Licenciatura em Ciência de Dados - 2º ano

Trabalho individual 1

Unidade Curricular de Otimização Heurística

5 de maio de 2024

Discentes: João Dias nº 110305

2023/2024

iscte INSTITUTO UNIVERSITÁRIO DE LISBOA

Índice

Introdução

A ajuda humanitária em resposta a catástrofes naturais é uma responsabilidade crucial para organizações dedicadas ao bem-estar social que estão espalhadas um pouco por todo o mundo. Neste contexto, a otimização de recursos disponíveis assume um papel muito importante para a eficácia e eficiência de operações humanitárias.

Este trabalho tem como objetivo aplicar técnicas de otimização heurística - de programação linear e de programação linear por metas - para ajudar uma organização a determinar o número de kits de ajuda para um país afetado por uma catástrofe natural. Os kits de ajuda disponíveis incluem três tipos diferentes: básico, avançado e premium e para este problema existem algumas restrições associadas, que incluem limitações ao nível do peso total da carga transportada, bem como obrigatoriedades adicionais que estão contempladas num protocolo estabelecido com um governo local para a inclusão de um número mínimo de kits premium a serem enviados e um número mínimo de pessoas que devem ser ajudadas.

Ao longo deste trabalho, serão exploradas abordagens de otimização heurística para encontrar soluções que permitam à organização humanitária cumprir as suas metas de ajuda humanitária de forma eficiente, maximizando o número de beneficiários e minimizando os custos envolvidos.

a) Formulação do problema em Programação Linear

Para a formulação do problema em Programação Linear (PL) é necessário definir as variáveis de decisão que representam a quantidade de **centenas** de kits a serem enviados. Desta forma, tem-se que:

- x1 - número de centenas de kits básicos a enviar;

- x2 - número de centenas de kits avançados a enviar;
- x3 - número de centenas de kits premium a enviar.

O modelo em PL pode ser definido da seguinte forma:

$$\min C = 30x_1 + 35x_2 + 105x_3$$

$$\max K = x_1 + x_2 + x_3$$

s.a.: $x_3 \geq 30$

$$3000x_1 + 3500x_2 + 5400x_3 \geq 2100000$$

$$12x_1 + 18x_2 + 22x_3 \leq 10000$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Nos processos de Tomada de Decisão Multicritério (MCDM), podemos encontrar a subárea onde podemos incorporar este modelo: Tomada de Decisão Multiobjetivo (MODM), que lida com problemas em que o conjunto de soluções admissíveis não é explicitamente conhecido, mas, geralmente, se encontra representado por um conjunto de funções, tal como apresentado no modelo em PL acima.

Começando por explicar as funções objetivo associadas ao modelo:

$$\min C = 30x_1 + 35x_2 + 105x_3$$

Esta função objetivo C procura minimizar o custo associado ao envio das centenas de kits e está representada em **milhares de euros**. Para efeitos de simplificação, o custo associado ao envio das centenas de kits premium inclui já o valor alocado ao envio de um médico. Por outras palavras, como cada centena de kits premium tem um valor de 72 mil euros, e por cada centena, há a necessidade de se enviar um médico com um custo de 33 mil euros, considerou-se logo 72+33=105, onde a variável de decisão x3 representa não só traduz o número de centenas de kits premium a enviar, como também representa o número de médicos que vão ser enviados.

$$\max K = x_1 + x_2 + x_3$$

Esta função objetivo K procura maximizar as **centenas** de kits básicos, avançados e premium a serem enviados.

Passando à explicação das restrições associadas ao modelo tem-se que:

$$x_3 \geq 30$$

Esta restrição, ajustada ao facto de estarmos a lidar com centenas, está relacionada com o envio de pelo menos 3000 kits premium, conforme o protocolo estabelecido com o governo do país que foi alvo da catástrofe natural.

$$3000x_1 + 3500x_2 + 5400x_3 \geq 2100000$$

Ainda no âmbito do protocolo estabelecido com o governo local, definiu-se que é preciso ajudar, pelo menos, 2.1 milhões de habitantes do país, tal como se encontra traduzido na restrição acima, que foi formada através da soma do número de pessoas que permitem ser auxiliadas por cada centena dos diferentes kits.

$$12x_1 + 18x_2 + 22x_3 \leq 10000$$

A restrição acima representa as limitações ao nível da carga transportada não poder exceder 10000 toneladas. Note-se que como os pesos de cada centena dos diferentes tipos de kits se encontrava em quilos, foi feita a conversão para toneladas.

