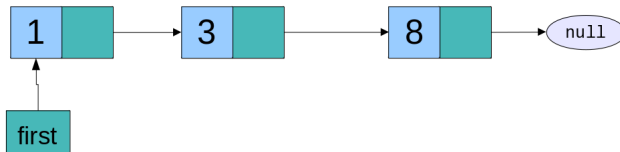
```
public static
boolean isSorted(int[] v)
{
    if (v.length < 2)
        return true;
    return isSorted(v, 1);
}

private static
boolean isSorted(int[] v, int i)
{
    if (i==v.length) return true;
    if (v[i] < v[i-1]) return false;
    return isSorted(v, i+1);
}
```

# Inserção numa lista ordenada

- Inserção no meio da lista:

**insert(7)**



- Quando o elemento fica no início, funciona como `addFirst`
- Quando o elemento fica no fim, funciona como `addLast`

Recursão:  
implementação

Conversão entre  
recursão e iteração

Iteração para recursão

Recursão para iteração

Travessia de listas:  
recursão e iteração

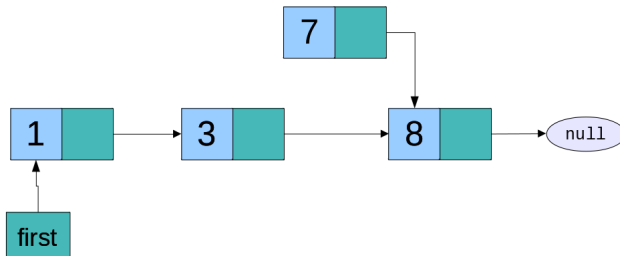
Travessia de vectores:  
recursão e iteração

Gestão de listas e  
vectores ordenados

# Inserção numa lista ordenada

- Inserção no meio da lista:

**insert(7)**



Recursão:  
implementação

Conversão entre  
recursão e iteração

Iteração para recursão

Recursão para iteração

Travessia de listas:  
recursão e iteração

Travessia de vectores:  
recursão e iteração

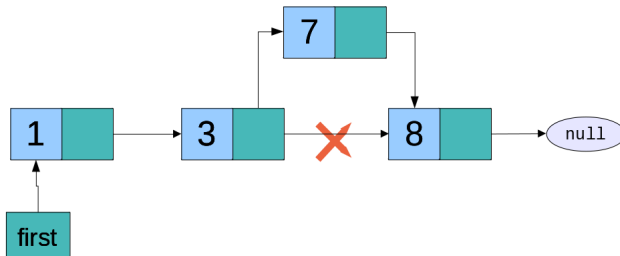
Gestão de listas e  
vectores ordenados

- Quando o elemento fica no início, funciona como `addFirst`
- Quando o elemento fica no fim, funciona como `addLast`

# Inserção numa lista ordenada

- Inserção no meio da lista:

**insert(7)**



Recursão:  
implementação

Conversão entre  
recursão e iteração

Iteração para recursão

Recursão para iteração

Travessia de listas:  
recursão e iteração

Travessia de vectores:  
recursão e iteração

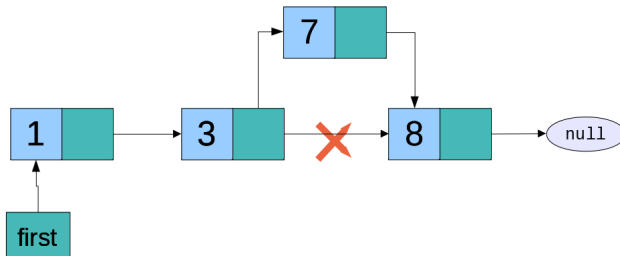
Gestão de listas e  
vectores ordenados

- Quando o elemento fica no início, funciona como `addFirst`
- Quando o elemento fica no fim, funciona como `addLast`

# Inserção numa lista ordenada

- Inserção no meio da lista:

**insert(7)**



- Quando o elemento fica no início, funciona como `addFirst`
- Quando o elemento fica no fim, funciona como `addLast`

Recursão:  
implementação

Conversão entre  
recursão e iteração

Iteração para recursão

Recursão para iteração

Travessia de listas:  
recursão e iteração

Travessia de vectores:  
recursão e iteração

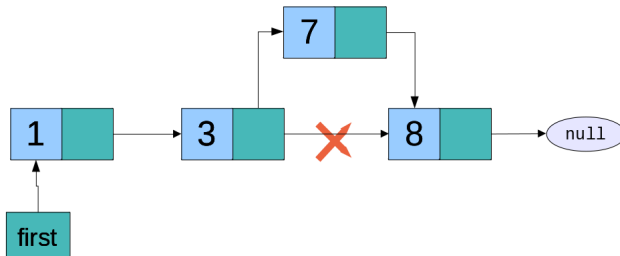
Gestão de listas e  
vectores ordenados



# Inserção numa lista ordenada

- Inserção no meio da lista:

`insert(7)`



Recursão:  
implementação

Conversão entre  
recursão e iteração

Iteração para recursão

Recursão para iteração

Travessia de listas:  
recursão e iteração

Travessia de vectores:  
recursão e iteração

Gestão de listas e  
vectores ordenados

- Quando o elemento fica no início, funciona como `addFirst`
- Quando o elemento fica no fim, funciona como `addLast`

