



Licenciatura em Ciência de Dados - 1º ano

## **Relatório Final**

Unidade Curricular de Otimização para Ciência de Dados

22 de maio de 2023

**Grupo 28 - CDA1**



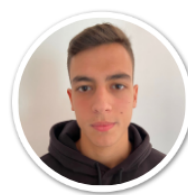
David Franco  
nº 110733



Diogo Aqueu  
nº 110705



João Dias  
nº 110305



Rafael Cerqueira  
nº 110860

## ÍNDICE

Introdução .....	2
Parte I – Modelo .....	3
Parte II – Resolução do modelo .....	4
Parte III – Plano de produção.....	4
Parte IV – Questões da administração .....	6
Parte V – Estudo de rendimento .....	8
Parte VI – Proposta de alteração.....	9
Conclusão.....	13
Apêndices .....	15

## **Introdução**

O presente trabalho apresenta um modelo matemático em programação linear, aplicado à empresa TorresPapel, que tem como objetivo otimizar o processo de produção de diferentes tipos de papel, nomeadamente papel kraft, papel de embrulho e papel de impressão. A empresa deseja cumprir as encomendas dos clientes ao menor custo possível, levando em consideração as restrições de disponibilidade de matéria-prima e as quantidades exigidas para cada tipo de papel.

O modelo foi desenvolvido em três etapas principais: identificação das variáveis de decisão, definição da função objetivo e estabelecimento das restrições. As variáveis de decisão incluem as quantidades de jornal, papel misto, papel de escritório e cartão necessárias para produzir cada tipo de papel. A função objetivo busca minimizar o custo total das encomendas, considerando os custos fixos de aquisição de materiais e os custos variáveis de transformação em papel. As restrições garantem que as quantidades encomendadas sejam produzidas, respeitando os limites de disponibilidade de matéria-prima.

A resolução do modelo foi realizada utilizando o Excel Solver, que forneceu a solução ótima com o custo mínimo para a aquisição dos materiais e a produção dos diferentes tipos de papel. O plano de produção detalhado é apresentado, mostrando as quantidades de materiais necessárias, as quantidades de papel produzidas e os custos associados a cada transformação.

## Parte I – Modelo

Para o desenvolvimento do modelo matemático em programação linear, presente no Apêndice A, foram seguidos três passos:

### **1. Identificar as variáveis de decisão;**

$J_i$  – Quantidade de jornais necessários (em toneladas) para produzir o papel  $i$ , com  $i = 1$  (Kraft), 2 (Embrulho).

$M_i$  – Quantidade de papel misto necessário (em toneladas) para produzir o papel  $i$ , com  $i = 1$  (Kraft), 2 (Embrulho), 3 (Impressão).

$E_i$  – Quantidade de papel de escritório necessário (em toneladas) para produzir o papel  $i$ , com  $i = 1$  (Kraft), 2 (Embrulho), 3 (Impressão).

$C_i$  – Quantidade de cartão necessário (em toneladas) para produzir o papel  $i$ , com  $i = 1$  (Kraft), 2 (Embrulho).

### **2. Definir a função objetivo;**

O objetivo da TorresPapel passa por cumprir as encomendas ao menor custo possível. Por isso, a função objetivo ( $F_o$ ) definida abaixo procurará minimizar o custo das mesmas, que é dado pela soma do custo fixo dos materiais a adquirir (jornal, papel misto, papel de escritório e cartão) com o custo variável, que depende da respectiva transformação em papel kraft, de embrulho ou de impressão multiplicado pelas respectivas quantidades.

$$\text{min: custo} = (15+6,5) \times J_1 + (15+11) \times J_2 + (16+9,75) \times M_1 + (16+12,25) \times M_2 + (16+9,5) \times M_3 + (19+4,75) \times E_1 + (19+7,75) \times E_2 + (19+8,5) \times E_3 + (17+7,5) \times C_1 + (17+8,5) \times C_2$$

### **3. Definir as restrições que limitam a solução.**

As primeiras três restrições têm como objetivo garantir que os valores encomendados são produzidos. Para isso, teve-se em conta o rendimento de papel dos respectivos materiais utilizados e igualou-se aos valores pedidos pelo cliente, de forma a ser possível satisfazer a encomenda.

$$\text{Quantidade encomendada de papel kraft: } 0,85J_1 + 0,9M_1 + 0,9E_1 + 0,8C_1 = 500$$

$$\text{Quantidade encomendada de papel de embrulho: } 0,8J_2 + 0,8M_2 + 0,85E_2 + 0,7C_2 = 600$$

$$\text{Quantidade encomendada de papel de impressão: } 0,7M_3 + 0,8E_3 = 300$$

As restrições que se seguem dizem respeito ao limite de toneladas disponíveis para cada um dos materiais utilizados, de forma que na produção não sejam utilizados mais do que aqueles que estão disponíveis.

$$\text{Toneladas disponíveis de jornal: } J_1 + J_2 \leq 700$$

$$\text{Toneladas disponíveis de papel misto: } M_1 + M_2 + M_3 \leq 600$$

$$\text{Toneladas disponíveis de papel de escritório: } E_1 + E_2 + E_3 \leq 350$$

$$\text{Toneladas disponíveis de cartão: } C_1 + C_2 \leq 400$$

## Parte II – Resolução do modelo

A resolução do modelo foi realizada com recurso ao Excel Solver. A Figura 1 ilustra a implementação executada. Para facilitar a leitura da figura, é importante ter em conta as seguintes considerações:

1. O intervalo de células da C4 à L4 representa as quantidades de cada material a comprar, tendo em conta as respetivas aplicações, calculadas pelo software.
2. O intervalo de células da C5 à L5 representa o custo de compra e transformação de cada material.
3. A célula M5 representa o valor ótimo, também calculado pelo software, sendo neste caso o custo mínimo da encomenda.
4. As restrições são dadas pelo intervalo de células que vai da C8 à O14, onde a coluna O8:O14 representa as quantidades a produzir e as toneladas disponíveis e a coluna M8:M14 representa as quantidades produzidas de cada tipo de papel e as toneladas necessárias de cada material utilizadas, também calculadas pelo software.

	B	C	D	E	F	G
1						
2		Jornais (para Kraft)	Jornais (para Embrulho)	P. Misto (para Kraft)	P. Misto (para Embrulho)	P. Misto (para Impressão)
3		J1	J2	M1	M2	M3
4	Qtd a comprar	588,2352941	111,7647059	0	171,4285714	428,5714286
5	Custo	21,5	26	25,75	28,25	25,5
6						
7	Restrições					
8	Quantidade papel kraft	0,85	0	0,9	0	0
9	Quantidade papel embrulho	0	0,8	0	0,8	0
10	Quantidade papel impressão	0	0	0	0	0,7
11	Toneladas disponíveis jornal	1	1	0	0	0
12	Toneladas disponíveis p. misto	0	0	1	1	1
13	Toneladas disponíveis p. escritório	0	0	0	0	0
14	Toneladas disponíveis cartão	0	0	0	0	0
15						
16						

	H	I	J	K	L	M	N	O
1								
2	P. Escritório (para Kraft)	P. Escritório (para Embrulho)	P. Escritório (para Impressão)	Cartão (para Kraft)	Cartão (para Embrulho)			
3	E1	E2	E3	C1	C2			
4	0	350	0	0	108,4933974			
5	23,75	26,75	27,5	24,5	25,5	43453,451	TOTAL	
6								
7								
8	0,9	0	0	0,8	0	500	=	500
9	0	0,85	0	0	0,7	600	=	600
10	0	0	0,8	0	0	300	=	300
11	0	0	0	0	0	700	<=	700
12	0	0	0	0	0	600	<=	600
13	1	1	1	0	0	350	<=	350
14	0	0	0	1	1	108,4934	<=	400
15						Usado		Disponível
16						LHS		RHS

Figura 1 – Resolução do modelo através do Excel Solver

## Parte III – Plano de produção

O custo mínimo (valor ótimo) para a aquisição dos materiais necessários para produzir 500 toneladas de papel kraft, 600 toneladas de papel de embrulho e 300 toneladas de papel de impressão, conforme encomendado à TorresPapel, é de 43453,4514 €. Para satisfazer a encomenda da forma mais económica possível, são necessárias 700 toneladas de jornal, 600 toneladas de papel misto, 350

toneladas de papel de escritório e 108,4933974 toneladas de cartão. Na Tabela 1 pode ver-se o plano de produção detalhado por tipo de material, com os respetivos tipos de papel e quantidades<sup>1</sup> produzidas, a par das toneladas de materiais necessárias e custos<sup>2</sup> associados a cada uma destas transformações.

Material a adquirir	Tipo de papel a produzir	Toneladas de material necessárias	Toneladas de papel produzidas	Custo de produção
Jornal	Papel kraft	588,2352941	500	12647,05882 €
	Papel de embrulho	111,7647059	89,41176471	2905,882353 €
Papel misto	Papel kraft	0	0	0
	Papel de embrulho	171,4285714	137,1428571	4842,857143 €
	Papel de impressão	428,5714286	300	10928,57143 €
Papel de escritório	Papel kraft	0	0	0
	Papel de embrulho	350	297,5	9362,5 €
	Papel de impressão	0	0	0
Cartão	Papel kraft	0	0	0
	Papel de embrulho	108,4933974	75,94537815	2766,581633 €

Tabela 1 – Plano de produção detalhado

É importante ter em conta a forma como os custos estão distribuídos tanto ao nível dos materiais que são necessários adquirir, como ao nível dos tipos de papel a produzir. A Figura 2 ilustra a distribuição dos custos por tipo de papel, considerando a solução ótima aqui apresentada e realça o custo mais elevado de produção do papel de embrulho, face aos outros dois tipos.

<sup>1</sup> Valor obtido através da multiplicação das toneladas de material necessárias com os respetivos valores de rendimento do papel.

<sup>2</sup> Valor obtido através da multiplicação do custo com as toneladas de material necessárias.