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Por fim, sabe-se que o número de centenas de kits básicos e avançados a serem enviados não pode ser um número negativo.

b) Verificação de propostas admissíveis e de soluções dominadas

Para analisar a admissibilidade das propostas de envio dos kits, presentes na tabela 1, primeiro verificou-se se todos eles atendiam às restrições impostas pelo problema, descritas na secção a) deste trabalho. Ao examinar os números apresentados, observámos que todas as propostas respeitam as restrições de envio mínimo de kits premium, ajuda mínima aos habitantes e peso máximo transportado. Portanto, todas as propostas são consideradas admissíveis.

Para verificar a existência de propostas dominadas, é importante perceber o conceito de dominância que nos mostra que uma dada solução s1 domina uma solução s2 se:

i) s1 nunca é pior que s2 em todos os objetivos; e

ii) s1 é estritamente melhor que s2 em, pelo menos, um dos objetivos.

Desta forma, para determinar se existem propostas dominadas, comparámos as propostas entre si, levando em consideração o número de kits enviados (em centenas) e o custo total associado a cada proposta (em milhares), conforme se pode constatar na Tabela 1, tendo concluído que a proposta 2 domina a proposta 1, pois permite o envio de mais kits com o mesmo custo total. Similarmente, a proposta 4 domina a proposta 3, uma vez que possibilita o envio do mesmo número de kits a um custo mais baixo.

Portanto, concluímos que, com base na análise realizada que todas as propostas são admissíveis e há evidências de propostas dominadas, onde algumas propostas apresentam uma vantagem clara sobre outras em termos de eficiência na utilização dos recursos disponíveis.

	Kits básicos	Kits avançados	Kits premium	Custo total (em milhares de €)	Centenas de kits enviados	Admissível?
Proposta 1	184	396	30	22530	610	Sim
Proposta 2	646	0	30	22530	676	Sim
Proposta 3	761	4	30	26120	795	Sim
Proposta 4	765	0	30	26100	795	Sim

Tabela 1 - Propostas de envio de kits

c) Quantos kits básicos, avançados e premium deve a organização enviar para o país se a organização estiver interessada, exclusivamente, num dos objetivos?

(i) Minimização do custo da ajuda humanitária

Para a minimização do custo da ajuda humanitário consideramos a seguinte formulação em PL:

$$\min C = 30x_1 + 35x_2 + 105x_3$$

s.a.: $x_3 \geq 30$

$$3000x_1 + 3500x_2 + 5400x_3 \geq 2100000$$

$$12x_1 + 18x_2 + 22x_3 \leq 10000$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Para a interpretação dos resultados (o output encontra-se na figura 1 dos Anexos) e considerando que o objetivo passa por minimizar o custo da ajuda humanitária apenas, temos que o valor ótimo é de 22530 milhares de euros. Já no que respeita à solução ótima, obtiveram-se os seguintes resultados:

- x1 = 646: são enviados 646 centenas de kits básicos;
- x2 = 0: não são enviadas quaisquer centenas de kits avançados;
- x3 = 30: são enviadas 30 centenas de kits premium (e consequentemente 30 médicos).

Para a análise das restrições, obtiveram-se os seguintes resultados:

- Restrição 1 (Min_Kits_Premium) = 0: o envio de centenas de kits premium atingiu o valor mínimo requerido (que foi estabelecido em 30 centenas) e que pode ver-se em 30 - 30 = 0 (desvio);
- Restrição 2 (Min_Ajuda_Habitantes) = 0: a ajuda atingiu o valor mínimo de habitantes requerido (que foi estabelecido em 2100000) e que pode ver-se 646 * 3000 + 30 * 5400 - 2100000 = 0 (desvio);
- Restrição 3 (Max_Peso_Transporte) = -1588: a carga transportada não atingiu o valor máximo definido (que foi estabelecido em 10000 toneladas) em 1588 toneladas, tal como se pode ver em 646 * 12 + 30 * 22 - 10000 = -1588 (desvio).

(ii) Maximização do total de kits enviados

Para a maximização do total de kits enviados consideramos a seguinte formulação em PL:

$$\max K = x_1 + x_2 + x_3$$

s.a.: $x_3 \geq 30$

$$3000x_1 + 3500x_2 + 5400x_3 \geq 2100000$$

$$12x_1 + 18x_2 + 22x_3 \leq 10000$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Para a interpretação dos resultados (o output encontra-se na figura 2 dos Anexos) e considerando que o objetivo passa por maximizar o total de kits enviados, temos que o valor ótimo é de 808 centenas de kits. Já no que respeita à solução ótima, obtiveram-se os seguintes resultados:

- x1 = 778: são enviadas 778 centenas de kits básicos;
- x2 = 0: não são enviadas quaisquer centenas de kits avançados;
- x3 = 30: são enviadas 30 centenas de kits premium (e consequentemente 30 médicos).

