

32. (a) Mostre que se num BSC todas saídas são convertidas em 0, então o canal não fornece qualquer informação sobre a fonte.
- (b) A afirmação “Conhecida a informação da fonte, $H(A)$, e a informação disponibilizada pelo canal, $I(A; B)$, fica-se a conhecer a informação à saída.” é verdadeira ou é falsa? Caso seja verdadeira, prove-a; caso contrário, que hipóteses poderia acrescentar para garantir a sua veracidade?
- (c) Como exprimiria a igualdade $H(A|B) = H(A) - I(A; B)$ na linguagem comum?

33. Considere os canais AB e BC com as seguintes matrizes:

$$P_{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad P_{BC} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Suponha que a fonte ternária A de entrada do canal AB tem a distribuição de probabilidades $P(a_1) = 1/8$, $P(a_2) = 3/8$ e $P(a_3) = 1/2$. Sejam B respetivamente a saída do canal AB e entrada do canal BC , e C a saída do canal BC .

- (a) Calcule $H(A)$, $H(B)$ e $H(C)$.
- (b) Calcule $I(A; B)$, $I(B; C)$ e $I(A; C)$.
- (c) O que pode dizer sobre o canal BC ?
34. Com o intuito de melhorar a utilização dum BSC, os circuitos foram feitos de forma que bit é transmitido duas vezes e cada saída é interpretada como segue:
- se for recebido 00, o canal dá 0 como símbolo de saída;
 - se for recebido 11, o canal dá 1 como símbolo de saída;
 - se for recebido 01 ou 10, o canal dá ? como símbolo de saída.

Assumindo que os símbolos de entrada 0 e 1 são igualmente prováveis, calcule a informação mútua deste canal e compare-a com a do BSC original.

35. Considere um BSC com matriz $P_{BSC} = \begin{bmatrix} p & q \\ q & p \end{bmatrix}$ com entradas $a_1 = 0$ e $a_2 = 1$ e saídas $b_1 = 0$ e $b_2 = 1$, e a medida de distorção por símbolo dada por

$$d(a_i, b_j) = \begin{cases} 0 & \text{se } i = j \\ 1 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Assumindo que os símbolos de entrada são igualmente prováveis, calcule a distorção média \bar{d} e determine a função $R(D)$ de razão de distorção. Determine D_{\min} , D_{\max} e um valor de q para o qual $\bar{d} = D_{\max}$.

36. Para cada uma das codificações duma fonte 6-ária descritas na tabela, determine:

- (a) se se trata dum código; no caso negativo, exiba mensagens com a mesma codificação;
- (b) caso se trate dum código, se é um código prefixo; no caso negativo, construir um código prefixo cujas palavras código tenham os mesmos comprimentos.

	A	B	C	D	E	F	G	H
s_1	000	0	0	0	0	0	01	1010
s_2	001	01	10	10	10	100	011	001
s_3	010	011	110	110	1100	101	10	101
s_4	011	0111	1110	1110	1101	110	1000	0001
s_5	100	01111	11110	1011	1110	111	1100	1101
s_6	101	011111	111110	1101	1111	001	0111	1011

37. Considere um código por blocos num alfabeto com r símbolos para uma fonte q mensagens. Obtenha um minorante para o comprimento das palavras código.
38. Pretende-se obter um código binário para os dígitos 0–9, codificando 0 por 00, 1 por 11, e os restantes dígitos por palavras do mesmo comprimento. Qual é o valor mínimo desse comprimento?
39. Considere os seguintes valores prescritos para os comprimentos de palavras-código:

código	comprimentos
A	2, 2, 2, 4, 4, 4
B	1, 1, 2, 3, 3
C	1, 1, 2, 2, 2, 2

- (a) Existe um código prefixo binário nas condições indicadas? No caso afirmativo, exiba um tal código.
- (b) Existe um código prefixo ternário nas condições indicadas? No caso afirmativo, exiba um tal código.
- (c) No caso de não existir um código prefixo binário nem ternário nas condições indicadas, determine o menor número de símbolos do alfabeto dum código nas condições indicadas e exiba um tal código.
40. Considere uma fonte 6-ária com as probabilidades e duas codificações dadas pela seguinte tabela:

s_i	P_i	código A	código B
s_1	0.3	0	00
s_2	0.2	10	01
s_3	0.1	1110	02
s_4	0.1	1111	10
s_5	0.2	1100	11
s_6	0.1	1101	12

