

# Matemática Discreta

## Lógica de Primeira Ordem - 5

Universidade de Aveiro 2019/2020

<http://moodle.ua.pt>

**Substituição de variáveis**

**Substituição de termos**

**Unificação de conjuntos de expressões**

**Algoritmo de unificação**

**Referências e bibliografia**

## Substituição de variáveis

### Notação

- $VAR = \{v : v \text{ variável individual} \}$ ;
- $CONST = \{c : c \text{ constante} \}$ ;
- $TERM = \{t : t \text{ termo} \}$ .

Observação:  $CONST \cup VAR \subset TERM$ .

## Substituição de variáveis

### Definição (de substituição de variáveis)

Uma substituição é uma função  $\varphi_V : VAR \rightarrow TERM$  tal que, sendo  $U_\varphi = \{v \in VAR : \varphi_V(v) \neq v\}$  e supondo que  $U_\varphi = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , podemos descrever a função  $\varphi_V$  através do conjunto

$$\{t_1/v_1, t_2/v_2, \dots, t_n/v_n\},$$

onde  $t_i = \varphi_V(v_i) \neq v_i$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$ .  
 $\varepsilon$  denota a substituição identidade ou vazia.

Este modo de descrever  $\varphi_V$  leva-nos com algum abuso de linguagem a escrever  $\varphi_V = \{t_1/v_1, \dots, t_n/v_n\}$  para indicar que

- se  $v_i \in U_\varphi$ , então  $\varphi_V(v_i) = t_i$ ;
- se  $v_i \notin U_\varphi$ , então  $\varphi_V(v_i) = v_i$ .

## Exemplos

Seguem-se dois exemplos de substituições.

$$1) \varphi_V = \{f(z)/x, x/z\}$$

- $U_\varphi = \{x, z\}$ ;
- $\varphi_V(x) = f(z)$ ;
- $\varphi_V(z) = x$ .

$$2) \delta_V = \{a/x, g(y)/y, f(g(x))/z\}$$

- $U_\delta = \{x, y, z\}$ ;
- $\delta_V(x) = a$ ;
- $\delta_V(y) = g(y)$ ;
- $\delta_V(z) = f(g(x))$ .

## Substituição de termos

### Definição (de substituição de termos)

Seja  $\Theta_V = \{\Theta_V(v_1)/v_1, \dots, \Theta_V(v_n)/v_n\}$  uma substituição.  $\Theta_V$  induz uma função  $\Theta_T : \text{TERM} \rightarrow \text{TERM}$ , definida recursivamente por:

1. se  $t_i \in \text{VAR}$ , então  $\Theta_T(t_i) = \Theta_V(t_i)$ ;
2. se  $t_i \in \text{CONST}$ , então  $\Theta_T(t_i) = t_i$ ;
3. se  $t_i \notin \text{VAR} \cup \text{CONST}$ , ou seja, se  $t_i$  é um termo da forma  $f(t_{i_1}, \dots, t_{i_k})$  onde  $f$  é um símbolo de função com  $k$  argumentos, então

$$\Theta_T(f(t_{i_1}, \dots, t_{i_k})) = f(\Theta_T(t_{i_1}), \dots, \Theta_T(t_{i_k})).$$

## Exemplo

Considerando o termo

$$t = s(x, f(y, u), h(x, z))$$

e a substituição

$$\Theta_V = \{f(x, z)/x, g(y, f(x, y))/y, h(x, y)/z, v/u\},$$

onde  $s, f, g$  e  $h$  são símbolos de função e  $x, y, z$  e  $u$  são símbolos de variáveis, obtém-se:

$$\begin{aligned}\Theta_T(t) &= s(\Theta_T(x), \Theta_T(f(y, u)), \Theta_T(h(x, z))) \\ &= s(\Theta_T(x), f(\Theta_T(y), \Theta_T(u)), h(\Theta_T(x), \Theta_T(z))) \\ &= s(\Theta_V(x), f(\Theta_V(y), \Theta_V(u)), h(\Theta_V(x), \Theta_V(z))) \\ &= s(f(x, z), f(g(y, f(x, y)), v), h(f(x, z), h(x, y))).\end{aligned}$$