Para a análise das restrições, obtiveram-se os seguintes resultados:

- Restrição 1 (Min_Kits_Premium) = 0: tal como verificado em c) i) o envio de centenas de kits premium atingiu o valor mínimo requerido (que foi estabelecido em 30 centenas) e que pode ver-se em 30 - 30 = 0 (desvio);
- Restrição 2 (Min_Ajuda_Habitantes) = 396000: a ajuda ultrapassou o valor mínimo de habitantes definido (que foi estabelecido em 2100000) em 396000 e que pode ver-se 778 * 3000 + 30 * 5400 - 2100000 = 396000 (desvio);
- Restrição 1 (Max_Peso_Transporte) = -4: a carga transportada não atingiu o valor máximo definido (que foi estabelecido em 10000 toneladas) em apenas 4 toneladas, tal como se pode ver em 778 * 12 + 30 * 22 - 10000 = -4 (desvio).

É possível atingir os dois objetivos em simultâneo?

A análise mostra que, embora seja possível atingir os dois objetivos individualmente, **alcançá-los simultaneamente não é possível** (dadas as restrições e objetivos definidos), já que, ao minimizar o custo da ajuda humanitária, o modelo tende a priorizar o envio de menos kits, enquanto que ao maximizar o total de kits enviados, o custo tende a aumentar. Em termos práticos, temos soluções e valores ótimos diferentes: a solução ótima dada em c) i) é de enviar 646 centenas de kits básicos e 30 centenas de kits premium (e consequentemente 30 médicos), com um valor de 22530 milhares de euros; já a solução ótima dada em c) ii) é de enviar 778 centenas de kits básicos e 30 centenas de kits premium (e consequentemente 30 médicos), o que perfaz um custo de 778 * 30 + 30 * 105 = 26490 **milhares** de euros.

d) Minimização da Soma dos Desvios Percentuais Ponderados

Como a organização atribui igual importância aos objetivos, optou-se por uma abordagem de Programação por Metas não Preemptiva (Soma Ponderada dos Objetivos), já que esta permite que todos os objetivos sejam comparáveis em importância. Para a programação por metas, a cada um dos objetivos é atribuído um valor alvo a atingir e os desvios deste conjunto de valores alvo são minimizados através da função objetivo.

Considere-se a seguinte formulação em PLM:

$$\min Z = \frac{P_1^- * d_1^- + P_1^+ * d_1^+}{22500} + \frac{P_2^- * d_2^- + P_2^+ * d_2^+}{808}$$

s.a.: $x_3 \geq 30$

$$3000x_1 + 3500x_2 + 5400x_3 \geq 2100000$$

$$12x_1 + 18x_2 + 22x_3 \leq 10000$$

$$30x_1 + 35x_2 + 105x_3 + d_1^- - d_1^+ = 22500$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + d_2^- - d_2^+ = 808$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$d_1^-, d_1^+, d_2^-, d_2^+ \geq 0$$

P_1^-, P_1^+, P_2^- e P_2^+ são constantes e representam os pesos associados aos desvios das metas d_1^-, d_1^+, d_2^- e d_2^+, respetivamente (como se pede que tenham igual nível de importância considerou-se P1 = P2 = 1). Ao nível das restrições, as duas seguintes são consideradas restrições soft, já que representam metas a atingir, para os níveis de aspiração dados no enunciado de aproximadamente 22530 milhares de euros e de aproximadamente 808 centenas de kits (como nos dizem que são valores **aproximados** considerou-se que os desvios tanto podem ser negativos como podem ser positivos):

$$30x_1 + 35x_2 + 105x_3 + d_1^- - d_1^+ = 22500$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + d_2^- - d_2^+ = 808$$

As restantes restrições são consideradas hard, já que têm obrigatoriamente de ser respeitadas.

Como a função objetivo passa por minimizar Z que corresponde à soma dos desvios percentuais ponderados para os níveis de aspiração definidos no enunciado e explanados acima, é desejável alcançar-se o valor mais baixo possível para o valor ótimo da função objetivo.

