

Matemática Computacional

Teórica 1

Departamento de Matemática
Instituto Superior de Engenharia do Porto

2º Semestre 21-22

Teórica 1

- 1 Revisões sobre probabilidades
- 2 Variáveis aleatórias
- 3 Distribuições discretas
- 4 Distribuição de Bernoulli
- 5 Distribuição Binomial
- 6 Distribuição de Poisson

Introdução

- **Fenómeno aleatório** - fenómeno sujeito a influência do acaso, fora do alcance do observador. Caracteriza-se pela sua *imprevisibilidade e regularidade estatística*
- **Experiência aleatória** - todo o procedimento que verifica as seguintes propriedades:
 - pode repetir-se um grande número de vezes nas mesmas condições (ou em condições semelhantes)
 - a sua realização dá um resultado de entre um conjunto de resultados possíveis
 - cada um dos resultados da experiência é imprevisível mas é possível considerar *estabilidade na frequência da sua ocorrência*

Experiências aleatórias: exemplos

- 1 Lançamento de dois dados e registo do número de pontos
- 2 Lançamento de uma moeda e observação da face voltada para cima
- 3 Contagem do número mensal de acidentes de automóvel numa autoestrada
- 4 Registo do tempo de vida de uma pessoa, em anos
- 5 Registo do tempo de trabalho de uma máquina até à primeira avaria

Espaço de resultados

Espaço de resultados ou **espaço amostra** - Ω - conjunto de todos os resultados possíveis associados a uma experiência aleatória.

Para os exemplos anteriores, tem-se

1 $\Omega = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), \dots, (6, 5), (6, 6)\}$

2 $\Omega = \{\text{face nacional}, \text{face europeia}\} = \{N, E\} = \{1, 0\}$

3 $\Omega = \mathbb{N}_0$

4 $\Omega = \mathbb{N}$

5 $\Omega = \mathbb{R}^+$

Acontecimento aleatório - qualquer subconjunto do espaço de resultados

Álgebra de acontecimentos

Seja Ω o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória.

Diz-se que $A \subset \Omega$ se realizou se o resultado da experiência, ω , é um elemento de A , i.é., $\omega \in A$.

- $A \subset B$ - A é um subacontecimento de B se e só se a realização de A implica a realização de B
- \overline{A} - acontecimento complementar (ou contrário) de A é o conjunto de todos os elementos de Ω que não estão em A
- $A \cup B$ - união de A com B é o acontecimento que consiste na realização de pelo menos um dos acontecimentos A ou B

Álgebra de acontecimentos

- AB ou $A \cap B$ - "**produto**" ou **interseção** é o acontecimento que se realiza apenas quando ambos os acontecimentos se realizam
- $A \setminus B = A \cap \overline{B}$ - **diferença** dos acontecimentos A e B é o acontecimento que se realiza se e só se A se realiza sem que B se realize
- Os acontecimentos A e B dizem-se **mutuamente exclusivos** ou **incompatíveis** se e só se a realização de um implica a não realização do outro, i.é., $A \cap B = \emptyset$
- \emptyset - acontecimento impossível
- Ω - acontecimento certo

Propriedades das operações sobre acontecimentos

Comutatividade

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

Associatividade

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

Distributividade

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

Leis de De Morgan

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Probabilidade de um acontecimento

Definição clássica - Laplace (séc. XIX), sob a hipótese de que todos os casos são igualmente prováveis ou possíveis.

Probabilidade de realização de um acontecimento A é

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favoráveis a } A}{\text{número total de casos possíveis}}$$

Definição frequencista

$$f_n(A) = \frac{n_A}{n}$$

sendo n o número de repetições duma experiência aleatória e n_A o número de vezes que se verificou o acontecimento A .

Para n “grande” tem-se para as frequências relativas

$$f_n(A) = \frac{n_A}{n} \approx P(A)$$

A probabilidade é interpretada como a frequência limite.

Axiomática das Probabilidades

Definição:

Probabilidade, P , é uma aplicação que a cada acontecimento de Ω faz corresponder um número real,

$$\begin{aligned}P : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ A &\longmapsto P(A)\end{aligned}$$

e que satisfaz os seguintes axiomas:

$$\textbf{(A1)} \quad P(A) \geq 0, \forall A \subset \Omega$$

$$\textbf{(A2)} \quad P(\Omega) = 1$$

$$\textbf{(A3)} \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) \text{ se } A \cap B = \emptyset$$

Leis das Probabilidades

$$1 \quad P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

$$2 \quad P(\emptyset) = 0$$

$$3 \quad A \subset B \implies P(A) \leq P(B)$$

$$4 \quad P(A) \leq 1$$

$$5 \quad P(A \setminus B) = P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$6 \quad P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \text{ se } A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$$

$$7 \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$8 \quad P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - \\ \dots - P(A_{n-1} \cap A_n) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \dots + \\ P(A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n) + \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)$$

