Matemática Computacional

Teórica 6

Departamento de Matemática
Instituto Superior de Engenharia do Porto

2º Semestre 21-22

Conteúdo

Teste de Hipóteses

O objetivo dos testes de hipóteses estatísticas é determinar se certas afirmações sobre uma população são suportadas pelos dados da amostra. Portanto apresenta procedimentos adequados para pôr à prova ideias que formulamos sobre factos desconhecidos. No caso particular dos ***testes de hipóteses paramétricos*** a validação apenas é aplicada aos ***parâmetros da população***.

Exemplos

- Teste à média de eficácia de uma nova app em relação a uma concorrente
- Testar se mais de metade dos eleitores votam a favor da saída do euro
- Testar se uma nova forma de publicidade conduz a um aumento de produtos vendidos

Hipótese estatística

Hipótese estatística

Uma hipótese estatística é uma conjectura sobre:

- um parâmetro desconhecido da população
- a forma da distribuição de uma característica em estudo na população.

Teste de hipóteses

Um teste de hipóteses (ou teste de significância) é um procedimento padrão para testar uma afirmação sobre uma propriedade da população.

Teoria de Neyman-Pearson

A teoria de Neyman-Pearson sobre testes de hipóteses estabelece uma dicotomia no espaço, Θ , do parâmetro (conjunto de valores possíveis para o parâmetro desconhecido), i.e., $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$ e $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$. Esta dicotomia consiste na formulação de duas hipóteses alternativas, usualmente designadas de

- H_0 hipótese nula
- H_1 hipótese alternativa

que matematicamente se formula:

$$H_0 : \theta \in \Theta_0$$
$$H_1 : \theta \in \Theta_1$$

Hipótese nula e Hipótese alternativa

Hipótese nula

Hipótese nula é a que se assume como correta até prova em contrário, i.e., assume-se como verdadeira durante a realização do teste. Normalmente é escrita sob a forma de uma igualdade ($=$).

Hipótese alternativa

Hipótese alternativa é a que se pretende verificar. Normalmente é escrita sob a forma de uma desigualdade ($<, >$ ou $\neq$).

Exemplos

Exemplo

Identifique as hipóteses nula e alternativa em cada uma das situações que se seguem. Escreva as hipóteses referidas numa forma simbólica.

- A proporção de condutores que admitem "passar no vermelho"é maior do que 0.5.
- A altura média dos jogadores profissionais de basquetebol é no máximo 2m.

Decisão

Decisão

- Rejeitar a hipótese nula (H_0), o teste é **conclusivo**, isto é, não se rejeita a hipótese alternativa (H_1).
- Não rejeitar a hipótese nula (H_0), o teste é **inconclusivo**, não se conseguiu provar a veracidade da hipótese alternativa (H_1).

Região de rejeição

Para podermos tomar uma decisão na realização de um teste de hipóteses, há que, quantificar a informação contida na amostra. Para isso, calculamos o valor observado da estatística de teste.

Estatística de teste

Uma estatística de teste é uma função da amostra aleatória cuja distribuição de probabilidade é conhecida sob o pressuposto de H_0 ser verdadeira

Região de rejeição

A região de rejeição ou região crítica (R_c) é o subconjunto do espaço amostral que permite decidir sobre a rejeição ou não da hipótese nula H_0

Erros

Um teste de hipóteses é um procedimento no âmbito da inferência estatística e por isso sujeito a erros de inferência. Num teste de hipóteses podem cometer-se dois tipos de erros.

Erro tipo I

O erro de tipo I, ou de 1ªespécie consiste em rejeitar a hipótese nula quando esta é verdadeira.

Erro tipo II

O erro de tipo II, ou de 2ªespécie consiste em não rejeitar a hipótese nula sendo esta é falsa

Erros

Aos erros de inferência cometidos na realização de um teste de hipóteses, estão associadas probabilidades.

Nível de significância α

O nível de significância α do teste de hipóteses é a probabilidade de **ocorrência** de um erro do tipo I.

$$P(\text{erro tipo I}) = P(\text{rejeitar } H_0 | H_0 \text{ é verdadeira}) = \alpha$$

Potência do teste $1 - \beta$

A potência do teste é a probabilidade da **não ocorrência** de um erro de tipo II.

$$P(\text{erro tipo II}) = P(\text{não rejeitar } H_0 | H_0 \text{ é falsa}) = \beta$$

Erros

Valor p

O valor p (usualmente designado por $p-value$) é o menor nível de significância, a partir do qual se deve rejeitar a hipótese nula H_0, isto é, se $p < \alpha$ rejeita-se H_0.

