Exercícios de MD F. 6 - Recorrência e Funções Geradoras

1. Para subir uma certa escada, o Pedro consegue, com um único passo, avançar um, dois ou três degraus. Encontre uma relação de recorrência para a sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde a_n é o número de maneiras possíveis em que o Pedro consegue subir n degraus. Apresente as condições iniciais.

2. Uma experiência é executada lançando-se um dado até que apareçam 2 números pares. Determine uma relação de recorrência para o número de experiências que terminam no n-ésimo lançamento ou antes.

3. Determine uma relação de recorrência para o número de sequências binárias de comprimento n com 3 zeros consecutivos. Indique as condições iniciais.

4. Suponha que um par de coelhos tem o primeiro par de descendentes após dois meses de estarem juntos e que, posteriormente, no final de cada mês têm mais um par de descendentes. Começando com um par de coelhos, deduza uma relação de recorrência para o número c_n de pares de coelhos que nasceram nos primeiros n meses.

5. Suponha que uma equação de recorrência linear homogénea tem como raízes características 1 e 3 com multiplicidade um, e 2 com multiplicidade dois.
   (a) Explicite a equação de recorrência.
   (b) Determine a solução geral desta equação de recorrência linear homogénea.

6. Resolva as seguintes relações de recorrência:
   (a) $a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n - 6$, $n \geq 0$, com $a_0 = 0$ e $a_1 = 6$;
   (b) $a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = n + 2^n$, $n \geq 2$, com $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$;

7. Sendo $p(x) = 2x^2 + x$, determine uma fórmula fechada para o cálculo da soma $S_n = \sum_{i=1}^{n} p(i)$ começando por estabelecer uma relação de recorrência apropriada.

8. Determine a relação de recorrência linear não homogénea com solução geral $a_n = (c_1+c_2n)2^n + c_3 + 4n$, onde c_1, c_2 e c_3 são constantes.

9. Sendo p_n o número de partições de um conjunto de cardinalidade n em dois subconjuntos não vazios, deduza uma relação de recorrência para p_n e encontre a respectiva solução.

10. Usando transformações adequadas, resolva as seguintes relações de recorrência não lineares:
    (a) $a_n = na_{n-1} + n!$, com condição inicial $a_0 = 2$;
    (b) $5na_n + 2na_{n-1} = 2a_{n-1}$, $n \geq 3$, com condição inicial $a_2 = -30$;
    (c) ${a_n}^3 = {a_{n-1}}^2$, $n \geq 2$, $a_1 = 2$ (assume-se que $a_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$);
    (d) $a_n = 2(a_{n-1} + 2(a_{n-2} + \cdots + 2(a_1 + 2(a_0 + a_o)^2)^2 \cdots)^2)^2$, com $a_0 = 2$ e $a_1 = 2(a_0 + a_o)^2$.

11. Seja $h(k, n)$ o número de possibilidades de colocação de k pacientes numa sala de espera com n cadeiras em linha, de tal forma que os pacientes não se sentam em cadeiras vizinhas, deduza uma relação de recorrência para $h(k, n)$.

12. Defina a função geradora para a sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde a_n é o número de soluções inteiras da equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = n$, nos casos em que

(a) $0 \leq x_1 \leq 5$, $0 \leq x_2 \leq 3$, $2 \leq x_3 \leq 8$, $0 \leq x_4 \leq 4$;

(b) $0 \leq x_i \leq 8$, para $i = 1, 2, 3, 4$, x_1 é par e x_2 é ímpar.

13. (a) Use uma função geradora para modelar o número de diferentes resultados numa eleição para eleger o delegado de uma turma com 27 alunos, dos quais 4 são candidatos? Qual é o coeficiente dessa função geradora que nos dá a resposta?

    (b) Suponha que cada aluno que é candidato vota em si próprio. Neste caso qual é a função geradora e o coeficiente desejado?

    (c) Suponha que nenhum candidato recebe a maioria dos votos. Repita a alínea (a).

14. Calcule o número de possibilidades de troca de 50 euros em notas de 20 euros, 10 euros e 5 euros e moedas de 2 euros e 1 euro, sabendo que dispõe no máximo de cinco moedas de 1 euro, cinco moedas de 2 euros e cinco notas de 5 euros (não havendo qualquer limitação em relação às restantes notas).

15. Determine o número de soluções inteiras não negativas da equação

$$3a + 2b + 4c + 2d = r.$$

16. Determine as funções geradoras das seguintes sucessões:

    (a) $b_n = nk^n$, para $n \in \mathbb{N}_0$;

    (b) $c_n = k + 2k^2 + 3k^3 + \cdots + nk^n$, para $n \in \mathbb{N}_0$;

    (c) $a_n = C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2}$, com $a_0 = -1$ e $a_1 = 2$, onde C_1 e C_2 são constantes.