Assim, procedendo-se à análise e interpretação dos resultados do modelo (output da figura 3 dos Anexos) tem-se que o valor ótimo é de aproximadamente 0.1646997, sendo este de difícil interpretação já que representa a soma de desvios de diferentes naturezas como são o número de centenas de kits e o custo em milhares de euros. Contudo, como se pretende um valor baixo, considerou-se este valor como aceitável.

Já no que respeita à solução ótima obtiveram-se os seguintes resultados:

- x1 = 646: são enviadas 646 centenas de kits básicos;
- x2 = 0: não são enviadas quaisquer centenas de kits avançados;

- x3 = 30: são enviadas 30 centenas de kits premium (e consequentemente 30 médicos). Note-se que Min_Kits_Premium = 0, o que significa que se enviou o valor mínimo de kits premium definidos.

Pela análise das restantes restrições tem-se que:

- Min_Ajuda_Habitantes = 0: tal como verificado em c) i) (**mesma solução ótima**) a ajuda atingiu o valor mínimo de habitantes requerido (que foi estabelecido em 2100000) e que pode ver-se 646 * 3000 + 30 * 5400 - 2100000 = 0 (desvio);
- Max_Peso_Transporte = -1588: tal como verificado em c) i) (**mesma solução ótima**) a carga transportada não atingiu o valor máximo definido (que foi estabelecido em 10000 toneladas) em 1588 toneladas, tal como se pode ver em 646 * 12 + 30 * 22 - 10000 = -1588 (desvio).

Pela análise dos desvios tem-se que:

- dm_cost = 0: é alcançado, no mínimo, o valor alvo da meta de custo (22500 milhares de euros);
- dM_cost = 30: é excedido o valor alvo da meta de custo (22500 milhares de euros), especificamente o custo ultrapassou o alvo em 30 milhares de euros (ou seja, foi 22500+30=22530 milhares de euros (por isso, inevitavelmente, o dm_cost teria de ser 0)).
- dm_kits = 132: não é alcançado o valor da meta dos kits (que é de 808 centenas), especificamente o número de kits ficou a 132 centenas do alvo (ou seja, o número de kits atingido foi 808-132=676 centenas (por isso, inevitavelmente, o dM_kits teria de ser 0));
- dM_kits = 0: não é excedido o valor alvo da meta dos kits.

Pela análise das metas tem-se que ambas foram atingidas já que Meta_Custo = 0 e Meta_Kits = 0.

e) Programação de Metas Preemptiva

Como a organização decidiu dar mais importância ao cumprimento do nível de aspiração do total de kits enviados, do que ao custo, está-se perante uma hierarquia de níveis de prioridade. Como tal, para responder ao problema recorrer-se-à a Programação por Metas Preemptiva.

A formulação do problema é dada por:

$$Lex \min Z = \left\{ P_2^- d_2^- + P_2^+ d_2^+, P_1^- d_1^- + P_1^+ d_1^+ \right\}$$

Primeiro nível

$$\min Z = P_2^- d_2^- + P_2^+ d_2^+$$

s.a.: $x_3 \geq 30$

$$3000x_1 + 3500x_2 + 5400x_3 \geq 2100000$$

$$12x_1 + 18x_2 + 22x_3 \leq 10000$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + d_2^- - d_2^+ = 808$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$d_2^-, d_2^+ \geq 0$$

O primeiro passo em programação por metas preemptiva é atribuir valores aos pesos. Neste caso, conforme se pode constatar no enunciado sabe-se que para o peso dos kits há uma penalização de 8 pontos por cada 10 kits abaixo do nível de aspiração, logo P_2^- será dado por 8*100/10=80. Como não há referência para acima do nível de aspiração do número de kits enviado, considerou-se que P_2^+ será igual a 1. No que toca ao peso associado ao custo, sabe-se que há uma penalização de 1 ponto por cada milhão de euros acima do nível de aspiração (22.5 milhares de euros), logo

P_1^+ será dado por 1/(1000000 * 1000). Note-se que a multiplicação por 1000 é feita, por estarmos a trabalhar ao longo deste trabalho com milhares de euros, quando falamos do custo. Por fim, como não há referência para abaixo do nível de aspiração do custo, considerou-se que P_1^- será igual a 1.

Após a atribuição dos valores aos pesos, começamos por construir o modelo em que se considera apenas a função objetivo, as restrições hard e a restrição do nível 1, sobre o número de centenas de kits a enviar, que é a mais prioritária. A formulação da prioridade de 2° nível, que diz respeito ao custo, será escrita posteriormente, após verificar-se que a meta de 1° nível que diz respeito ao número de kits enviados é satisfeita (ou caso não seja, após redefinição por parte do agente decisor (AD)).

