

Matemática Discreta

Lógica de Primeira Ordem - 6

Universidade de Aveiro 2019/2020

<http://moodle.ua.pt>

Resolventes de cláusulas

Aplicação do princípio da resolução à lógica de primeira ordem

Formulação geral da implementação do princípio da resolução

Implementação em excel do algoritmo de resolução

Referências e bibliografia

Unificador mais geral de dois ou mais literais e factores

Definição (factor)

Se σ é o unificador mais geral de dois ou mais literais (com o mesmo sinal) de uma cláusula C , então $C\sigma$ é um factor de C .

Exemplo: Considerando a cláusula

$$C = P(x) \vee P(f(y)) \vee Q(x),$$

verifica-se que os literais $L_1 : P(x)$ e $L_2 : P(f(y))$ têm o unificador mais geral $\sigma = \{f(y)/x\}$. Então

$$C\sigma = P(f(y)) \vee Q(f(y))$$

é um factor de C .

Resolvente binária

Definição (de resolvente binária)

Sejam L_1 e L_2 literais das cláusulas C_1 e C_2 as quais não têm qualquer variável em comum. Se L_1 e $\neg L_2$ têm o mesmo unificador mais geral σ , então $(C_1\sigma - L_1\sigma) \cup (C_2\sigma - L_2\sigma)$ diz-se resolvente binária de C_1 e C_2 .

Exemplo: Considerando as cláusulas

$$C_1 : P(x) \vee Q(x) \text{ e } C_2 : \neg P(a) \vee R(y),$$

onde a é uma constante. Os literais $L_1 : P(x)$ e $\neg L_2 : P(a)$ têm o unificador mais geral $\sigma = \{a/x\}$. Assim,

$$(C_1\sigma - L_1\sigma) \cup (C_2\sigma - L_2\sigma) = Q(a) \vee R(y).$$

Logo, $Q(a) \vee R(y)$ é a resolvente binária de C_1 e C_2 .

Resolventes de cláusulas

Definição (de resolvente de cláusulas)

Designa-se por resolvente das cláusulas C_1 e C_2 , uma das seguintes resolventes:

1. uma resolvente binária de C_1 e C_2 ;
2. uma resolvente binária de C_1 e um factor de C_2 ;
3. uma resolvente binária de um factor de C_1 e C_2 ;
4. uma resolvente binária de um factor de C_1 e de um factor de C_2 .

Exemplo

Vamos considerar as cláusulas

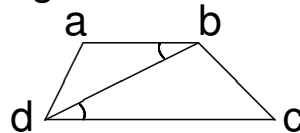
$$C_1 = P(x) \vee P(f(y)) \vee R(g(y)) \text{ e } C_2 = \neg P(f(g(a))) \vee Q(b).$$

- $C_1' = P(f(y)) \vee R(g(y))$ é um factor de C_1 ;
- $R(g(g(a))) \vee Q(b)$ é uma resolvente binária de um factor de C_1' e C_2
- $R(g(g(a))) \vee Q(b)$ é uma resolvente de C_1 e C_2 .

Aplicação do princípio de resolução à lógica de primeira ordem

Exemplo de aplicação

Vamos provar, utilizando o princípio da resolução, que os ângulos internos alternos formados pelas diagonais de um trapézio $T(a, b, c, d)$ são iguais.



- $A_1: (\forall x)(\forall y)(\forall u)(\forall v) T(x, y, u, v) \Rightarrow P(x, y, u, v)$ (a recta que contém o segmento xy é paralela à recta que contém o segmento uv);
- $A_2: (\forall x)(\forall y)(\forall u)(\forall v) P(x, y, u, v) \Rightarrow E(x, y, v, u, v, y)$ (os ângulos xyv e uvy são iguais);
- $A_3: T(a, b, c, d)$.

Aplicação do princípio de resolução à lógica de primeira ordem (cont.)

- Vamos provar que os ângulos internos alternos formados pelas diagonais de um trapézio são iguais, provando que
- $A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge \neg E(a, b, d, c, d, b)$ é inconsistente.
- Ou seja, que o conjunto de cláusulas:

$$S = \{ \neg T(x, y, u, v) \vee P(x, y, u, v), \\ \neg P(x, y, u, v) \vee E(x, y, v, u, v, y), \\ T(a, b, c, d), \\ \neg E(a, b, d, c, d, b) \}$$

é inconsistente.

Procedimento de aplicação do princípio da resolução

A implementação da aplicação do princípio da resolução a um conjunto de cláusulas, S , pode fazer-se de acordo com os seguintes passos:

- 1) Determinar as resolventes dos pares das cláusulas de S .
- 2) Juntar as resolventes determinadas em 1) ao conjunto S .
- 3) Determinar, as resolventes que decorrem do conjunto anteriormente obtido e repetir este procedimento, até que se obtenha a cláusula vazia \diamond .

Sendo S^0, S^1, \dots, S^n os conjuntos de resolventes, obtém-se

$$S^0 = S;$$

$$S^n = \{ \text{resolvente de } C_1 \text{ e } C_2 : C_1 \in S^0 \cup S^1 \cup \dots \cup S^{n-1} \text{ e } C_2 \in S^{n-1} \},$$

$$n = 1, 2, \dots$$

Implementação em Excel

- **INPUT:** S (conjunto de cláusulas)
 1. $k = 0$;
 2. $S^0 = S$;
 3. Criar um número de colunas igual ao número de literais de S^0 e identificá-las pelos respectivos literais;
 4. Criar um número de linhas igual ao número de cláusulas de S^0 e identificá-las pelas respectivas cláusulas;
 4. Para cada linha e coluna:
 - se o correspondente literal aparece em S^0 não negado atribuir o valor 1 ;
 - se aparece negado atribuir o valor -1 ;
 - se não faz parte da cláusula atribuir o valor 0 .

Implementação em Excel (cont.)

- Enquanto existirem pelo menos duas linhas que contenham duas células, associadas à mesma coluna, com sinais contrários, obter S^{k+1} pela "adição", \oplus , dos respectivos pares de linhas, onde:

\oplus	-1	0	1
-1	-1	-1	0
0	-1	0	1
1	0	1	1

- Se resultar uma linha de zeros (correspondente à cláusula vazia) então STOP (conclui-se que S é inconsistente); senão fazer $k = k + 1$;

Implementação em Excel (cont.)

- Exemplo: Seja $S^0 = \{P, \neg U, \neg S \vee U, \neg P \vee S\}$

	Número da cláusula	P	S	U
S^0	(1 ^a): P	1	0	0
	(2 ^a): $\neg U$	0	0	-1
	(3 ^a): $\neg S \vee U$	0	-1	1
	(4 ^a): $\neg P \vee S$	-1	1	0
S^1	(5 ^a): $(1^a) \oplus (4^a)$	0	1	0
	(6 ^a): $(2^a) \oplus (3^a)$	0	-1	0
	(7 ^a): $(3^a) \oplus (4^a)$	-1	0	1
S^2	(8 ^a): $(1^a) \oplus (7^a)$	0	0	1
	(9 ^a): $(2^a) \oplus (7^a)$	-1	0	0
	(10 ^a): $(3^a) \oplus (5^a)$	0	0	1
	(11 ^a): $(4^a) \oplus (6^a)$	-1	0	0
	(12 ^a): $(5^a) \oplus (6^a)$	0	0	0

► **Referência bibliográfica:**

D. M. Cardoso, M. P. Carvalho, *Noções de Lógica Matemática*, Universidade de Aveiro, 2007 (versão revista em Março 2015, disponível na página da disciplina).