17. Determine as sucessões $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ associadas às seguintes funções geradoras:

    (a) $g(x) = (2 + x)^4$;

    (b) $f(x) = \frac{6x}{(1+2x)^2} + 2 - x^2$

18. Resolva as equações seguintes utilizando o método da função geradora:

    (a) $a_n = na_{n-1}$, $n \geq 2$, com $a_1 = 1$;

    (b) $a_n = a_{n-1} + n$, $n \geq 1$, com $a_0 = 1$;

    (c) $a_n = 3a_{n-1}$, para $n \geq 1$, com $a_0 = 2$;

    (d) $u_n = u_{n-1} + n^2$, para $n \geq 1$, com $u_0 = 2$;

    (e) $u_{n+1} = 3u_n - 1$, para $n \geq 0$, com $u_0 = 1$;

    (f) $u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n = 0$, $n \geq 0$, com $u_0 = 0$ e $u_1 = 1$.

19. Considere a relação de recorrência $u_n - 2u_{n-1} = 4^n$, $n \geq 1$, $u_0 = 1$.

    (a) Mostre que a função geradora da sucessão (u_n) é $f(x) = \frac{1}{(1-2x)(1-4x)}$.

    (b) Determine uma fórmula não recursiva para u_n, $n \geq 0$.

20. (a) Escreva a função geradora ordinária $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$ como uma função racional para a sucessão dos números naturais $a_n = n$.

    (b) Mostre que a função racional $f(x) = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3}$ é a função geradora da sucessão definida por $a_n = n^2$.

    (c) Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ definida por $a_0 = 0$, $a_1 = \alpha$ e

    $$a_n = a_{n-2} - n^2,\ n \geq 2.$$

    Obtenha a função geradora ordinária desta sucessão como soma de funções racionais. Use as respostas das questões anteriores.

    (d) Obtenha uma fórmula fechada para a sucessão dada na alínea anterior.

21. Resolva o sistema de equações de recorrência

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 2b_{n-1} \\ b_n = a_{n-1} + b_{n-1} \end{cases}$$

com condições iniciais $a_0 = b_0 = 1$.

Soluções:

1. Tenha em conta que podemos partir o número de maneiras de subir n degraus em três conjuntos disjuntos. O conjunto X_1 de todas as subidas possíveis em que no primeiro passo se avança apenas um degrau (cuja cardinalidade é a_{n-1}), o conjunto X_2 de todas as subidas possíveis em que no primeiro passo se avançam dois degraus (cuja cardinalidade é a_{n-2}) e o conjunto X_3 de todas as subidas possíveis em que no primeiro passo se avançam três degraus (cuja cardinalidade é a_{n-3}).

2. $a_0 = 0, a_1 = 0$ e $a_n = a_{n-1} + (n-1) \times 3 \times 3^{n-2} \times 3$, para $n \geq 2$.

3. Note que o número de sequências que terminam em 1 é a_{n-1}, o número de sequências que terminam em 10 é a_{n-2}, o número de sequências que terminam em 100 é a_{n-3} e o número de sequências que terminam em 000 é 2^{n-3}.

4. $c_n =$ n^o de pares de coelhos que nasceram nos primeiros n-1 meses+um par de coelhos que nasce por cada par de coelhos que nasceu nos primeiros n-2 meses, ou seja, $c_1 = 1, \quad c_2 = 2, \quad c_n = c_{n-1} + c_{n-2}$.

5. (a) $a_n - 8a_{n-1} + 23a_{n-2} - 28a_{n-3} + 12a_{n-4} = 0$.
   (b) $a_n = A + B3^n + C2^n + Dn2^n$, para todo $n \geq 0$, com A, B, C e D constantes.

6. (a) $a_n = \frac{3^{n+1}}{5} + \frac{(-2)^{n+3}}{5} + 1$, para $n \geq 0$.
   (b) $a_n = (-4 + \frac{3}{2}n)2^n + n^2 2^{n-1} + 4 + n$, para $n \geq 0$.

7. $S_1 = 3$ e $S_n = S_{n-1} + 2n^2 + n$, $n \geq 2$.
   $S_n = 2\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{n(n+1)(4n+5)}{6}$, $n \geq 1$.

8. $a_n - 5a_{n-1} + 8a_{n-2} - 4a_{n-3} = 4$.