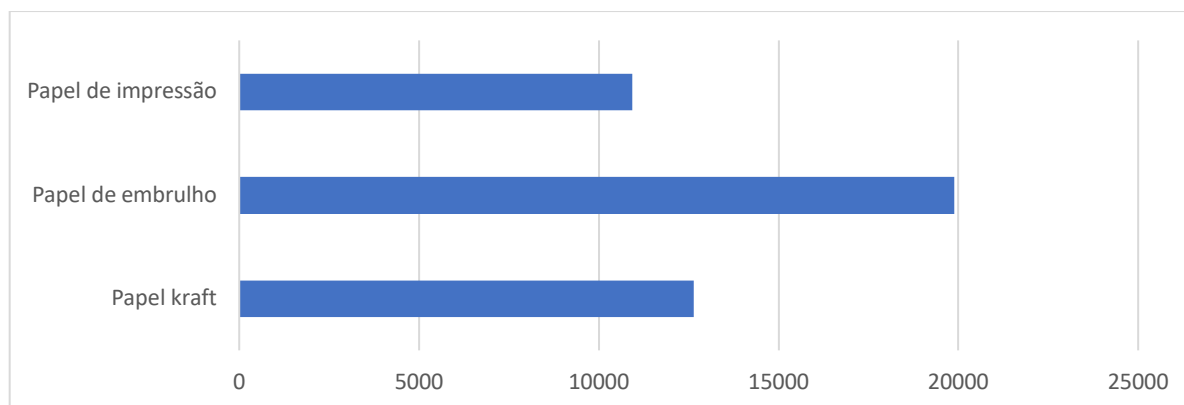


Figura 2 – Custos (em euros) de cada tipo de papel

A Figura 3 mostra o custo por cada tipo de material, considerando também o plano ótimo apresentado, destacando-se o papel misto e o jornal pelos custos mais elevados de aquisição.

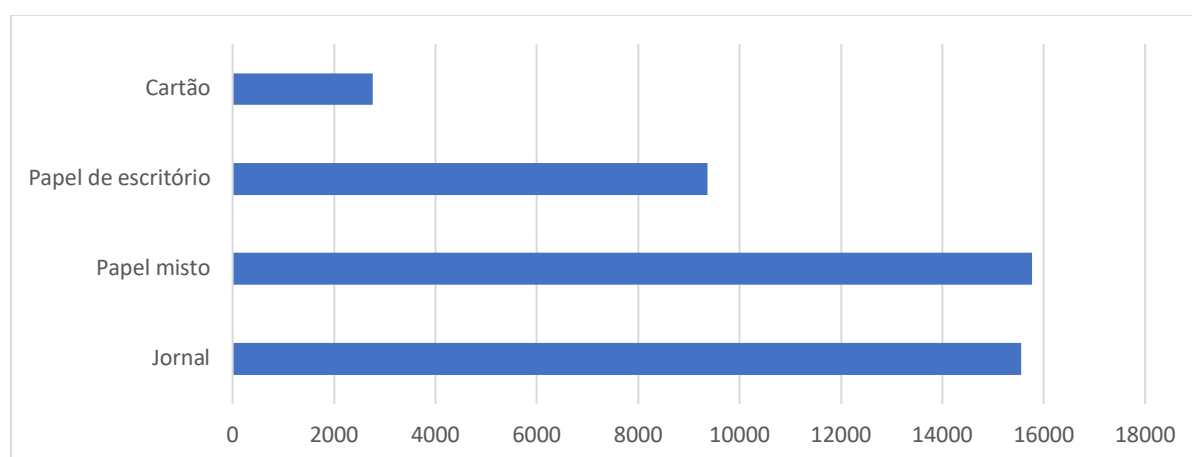


Figura 3 – Custos (em euros) de cada material

#### Parte IV – Questões da administração

**A) Se o custo de transformação do cartão em papel de embrulho passar a ser de 8,00 € por tonelada, o plano ótimo será o mesmo? E o custo total?**

Assumindo a diminuição do custo de transformação do cartão em papel de embrulho de 8,50 € para 8,00 € por tonelada, a análise do relatório de sensibilidade do Solver, presente no Apêndice B, indica que é possível reduzir o “*objective coefficient*” da variável “*qnt a comprar C2*” em até 0,78125 € sem que isso afete a solução ótima. Como a diminuição de 0,50 € é inferior a esse valor, conclui-se que a solução ótima permanece a mesma.

Em relação ao custo total, foi necessário recalcular o valor ótimo, que agora é de 43399,20468 €, levando em consideração o novo custo de transformação de 8,00 € por tonelada, o que implica uma

redução no custo total quando comparado com o valor anterior, que não considerava a diminuição no custo de transformação.

***B) O que acontecerá ao custo total se houver uma redução de 100 toneladas nos jornais disponíveis no mercado?***

De acordo com o relatório de sensibilidade do Solver, o preço sombra para as toneladas disponíveis de jornal é de -3,142857143 € por tonelada. Assim, uma redução de 1 tonelada de jornal disponível resulta num aumento de 3,142857143 € no custo total.

Com a redução de 100 toneladas nos jornais disponíveis verifica-se um aumento no custo total que é agora dado por  $100 \times 3,142857143 = 314,2857143$  €. É importante ter em conta que tal só é possível, porque as 100 toneladas são um valor inferior ao valor tido no “allowable decrease” de 111,7647059 toneladas.

***C) Quanto custa satisfazer a encomenda de papel de impressão? Em quanto reduziria o custo total caso essa encomenda fosse eliminada?***

A encomenda de papel de impressão é satisfeita utilizando apenas papel misto. Por isso, para obter o valor total da encomenda de papel de impressão, com recurso ao relatório de sensibilidade do Solver, basta multiplicar o “final value” da variável “qnt a comprar M3” pelo “objective coefficient”, obtendo-se assim  $428,5714286 \times 25,5 = 10928,57143$  €.

