MATCP - RESUMOS

1º ANO | 2º SEMESTRE

PROBABILIDADES

Fenómeno aleatório → fenómeno sujeito a influência do acaso, fora do alcance do observador
→ Imprevisibilidade e regularidade estatística

Experiência aleatória
→ Pode repetir-se um grande nº de vezes nas mesmas condições (ou condições semelhantes)
→ Dá um resultado de entre um conjunto de resultados possíveis
→ Cada resultado é imprevisível mas é possível considerar estabilidade na frequência de ocorrência

Espaço de resultados ou espaço amostra (Ω) → Conjunto de todos os resultados possíveis associados a uma experiência aleatória

Acontecimento aleatório → qualquer subconjunto do espaço de resultados

ÁLGEBRA DOS ACONTECIMENTOS

Seja Ω o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória, w, é um elemento de A,
Diz-se que $A \subset \Omega$ se realizou se o resultado da experiência
isto é, $w \in A$

→ $A \subset B$ - A é um subacontecimento de B se e só se a realização de A implica a realização de B

→ $\overline{A}$ - acontecimento complementar (ou contrário) de A é o conjunto de todos os elementos de Ω que não estão em A

→ $A \cup B$ - união de A com B é o acontecimento que consiste na realização de um dos acontecimentos A ou B.

→ AB ou $A \cap B$ - "produto" ou intersecção é o acontecimento que se realiza apenas quando ambos os acontecimentos se realizam

→ $A \setminus B = A \cap \overline{B}$ - diferença dos acontecimentos A e B é o acontecimento que se realiza se e só se A se realiza sem que B se realize

→ $\emptyset$ - acontecimento impossível

→ Ω - acontecimento certo

→ Mutuamente exclusivos - ou incompatíveis, se e só se a realização de um implica a não realização do outro
$A \cap B = \emptyset$

PROPRIEDADES DAS OPERAÇÕES SOBRE ACONTECIMENTOS

Comutatividade

$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$

Associatividade

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

Distributividade

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

Leis de De Morgan

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

PROBABILIDADE DE UM ACONTECIMENTO

$$P(A) = \frac{\text{nº de casos favoráveis de } A}{\text{nº total de casos possíveis}}$$

Definição clássica (todos os casos são igualmente possíveis)

$$\underbrace{f_n(A) = \frac{n(A)}{n}}_{\text{Definição frequencista}}$$

$n(A) \rightarrow$ nº de vezes que se verificou o acontecimento A

$n \rightarrow$ nº de repetições de uma experiência aleatória

NOTA

Para "n" grande $f_n(A) \approx P(A)$

AXIOMÁTICA DAS PROBABILIDADES

Probabilidade (P) é uma aplicação que a cada acontecimento de Ω faz corresponder um número real.

$$\boxed{\begin{aligned} P: \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ A &\mapsto P(A) \end{aligned}}$$

E que satisfaz os seguintes axiomas:

$A_1)$ $P(A) \geq 0, \ \forall A \subset \Omega$

$A_2)$ $P(\Omega) = 1$

$A_3)$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ se $A \cap B = \emptyset$

LEIS DAS PROBABILIDADES

1. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
2. $P(\emptyset) = 0$
3. $A \subset B \Longrightarrow P(A) \leq P(B)$
4. $P(A) \leq 1$
5. $P(A \backslash B) = P\left(A \cap \overline{B}\right) = P(A) - P(A \cap B)$
6. $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ se $A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j$
7. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
8. $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - \cdots - P(A_{n-1} \cap A_n) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \cdots + P(A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)$

Probabilidade Condicionada

Probabilidade condicionada de A dado B ou probabilidade de A se B $(P(B)>0)$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Teorema

Se $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$ então:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A) = P(B) \times P(A|B)$$

INDEPENDÊNCIA

Dois acontecimentos dizem-se independentes se e só se:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

TEOREMA DA PROBABILIDADE TOTAL

Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ acontecimentos que definem uma partição de Ω, isto é, $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ e $A_i \cap A_j = \emptyset,\ \forall i \neq j$.