Probabilidade Condicionada

Probabilidade condicionada de A dado B ou probabilidade de A se B ($P(B) > 0$) é

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Teorema

Se $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$ então

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A) = P(B) \times P(A|B)$$

Independência

Dois acontecimentos dizem-se **independentes** se e só se

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Teorema

Se A e B são acontecimentos independentes, também são independentes os acontecimentos

A e \overline{B}

\overline{A} e B

\overline{A} e \overline{B}

Nota: Afirmar que os acontecimentos A e B são independentes não é equivalente a afirmar que A e B são mutuamente exclusivos

Teorema da probabilidade total

Teorema

Sejam A_1, A_2, \dots, A_n acontecimentos que definem uma partição de Ω , isto é, $A_1 \cup \dots \cup A_n = \Omega$ e $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$.

Se $P(A_i) > 0$ então para qualquer acontecimento $B \subset \Omega$, tem-se

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B|A_i) P(A_i)$$

Teorema de Bayes

Teorema

Sejam A_1, A_2, \dots, A_n acontecimentos que definem uma partição de Ω tais que $P(A_i) > 0$ e seja B um outro acontecimento de Ω . Então, para $k = 1, \dots, n$, tem-se

$$P(A_k|B) = \frac{P(A_k) P(B|A_k)}{\sum_{i=1}^n P(A_i) P(B|A_i)}$$

Variável aleatória

Variável aleatória (v.a.) X , é uma função de domínio Ω e contradomínio contido em \mathbb{R} , cujo valor é determinado pelo resultado de uma experiência aleatória, i.é,

$$\begin{aligned} X : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longmapsto X(\omega) = x \end{aligned}$$

Aos valores de uma variável aleatória associamos uma probabilidade.

Função distribuição cumulativa

Designa-se **função distribuição cumulativa** ou **função de distribuição** da variável aleatória X e representa-se por F ou F_X , à aplicação

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\longrightarrow [0, 1] \\ x &\longmapsto F(x) = P[X \leq x] \end{aligned}$$

Algumas propriedades da função de distribuição

- $0 \leq F(x) \leq 1$
- $F(-\infty) = 0$ e $F(+\infty) = 1$
- Se $x_1 < x_2$ então $F(x_1) < F(x_2)$
- $P(X = a) = F(a) - F(a^-)$
- $P(X < x) = P(X \leq x) - P(X = x)$
- $P(X \geq x) = 1 - P(X < x)$
- $P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a)$
- $P(a < X < b) = P(X < b) - P(X \leq a)$
- $P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X < a)$
- $P(a \leq X < b) = P(X < b) - P(X < a)$

Tipos de variáveis aleatórias

Uma v.a. X diz-se **discreta** se o conjunto de valores que pode assumir for numerável ou infinitamente numerável.

Exemplos:

- 1 número de pintas que sai no lançamento de um dado
- 2 registo, a intervalos regulares, do número de pessoas em fila de espera na caixa de um supermercado

Uma v.a. X diz-se **contínua** se o conjunto de valores que pode assumir não for numerável, isto é, se assume qualquer valor real num dado intervalo.

Exemplos:

- 1 o peso de um indivíduo
- 2 o comprimento de uma folha de uma planta

Distribuições discretas - conceitos gerais

Função de probabilidade

Seja X uma v.a. discreta podendo assumir os valores x_1, x_2, \dots, x_n .

Chama-se função massa de probabilidade ou função de probabilidade da v.a. X à aplicação que a cada valor x_i faz corresponder $f(x_i) = P(X = x_i)$.

A função de probabilidade verifica as seguintes propriedades:

1 $f(x_i) \geq 0, \forall x_i$

2 $\sum_{i=1}^n f(x_i) = 1$

Normalmente apresenta-se um quadro da distribuição de probabilidade da variável aleatória X

Tabela: Distribuição de probabilidade

x_i	x_1	x_2	x_n
$f(x_i) = P(X = x_i)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_n)$

Função distribuição

A função distribuição define-se por

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_k \leq x} P(X = x_k) = \sum_{x_k \leq x} f(x_k)$$

Parâmetros de uma distribuição discreta

Parâmetros de uma distribuição são **indicadores** que a caracterizam.