Ajustando o modelo, identificado no ficheiro Excel em anexo com o número 2, para que não contenha a restrição relativa à encomenda de 300 toneladas de papel de impressão e as variáveis relativas aos materiais utilizados para produzir este tipo de papel, obtém-se um valor ótimo de 32440,11949 €. Desta forma, pode concluir-se que a diminuição do custo total caso a encomenda de papel de impressão seja eliminada será de  $43453,4514 - 32440,11949 = 11013,33191$  €.

***D) A TorresPapel gostaria de produzir papel de impressão a partir de papel de escritório. O que teria de acontecer ao respetivo custo de processamento para que tal passasse a ser economicamente mais vantajoso?***

Neste momento, a empresa não está a efetuar compras de papel de escritório para produzir papel de impressão. De acordo com o relatório de sensibilidade do Solver, o “reduced cost” da variável “qtd a comprar E3” é 1,551020408, o que significa que, se o custo de processamento do papel de escritório fosse reduzido em pelo menos este valor, seria mais vantajoso para a TorresPapel produzir papel de impressão a partir do papel de escritório.

***E) Existem outros planos ótimos para o problema?***

Não, o plano ótimo é único, já que todas as variáveis apresentam, no relatório de sensibilidade, um “allowable increase” e “allowable decrease” diferentes de zero.



## **Parte V – Estudo de rendimento**

Para o estudo do rendimento do papel de embrulho a partir do papel misto, no intervalo de 65% a 95% (em incrementos de 5%) procedeu-se ao ajuste do modelo original, na restrição relativa à quantidade de papel de embrulho<sup>3</sup>, com valores compreendidos entre 0,65 e 0,95 (em incrementos de 0,05), estimando para cada um deles através do Solver o novo valor ótimo para o custo total. A Tabela 2 mostra todos os valores obtidos e guardados através deste procedimento<sup>4</sup> e a Figura 4 apresenta-os de uma forma mais visual, realçando a variação do custo total, em função do rendimento do papel de embrulho, a partir do papel misto.

<b>Rendimento do papel de embrulho</b>	<b>Custo total (em €)</b>	<b>Diferenças no custo total (em €)</b>
65%	43547,80912	+ 94,35774
70%	43547,80912	+ 94,35774
75%	43547,80912	+ 94,35774
80%	43453,45138	0
85%	42955,4922	- 497,95918
90%	41929,20168	- 1524,2497
95%	41000,63025	- 2452,82113

Tabela 2 – Impacto do rendimento do papel de embrulho a partir do papel misto no custo total

<sup>3</sup> Célula F9 da sheet Modelo Original (1) no Excel em anexo.

<sup>4</sup> O ficheiro Excel em anexo não apresenta a implementação dos vários modelos, já que cada modificação correspondeu a uma alteração mínima ao nível da restrição mencionada. Os valores foram obtidos através do procedimento indicado e guardados na Tabela 2.

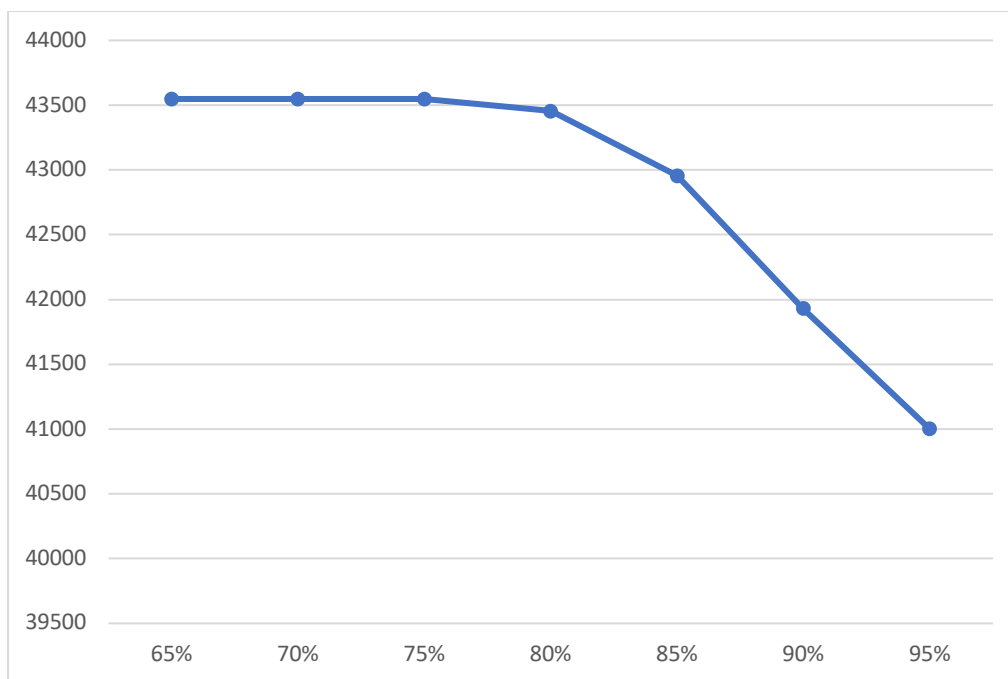


Figura 4 – Variação do custo total (em €) em função do rendimento do papel de embrulho a partir do papel misto

A análise da Tabela 2 e da Figura 4 revela que, à medida que o rendimento aumenta de 65% a 75%, o valor ótimo do custo total permanece estável nos 43547,80912 €. Contudo a partir daí, e de forma mais acentuada com a utilização de técnicas de transformação com rendimentos a partir de 85%, o custo total começa a diminuir, atingindo o valor mais baixo de 41000,63025 € com as técnicas que permitem um rendimento de 95% de papel de embrulho, o que será melhor para a empresa já que o objetivo passa por minimizar os custos totais da encomenda. A relação entre estas variáveis explica-se pelo facto de quanto menos materiais forem necessários para produzir a mesma quantidade de papel de embrulho, menor será o valor do custo total.