Se $P(A_i) > 0$ então para qualquer acontecimento $B \subset \Omega$ tem-se:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)\, P(A_i)$$

Teorema de Bayes

Sejam $A_1, A_2, \dots, A_n$ acontecimentos que definem uma partição de Ω tais que $P(A_i) > 0$ e seja B um outro acontecimento de Ω.
Então para $k = 1, \dots, n$, tem-se:

$$P(A_k \mid B) = \frac{P(A_k)\, P(B \mid A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)\, P(B \mid A_i)}$$

Variável aleatória

(v.a) é uma função de domínio Ω e contradomínio contido em $\mathbb{R}$, cujo valor é determinado pelo resultado da experiência aleatória

$$X: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\omega \longmapsto X(\omega) = x$$

Aos valores de uma variável aleatória associamos uma probabilidade

Função distribuição cumulativa (ou função distribuição)

Representa-se por F ou F_X:

$$F: \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$$
$$x \longmapsto F(x) = P[X \leq x]$$

Propriedades da função distribuição

- $0 \leq F(x) \leq 1$
- $F(-\infty) = 0$ e $F(+\infty) = 1$
- Se $x_1 < x_2$ então $F(x_1) < F(x_2)$
- $P(X = a) = F(a) - F(a^-)$
- $P(X < x) = P(X \leq x) - P(X = x)$
- $P(X \geq x) = 1 - P(X < x)$
- $P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a)$
- $P(a < X < b) = P(X < b) - P(X \leq a)$
- $P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X < a)$
- $P(a \leq X < b) = P(X < b) - P(X < a)$

Tipos de variáveis aleatórias

- Discreta - Se o conjunto de valores que pode assumir for numerável ou infinitamente numerável
- Contínua - Se o conjunto de valores que pode assumir não for numerável (assume qualquer valor real)

DISTRIBUIÇÕES DISCRETAS

Função de probabilidade

Seja X uma v.a discreta podendo assumir os valores $x_1, x_2, \dots, x$
Chama-se função massa de probabilidade ou função de probabilidade da v.a X à aplicação que a cada valor x_i faz corresponder $f(x_i) = P(X = x_i)$

Propriedades

1) $f(x_i) \geq 0, \ \forall x_i$

2) $\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = 1$

x_i	x_1	x_2	...	...	x_n
$f(x_i) = P(X = x_i)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	...	...	$f(x_n)$

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_k \leq x} P(X = x_k) = \sum_{x_k \leq x} f(x_k)$$

Parâmetros de uma distribuição discreta

Valor médio

Valor médio ou esperança matemática ou valor esperado ou média

$$E(X) = \mu_X = \mu = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)$$

Propriedades do valor médio

1) $E(k) = k$ (k constante)

2) $E(kX) = kE(X)$

3) $E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$

Variância

$$Var(X) = V(X) = \sigma_X^2 = \sigma^2 = E\left[(X-\mu)^2\right]$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i-\mu)^2 f(x_i)$$
$$= E(X^2) - E(X)^2$$

Desvio - padrão

$$\sigma = +\sqrt{V(X)}$$

Propriedades da variância

1) $V(X) \geq 0$

2) $V(k) = 0$

3) $V(kX) = k^2 V(X)$

4) $V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i)$ se X_i v.a's independentes

DISTRIBUIÇÃO DE BERNOULLI

Prova de Bernoulli

Experiência aleatória que só pode ter dois resultados: sucesso (caso ocorra um acontecimento) / insucesso (caso não ocorra)

É a distribuição associada à contagem do número de sucessos que ocorrem numa única prova de Bernoulli. Representa-se por:

$X \sim B_e(p)$

$p \rightarrow$ probabilidade de ocorrer "sucesso"

$q = 1 - p \rightarrow$ probabilidade de ocorrer "insucesso"

Função de probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} 1 - p & , x = 0 \\ p & , x = 1 \end{cases}$$