9. Se $\{A \cup \{n\}, B\}$ é uma partição de $[n]$, então ou $\{A, B\}$ é partição de $[n-1]$ ou $A = \varnothing$ e $B = [n-1]$.
   Note-se que $\{A, B\} = \{B, A\}$, $a_1 = 0$ (e $a_2 = 1$). Logo, $a_n = 2a_{n-1} + 1$, $n \geq 2$ (ou $a_{n+1} = 2a_n + 1$, $n \geq 1$). Esta equação de recorrência tem como solução $a_n = 2^{n-1} - 1$, $n \geq 1$.

10. (a) Substituição: $a_n = b_n \times n!$.
    Fórmula fechada: $a_n = (n+2) \cdot n!$, para todo $n \geq 0$.
    (b) Substituição: $a_n = b_n/n$.
    Fórmula fechada: $a_n = \frac{-3\times(-2)^n}{n5^{n-3}}$, para todo $n \geq 2$. 5Fórmula fechada:
    (c) Substituição: $b_n = \log_2 a_n$.
    Fórmula fechada: $a_n = 2^{\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}$, para todo $n \geq 1$.
    (d) Substituição: $b_n = \log_2 a_n$.
    Fórmula fechada: $a_n = 2^{2^{n+2}-3}$ para $n \geq 0$.

11. $h(k, n) = h(k, n-1) + kh(k-1, n-2)$, para $k \geq 1$ e $n \geq 1$.

12. (a) $f(x) = (1 + x + \cdots + x^5)(1 + x + x^2 + x^3)(x^2 + x^3 + \cdots + x^8)(1 + x + \cdots + x^4)$.
    (b) $f(x) = (1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8)(x + x^3 + x^5 + x^7)(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^8)^2$.

13. (a) $f(x) = (1 + x + x^2 + \cdots + x^{27})^4$, coeficiente de x^{27}.
    (b) $f(x) = (x + x^2 + \cdots + x^{24})^4$, coeficiente de x^{27}.
    (c) $f(x) = (1 + x + x^2 + \cdots + x^{13})^4$, coeficiente de x^{27}.

14. Coeficiente c_{50} do polinómio gerador $p(x) = \sum_{n=0}^{130} c_n x^n$, onde
    $$p(x) = (1+x+\cdots+x^5)(1+x^2+\cdots x^{10})(1+x^5+\cdots+x^{25})(1+x^{10}+\cdots+x^{50})(1+x^{20}+x^{40}).$$

15. Coeficiente de x^r na série de potências da função g definida por
$g(x) = (1+x^3+x^6+x^9+\cdots)(1+x^2+x^4+x^6+\cdots)^2(1+x^4+x^8+x^{12}+\cdots) = \frac{1}{(1-x^3)(1-x^2)^2(1-x^4)}$.

16. (a) $B(x) = \frac{kx}{(1-kx)^2}$.
   (b) $C(x) = \frac{kx}{(1-x)(1-kx)^2}$.
   (c) $A(x) = \frac{-1+(2+C_1)x}{1-C_1x-C_2x^2}$.

17. (a) $a_0 = 16$, $a_1 = 32$, $a_2 = 24$, $a_3 = 8$, $a_4 = 1$, $a_n = 0$, para todo $n \geq 5$.
   (b) $a_0 = 2$, $a_1 = 6$, $a_2 = -25$, $a_n = -3(-2)^n n$, para $n \geq 3$.

18. (a) $a_n = n!$, para todo $n \geq 1$.
   (b) $a_n = 1 + \binom{n+1}{2}$, para todo $n \geq 0$.
   (c) $a_n = 2(3)^n$, para todo $n \geq 0$.
   (d) $u_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2$, para todo $n \geq 0$.
   (e) $u_n = \frac{1+3^n}{2}$, para todo $n \geq 0$.
   (f) $u_n = -2^n + 3^n$, para todo $n \geq 0$.

19. (b) $u_n = 2^{2n+1} - 2^n$, para todo $n \geq 0$.

20. (a) $f(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$.
   (c) $f(x) = (\alpha+1)\frac{x}{1-x^2} - \frac{x}{(1-x)^4}$.
   (d) $a_n = \frac{\alpha+1}{2} - \frac{\alpha+1}{2}(-1)^n - \frac{(n+2)(n+1)n}{6}$, para todo $n \geq 0$.

21. $a_n = \frac{1+\sqrt{3}}{2}(2+\sqrt{3})^n + \frac{1-\sqrt{3}}{2}(2-\sqrt{3})^n$ e $b_n = \frac{1}{2}\left((2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n\right)$, para todo $n \geq 0$.