Valor Médio

Designa-se por **valor médio**, **esperança matemática**, **valor esperado** ou **média**, e representa-se por $E(X)$, μ_X ou μ ,

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i = \sum_{i=1}^n x_i f(x_i)$$

Propriedades:

- 1 $E(k) = k$ (k constante)
- 2 $E(kX) = kE(X)$
- 3 $E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i)$

Parâmetros de uma distribuição discreta

Variância

Designa-se por variância de uma v.a. X e representa-se por $Var(X)$, $V(X)$, σ_X^2 ou simplesmente σ^2 a

$$\begin{aligned} V(X) &= E[(X - \mu)^2] \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 f(x_i) \\ &= E(X^2) - E(X)^2 \end{aligned}$$

Desvio-padrão

$$\sigma = +\sqrt{V(X)}$$

Propriedades da variância:

1 $V(X) \geq 0$

2 $V(k) = 0$

3 $V(kX) = k^2V(X)$

4 $V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n V(X_i)$, se X_i v.a's independentes

Distribuição de Bernoulli

Prova de Bernoulli

É uma experiência aleatória que serve de base a várias distribuições teóricas.

Só pode ter um de dois resultados: **sucesso**, caso ocorra um determinado acontecimento A , ou **insucesso**, caso não ocorra A .

Exemplo:

Lançar uma moeda e verificar se sai cara (sucesso) ou coroa (insucesso).

Distribuição de Bernoulli

É a distribuição associada à contagem do número de sucessos que ocorrem numa única prova de Bernoulli.

Representa-se simbolicamente por $X \sim B_e(p)$, sendo p a probabilidade de ocorrer "sucesso" e $q = 1 - p$ a probabilidade de ocorrer "insucesso".

Função de probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} 1 - p, & x = 0 \\ p, & x = 1 \end{cases}$$

Distribuição de Bernoulli

Valor médio

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^2 x_i p_i = 0(1-p) + 1 \times p = p$$

Variância

$$\sigma^2 = V(X) = \sum_{i=1}^2 x_i^2 p_i - \mu^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq$$

Distribuição Binomial

Seja X uma v.a que conta o número de sucessos numa sucessão de n provas repetidas, onde

- as provas são todas de Bernoulli (sucesso ou insucesso)
- as provas são independentes (o resultado obtido numa das provas não afeta as restantes)
- a probabilidade de sucesso (p) é igual em todas as provas

Diz-se que X tem **distribuição Binomial** de parâmetros n e p , simbolicamente,

$$X \sim B_i(n, p)$$

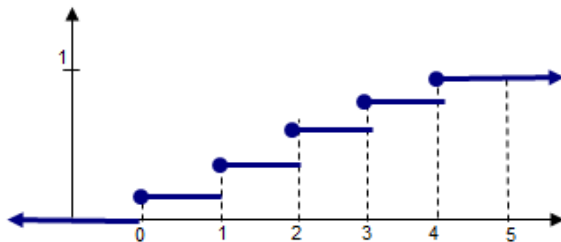
sendo, n o número de provas e p a probabilidade de ocorrer sucesso numa única prova ($0 \leq p \leq 1$).

Função de probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, & x = 0, 1, 2, \dots, n \\ 0, & x \notin \{0, 1, 2, \dots, n\} \end{cases}$$

Função de distribuição

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k=0}^x \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, n$$



Valor médio

$$\mu = E(X) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = np$$

Variância

$$\sigma^2 = V(X) = V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n V(X_i) = np(1-p) = npq$$

Exemplo. Um aluno vai responder a um teste constituído por 10 grupos. Em cada grupo existem 4 opções de resposta. O aluno não sabe a matéria e responde “à sorte”.

- a) Calcule a probabilidade do aluno não acertar em nenhuma das questões.
- b) Calcule a probabilidade de acertar no mínimo em 2 e em menos de 4 questões.
- c) Calcule a probabilidade de acertar em mais de metade das questões
- d) Calcule o valor esperado de respostas certas.

Resolução:

X – “número de respostas certas em 10”

Como a v.a. Representa o número de sucessos em n provas idênticas e independentes de Bernoulli, segue-se que $X \sim Bi(10;p)$

Note-se que p é a probabilidade de sucesso numa prova $p=1/4=0.25$

$X \sim Bi(10,0.25)$

- a) Calcule a probabilidade do aluno não acertar em nenhuma das questões.

$$X \sim B_i(10; 0.25)$$

$$f(x) = P(X = x) = \binom{10}{x} 0.25^x (1 - 0.25)^{10-x}, x = 0, 1, 2, \dots, 10$$

$$P(X = 0) = \binom{10}{0} 0.25^0 0.75^{10} = 0.0563$$

- b) Calcule a probabilidade de acertar no mínimo em 2 e em menos de 4.

$$P(2 \leq X < 4) = P(X = 2) + P(X = 3) = 0.5319$$

$$P(X = 2) \begin{cases} n=10 \\ p=0.25 \\ x=2 \end{cases} = 0.2816 \text{ (consulta na tabela)}$$

$$P(X = 3) \begin{cases} n=10 \\ p=0.25 \\ x=3 \end{cases} = 0.2503 \text{ (consulta na tabela)}$$