O quadro seguinte resume as situações que podem ocorrer.

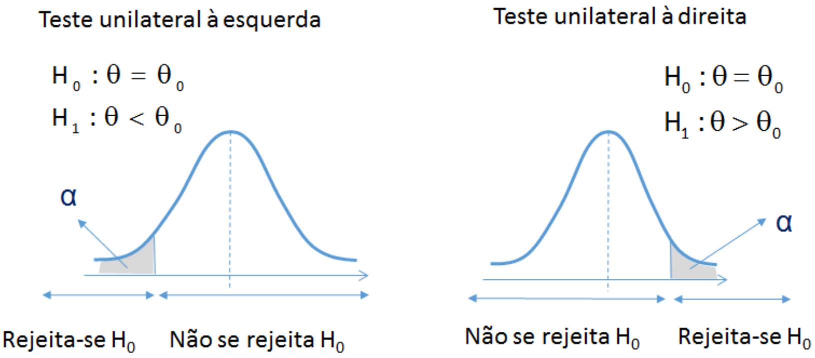
Decisão	H_0 verdadeira	H_0 falsa
Não rejeitar H_0	Não há erro $P(NRH_0 \mid H_0V) = 1 - \alpha$	Erro tipo II $P(NRH_0 \mid H_0F) = \beta$
Rejeitar H_0	Erro tipo I $P(RH_0 \mid H_0V) = \alpha$	Não há erro $P(RH_0 \mid H_0F) = 1 - \beta$

Formulação de um teste de hipóteses

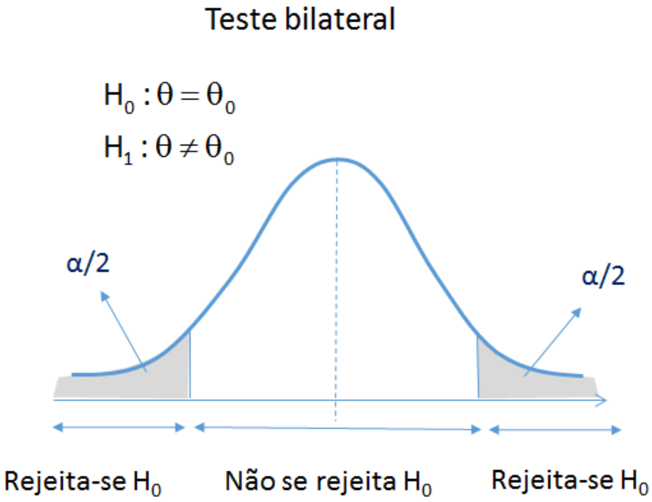
Passos na formulação de um teste de hipóteses:

1. Formular a hipótese nula (H_0) e a hipótese alternativa (H_1)
2. Escolher o nível de significância α
3. Selecionar a estatística de teste e encontrar a sua distribuição de pobabilidade sob o pressuposto de H_0 verdadeira
4. Determinar a região de rejeição
5. Calcular o valor observado da estatística de teste
6. Decisão:
    - Rejeitar H_0 se o valor observado da estatística de teste **pertence** à região crítica
    - Não rejeitar H_0 se o valor observado da estatística de teste **não pertence** à região crítica

Testes unilaterais



Teste bilateral



Teste unilateral à esquerda para a média de uma população normal

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad v.s. \quad H_1 : \mu < \mu_0$$

Sob o pressuposto de H_0 verdadeira

σ^2 **conhecida** e amostra de qualquer dimensão

Estatística de teste

$\overline{X} \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ ou $Z = \frac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$

Região crítica

$R_c = \left]-\infty, -z_c\right[$ onde $P\left(Z < -z_c\right) = \alpha$

Teste unilateral à esquerda para a média de uma população normal

σ^2 **desconhecida** e amostra de pequena dimensão

Estatística de teste

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$$

Região crítica

$$R_c = \left]-\infty, -t_c\right[\text{ onde } P\left(T < -t_c\right) = \alpha$$