Pela análise dos resultados do modelo de primeiro nível (output da figura 4 dos Anexos) tem-se que o valor ótimo é nulo (objective=0) e a solução ótima é não nula, o que permite concluir que é possível cumprir a meta relativa ao total de kits enviados. Por este mesmo motivo, avança-se para o nível secundário garantindo a meta dos kits.

A formulação do problema de segundo nível é dada por:

Segundo nível

$$\min Z = P_1^- d_1^- + P_1^+ d_1^+$$

s.a.: $x_3 \geq 30$

$$3000x_1 + 3500x_2 + 5400x_3 \geq 2100000$$

$$12x_1 + 18x_2 + 22x_3 \leq 10000$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + d_2^- - d_2^+ = 808$$

$$30x_1 + 35x_2 + 105x_3 + d_1^- - d_1^+ = 22500$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$d_1^-, d_1^+, d_2^-, d_2^+ \geq 0$$

Pela análise da solução ótima do problema de segundo nível (output da figura 5 dos Anexos) conclui-se que devem ser enviadas 778 centenas de kits básicos (x1 = 778) e 30 centenas de kits premium e consequentemente 30 médicos (x3 = 30), o que perfaz um total de 808 centenas de kits enviados. Como o dM_cost é 3990 sabe-se que se o custo total será dado pelo valor alvo 22500 + 3990 = 26490 milhares de euros. Sabe-se também que com esta opção se ajudará mais 396000 habitantes do que o valor mínimo de referência (2100000).

Conclusão

Em suma, a aplicação de técnicas de otimização heurística revelou-se fundamental para determinar as melhores estratégias no que diz respeito ao envio de ajuda para um país que foi alvo de uma catástrofe natural. Ao considerarem-se diferentes cenários e restrições, foi possível encontrar soluções eficientes que equilibram a minimização dos custos com a maximização do impacto (que se traduz no maior número de kits enviados). A análise das variáveis envolvidas, dos recursos disponíveis, das metodologias e das metas estabelecidas, dá a organizações que se encontram em contextos similares, a capacidade de tomarem decisões mais informadas e estratégicas.

Bibliografia

Documentos fornecidos pela docente;

Ragsdale (2017). *Spreadsheet Modeling and Decision Analysis: A Practical Introduction to Business Analytics*. 8th Edition. Cengage Learning

Ke-LinDu; M.N.S.Swamy (2018). *Search and Optimization by Metaheuristics: Techniques and Algorithms Inspired by Nature*.

Siarry, P. (Ed.) (2016). *Metaheuristics*. Springer.

Anexos

```
objective: 22530.0
x1: 646.0
x2: 0.0
x3: 30.0
Min_Kits_Premium: 0.0
Min_Ajuda_Habitantes: 0.0
Max_Peso_Transporte: -1588.0
```

Figura 1 - Output dos resultados do modelo de c) i)

```
objective: 808.0
x1: 778.0
x2: 0.0
x3: 30.0
Min_Kits_Premium: 0.0
Min_Ajuda_Habitantes: 396000.0
Max_Peso_Transporte: -4.0
```

Figura 2 - Output dos resultados do modelo de c) ii)

```
objective: 0.1646996699669967
x1: 646.0
x2: 0.0
x3: 30.0
dm_cost: 0.0
dM_cost: 30.0
dm_kits: 132.0
dM_kits: 0.0
Min_Kits_Premium: 0.0
Min_Ajuda_Habitantes: 0.0
Max_Peso_Transporte: -1588.0
Meta_Custo: 0.0
Meta_Kits: 0.0
```

Figura 3 - Output dos resultados do modelo de d)

```
objective: 0.0
x1: 778.0
x2: 0.0
x3: 30.0
dm_kits: 0.0
dM_kits: 0.0
Min_Kits_Premium: 0.0
Min_Ajuda_Habitantes: 396000.0
Max_Peso_Transporte: -4.0
Meta_Kits: 0.0
```

Figura 4 - Output dos resultados do modelo de e) primeiro nível

```
objective: 1.7733333333333334e-10
x1: 778.0
x2: 0.0
x3: 30.0
dm_cost: 0.0
dM_cost: 3990.0
dm_kits: 0.0
dM_kits: 0.0
Min_Kits_Premium: 0.0
Min_Ajuda_Habitantes: 396000.0
Max_Peso_Transporte: -4.0
Meta_Custo: 0.0
Meta_Kits: 0.0
```

Figura 5 - Output dos resultados do modelo de e) segundo nível