

universidade de aveiro



theoria poiesis praxis

UNIVERSIDADE DE AVEIRO
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
3810-193 AVEIRO

Mecânica e Campo Eletromagnético

Capítulo 3. Campos elétrico e magnético

1ª serie

Distribuições de carga

1. A densidade linear de carga dum bastão de comprimento L é dada por : $\lambda = \lambda_0 + 2x$ (onde $0 \leq x \leq L$). Qual é a carga total do bastão?

Solução: $Q = \lambda_0 L + L^2$

2. Uma placa quadrada, com 2m de lado, situada segundo os eixos x e y e com um vértice na origem, tem uma densidade superficial de carga dada por $\sigma = (2-y)$ Cm^{-2} . Calcule a carga total da placa.

Solução: $Q = 4 \text{ C}$

3. Um disco de raio R tem uma densidade de carga dada por $\sigma = 3r$. Calcule a carga total do disco.

Solução: $Q = 2\pi R^3$

4. Uma coroa esférica de raios r_1 e r_2 ($r_1 < r_2$) tem uma densidade de carga que é inversamente proporcional ao raio. Sabendo que a carga total da coroa é Q , obtenha uma expressão para a densidade de carga.

Solução: $\rho = \frac{Q}{2\pi(r_2^2 - r_1^2)r}$

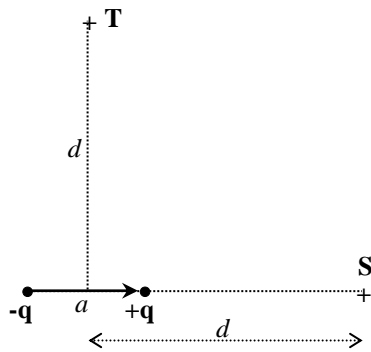
Lei de Coulomb. Campo e Potencial Eléctricos

5. Quatro cargas $+q, +q, -q, -q$ estão colocadas nos vértices dum quadrado de lado a .
a) Determine, para os dois casos de distribuição das cargas, o campo elétrico e o potencial no centro do quadrado.

- b) Escolha uma linha apropriada e verifique que $\int_r \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$

Solução: $\vec{E} = \frac{q\sqrt{2}}{\pi \epsilon_0 a^2} \hat{k}$ e $V = 0$; $\vec{E} = \vec{0}$ e $V = 0$

6. Duas cargas iguais e de sinais contrários, com uma distância constante entre si constituem um dipolo (ver figura).



- Mostre que o campo elétrico em **S** é paralelo ao vetor \vec{a} , e em **T** tem o sentido contrário.
- Determine o campo elétrico em **T** e em **S**, fazendo aproximações adequadas ($d \gg a$). Introduza no resultado o vector momento dipolar elétrico, $\vec{P} = q\vec{a}$
- Mostre que um dipolo colocado num campo elétrico uniforme \vec{E} fica sujeito a um binário cujo momento é dado por $\vec{M} = \vec{P} \times \vec{E}$.

Solução: $\vec{E}(S) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\vec{P}}{d^3}$; $\vec{E}(T) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{P}}{d^3}$

7. Considere um anel de raio **R** carregado uniformemente com uma carga total **Q**.

- Calcule o campo elétrico no centro do anel.
- Calcule o campo elétrico num ponto do eixo do anel, distante de **d** do seu centro
 - a partir da lei de Coulomb.
 - A partir do potencial

Solução: $\vec{E}(O) = \vec{0}$; $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qd}{(R^2 + d^2)^{3/2}}$; $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{(R^2 + d^2)^{1/2}}$

8. Um fio semi-circular de raio **R** está uniformemente carregado com uma carga total **Q**. Encontre o vetor campo elétrico no centro de curvatura.

Solução: $E = \frac{Q}{2\epsilon_0 \pi^2 R^2}$

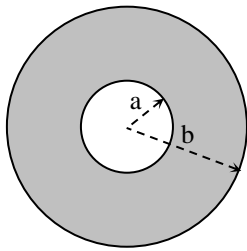
9. Determine a partir da lei de Coulomb o campo e o potencial criados por um fio infinito, carregado com uma densidade linear de carga constante λ .

Solução: $\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{u}_r$ e $V = \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r + const.$ há cargas no infinito...

10. Determine, a partir da lei de Coulomb o, campo e o potencial criados num ponto do eixo (à distância **x**) dum disco de raio **R**, uniformemente carregado com uma densidade superficial de carga σ . Estude o caso limite $R \rightarrow \infty$?