Teste unilateral à esquerda para a média de uma população qualquer

σ^2 **desconhecida** e amostra de grande dimensão

Estatística de teste

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

Região crítica

$R_c = \left]-\infty, -z_c\right[$ onde $P\left(Z < -z_c\right) = \alpha$

Teste unilateral à esquerda para a média de uma população qualquer

σ^2 **conhecida** e amostra de grande dimensão

Estatística de teste

$\overline{X} \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ ou $Z = \frac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$

Região crítica

$R_c = \left]-\infty, -z_c\right[$ onde $P\left(Z < -z_c\right) = \alpha$

Teste unilateral à direita para a média de uma população normal

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad v.s. \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

Sob o pressuposto de H_0 verdadeira

σ^2**conhecida** e amostra de qualquer dimensão

Estatística de teste

$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$

Região crítica

$R_c =]z_c, +\infty[$ onde $P(Z > z_c) = \alpha$

Teste unilateral à direita para a média de uma população normal

σ^2 **desconhecida** e amostra de pequena dimensão

Estatística de teste

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$$

Região crítica

$$R_c =]t_c, +\infty[\text{ onde } P(T > t_c) = \alpha$$

Teste unilateral à direita para a média de uma população qualquer

σ^2 **desconhecida** e amostra de grande dimensão

Estatística de teste

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

Região crítica

$R_c =]z_c, +\infty[$ onde $P\left(Z > z_c\right) = \alpha$

Teste unilateral à direita para a média de uma população qualquer

σ^2**conhecida** e amostra de grande dimensão

Estatística de teste

$Z = \frac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$

Região crítica

$R_c = \left]z_c, +\infty\right[$ onde $P\left(Z > z_c\right) = \alpha$

Teste bilateral para a média de uma população normal

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad v.s. \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

Sob o pressuposto de H_0 verdadeira

σ^2 conhecida e amostra de qualquer dimensão

Estatística de teste

$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$

Região crítica

$R_c = \left]-\infty, -z_c\right[\cup \left]z_c, +\infty\right[$ onde $P(Z < -z_c) = P(Z > z_c) = \frac{\alpha}{2}$

Teste bilateral para a média de uma população normal

σ^2 desconhecida e amostra de pequena dimensão

Estatística de teste

$$T = \frac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$$

Região crítica

$R_c = \left]-\infty, -t_c\right[\cup \left]t_c, +\infty\right[$ onde $P(t < -t_c) = \frac{\alpha}{2}$ e $P(t > t_c) = \frac{\alpha}{2}$

Teste bilateral para a média de uma população qualquer

σ^2**desconhecida** e amostra de grande dimensão

Estatística de teste

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$$

Região crítica

$R_c = \left]-\infty, -z_c\right[\cup \left]z_c, +\infty\right[$ onde $P\left(Z < -z_c\right) = P\left(Z > z_c\right) = \frac{\alpha}{2}$

Teste bilateral para a média de uma população qualquer

σ^2**desconhecida** e amostra de grande dimensão

Estatística de teste

$Z = \frac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$

Região crítica

$R_c = \left]-\infty, -z_c\right[\cup \left]z_c, +\infty\right[$ onde $P\left(Z < -z_c\right) = P\left(Z > z_c\right) = \frac{\alpha}{2}$

Exemplo

Um fornecedor de uma app para smarthphones pretende controlar o seu tempo médio de utilização no período das 20h às 24h. Para tal selecionou 130 utentes que revelaram um tempo médio de utilização de 1,15 minutos. Suponha que o tempo de utilização desta app é uma variável com uma distribuição normal com desvio padrão de 1 minuto. Teste, ao nível de significância de 1%, a hipótese do tempo médio de utilização ser superior a 1 minuto:

Resolução:

X_i- v.a. que representa o tempo, em minutos, de utilização da app pelo utente i.

$X_i \sim N\left(\mu, 1^2\right)$

Amostra: $n = 130$ e $\overline{x} = 1.15$

$\overline{X}$ - v.a. que representa o tempo médio de utilização da app quando considerada uma amostra aleatória de 130 utentes.

$$\overline{X} = \frac{1}{130} \sum_{i=1}^{130} X_i \sim N\left(\mu, \frac{1^2}{130}\right) \Leftrightarrow Z = \frac{\overline{X} - \mu}{1/\sqrt{130}} \sim N\left(0, 1\right)$$

Exemplo cont.