- (a) Determine a eficiência dos códigos A e B .
- (b) Existe algum código binário mais eficiente? No caso afirmativo, qual é a sua eficiência?
- (c) Existe algum código ternário mais eficiente? No caso afirmativo, qual é a sua eficiência?
41. Mostre que, fixado r , o número de operações executado no algoritmo de Huffman para encontrar um código r -ário compacto para uma distribuição de probabilidades $\mathbf{p} = (p_1 \dots, p_q)$ é $O(q^2)$.
42. Mostre que o seguinte esquema de codificação binária é um código compacto para a fonte indicada:

Fonte	P_i	Código
s_1	0.64	0
s_2	0.16	10
s_3	0.16	110
s_4	0.04	111

43. Considere o seguinte jogo. São atirados dois dados e totalizado o resultado, o que produz um total entre 2 e 12. Pretende-se descobrir qual é esse total colocando questões para as quais a resposta é sim ou não. Qual é o número mínimo de perguntas de cujas respostas se pode concluir qual é o total?
44. Seja $\mathbf{p}_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})$ a distribuição de probabilidades n -ária uniforme.
- (a) Calcule $L_2(\mathbf{p}_n)$.

- (b) Determine um código binário compacto para \mathbf{p}_n .
45. Seja $L \subseteq A^* \setminus \{\varepsilon\}$ um conjunto finito de palavras não vazias. Defina-se indutivamente um grafo $\Gamma(L)$ com dois tipos de arestas, a cheio e a tracejado, começando com L como conjunto de vértices:
- se v é um vértice, $u \neq \varepsilon$ e $vu = w \in L$, então u é um vértice e temos uma aresta a cheio $v \xrightarrow{w} u$ etiquetada por w ;
 - se $v \notin L$ é um vértice, $w \in L$ e $v = wu$, então u é um vértice e temos uma aresta a tracejado $v \xrightarrow{w} u$ etiquetada por w .
- Mostre que $\Gamma(L)$ é um grafo finito e que L é um código se e só se não existirem em $\Gamma(L)$ caminhos que comecem e terminem em vértices de L .
46. Suponha que uma mensagem binária extensa contém o dobro de 0's do que o número de 1's. Determine um código de Huffman que use quando muito: (a) 0.942 bits por símbolo; (b) 0.913 bits por símbolo.
47. Qual é a eficiência duma fonte binária S na qual 1 tem a probabilidade 0.85? Determine uma extensão de S com eficiência pelo menos 95%.
48. Considere a fonte binária que emite 0 com probabilidade $\frac{3}{8}$. Descreva um código ternário com eficiência de pelo menos 90%.
49. Uma fonte binária emite o símbolo x com frequência $1/3$. Construa um código ternário que tenha quando muito, respetivamente, 0.65, 0.60 e 0.55 unidades ternárias por símbolo. Qual é a respetiva eficiência?
50. Conceba um código para uma fonte ternária com eficiência de pelo menos 97%, supondo que se observa as frequências de $1/2$, $1/5$ e $3/10$ para os três símbolos da fonte. Determine a eficiência do seu código.
51. Uma certa mensagem binária é modelada por uma fonte de Markov de primeira ordem com a seguinte matriz de probabilidades de transição:
- $$\begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix}.$$
- (a) Obtenha um código compacto para a segunda extensão da fonte e determine a sua eficiência.
- (b) Idem para a terceira extensão da fonte.
52. Os códigos de Huffman são códigos prefixo. E os códigos aritméticos?
53. Considere a fonte binária S dada por $P(s_1) = 0.1$ e $P(s_2) = 0.9$.
- Determine $H(S)$.
 - Qual é o código compacto binário para esta fonte? Compare o comprimento médio L_1 com $H(S)$. Qual é a eficiência?
 - Idem para S^n , para $n = 2, 3$. Determine L_n/n e compare com $H(S)$. O que observa?
 - Proceda à codificação aritmética da mensagem $s_2s_1s_2$. Compare o resultado com o código de Huffman para S^3 .
 - Idem para $s_1s_1s_1$.
 - Idem para $s_1s_2s_1$.
 - Face às observações das alíneas anteriores, qual é preferível entre a codificação aritmética de mensagens de comprimento 3 e a codificação de Huffman da terceira extensão da fonte?