Solução: $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}}\right) \hat{u}_x$ e $V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{x^2 + R^2} - |x|)$
quando $R \rightarrow \infty$, $E \rightarrow \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ como o caso do plano infinito (σ)

11. Um anel circular, de raio interior **a** e de raio exterior **b** ($a < b$), tem uma densidade superficial de carga σ constante.



- Calcule o potencial num ponto P do eixo da coroa, à distância **x** do centro.
- Deduza a expressão do campo elétrico em P.
- Verifique que no limite em que $a \rightarrow 0$, as expressões acima tendem para o caso do disco uniformemente carregado.

Solução:

$$V(P) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{x^2 + b^2} - \sqrt{x^2 + a^2} \right) \quad e \quad \vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + b^2}} \right) \hat{u}_x$$

12. Uma superfície hemisférica fina de raio **R**, com a base situada no plano **xy**, tem uma carga **Q** uniformemente distribuída. Encontre o campo elétrico e o potencial no centro de curvatura **O**, origem do sistema de eixos.

Solução: $\vec{E}(O) = -\frac{\sigma}{4\epsilon_0} \hat{u}_z = -\frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R^2} \hat{u}_z$; $V(O) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} R$

13. Um fio de comprimento **L**, centrado na origem dum sistema de eixos **xy** e paralelo a **x'**, está carregado uniformemente com uma densidade de cargas dada por $\lambda \text{ Cm}^{-1}$.

- Determine a expressão do campo elétrico num ponto genérico ao longo do fio, fora e dentro do fio.
- Determine o campo elétrico nos pontos que se situam ao longo da reta que é perpendicular ao fio e passa pelo ponto médio deste.

Solução:

$$E_{fora}(x) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{x - \frac{L}{2}} - \frac{1}{x + \frac{L}{2}} \right];$$

$$E_{dentro}(x) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\frac{L}{2} - x} - \frac{1}{\frac{L}{2} + x} \right];$$

$$E(y) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left[\frac{L}{y(L^2 + 4y^2)^{3/2}} \right]$$

Aplicações do teorema de Gauss

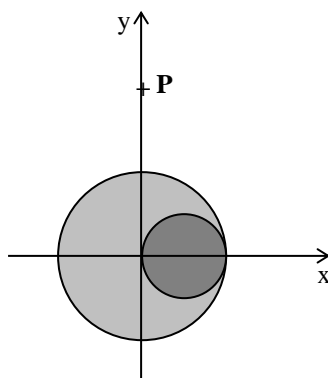
14. Uma esfera de centro A e de raio **a** está carregada com uma densidade volúmica uniforme **ρ** , exceto numa cavidade esférica de centro B e de raio **b**, que não contém cargas. Mostre que o campo eléctrico dentro da cavidade é uniforme e encontre uma expressão para ele.

Solução: $\vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{AB}$

15. Linhas de *força* emergem radialmente numa superfície esférica e têm uma densidade uniforme ao longo da superfície. Quais são as possíveis distribuições de carga dentro da esfera?

Solução: $\rho(r); \sigma(r)$

16. Considere uma esfera isoladora de raio **R** que tem uma carga distribuída uniformemente com densidade volúmica **ρ** , exceto numa região esférica de raio **R/2**, como se representa na figura. Nessa região a densidade volúmica é **2ρ** .



- Calcule o campo eléctrico em qualquer ponto do eixo **xx**. Considere as várias regiões onde o campo é diferente.
- Calcule o campo eléctrico no ponto **P** do eixo **yy**, à distância **2R**, do centro da esfera.

- c) Qual o valor do campo elétrico no ponto **P**, se a esfera de raio **R/2** fosse comprimida até ficar com raio nulo, mantendo a carga total das duas regiões constante.
- d) Determine o fluxo através de uma esfera concêntrica com a esfera na origem, e que passa por **P**.

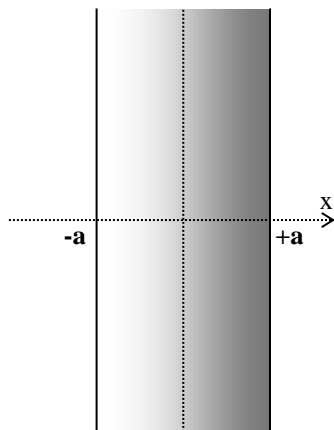
17. Determine o campo elétrico em qualquer ponto do espaço devido a um plano infinito uniformemente carregado:

- a) A partir da lei de Coulomb.
- b) Usando a lei de Gauss.

Justifique o cálculo.

Solução: $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{n}$

18. Considere que no espaço limitado por dois planos infinitos e paralelos ($x=a$ e $x=-a$), existe uma distribuição de carga $\rho = \rho x$.