Teste de hipóteses unilateral à direita para a média

$H_0 : \mu = 1 \quad v.s. \quad H_1 : \mu > 1$

Estatística de teste:

Sob o pressuposto de H_0 ser verdadeira, $\mu = 1$, a estatística de teste é

$\overline{X} \sim N\left(1, \frac{1^2}{130}\right)$ ou $Z = \frac{\overline{X}-1}{1/\sqrt{130}} \sim N(0,1)$

Região crítica:

Como o nível de significância é $\alpha = 0.01$,logo

$P(Z > z_c) = 0.01 \Leftrightarrow P(Z \leq z_c) = 0.99 \Leftrightarrow z_c = 2.33$

$R_c =]2.33, +\infty[$

Valor observado da estatística de teste:

$z_{obs} = \frac{1.15-1}{1/\sqrt{130}} = 1.71$

Decisão:

$z_{obs} = 1.71 < 2.33$, $z_{obs} \notin R_c$

Logo, não se deve rejeitar H_0. Ao nível de significância de 1%, não existe evidência estatística de que o tempo médio de utilização da app seja superior a 1 minuto.

Exemplo cont.

Resolução alternativa:

Podemos determinar a região crítica a partir dos valores originais.

$R_c =]\overline{x}_c, +\infty[$ onde $\overline{x}_c$ é tal que $P\left(\overline{X} > \overline{x}_c\right) = 0.01$

$P\left(\overline{X} > \overline{x}_c\right) = 0.01 \Leftrightarrow P\left(\overline{X} \leq \overline{x}_c\right) = 0.99$

$\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{\overline{x}_c - 1}{\frac{1}{\sqrt{130}}}\right) = 0.99 \Leftrightarrow \frac{\overline{x}_c - 1}{\frac{1}{\sqrt{130}}} = \Phi^{-1}(0.99) \Leftrightarrow \overline{x}_c = 1.20$

$R_c =]1.20, +\infty[$

Decisão: média da amostra: $\overline{x} = 1.15 \notin R_c$, logo não se rejeita H_0

Teste unilateral à esquerda para a diferença de médias de duas populações normais

Pretendemos comparar as médias de duas populações μ_1 e μ_2. Consideramos duas amostras aleatórias **independentes** de cada população de tamanhos n_1 e n_2.

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = k \quad v.s. \quad H_1 : \mu_1 - \mu_2 < k$$

Supondo H_0 verdadeira:

σ_1^2 e σ_2^2 conhecidas

Estatística de teste

$$Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - k}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0, 1)$$

Região crítica

$R_c = \left]-\infty, -z_c\right[$ onde $P(Z < -z_c) = \alpha$

Teste unilateral à esquerda para a diferença de médias de duas populações normais

$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ **desconhecidas** e amostras de pequena dimensão

Estatística de teste

$$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - k}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t_{n_1+n_2-2}$$

Região crítica

$R_c = \left]-\infty, -t_c\right[$ onde $P\left(t < -t_c\right) = \alpha$

Teste unilateral à esquerda para a diferença de médias de duas populações normais

$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ **desconhecidas** e amostras de grande dimensão

Estatística de teste

$$Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - k}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

Região crítica

$R_c = \left]-\infty, -z_c\right[$ onde $P\left(Z < -z_c\right) = \alpha$

Teste unilateral à esquerda para a diferença de médias de duas populações normais

$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ **desconhecidas** e amostras de pequena dimensão

Estatística de teste

$$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - k}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \sim t_v \text{ com } v = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}}$$

Região crítica

$$R_c = \left]-\infty, -t_c\right[\text{ onde } P\left(t < -t_c\right) = \alpha$$

Teste unilateral à esquerda para a diferença de médias de duas populações normais

$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ **desconhecidas** e amostras de grande dimensão

Estatística de teste

$$Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - k}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

Região crítica

$R_c = \left]-\infty, -z_c\right[$ onde $P\left(Z < -z_c\right) = \alpha$

Teste unilateral à esquerda para a diferença de médias de duas populações quaisquer