Até ao momento, a TorresPapel tem utilizado uma técnica em que este rendimento é de 80% e o custo total que obtêm ronda os 43453,45138 €. Contudo, importa considerar que para aumentar 15 pontos percentuais, de forma a atingir os 95% de rendimento no próximo mês, a empresa poderá estar disposta a pagar, pelo menos, o valor correspondente a  $43453,45138 - 41000,63025 = 2452,82113$  €, já que este será o valor que a empresa poupará com o respetivo aumento do rendimento do papel de embrulho.

## **Parte VI – Proposta de alteração**

Para a alteração do caso da TorresPapel procedeu-se à inclusão de uma nova variável de decisão - as revistas com um rendimento de 80% de papel de embrulho. Para este novo material existem 600 toneladas disponíveis para compra, o custo de aquisição por tonelada é de 12 € e o custo de transformação em papel de embrulho é de 10 €.

Em baixo pode ver-se o modelo inicial da parte I, que conta agora com a nova variável e as restrições, ambas assinaladas a azul para facilitar a leitura e interpretação. O Apêndice C apresenta o modelo em programação linear ajustado para incluir as novas informações fornecidas.

### 1. Variáveis de decisão;

$J_i$  – Quantidade de jornais necessários (em toneladas) para produzir o papel  $i$ , com  $i = 1$  (Kraft), 2 (Embrulho).

$M_i$  – Quantidade de papel misto necessário (em toneladas) para produzir o papel  $i$ , com  $i = 1$  (Kraft), 2 (Embrulho), 3 (Impressão).

$E_i$  – Quantidade de papel de escritório necessário (em toneladas) para produzir o papel  $i$ , com  $i = 1$  (Kraft), 2 (Embrulho), 3 (Impressão).

$C_i$  – Quantidade de cartão necessário (em toneladas) para produzir o papel  $i$ , com  $i = 1$  (Kraft), 2 (Embrulho).

$R_i$  – Quantidade de revistas necessárias (em toneladas) para produzir o papel  $i$ , com  $i = 1$  (Embrulho).

### 2. Função objetivo;

min: custo =  $(15+6,5) \times J_1 + (15+11) \times J_2 + (16+9,75) \times M_1 + (16+12,25) \times M_2 + (16+9,5) \times M_3 + (19+4,75) \times E_1 + (19+7,75) \times E_2 + (19+8,5) \times E_3 + (17+7,5) \times C_1 + (17+8,5) \times C_2 + (12+10) \times R_1$

### 3. Restrições.

Quantidade encomendada de papel kraft:  $0,85J_1 + 0,9M_1 + 0,9E_1 + 0,8C_1 = 500$

Quantidade encomendada de papel de embrulho:  $0,8J_2 + 0,8M_2 + 0,85E_2 + 0,7C_2 + 0,8R_1 = 600$

Quantidade encomendada de papel de impressão:  $0,7M_3 + 0,8E_3 = 300$

Toneladas disponíveis de jornal:  $J_1 + J_2 \leq 700$

Toneladas disponíveis de papel misto:  $M_1 + M_2 + M_3 \leq 600$

Toneladas disponíveis de papel de escritório:  $E_1 + E_2 + E_3 \leq 350$

Toneladas disponíveis de cartão:  $C_1 + C_2 \leq 400$

Toneladas disponíveis de revistas:  $R_1 \leq 600$

## RESOLUÇÃO DO MODELO

A resolução do modelo foi realizada com recurso ao Excel Solver. A Figura 5 ilustra a implementação executada.

	B	C	D	E	F	G	H
1							
2		Jornais (para Kraft)	Jornais (para Embrulho)	P. Misto (para Kraft)	P. Misto (para Embrulho)	P. Misto (para Impressão)	P. Escritório (para Kraft)
3		J1	J2	M1	M2	M3	E1
4	Qtd a comprar	588,2352941	111,7647059	0	0	69,69846762	0
5	Custo	21,5	26	25,75	28,25	25,5	23,75
6							
7	Restrições						
8	Quantidade papel kraft	0,85	0	0,9	0	0	0,9
9	Quantidade papel embrulho	0	0,8	0	0,8	0	0
10	Quantidade papel impressão	0	0	0	0	0,7	0
11	Toneladas disponíveis jornal	1	1	0	0	0	0
12	Toneladas disponíveis p. misto	0	0	1	1	1	0
13	Toneladas disponíveis p. escritório	0	0	0	0	0	1
14	Toneladas disponíveis cartão	0	0	0	0	0	0
15	Toneladas disponíveis revistas	0	0	0	0	0	0