- c) Calcule a probabilidade de acertar em mais de metade das questões.

$$P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - \sum_{x=0}^5 P(X = x) = 0.0197$$

$$P(X \leq 5) \begin{cases} n=10 \\ p=0.25 \\ x=5 \end{cases} = 0.9803 \text{ (consulta na tabela)}$$

- d) Calcule o valor esperado de respostas certas.

$$E(X) = n \cdot p = 10 \cdot 0.25 = 2.5$$

Processo de Poisson

Um processo de Poisson refere-se ao número de acontecimentos que ocorrem num intervalo (tempo ou espaço) e que tem as propriedades:

- A probabilidade de que ocorram x acontecimentos num intervalo de tempo depende apenas do número x e da duração t do intervalo de tempo (não depende do início da contagem)
- O nº de eventos que ocorrem em intervalos de tempo distintos são independentes (não tem memória)
- A probabilidade de ocorrer um evento num intervalo muito pequeno é proporcional ao comprimento do intervalo
- A probabilidade de ocorrer mais do que um evento num intervalo muito pequeno é nula

Distribuição de Poisson

Usada para modelar a ocorrência de acontecimentos raros (acontecimentos com probabilidade de ocorrência baixa) que ocorrem com uma taxa média de ocorrência λ , em intervalos de tempo ou dentro de um espaço limitado.

Exemplos:

- N° de chamadas a um pronto socorro durante a madrugada
- N° de defeitos de um tecido por m^2
- N° de autocarros que chegam à paragem num minuto
- N° de acessos a uma página web durante uma hora

Diz-se então que uma v.a. X tem **distribuição de Poisson** de parâmetro $\lambda > 0$ e representa-se simbolicamente por

$$X \sim P_o(\lambda)$$

Função de probabilidade

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, & x \in \{0, 1, \dots\} \\ 0 & , \quad x \notin \{0, 1, \dots\} \end{cases}$$

Função de distribuição

$$F(x) = P(X \leq x) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^x \frac{\lambda^k}{k!}, \quad x \in \{0, 1, \dots\}, \lambda > 0$$

Valor médio e variância

Se $X \sim P_o(\lambda)$ então

$$\mu = E(X) = \lambda$$

$$\sigma^2 = V(X) = \lambda$$

Teorema

Se X representa o número de acontecimentos que ocorrem num intervalo de amplitude unitária I e

$$X \sim P_o(\lambda)$$

e a v.a. Y representa o n° de eventos que ocorrem num intervalo de amplitude α então

$$Y \sim P_o(\alpha\lambda)$$

Exemplo

Sabe-se que o número de chamadas que chega a uma central telefónica durante 1 hora tem distribuição de Poisson de média 11.0 chamadas/hora.

a) Calcule a probabilidade de durante uma hora chegar apenas uma chamada

X - "Número de chamadas, por hora"; $X \sim P_0(11)$

$$P(X = x) = e^{-11} \frac{11^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$R : P(X = 1) = e^{-11} \frac{11^1}{1!} = \text{tabella} \left\{ \frac{\lambda = 11}{x = 1} \right. \quad 0.0002$$

b) Calcule a probabilidade de chegarem mais de 6 e menos de 11 chamadas durante uma hora.

$$R : P(6 < X < 11) = P(6 < X \leq 10) = P(X \leq 10) - P(X \leq 6) = 0.3813$$

c) Calcule a probabilidade de durante 15 minutos não chegar nenhuma chamada.

Y - "Número de chamadas, num período de 15 minutos"; $X \sim P_0\left(\frac{11}{4} \approx 2.8\right)$

$$R : P(Y = 0) = e^{-2.8} \frac{2.8^0}{0!} = \text{tabella} \left\{ \frac{\lambda = 2.8}{x = 0} \right. \quad 0.0608$$

Teorema

Quando $n \rightarrow \infty$ e $p \rightarrow 0$, mantendo-se constante o produto np tem-se

$$X \sim B_i(n, p) \implies X \sim P(\lambda) \text{ com } \lambda = np$$

A distribuição de Poisson surge como o limite da distribuição Binomial quando $n \rightarrow \infty$ e $p \rightarrow 0$.

Regra prática:

Em geral, a distribuição de Poisson fornece uma boa aproximação da distribuição Binomial quando $n \geq 20$ e $p \leq 0.05$

Exemplo:

$$X \sim B_i(100; 0.05) \approx X_a \sim P_o(100 * 0.05)$$

$$P(X = 4) \approx P(X_a = 4) \Big|_{\substack{\lambda=5 \\ x=4}} = 0.1755$$