Valor médio

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{2} x_i p_i = 0(1-p) + 1 \times p = p$$

Variância

$$\sigma^2 = V(X) = \sum_{i=1}^{2} x_i^2 p_i - \mu^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq$$

DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL

Seja X uma v.a. que conte o nº de sucessos numa sucessão de n provas repetidas onde:

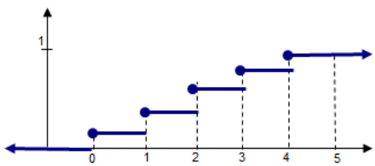
1) As provas são todas de Bernoulli
2) As provas são independentes (o resultado obtido não afeta os restantes)
3) A probabilidade de sucesso é igual em todas as provas

Função de probabilidade (dist. Binomial)

$$f(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} & , x = 0,1,2,\dots,n \\ 0 & , x \notin \{0,1,2,\dots,n\} \end{cases}$$

Função de distribuição

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k=0}^{x} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad , x = 0,1,2,\dots,n$$



Valor médio

$$\mu = E(X) = E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = np$$

Variância

$$\sigma^2 = V(X) = V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = np(1-p) = npq$$

DISTRIBUIÇÃO DE POISSON

Processo de Poisson

Refere-se ao nº de acontecimentos que ocorrem num intervalo (tempo / espaço) e que tem as seguintes propriedades:

1) A probabilidade de que ocorram x acontecimentos num intervalo de tempo depende apenas do nº x e da duração do intervalo t (não depende do início da contagem)

2) O nº de eventos que ocorrem em intervalos de tempo distintos são independentes (não tem memória)

3) A probabilidade de ocorrer um evento num intervalo muito pequeno é proporcional ao comprimento do intervalo

4) A probabilidade de ocorrer mais do que um evento num intervalo muito pequeno é nula

Distribuição de Poisson

Usada para modelar a ocorrência de acontecimentos raros (probabilidade ocorrência baixa) que ocorrem com uma taxa média de ocorrência λ em intervalos de tempo ou dentro de um espaço limitado

X tem distribuição de Poisson de parâmetro $\lambda > 0$

$$X \sim P_o(\lambda)$$

Função probabilidade

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, & x \in \{0, 1, \dots\} \\ 0, & x \notin \{0, 1, \dots\} \end{cases}$$

Função Distribuição

$$F(x) = P(X \leq x) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{x} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad x \in \{0, 1, \dots\}, \lambda > 0$$

Valor médio e Variância

Se $X \sim P_o(\lambda)$ então:

$$\mu = E(X) = \lambda$$

$$\sigma^2 = V(X) = \lambda$$

Teorema

Se X representa o nº de acontecimentos que ocorre num intervalo de amplitude unitária I e $X \sim P_o(\lambda)$ e a v.a. representa o nº de eventos que ocorrem num intervalo de amplitude α então

$$Y \sim Po(\alpha\lambda)$$

Teorema

Quando $n \to \infty$ e $p \to 0$ mantendo-se constante o produto np

tem-se

$$X \sim Bi(n, p) \Rightarrow X \sim P(\lambda) \text{ com } \lambda = n$$

Nota

A distribuição de Poisson surge como o limite da distribuição de Binomial quando $n \to \infty$ e $p \to 0$

Regra Prática

A dist. de Poisson fornece uma boa aproximação da distribuição Binomial quando $n \geq 0$ e $p \leq 0{,}05$

Ex: $X \sim Bi(100; 0{,}05) \approx X_a \sim P_o(100 \times 0{,}05)$

$P(X = 4) \approx P(X_a = 4) \begin{cases} \lambda = 5 \\ x = 4 \end{cases} = 0{,}1755$

DISTRIBUIÇÕES CONTÍNUAS

VARIÁVEIS ALEATÓRIAS CONTÍNUAS

- Uma v.a. contínua pode assumir qualquer valor dentro de um intervalo de nos reais
- Não é possível listar, individualmente, todos os valores de uma v.a contínua
  ↳ o quadro de distribuição usado nas distribuições discretas é inadequado
- Associam-se probabilidades a intervalos e não a pontos