	I	J	K	L	M	N	O	P
1								
2	P. Escritório (para Embrulho)	P. Escritório (para Impressão)	Cartão (para Kraft)	Cartão (para Embrulho)	Revistas (para Embrulho)			
3	E2	E3	C1	C2	R1			
4	35,98615917	314,0138408	0	0	600			
5	26,75	27,5	24,5	25,5	22	40128,262	TOTAL	
6								
7								
8	0	0	0,8	0	0	500	=	500
9	0,85	0	0	0,7	0,8	600	=	600
10	0	0,8	0	0	0	300	=	300
11	0	0	0	0	0	700	<=	700
12	0	0	0	0	0	69,698468	<=	600
13	1	1	0	0	0	350	<=	350
14	0	0	1	1	0	0	<=	400
15	0	0	0	0	1	600	<=	600
16						LHS		RHS

Figura 5 – Resolução do modelo através do Excel Solver

### PLANO DE PRODUÇÃO ALTERADO

O custo total mínimo para adquirir os materiais necessários para produzir 500 toneladas de papel kraft, 600 toneladas de papel de embrulho e 300 toneladas de papel de impressão com o plano de produção alterado é de 40128,262 €. Trata-se de um plano com um valor ótimo mais económico do que o modelo original em 3325,188919 €. A solução ótima do novo plano de produção mantém as 700 toneladas de jornal e as 350 toneladas de papel de escritório necessárias tal como no modelo original, mas passa de 600 toneladas de papel misto para agora 69,69846762 toneladas, deixando de utilizar as 108,4933974 toneladas de cartão do modelo original com o novo plano de produção e passando a incluir 600 toneladas do novo material disponível – as revistas. A Tabela 3 detalha este novo plano de produção.

Material a adquirir	Tipo de papel a produzir	Toneladas de material necessárias	Toneladas de papel produzidas	Custo de produção
Jornal	Papel kraft	588,2352941	500	12647,05882 €
	Papel de embrulho	111,7647059	89,41176471	2905,882353 €
Papel misto	Papel kraft	0	0	0
	Papel de embrulho	0	0	0
	Papel de impressão	69,69846762	48,78892734	1777,310924 €
	Papel kraft	0	0	0

Papel de escritório	Papel de embrulho	35,98615917	30,58823529	962,6297578 €
	Papel de impressão	314,0138408	251,2110727	8635,380623 €
Cartão	Papel kraft	0	0	0
	Papel de embrulho	0	0	0
Revistas	Papel de embrulho	600	480	13200 €

Tabela 3 – Plano de produção alterado com os respetivos detalhes

A Figura 6 ilustra a comparação dos custos (em euros) dos diferentes tipos de papel entre modelos e pode ver-se que apesar do papel kraft se ter mantido constante entre os dois modelos de programação linear, do modelo original para o novo modelo registaram-se reduções de custos na produção de papel de impressão e de embrulho, continuando este último a ser o mais representativo dos três em termos de volume de produção. Por outro lado, a Figura 7 mostra que a introdução do novo material de revistas fez com que a produção através do cartão parasse na totalidade e com que o custo com o papel misto baixasse significativamente, enquanto passavam agora a ser concentrados mais esforços económicos com as revistas.

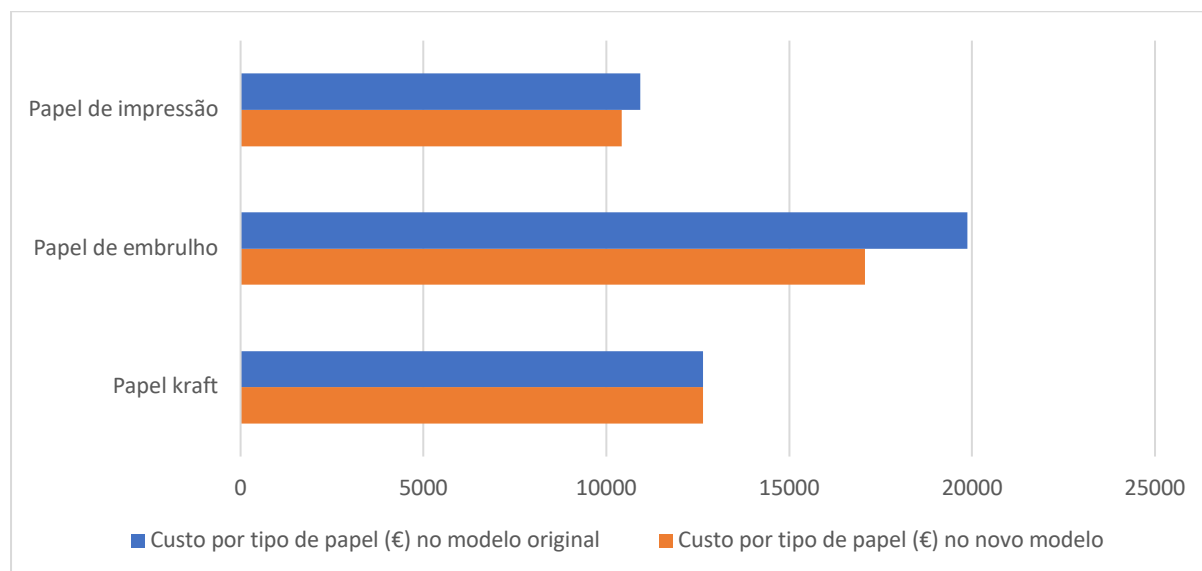


Figura 6 – Comparação dos custos (em euros) de cada tipo de papel no modelo original e no novo modelo

