

Problem Set 1

O Gerador Congruencial Linear é um dos métodos mais antigos e simples para a geração de números pseudo-aleatórios, que utiliza uma relação recursiva da forma $X_n = (aX_{n-1} + c) \bmod m$, onde a (constante multiplicativa), c (incremento), m (módulo) e X_0 (semente) são os parâmetros que determinam o comportamento da sequência gerada. A eficácia do GCL está fortemente associada à escolha destes parâmetros.

Embora este tipo de gerador seja relativamente eficiente em termos de simplicidade na geração dos números pseudo-aleatórios (NPAs), um dos principais problemas diz respeito ao ciclo relativamente curto que apresenta quando comparado com geradores mais avançados como o gerador Mersenne Twister. A má escolha de parâmetros pode levar às *lagged series* onde os números gerados caem em planos 2-dimensional para $k=3$, por exemplo.

Dado que X_n pode obter apenas m valores distintos e sendo no máximo periódico, para ultrapassar este problema, geralmente os valores para m são fixados em 2^{32} ou 2^{64} , dependendo do número de bits do computador, de forma a que atinja um período máximo m . Além disso, de acordo com o Teorema de Hull-Dobell [1], o gerador só apresentará um período completo para todas as seeds sse:

- m e c forem coprimos.
- $a - 1$ for divisível por todos os fatores primos de m .
- $a - 1$ for divisível por 4 se m for divisível por 4.

Em contraste, o gerador Mersenne Twister apresenta uma solução mais sofisticada, particularmente em termos do ciclo e da distribuição, ao ter um período extremamente longo de $2^{19937} - 1$ (de acordo com o R Help). Ao contrário do GCL, foi desenhado para evitar padrões visíveis em dimensões elevadas, garantindo independência entre os números gerados (ainda de acordo com o R Help, a seed é um 624-dimensional set de números inteiros de 32 bits). Desta forma, apresenta um melhor desempenho em aplicações que exigem grandes quantidades de NPAs, como simulações de Monte Carlo, por exemplo. Ainda assim, há várias semelhanças com o GCL que são importantes de destacar como:

- Ambos os geradores dependem da seed X_0 : diferentes sementes produzem diferentes sequências, mas ambas garantem resultados reproduzíveis ao fixar a semente.
- A periodicidade é uma característica partilhada entre os geradores.
- Ambos os geradores sofrem com a dependência determinística entre X_n e X_{n-1} .
- Ambos os gerados passam nos testes estatísticos de uniformidade e independência, garantindo que se comportam como variáveis independentes e uniformemente distribuídas.

Referências

[1] Hull, T. E.; Dobell, A. R. (1 de janeiro de 1962). «Random Number Generators». SIAM Review. 4 (3): 230-254