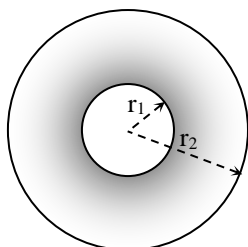
- a) Determine a carga por unidade de área existente entre os planos.
- b) Mostre que o campo no exterior é nulo.
- c) Determine o campo em cada ponto no interior dos planos.
- d) Represente graficamente $|\vec{E}|$ em função de x .

e) Que densidade de carga σ deveria ter a superfície dos planos, sem carga no interior, para o campo ter o mesmo valor em $x=0$ que na situação anterior?

Solução: a) $Q=0$ b) $\vec{E}_{\text{ext}} = \vec{0}$ c) $E_{\text{int}} = \frac{\alpha}{2\epsilon_0} (a^2 - x^2)$

 d) porção de parábola para $-a \leq x \leq +a$ e) $\sigma = \frac{\alpha a^2}{2}$

19. Considere uma coroa esférica de raios interno r_1 e externo r_2 com uma densidade de carga $\rho = \frac{\alpha}{r}$.

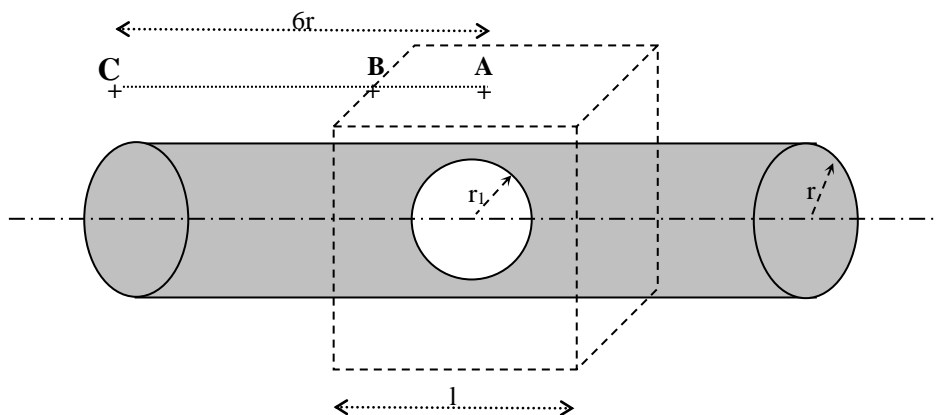


- Determine o campo elétrico em qualquer ponto do espaço.
- Que tipo de distribuição poderia criar um campo uniforme no interior da coroa esférica?

Solução:

$$\begin{aligned} r < r_1 &\Rightarrow E=0 \\ r_1 < r < r_2 &\Rightarrow E = \frac{\alpha}{2\epsilon_0 r^2} (r^2 - r_1^2) \\ r > r_2 &\Rightarrow E = \frac{\alpha}{2\epsilon_0 r^2} (r_2^2 - r_1^2) \end{aligned}$$

20. Considere a seguinte distribuição de cargas livres ρ num cilindro infinito de raio r , onde existe um vazio esférico de raio $r_1 < r$ e com centro sobre o eixo.



- Determine o fluxo do campo elétrico através de um cubo de aresta $l > 2r$, de tal modo que o cilindro o atravesse, nos casos em que:
 - no interior do cubo se encontra o espaço vazio.
 - o interior do cubo não inclui esse espaço.
- Mostre que estes cálculos não lhe permitem calcular o campo \vec{E} em qualquer ponto do espaço.
- Usando o princípio da sobreposição determine o campo elétrico nos pontos **A**, **B** e **C**.

Solução: a) i) $\phi = \frac{\rho\pi}{\epsilon_0} \left(r^2 l - \frac{4}{3} r_1^3 \right)$

a) ii) $\phi = \frac{\rho\pi}{\epsilon_0} r^2 l$

c) $\vec{E}_A = \frac{\rho}{\epsilon_0} \left(\frac{r^2}{l} - \frac{4}{3} \frac{r_1^3}{l^2} \right) \hat{r} ; \quad \vec{E}_B = \left(-\frac{\rho r_1^3 \sqrt{2}}{3\epsilon_0 l^2} + \frac{\rho r^2}{\epsilon_0 l} \right) \hat{r}_{cil} \pm \frac{\rho r_1^3 \sqrt{2}}{3\epsilon_0 l^2} \hat{z}$

$$\vec{E}_C = \frac{\rho}{\epsilon_0} \left(\frac{r^2}{l} - \frac{r_1^3 l}{6 (l^2/4 + 36r^2)^{3/2}} \right) \hat{r}_{cil} \pm \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{2r_1^3 r}{(l^2/4 + 36r^2)^{3/2}} \hat{z}$$

Relações campo-potencial e equações locais do campo

21. Uma esfera de raio R contém uma distribuição volúmica de cargas ρ , de simetria esférica.

a) Determine a função \vec{E} sabendo que o campo elétrico dentro da esfera é radial com um módulo constante E_0 :

i) aplicando a forma local do teorema de Gauss.

j) aplicando a forma integral do teorema de Gauss.

b) Calcule a carga total Q contida na esfera e determine o campo elétrico ao exterior da esfera. Verifique a continuidade do campo na fronteira interior/exterior da esfera.