σ_1^2 e σ_2^2 conhecidas e amostras de grande dimensão

Estatística de teste

$$Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - k}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

Região crítica

$R_c = \left]-\infty, -z_c\right[$ onde $P(Z < -z_c) = \alpha$

Teste unilateral à esquerda para a diferença de médias de duas populações quaisquer

$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ **desconhecidas** e amostras de grande dimensão

Estatística de teste

$$Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - k}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

Região crítica

$$R_c = \left]-\infty, -z_c\right[\text{ onde } P\left(Z < -z_c\right) = \alpha$$

Teste unilateral à esquerda para a diferença de médias de duas populações quaisquer

$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ **desconhecidas** e amostras de grande dimensão

Estatística de teste

$$Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - k}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

Região crítica

$R_c =]-\infty, -z_c[$ onde $P(Z < -z_c) = \alpha$

Teste unilateral à direita para a diferença de médias de duas populações

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = k \quad v.s. \quad H_1 : \mu_1 - \mu_2 > k$$

Supondo H_0 verdadeira:

Todas as estatísticas de teste anteriormente apresentadas para a diferença de médias são aplicáveis.

Região crítica

$R_c =]z_c, +\infty[$ onde $P(Z > z_c) = \alpha$

ou

$R_c =]t_c, +\infty[$ onde $P(t > t_c) = \alpha$

Teste bilateral para a diferença de médias de duas populações

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = k \quad v.s. \quad H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq k$$

Todas as estatísticas de teste anteriormente apresentadas para a diferença de médias são aplicáveis.

Região crítica

$R_c = \,]-\infty, -z_c[\, \cup \,]z_c, +\infty[$ onde $P(Z < -z_c) = P(Z > z_c) = \frac{\alpha}{2}$

ou

$R_c = \,]-\infty, -t_c[\, \cup \,]t_c, +\infty[$ onde $P(t < -t_c) = \frac{\alpha}{2}$ e $P(t > t_c) = \frac{\alpha}{2}$

Teste bilateral para a diferença de médias

Exemplo

Tendo como objetivo averiguar a existência de diferenças significativas entre os tempos médios de utilização de duas apps concorrentes A e B em smarthphones, no período das 20h às 24h, foram selecionados duas amostras aleatórias e independentes de 130 utilizadores da app A e 140 da app B. A amostra da app A revelou um tempo médio de utilização 1,15 minutos enquanto na amostra da app B foi de 1,20 . Suponha que os tempo de utilização de cada uma das apps são variáveis aleatórias distribuições normais com desvios padrão de 1 minuto e 1,2 minutos, repetivamente. Teste, ao nível de significância de 1%, a hipótese de igualdade dos respetivos tempos médios.

Resolução:

X_{iA}- v.a. que representa o tempo, em minutos, de utilização da app A.

X_{iB}- v.a. que representa o tempo, em minutos, de utilização da app B.

$X_{iA} \sim N\left(\mu_A, 1^2\right)$ e $X_{iB} \sim N\left(\mu_B, 1.2^2\right)$

Amostras: $n_A = 130$, $\overline{x}_A = 1.15$, $n_B = 140$ e $\overline{x}_B = 1.20$

Exemplo cont.

$\overline{X}_A$ - v.a. que representa o tempo médio de utilização da app A quando considerada uma amostra aleatória de 130 utentes.

$$\overline{X}_A = \frac{1}{130}\sum_{i=1}^{130} X_i \sim N\left(\mu_A, \frac{1^2}{130}\right) \Leftrightarrow Z = \frac{\overline{X}_A - \mu_A}{1/\sqrt{130}} \sim N(0,1)$$

$\overline{X}_B$ - v.a. que representa o tempo médio de utilização da app B quando considerada uma amostra aleatória de 140 utentes.

$$\overline{X}_B = \frac{1}{140}\sum_{i=1}^{140} X_{iA} \sim N\left(\mu_B, \frac{1.2^2}{140}\right) \Leftrightarrow Z = \frac{\overline{X}_B - \mu_B}{1/\sqrt{140}} \sim N(0,1)$$ Teste de hipóteses bilateral para a diferença de médias

$H_0 : \mu_A - \mu_B = 0 \quad v.s. \quad H_1 : \mu_A - \mu_B \neq 0$

ou

$H_0 : \mu_A = \mu_B \quad v.s. \quad H_1 : \mu_A \neq \mu_B$

Exemplo cont.