## Concretização de uma expressão

### Definição (de concretização de uma expressão)

Dada uma substituição  $\Theta = \{\Theta_V(v_1)/v_1, \dots, \Theta_V(v_n)/v_n\}$  e uma expressão  $E$ , designa-se por concretização (ou exemplo) de  $E$  e denota-se por  $E\Theta$ , a expressão que se obtém de  $E$  substituindo, simultaneamente, cada ocorrência da variável  $v_i$  por  $t_i = \Theta_V(v_i)$ .

**Observação:** se  $W$  é um conjunto de expressões, então  $W\Theta = \{E\Theta : E \in W\}$ .

**Exemplo:** Para  $\Theta = \{a/x, f(b)/y, c/z\}$  e  $E = F(x, y, g(z))$ , obtém-se

$$\begin{aligned}E\Theta &= F(\Theta_T(x), \Theta_T(y), \Theta_T(g(z))) \\ &= F(\Theta_V(x), \Theta_V(y), g(\Theta_V(z))) \\ &= F(a, f(b), g(c)).\end{aligned}$$

## Composição de substituições

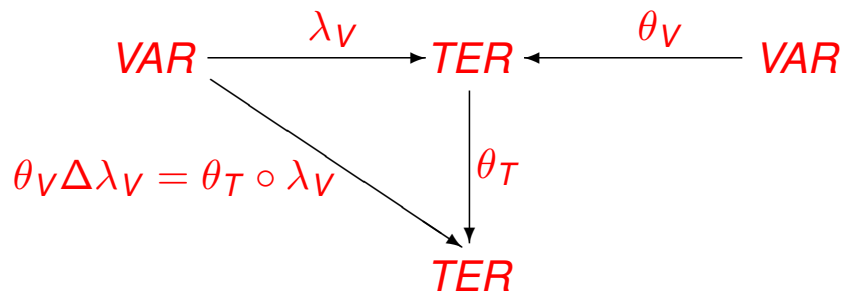
### Definição (de composição de substituições)

Sejam  $\theta_V$  e  $\lambda_V$  substituições de variáveis. Então a composição de  $\theta_V$  após  $\lambda_V$  define-se como sendo

$$\theta_V \Delta \lambda_V = \theta_T \circ \lambda_V,$$

onde o símbolo  $\circ$  denota a composição usual de funções.

De acordo com esta definição, dadas as substituições  $\theta_V$  e  $\lambda_V$ , a sua composição  $\theta_V \Delta \lambda_V$  descreve-se esquematicamente pelo diagrama



## Exemplo

Considerando as substituições  $\theta = \{f(y)/x, z/y\}$  e  $\lambda = \{a/x, g(x)/y, y/z\}$ , vamos determinar  $\theta_V \Delta \lambda_V$ .

$$\begin{aligned}
 \theta_V \Delta \lambda_V &= \theta_T \circ \lambda_V \\
 &= \{\theta_T(\lambda_V(x))/x, \theta_T(\lambda_V(y))/y, \theta_T(\lambda_V(z))/z\} \\
 &= \{\theta_T(a)/x, \theta_T(g(x))/y, \theta_T(y)/z\} \\
 &= \{a/x, g(\theta_V(x))/y, \theta_V(y)/z\} \\
 &= \{a/x, g(f(y))/y, z/z\} \\
 &= \{a/x, g(f(y))/y\}
 \end{aligned}$$

## Unificação

### Definição (de substituição unificadora)

Uma substituição  $\Theta$  diz-se **unificadora** (ou unificador) para o conjunto de expressões  $W = \{E_1, \dots, E_p\}$  se  $W\Theta = \{E\Theta\}$ , ou seja, é tal que  $E\Theta = E_1\Theta = \dots = E_p\Theta$ .