Solução: $\rho(r) = \frac{2\epsilon_0}{r} E_0 ; \quad Q = 4\pi\epsilon_0 E_0 R^2 ; \quad E(r) = \frac{E_0 R^2}{r^2}$

22. O chamado “potencial de Yukawa” é uma maneira de representar as forças nucleares, cujo alcance é muito mais curto do que as forças coulombianas:

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\exp(-r/a)}{r} \quad \text{onde } a > 0 \text{ representa o alcance da interação.}$$

Determine a distribuição volúmica de carga ρ que cria este potencial.

Solução: $\rho = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\exp(-r/a)}{r a^2}$

23. O espaço entre dois cilindros coaxiais infinitos, de raios $R_1 < R_2$, está carregado com uma densidade volúmica de carga $\rho = a/r$.

a) Determine o campo elétrico em qualquer ponto do espaço.

b) Deduza as expressões do potencial elétrico, sob a hipótese que $V(R_1) = 0$.

Solução:

$$a) \quad E_1 = 0 \quad ; \quad E_2 = \frac{a}{\epsilon_0} \frac{r - R_1}{r} \quad ; \quad E_3 = \frac{a}{\epsilon_0} \frac{R_2 - R_1}{r}$$

b)

$$V_1 = 0 \quad ; \quad V_2 = \frac{a}{\epsilon_0} \left(R_1 \ln \frac{r}{R_1} - r + R_1 \right) \quad ; \quad V_3 = \frac{a}{\epsilon_0} \{ (R_1 - R_2)(1 + \ln r) - R_1 \ln R_1 + R_2 \ln R_2 \}$$

24. Um longo cilindro de raio **a** tem uma carga uniforme por unidade de comprimento **Q** C/m. Encontre a d.d.p. entre dois pontos situados à distância **r₁** e **r₂** do eixo do cilindro (**a < r₁** < **r₂**).

Solução: $V_1 - V_{21} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}$

25. Ao longo de um plano o potencial é dado por: $V = \frac{a \cos \theta}{r^2} + \frac{b}{r}$ em que **r** e **θ** são as variáveis do sistema polar de coordenadas e **a** e **b** são duas constantes. Encontre as componentes **E_ρ** e **E_θ** do campo elétrico, em qualquer ponto.

Solução: $E_r = -\frac{2a \cos \theta}{r^3} - \frac{b}{r^2} \quad ; \quad E_\theta = -\frac{a \sin \theta}{r^3} + \frac{b}{r^2}$

26. Dada a função vectorial de componentes:

$$A_x = 6xy \quad A_y = 3x^2 - 3y^2 \quad A_z = 0$$

- a) Calcule o integral de linha de \vec{A} , do ponto **(0,0,0)** para o ponto **(2,4,0)**, através do caminho mais curto. Repita o cálculo para um caminho parabólico. Tire conclusões.
- b) Verifique que o campo \vec{A} pode representar um campo eletrostático.
- c) Calcule a divergência do campo \vec{A} e interprete o resultado atendendo ao significado físico de $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$.

Solução: a) -16 b) $\text{rot} \vec{A} = \vec{0} \Rightarrow \left(\exists V \mid \vec{A} = -\vec{\nabla} V \right)$ c)

$$\text{div} \vec{A} = 0 \Rightarrow \rho = 0$$

27. Numa determinada região do espaço o campo elétrico é dado por:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \hat{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \hat{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \hat{k} \right)$$

Verifique se nessa região do espaço existe ou não uma distribuição de carga elétrica.

Solução: $\rho = \frac{1}{2\pi r}$

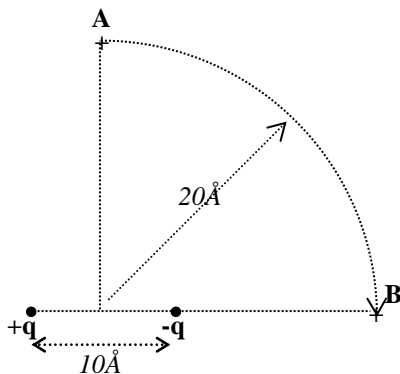
28. Considere uma esfera carregada com uma densidade de carga $\rho = \alpha r$.