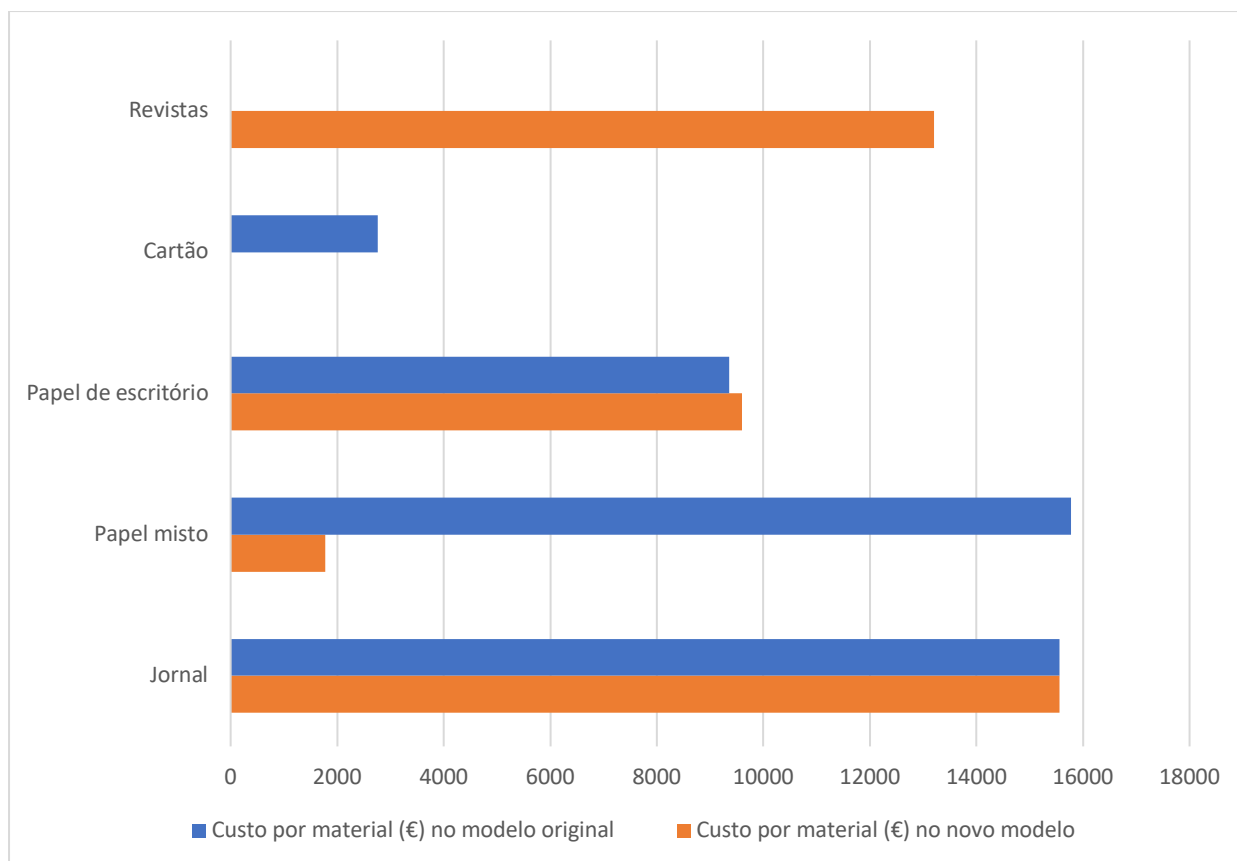


Figura 7 – Comparação dos custos (em euros) de cada material no modelo original e no novo modelo

### Conclusão

Neste relatório, através da elaboração de um modelo com as suas restrições e função objetivo, foi encontrado o menor custo (43453,4514 €) para fazer a encomenda de 500 toneladas de papel kraft, 600 toneladas de papel de embrulho e 300 toneladas de papel de impressão, onde se usou 700 toneladas de jornal, 600 toneladas de papel misto, 350 toneladas de papel de escritório e 108,4933974 toneladas de cartão.

De seguida, foram exploradas algumas alterações para responder a questões da administração, nomeadamente no que diz respeito ao aumento do preço do papel de embrulho para 8€, tendo-se verificado que a solução ótima permanecia a mesma, mas com um custo total inferior, de 43399,20468€. No caso de existir uma redução de 100 toneladas nos jornais disponíveis no mercado, o custo aumentaria 314,2857143 €, uma vez que, o preço sombra para as toneladas disponíveis de jornal é de -3,142857143 € por tonelada. Quanto ao custo do papel de impressão e a sua influência no custo total caso fosse removido, este custaria 10928,57143 € usando apenas papel misto e o custo total passaria a ser de 32440,11949 €, ou seja, haveria uma redução de 11013,33191 € ( $43453,4514 - 32440,11949 = 11013,33191$ ). Para a produção de papel de impressão a partir de papel de escritório ser vantajosa a nível económico, seria necessário reduzir o seu custo em 1,551020408€. A solução ótima apresentada na resposta ao problema inicial é única, uma vez que todas as variáveis apresentam um “allowable increase” e um “allowable decrease” diferentes de zero no relatório de sensibilidade.