### Definição (de conjunto unificável)

O conjunto de expressões diz-se **unificável** se existe uma substituição unificadora (um unificador) para ele.

**Exemplo:** O conjunto  $W = \{P(a, y), P(x, f(b))\}$  é unificável, uma vez que admite o unificador  $\Theta = \{a/x, f(b)/y\}$ . Com efeito,

$$\begin{aligned} \{E\Theta\} &= \{P(\Theta_T(a), \Theta_T(y)), P(\Theta_T(x), \Theta_T(f(b)))\} \\ &= \{P(a, f(b))\}. \end{aligned}$$

## Unificador mais geral

### Definição (de unificador mais geral)

Um unificador  $\sigma$  para um conjunto de expressões  $W = \{E_1, \dots, E_p\}$  diz-se um **unificador mais geral** se qualquer que seja o unificador  $\theta$  para o conjunto de expressões  $W$  existe uma substituição  $\lambda$  tal que  $\theta = \lambda\Delta\sigma$ .

Ideia base do algoritmo de unificação:

1. Dadas duas expressões verificar se são idênticas:
2. Caso não sejam idênticas, identificar as diferenças para se tentar a unificação.

## Conjunto das diferenças

### Definição (de conjunto das diferenças)

Designa-se por **conjunto das diferenças**,  $D$ , de um conjunto de expressões,  $W \neq \emptyset$ , o conjunto que se obtém da seguinte forma:

1. determina-se o primeiro símbolo (a contar da esquerda), no qual nem todas as expressões em  $W$  têm exactamente esse símbolo;
2. retira-se de cada expressão em  $W$  a subexpressão que começa com o símbolo determinado no item 1 e que ocupa essa posição.

**Exemplo:** Sendo  $W = \{P(x, f(y)), P(x, a), P(x, g(u, y))\}$ , obtém-se  $D = \{f(y), a, g(u, y)\}$ .

## Algoritmo de unificação

- **Input:**  $W$  (conjunto de expressões);
  - a)  $k := 0$ ;  $W_k := W$ ;  $\sigma_k := \varepsilon$ ;
  - b) **Se**  $W_k$  é singular, **então** STOP **senão** determinar o conjunto de diferenças  $D_k$ ;
  - c) **Se** existem  $v_k$  e  $t_k$  em  $D_k$  tais que  $v_k$  é uma variável que não ocorre em  $t_k$ , **então** saltar para d) **senão** STOP ( $W$  não é unificável);
  - d)  $\sigma_{k+1} := \{t_k/v_k\} \Delta \sigma_k$ ;  $W_{k+1} := W_k\{t_k/v_k\}$ ;  $k := k + 1$  e voltar a b);
- **Output:**  $\sigma_k$  (unificador mais geral para  $W$ ).

## Exemplo de aplicação do algoritmo de unificação

Vamos determinar um unificador para o conjunto de expressões  $W = \{P(a, x, f(g(y))), P(z, f(z), f(u))\}$ .

1. Fazer  $k := 0$ ;  $W_0 := W$ ;  $\sigma_0 = \varepsilon$ ;
2. Uma vez que  $W_0$  não é um conjunto singular, pelo que  $\sigma_0$  não é um unificador para  $W$ , determinamos  $D_0 = \{a, z\}$ ;
3.  $\sigma_1 = \{\sigma_1(v_0)/v_0\} \Delta \varepsilon = \{a/z\}$ ;

$$\begin{aligned} W_1 &= W_0\{t_0/v_0\} \\ &= \{P(a, x, f(g(y))), P(z, f(z), f(u))\}\{a/z\} \\ &= \{P(a, x, f(g(y))), P(a, f(a), f(u))\} \end{aligned}$$

4. Uma vez que  $W_1$  não é um conjunto singular, determinamos  $D_1 = \{x, f(a)\}$ ;
5. ...

► **Referência bibliográfica:**

D. M. Cardoso, M. P. Carvalho, *Noções de Lógica Matemática*, Universidade de Aveiro, 2007 (versão revista em Março 2015, disponível na página da disciplina).