Estatística de teste:

$\bar{X}_A - \bar{X}_B \sim N\left(0, \frac{1.1^2}{n_A} + \frac{1.2^2}{n_B}\right)$ ou $Z = \frac{\bar{X}_A - \bar{X}_B - 0}{\sqrt{\frac{1.1^2}{n_A} + \frac{1.2^2}{n_B}}} \sim N(0,1)$

Sob o pressuposto de H_0 ser verdadeira, $\mu_A = \mu_B$, a estatística de teste é

$Z = \frac{\overline{X}_A - \overline{X}_B}{\sqrt{\frac{1.1^2}{130} + \frac{1.2^2}{140}}} \sim N(0,1)$

Região crítica

Como o nível de significância é $\alpha = 0.01$,logo

$P(Z > z_c) = \frac{0.1}{2} \Leftrightarrow P(Z \leq z_c) = 0.995 \Leftrightarrow z_c = 2.58$

$R_c =]-\infty, -2.58[\cup]2.58, +\infty[$

Valor observado da estatística de teste:

$z_{obs} = \frac{1.15 - 1.20}{\sqrt{\frac{1.1^2}{130} + \frac{1.2^2}{140}}} = -0.35$

Decisão:

$z_{obs} = -0.35 > -2.58$, $z_{obs} \notin R_c$

Logo, não se deve rejeitar H_0. Ao nível de significância de 1%, não existe evidência estatística de que os tempo médios de utilização das duas apps sejam diferentes.

Testes de hipóteses para a proporção populacional

Queremos efetuar testes sobre a proporção de elementos da população com uma determinada característica.

Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de uma população de Bernoulli numerosa ou infinita, com $X_i \sim B_e(p)$.

O número de sucessos na amostra é $\sum_{i=1}^{n} X_i = n\hat{P}$

Sendo uma amostra suficientemente grande ($n \geq 30$), tem-se

$$\hat{P} \sim N\left(p, \frac{pq}{n}\right)$$

Teste unilateral à esquerda para a proporção

$$H_0 : p = p_0 \quad v.s. \quad H_1 : p < p_0$$

Sob o pressuposto de H_0 verdadeira,

Estatística de teste

$$Z = \frac{\hat{P} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \sim N(0,1)$$

Região crítica

$$R_c = \left]-\infty, -z_c\right[\text{ onde } P(Z < -z_c) = \alpha$$

Teste unilateral à direita para a proporção

$$H_0 : p = p_0 \quad v.s. \quad H_1 : p > p_0$$

Sob o pressuposto de H_0 verdadeira,

Estatística de teste

$$Z = \frac{\hat{P} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \sim N(0,1)$$

Região crítica

$R_c =]z_c, +\infty[$ onde $P(Z > z_c) = \alpha$

Teste bilateral para a proporção

$$H_0 : p = p_0 \quad v.s. \quad H_1 : p \neq p_0$$

Sob o pressuposto de H_0 verdadeira,

Estatística de teste

$$Z = \frac{\hat{P} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \sim N(0, 1)$$

Região crítica

$R_c = \left]-\infty, -z_c\right[\cup \left]z_c, +\infty\right[$ onde $P(Z < -z_c) = P(Z > z_c) = \frac{\alpha}{2}$

Exemplo

Numa determinada cidade recolheu-se uma amostra aleatória de 120 homens tendo 50 afirmado que se barbeavam todos os dias. Teste a hipótese, ao nível de significância de 5%, da proporção de homens, daquela cidade, que se barbeiam todos os dias ser superior a 37%.

Resolução:

X- v.a. que representa o nº de homens que afirmam que se barbeiam todos os dias, em 120.

$\hat{P}$-v.a. que representa a proporção de homens que afirmam que se barbeiam todos os dias, quando considerada uma amostra aleatória de 120

$\hat{P} \sim N\left(p, \frac{pq}{n}\right)$

Teste de hipóteses unilateral à direita para a proporção

$H_0 : p = 0.37 \quad v.s. \quad H_1 : p > 0.37$

Amostra: $n = 120$, $\hat{p} = 0.42$

Exemplo cont.