- a) Determine a divergência de \vec{E} no interior da esfera.
 b) Atendendo à simetria do sistema, calcule a menos de uma constante, o campo elétrico, em qualquer ponto.

Solução: a) $\text{div} \vec{E} = \frac{\alpha r}{\epsilon_0}$ b) $\vec{E}_{\text{int}} = \frac{\alpha}{4\epsilon_0} r^2 \hat{r}$; $\vec{E}_{\text{ext}} = \frac{\alpha R^4}{4\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{r}$

Trabalho das forças elétricas. Energia eletrostática

29. Um electro está colocado num ponto **A**, no campo dum dipolo de cargas **+q** e **-q** distanciadas de **a=10 Å**.



- a) Qual será o trabalho realizado se o electro fizer uma volta circular de raio **d=20 Å**, partindo do ponto **A** e voltando ao mesmo ponto. Considerando as linhas de campo dum dipolo, indique onde o trabalho é positivo ou negativo.
 b) Determine o trabalho realizado no caminho circular de **A** para **B**.

Solução: a) $W_{A \rightarrow A} = 0$ b) $W_{A \rightarrow B} = -e \cdot \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a}{d^2 - (a^2/4)}$

30. Calcule a energia eletrostática **W** duma esfera de raio R e de densidade de carga ρ uniforme, colocada no vácuo, pelos dois métodos seguintes

- a) A partir da densidade de energia.

- c) Usando a lei $W = \frac{1}{2} \int \rho V dv$ ou calculando o trabalho necessário para carregar a esfera, a partir de $W = \int_0^Q V dq$.
- d) A esfera representa um eletrão. A sua energia total pode ser vista como a energia duma partícula em repouso (seja $W = m.c^2$), ou pode ser vista como energia eletrostática. Na base desta equivalência, calcule o raio equivalente do eletrão (chamado “raio clássico” do eletrão).
 $m \cong 10^{-30} \text{ kg}$; $c = 3.10^8 \text{ m/s}$; $e = 1,6.10^{-19} \text{ C}$

Solução: $W = \frac{4}{15} \frac{\pi \rho^2 R^5}{\epsilon_0}$; $R \cong 1,5.10^{-15} \text{ m}$

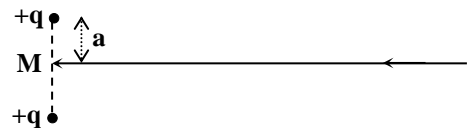
31. Um dipolo de carga $\pm q$ e separação a está colocado ao longo do eixo $x'x$.



- a) Calcule o trabalho necessário para trazer uma carga $+Q$ desde o infinito até ao ponto S , em $x = b$.
- b) Escreva uma aproximação para o potencial em S , na condição $b \gg a$.
- c) Use o resultado da alínea anterior para obter a amplitude e direção do campo elétrico no ponto S .

Solução: $W = \frac{Q q a}{4\pi\epsilon_0 (b^2 - a^2/4)}$; $V_s = \frac{q a}{4\pi\epsilon_0 b^2}$; $\vec{E} = \frac{2 q a}{4\pi\epsilon_0 b^3} \hat{x}$

32. Duas cargas pontuais idênticas de valor $+q$ estão separadas de uma distância $2a$ como mostra a figura.



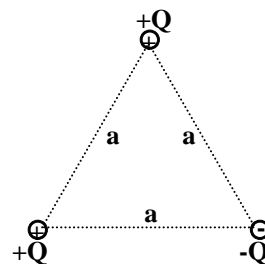
Calcule o trabalho por unidade de carga para trazer uma carga desde o infinito ao longo de uma linha representada na figura e até ao ponto M :

- a) calculando o integral de linha
 b) usando o conceito de potencial

Solução: $W = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 a}$

33. Calcule a energia potencial do sistema de cargas ilustrado na figura.

Nota: a energia potencial de um sistema de cargas pontuais é igual ao trabalho necessário para trazer as cargas para as suas posições finais, desde muito longe (do infinito).



Solução:
$$E_p = -\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a}$$

Condutores

34. Uma esfera metálica tem o raio **R** e está isolada de todos os outros corpos.

- Expresse o potencial da superfície da esfera como função da carga nela colocada.
- Integre a expressão da alínea anterior para determinar o trabalho necessário para carregar a esfera a um potencial **V**.

Solução:
$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \quad ; \quad W = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}$$