Função densidade de probabilidade

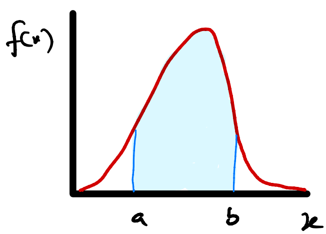
Seja X uma v.a contínua.
A função densidade de probabilidade (f.d.p) ou função densidade de X é uma função f tal que:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

e que verifica as seguintes propriedades

1) $f(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$



Função distribuição

Seja X uma v.a contínua com f.d.p f.
A função distribuição X é dada por

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt, \quad -\infty < x < +\infty$$

Valor médio e variância

X é uma v.a. contínua com função densidade de probabilidade f

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx$$

$$\sigma^2 = V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)\, dx = E(X^2) - E(X)^2$$

DISTRIBUIÇÃO NORMAL

Muitas vezes usada para representar quantidades que resultam de um grande nº de quantidades aleatórias (Teorema do Limite Central)

Usada também para representar características de populações relacionadas com medições ou com os respectivos erros

⊕ importante (modelização estocástica de muitos fenómenos naturais)

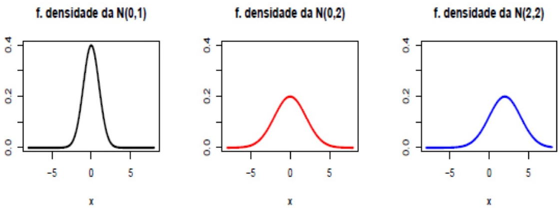
Definição

A v.a. contínua X tem distribuição normal ou distribuição de Gauss com parâmetros μ e σ^2 e representa-se por:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

Se a sua função densidade de probabilidade é:

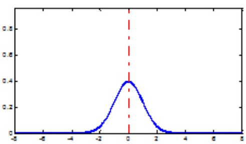
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-1/2\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$



Gráficos da função densidade normal para alguns valores de μ e σ.

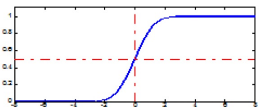
Função Densidade de Probabilidade

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad x\in R$$



Função de Distribuição

$$F(x)=P(X\le x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}dt$$



Propriedades da curva de densidade de uma v.a com distribuição normal

→ Domínio $\mathbb{R}$

→ Tem a forma de sino e um único máximo em $x=\mu$

→ É simétrica relativamente a um eixo vertical em $x=\mu$ (média), a mediana também ocorre em $x=\mu$

→ Tem dois pontos de inflexão em $x=\mu-\sigma$ e $x=\mu+\sigma$

→ O eixo dos xx é uma assímptota

Distribuição normal Reduzida

A v.a. Z tem distribuição normal reduzida se $\mu=0$ e $\sigma=1$

$$Z \sim N(0,1)$$

A função densidade de probabilidade é:

$$\varphi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}$$

e a função distribuição

$$\Phi(z)=P(Z\le z)=\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

Teorema

Se $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ e $Y=a+bX$ então:

$$Y\sim N(a+b\mu,\ b^2\sigma^2)$$

Corolário

Se $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ então a v.a $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$ tem distribuição normal reduzida, isto é,

$$Z=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$$

Cálculo de probabilidades

$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

- $F(a) = P(X \leq a) = P\left(Z \leq \frac{a-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$
- $P(X > b) = 1 - P(X \leq b) = 1 - P\left(Z \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)$
- $P(a < X \leq b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < Z \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$

Aditividade da distribuição normal

Teorema

Se $X_1, X_2, \dots, X_n$ são v.a independentes tais que $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ então a v.a

$$X = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i, \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2\right)$$

Corolário

Se $X_1, X_2, \dots, X_n$ são v.a independentes com o mesmo valor médio μ e a mesma variância σ^2 então as v.a soma e média têm distribuição normal definida por

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)$$

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$