Posteriormente, procurou-se saber o impacto da variação do rendimento mediante o tipo de técnica utilizada para a elaboração do papel de embrulho a partir do papel misto no intervalo de 65% a 95%. Obteve-se que entre os 65% e 75% o custo permanece estável nos 43547,80912€, nos 80% baixa para aquele que é o valor ótimo obtido no problema inicial (43453,45138 €) e continua a baixar até os 41000,63025 € quando o rendimento é de 95%.

Na última parte foi incluída uma nova variável de decisão: as revistas com um rendimento de 80% de papel de embrulho. Para este novo material existem 600 toneladas disponíveis para compra, o custo de aquisição por tonelada é de 12 € e o custo de transformação em papel de embrulho é de 10 €. Foram efetuadas alterações na função objetivo e nas restrições do problema inicial, tendo-se obtido a solução ótima de 700 toneladas de jornal, 350 toneladas de papel de escritório, 69,69846762 toneladas de papel misto e 600 toneladas de revistas. O custo total passou a ser de 40128,262 €.

## Apêndices

min: custo =  $(15+6,5) \times J_1 + (15+11) \times J_2 + (16+9,75) \times M_1 + (16+12,25) \times M_2 + (16+9,5) \times M_3 + (19+4,75) \times E_1 + (19+7,75) \times E_2 + (19+8,5) \times E_3 + (17+7,5) \times C_1 + (17+8,5) \times C_2$

s.a.:  $0,85J_1 + 0,9M_1 + 0,9E_1 + 0,8C_1 = 500$

$0,8J_2 + 0,8M_2 + 0,85E_2 + 0,7C_2 = 600$

$0,7M_3 + 0,8E_3 = 300$

$J_1 + J_2 \leq 700$

$M_1 + M_2 + M_3 \leq 600$

$E_1 + E_2 + E_3 \leq 350$

$C_1 + C_2 \leq 400$

### Apêndice A – Modelo em Programação Linear (Parte I)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Microsoft Excel 16.72 Sensitivity Report								
2	Worksheet: [TrabalhoFinal.xlsx]Sheet1								
3	Report Created: 08/05/2023 09:19:02								
4									
5									
6	Variable Cells								
7									
8	Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease		
9	\$C\$4	Qtd a comprar J1	588,2352941	0	21,5	0,51984127	1E+30		
10	\$D\$4	Qtd a comprar J2	111,7647059	0	26	3,142857143	0,51984127		
11	\$E\$4	Qtd a comprar M1	0	0,550420168	25,75	1E+30	0,550420168		
12	\$F\$4	Qtd a comprar M2	171,4285714	0	28,25	0,550420168	1,357142857		
13	\$G\$4	Qtd a comprar M3	428,5714286	0	25,5	1,357142857	1E+30		
14	\$H\$4	Qtd a comprar E1	0	1,871848739	23,75	1E+30	1,871848739		
15	\$I\$4	Qtd a comprar E2	350	0	26,75	1,551020408	1E+30		
16	\$J\$4	Qtd a comprar E3	0	1,551020408	27,5	1E+30	1,551020408		
17	\$K\$4	Qtd a comprar C1	0	1,306722689	24,5	1E+30	1,306722689		
18	\$L\$4	Qtd a comprar C2	108,4933974	0	25,5	1,21484375	0,78125		
19									
20	Constraints								
21									
22	Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease		
23	\$M\$10	Quantidade papel impressão	300	37,70408163	300	120	66,45220588		
24	\$M\$11	Toneladas disponíveis jornal	700	-3,142857143	700	94,93172269	111,7647059		
25	\$M\$12	Toneladas disponíveis p. misto	600	-0,892857143	600	94,93172269	171,4285714		
26	\$M\$13	Toneladas disponíveis p. escritório	350	-4,214285714	350	89,34750371	240,064261		
27	\$M\$14	Toneladas disponíveis cartão	108,4933974	0	400	1E+30	291,5066026		
28	\$M\$8	Quantidade papel kraft	500	28,99159664	500	95	80,69196429		
29	\$M\$9	Quantidade papel embrulho	600	36,42857143	600	204,0546218	75,94537815		
30									
31									

### Apêndice B – Relatório de sensibilidade do modelo da Parte I



$$\begin{aligned}
\text{min:} \quad & \text{custo} = (15+6,5) \times J_1 + (15+11) \times J_2 + (16+9,75) \times M_1 + (16+12,25) \times M_2 + (16+9,5) \times M_3 + (19+4,75) \\
& \times E_1 + (19+7,75) \times E_2 + (19+8,5) \times E_3 + (17+7,5) \times C_1 + (17+8,5) \times C_2 + (12+10) \times R_1 \\
\text{s.a.:} \quad & 0,85J_1 + 0,9M_1 + 0,9E_1 + 0,8C_1 = 500 \\
& 0,8J_2 + 0,8M_2 + 0,85E_2 + 0,7C_2 + 0,8R_1 = 600 \\
& 0,7M_3 + 0,8E_3 = 300 \\
& J_1 + J_2 \leq 700 \\
& M_1 + M_2 + M_3 \leq 600 \\
& E_1 + E_2 + E_3 \leq 350 \\
& C_1 + C_2 \leq 400 \\
& R_1 \leq 600
\end{aligned}$$

Apêndice C – Modelo em Programação Linear ajustado (Parte VI)