

Matemática Discreta

Lógica de Primeira Ordem - 4

Universidade de Aveiro 2019/2020

<http://moodle.ua.pt>

Demonstração Automática de Teoremas

Princípio da resolução

Referências e bibliografia

Demonstração Automática de Teoremas

Procedimento de refutação

Consiste em provar que uma fórmula é válida provando que a sua negação é inconsistente.

- Este procedimento tem por base as seguintes propriedades:

- 1) Qualquer fórmula da lógica de primeira ordem se pode transformar na **forma normal prenex**.
- 2) A parte da fórmula que não contém quantificadores pode transformar-se na **forma normal conjuntiva**.
- 3) É possível eliminar os quantificadores existenciais sem alterar as propriedades de inconsistência com recurso às designadas **funções de Skolem**.

Redução de formas normais prenex à forma normal de Skolem

Dada a fórmula $(Q_1x_1)(Q_2x_2) \dots (Q_nx_n) M$, aplicar a cada quantificador existencial Q_r as seguintes transformações:

- 1) Se nenhum quantificador universal aparece à esquerda de Q_r , então
 - Escolher uma constante c (que não figure em M).
 - Substituir x_r por c e eliminar Q_rx_r .
- 2) Se $Q_{s_1} \dots Q_{s_m}$ são quantificadores universais que ocorrem à esquerda de Q_r então
 - Escolher um símbolo de função f , diferente dos existentes, com m argumentos.
 - Substituir em M , x_r por $f(x_{s_1}, \dots, x_{s_m})$.
 - Eliminar Q_rx_r .
- 3) Aplicar 1) e 2) a todos os quantificadores existenciais.

Exemplo

Vamos reduzir à forma normal de Skolem a seguinte fórmula:

$$(\forall x)(\exists y)(\exists z)((\neg P(x, y) \vee Q(x, z))$$

- Uma vez que $(\exists y)$ e $(\exists z)$ são precedidos por $(\forall x)$, as variáveis y e z são substituídas, respectivamente, pelas funções de uma variável $f(x)$ e $g(x)$.
- Logo, obtém-se

$$(\forall x)((\neg P(x, f(x)) \vee Q(x, g(x))).$$

Princípio da resolução de Robinson

- O princípio da resolução consiste em verificar se um dado conjunto de cláusulas S contém a cláusula vazia, \diamond , ou se ela pode ser deduzida de S .
- O princípio da resolução pode ser visto como uma regra de inferência usada para gerar novas cláusulas de acordo com o seguinte procedimento:

Procedimento de resolução

1. Sejam C_1 e C_2 duas cláusulas de S ;
2. Se existe um literal L_1 em C_1 complementar relativamente a um literal L_2 de C_2 , então
 - Eliminar L_1 de C_1 e L_2 de C_2 ;
 - Construir a disjunção do que resta de C_1 e C_2 , obtendo-se uma nova cláusula designada por **resolvente** de C_1 e C_2 (ou consequência lógica de C_1 e C_2).

Exemplos

- $C_1 : P \vee \neg R;$

- $C_2 : Q \vee R;$



- $C_{12} : P \vee Q \rightarrow$ resolvente de C_1 e C_2 .

- $C_1 : P \vee \neg Q \vee R;$

- $C_2 : \neg P \vee S;$



- $C_{12} : \neg Q \vee R \vee S \rightarrow$ resolvente de C_1 e C_2 .

Dedução (ou resolução)

Definição (de dedução)

Dado um conjunto de cláusulas S , uma dedução (ou resolução) de C a partir de S é uma sequência finita de cláusulas C_1, C_2, \dots, C_k tais que cada C_i ou é uma cláusula em S ou uma resolvente de cláusulas que precedem C_i e $C_k = C$.

A dedução de \diamond a partir de S é designada por refutação ou prova da inconsistência de S .

Exemplo

Considerando o conjunto de fórmulas

$$S = \{P \vee Q, \neg P \vee Q, P \vee \neg Q, \neg P \vee \neg Q\}$$

identificam-se as seguintes cláusulas:

$$\begin{aligned} C_1 &: P \vee Q; & C_2 &: \neg P \vee Q; \\ C_3 &: P \vee \neg Q; & C_4 &: \neg P \vee \neg Q. \end{aligned}$$

$$C_1 : P \vee Q$$

$$C_2 : \neg P \vee Q$$

$$C_{12} : Q$$

$$C_3 : P \vee \neg Q$$

$$C_4 : \neg P \vee \neg Q$$

$$C_{34} : \neg Q$$

$$C_{12} : Q$$

$$C_{34} : \neg Q$$



► **Referência bibliográfica:**

D. M. Cardoso, M. P. Carvalho, *Noções de Lógica Matemática*, Universidade de Aveiro, 2007 (versão revista em Março 2015, disponível na página da disciplina).