# Inserção numa lista ordenada: recursão e iteração

Recursão versus  
Iteração

Recursão:  
implementação

## Implementação Iterativa

```
public class SortedListInt {  
    ...  
    public void insert(int e) {  
  
        if (first==null || e<first.elem)  
            first = new NodeInt(e, first);  
        else {  
            NodeInt p = first;  
            NodeInt n = first.next;  
            while (n!=null && e>n.elem)  
                p = n;  
            n = n.next;  
        }  
        p.next = new NodeInt(e, n);  
        size++;  
    }  
    ...  
}
```

## Implementação Recursiva

```
public class SortedListInt {  
    ...  
    public void insert(int e) {  
        first = insert(first, e);  
        size++;  
    }  
    private  
    NodeInt insert(NodeInt n, int e) {  
        if (n==null || e<n.elem)  
            return new NodeInt(e, n);  
        n.next = insert(n.next, e);  
        return n;  
    }  
    ...  
}
```

Comparação entre  
recursão e iteração  
Implementação para recursão  
Implementação para iteração

Comparação de listas:  
recursão e iteração

Comparação de vectores:  
recursão e iteração

Comparação de listas e  
vectores ordenados

# Inserção num vector ordenado

- Inserção no meio do vector:

**insert(18)**

2	5	8	13	16	17	20	22							
---	---	---	----	----	----	----	----	--	--	--	--	--	--	--

Recursão:  
implementação

Conversão entre  
recursão e iteração

Iteração para recursão

Recursão para iteração

Travessia de listas:  
recursão e iteração

Travessia de vectores:  
recursão e iteração

Gestão de listas e  
vectores ordenados

# Inserção num vector ordenado

Recursão:  
implementação

Conversão entre  
recursão e iteração

Iteração para recursão

Recursão para iteração

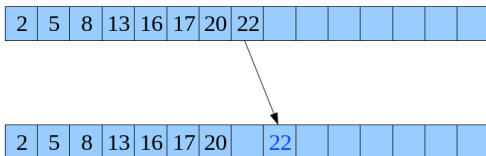
Travessia de listas:  
recursão e iteração

Travessia de vectores:  
recursão e iteração

Gestão de listas e  
vectores ordenados

- Inserção no meio do vector:

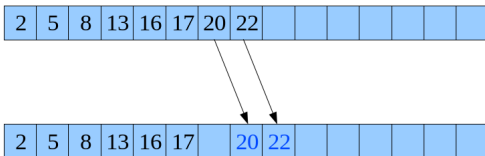
**insert(18)**



# Inserção num vector ordenado

- Inserção no meio do vector:

**insert(18)**



Recursão:  
implementação

Conversão entre  
recursão e iteração

Iteração para recursão

Recursão para iteração

Travessia de listas:  
recursão e iteração

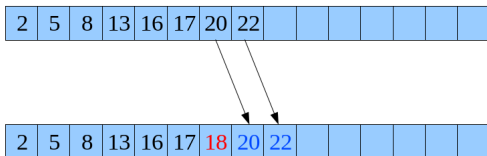
Travessia de vectores:  
recursão e iteração

Gestão de listas e  
vectores ordenados

# Inserção num vector ordenado

- Inserção no meio do vector:

**insert(18)**



Recursão:  
implementação

Conversão entre  
recursão e iteração

Iteração para recursão

Recursão para iteração

Travessia de listas:  
recursão e iteração

Travessia de vectores:  
recursão e iteração

Gestão de listas e  
vectores ordenados

# Inserção num vector ordenado: recursão e iteração

Recursão versus  
Iteração

Recursão:  
implementação

Conversão entre  
recursão e iteração

Iteração para recursão

Recursão para iteração

- Inserir um elemento  $e$  num vector  $v$  com  $ne$  elementos

## Implementação Iterativa

```
public static int
insert(int[] v, int ne, int e) {
    int i=ne;
    while (i>0 && e<v[i-1]) {
        v[i] = v[i-1];
        i--;
    }
    v[i] = e;
    return ne+1;
}
```

## Implementação Recursiva

```
public static int
insert(int[] v, int ne, int e) {
    shiftInsert(v, e, ne);
    return ne+1;
}

public static void
shiftInsert(int[] v, int e, int i) {
    if (i==0 || e>v[i-1]) v[i] = e;
    else {
        v[i] = v[i-1];
        shiftInsert(v, e, i-1);
    }
}
```

Conversão de listas:  
recursão e iteração

Conversão de vectores:  
recursão e iteração

Conversão de listas e  
vectores ordenados

# Implementação de uma lista ordenada genérica

- Qualquer objecto Java tem o método `equals()`.
- No entanto, só alguns objectos têm o método `compareTo()` necessário para manter uma lista ordenada.
- Podemos definir classes genéricas em que os parâmetros de tipo são declarados como “comparáveis”.

Recursão:  
implementação

Conversão entre  
recursão e iteração

Iteração para recursão

Recursão para iteração

Travessia de listas:  
recursão e iteração

Travessia de vectores:  
recursão e iteração

Gestão de listas e  
vectores ordenados

```
public class SortedList<E extends Comparable<E>> {  
    ...  
    public void insert(E e) {  
        ...  
    }  
    ...  
}  
...  
public static void main(String args[]) {  
    ...  
    SortedList<Double> p1 = new SortedList<Double>();  
    SortedList<Integer> p2 = new SortedList<Integer>();  
    ...  
}
```