Estatística de teste:

$Z = \frac{\hat{P}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \sim N(0,1)$ Sob o pressuposto de H_0 ser verdadeira, $p_0 = 0.37$, a estatística de teste é

$Z = \frac{\hat{P}-0.37}{\sqrt{\frac{0.37\times 0.63}{120}}} \sim N(0,1)$

Região crítica:

Como o nível de significância é $\alpha = 0.05$,logo

$P(Z > z_c) = 0.05 \Leftrightarrow P(Z \leq z_c) = 0.95 \Leftrightarrow z_c = 1.645$

$R_c =]1.645, +\infty[$

Valor observado da estatística de teste:

$z_{obs} = \frac{0.42-0.37}{\sqrt{\frac{0.37\times 0.63}{120}}} = 1.13$

Decisão:

$z_{obs} = 1.13 < 1.645$, $z_{obs} \notin R_c$

Logo, não se deve rejeitar H_0. Ao nível de significância de 5%, não existe evidência estatística de que a proporção de homens que se barbeiam todos seja superior a 37%.

Testes de hipóteses para a diferença de proporções

Sejam $X_{1_1}, X_{2_1}, \ldots, X_{n_1}$ e $X_{2_1}, X_{2_2}, \ldots, X_{n_2}$ duas amostras aleatórias independentes de duas populações de Bernoulli, com $X_{i_1} \sim B_e(p_1)$ e $X_{i_2} \sim B_e(p_2)$.

Sendo duas amostras suficientemente grandes $(n_1 \geq 30$ e $n_2 \geq 30)$, tem-se $\hat{P}_1 \sim N\left(p_1, \frac{p_1 q_1}{n_1}\right)$ e $\hat{P}_2 \sim N\left(p_2, \frac{p_2 q_2}{n_2}\right)$

A distribuição da diferença entre as duas proporções é tal que:

$Z = \frac{\left(\hat{P}_1 - \hat{P}_2\right) - k}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}} \sim N(0,1)$,sob o pressuposto de $H_0 : p_1 - p_2 = k, k \in \mathbb{R}$ verdadeira.

Teste unilateral à esquerda para a diferença de proporções

$$H_0 : p_1 - p_2 = k \neq 0 \quad v.s. \quad H_1 : p_1 - p_2 < k$$

Estatística de teste

$$Z = \frac{\left(\hat{P}_1 - \hat{P}_2\right) - k}{\sqrt{\frac{\hat{P}_1(1-\hat{P}_1)}{n_1} + \frac{\hat{P}_2(1-\hat{P}_2)}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

Região crítica

$R_c = \left]-\infty, -z_c\right[$ onde $P\left(Z < -z_c\right) = \alpha$

Teste unilateral à direita para a diferença de proporções

$$H_0 : p_1 - p_2 = k \neq 0 \quad v.s. \quad H_1 : p_1 - p_2 > k$$

Estatística de teste

$$Z = \frac{\left(\hat{P}_1 - \hat{P}_2\right) - k}{\sqrt{\frac{\hat{P}_1(1-\hat{P}_1)}{n_1} + \frac{\hat{P}_2(1-\hat{P}_2)}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

Região crítica

$R_c = \left]z_c, +\infty\right[$ onde $P\left(Z > z_c\right) = \alpha$

Teste bilateral para a diferença de proporções

$$H_0 : p_1 - p_2 = k \neq 0 \quad v.s. \quad H_1 : p_1 - p_2 \neq k$$

Estatística de teste

$$Z = \frac{\left(\hat{P}_1 - \hat{P}_2\right) - k}{\sqrt{\frac{\hat{P}_1(1-\hat{P}_1)}{n_1} + \frac{\hat{P}_2(1-\hat{P}_2)}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

Região crítica

$R_c = \left]-\infty, -z_c\right[\cup \left]z_c, +\infty\right[$ onde $P\left(Z < -z_c\right) = P\left(Z > z_c\right) = \frac{\alpha}{2}$

Teste unilateral à esquerda para a diferença de proporções

$$H_0 : p_1 - p_2 = 0 \quad v.s. \quad H_1 : p_1 - p_2 < 0$$

As proporções populacionais p_1 e p_2 são desconhecidas, sendo $k = 0$, consideramos uma média ponderada de $\hat{p}_1$ e $\hat{p}_2$, definida por $\hat{p} = \frac{n_1\hat{p}_1 + n_2\hat{p}_2}{n_1+n_2}$

Estatística de teste

$$Z = \frac{\left(\hat{P}_1 - \hat{P}_2\right) - 0}{\sqrt{\hat{p}\hat{q}(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}} \sim N(0,1)$$

Região crítica

$R_c =]-\infty, -z_c[$ onde $P\left(Z < -z_c\right) = \alpha$

Teste unilateral à direita para a diferença de proporções

$$H_0 : p_1 - p_2 = 0 \quad v.s. \quad H_1 : p_1 - p_2 > 0$$

Estatística de teste

$$Z = \frac{\left(\hat{P}_1 - \hat{P}_2\right) - 0}{\sqrt{\hat{p}\hat{q}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \sim N(0,1)$$

Região crítica

$R_c =]z_c, +\infty[$ onde $P\left(Z > z_c\right) = \alpha$

Teste bilateral para a diferença de proporções

$$H_0 : p_1 - p_2 = 0 \quad v.s. \quad H_1 : p_1 - p_2 \neq 0$$

Estatística de teste

$Z = \frac{(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) - 0}{\sqrt{\hat{p}\hat{q}(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}} \sim N(0,1)$

Região crítica

$R_c = \left]-\infty, -z_c\right[\cup \left]z_c, +\infty\right[$ onde $P(Z < -z_c) = P(Z > z_c) = \frac{\alpha}{2}$

Exemplo

Realizou-se um estudo em duas cidades, A e B, sobre a percentagem de homens que se barbeiam todos os dias. Na cidade A foram inquiridos aleatoriamente 120 homens tendo 46 afirmado que se barbeavam todos os dias enquanto que na cidade B 78 dos 200 inquiridos afirmaram que se barbeavam todos os dias. Ao nível de significância de 5%, será de admitir que a proporção de homens que se barbeia todos os dias é diferente nas duas cidades?

Resolução:

X_1- v.a. que representa o nº de homens da cidade A que afirmam que se barbeiam todos os dias, em 120.

$\hat{P}_1$-v.a. que representa a proporção de homens da cidade A que afirmam que se barbeiam todos os dias, quando considerada uma amostra aleatória de 120

$\hat{P}_1 \sim N\left(p_1, \frac{p_1 q_1}{n_1}\right)$

X_2- v.a. que representa o nº de homens da cidade B que afirmam que se barbeiam todos os dias, em 200.

$\hat{P}_2$-v.a. que representa a proporção de homens da cidade A que afirmam que se barbeiam todos os dias, quando considerada uma amostra aleatória de 200

$\hat{P}_2 \sim N\left(p_2, \frac{p_2 q_2}{n_2}\right)$

Exemplo cont.

Teste de hipóteses bilateral para a diferença de proporções

$H_0 : p_1 = p_2 \quad v.s. \quad H_1 : p_1 - p_2 \neq 0$

Amostras: $n_1 = 120$, $\hat{p}_1 = 0.38$, $n_2 = 200$, $\hat{p}_2 = 0.39$,

Estatística de teste: $Z = \frac{(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) - 0}{\sqrt{\hat{p}\hat{q}(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}} \sim N(0,1)$

Região crítica

Como o nível de significância é $\alpha = 0.05$,logo

$P(Z > z_c) = \frac{0.05}{2} \Leftrightarrow P(Z \leq z_c) = 0.975 \Leftrightarrow z_c = 1.96$

$R_c =]-\infty, -1.96[\cup]1.96, +\infty[$

Valor observado da estatística de teste:

$\hat{p} = \frac{120 \times 0.38 + 200 \times 0.39}{120 + 200} = 0.3863$ e $\hat{q} = 0.6137$

$z_{obs} = \frac{0.38 - 0.39}{\sqrt{0.3863 \times 0.6137 \times (\frac{1}{120} + \frac{1}{200})}} = -0.18$

Decisão:

$-1.96 < z_{obs} = -0.18 < 1.96$, $z_{obs} \notin R_c$

Logo, não se deve rejeitar H_0. Ao nível de significância de 5%, não existe evidência estatística de que a proporção de homens que se barbeiam todos os dias é significativamente diferente nas duas cidades.