Tópicos de Exame em Introdução à Investigação Operacional

Grupo 1

Programação Matemática

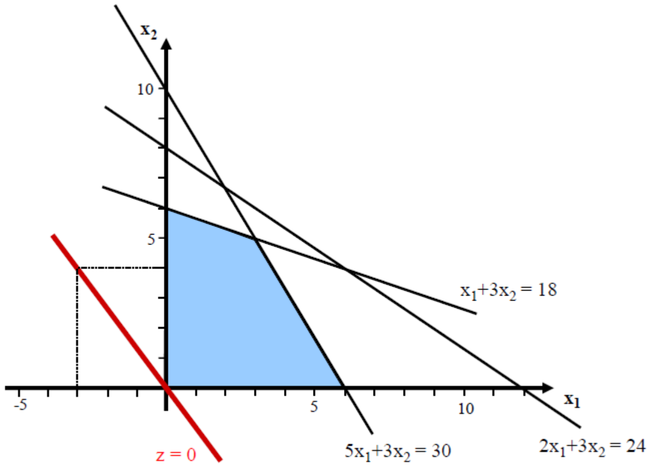
1.1 Formulação em Programação Linear

O processo de formulação de um problema em programação linear envolve a extração das variáveis em questão e a determinação dos respetivos limites. Durante o processo de formulação deve-se também determinar qual a função objetivo em questão e qual a sua natureza, i.e., se esta função deve ser maximizada ou minimizada. Um exemplo de formulação em programação linear é:

$$\begin{aligned} Max \quad & z = 800x_1 + 600x_2 && (1.1)\\ s.a.: \quad & 5x_1 + 3x_2 \leq 30 && (1.2)\\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 24 && (1.3)\\ & x_1 + 3x_2 \leq 18 && (1.4)\\ & x_1, x_2 \geq 0 && (1.5) \end{aligned}$$

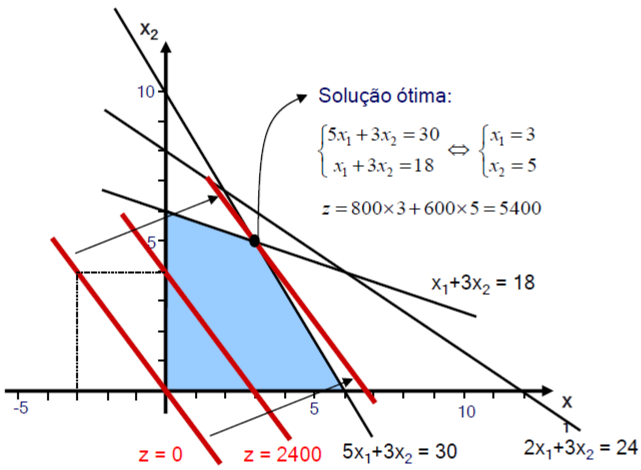
1.2 Representação Gráfica

Para representar graficamente uma formulação em programação linear devem-se representar, num referencial cartesiano, todas as retas de restrições, tendo em atenção o seu sentido, bem como a função objetivo. Caso as restrições não formem uma área fechada, o problema diz-se ilimitado ou quando as restrições são incompatíveis o problema é impossível.Seguindo o exemplo anterior, a sua representação gráfica seria:

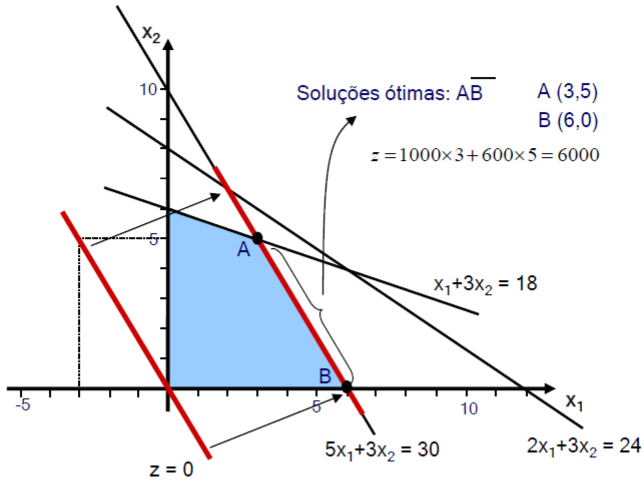


1.3 Ponto ótimo

O ponto ótimo de um problema de programação linear é obtido através das restrições impostas e da função objetivo. Concretamente, trata-se do ponto limite de maximização ou minimização da função objetivo (conforme pedido) dentro da região admissível das restrições. Graficamente, o ponto ótimo pode ser observado ao deslocar verticalmente a reta da função objetivo dentro da região admissível. O processo de determinação do ponto ótimo está ilustrado na figura seguinte.

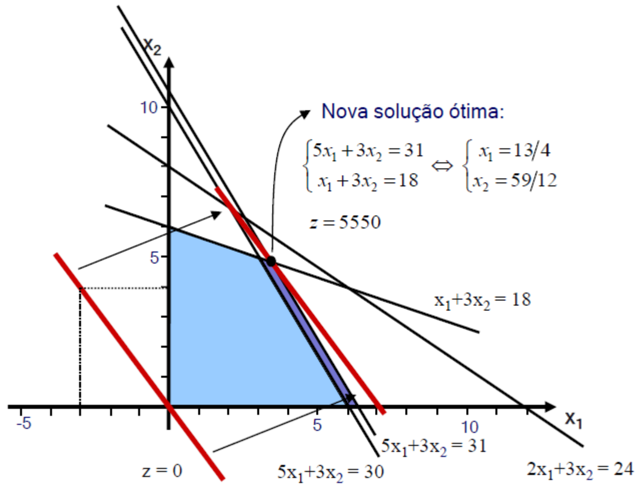


As restrições que delimitam o ponto ótimo designam-se restrições ativas e a sua alteração pode deslocar o ponto ótimo. Analogamente, uma restrição que não delimita o ponto ótimo diz-se não ativa e uma restrição que não delimita a região admissível diz-se redundante. Na eventualidade de da reta da função objetivo ser paralela á reta de uma das restrições pode existir uma infinidade de pontos igualmente ótimos. Nesse caso teriamos:



1.4 Valores Marginais

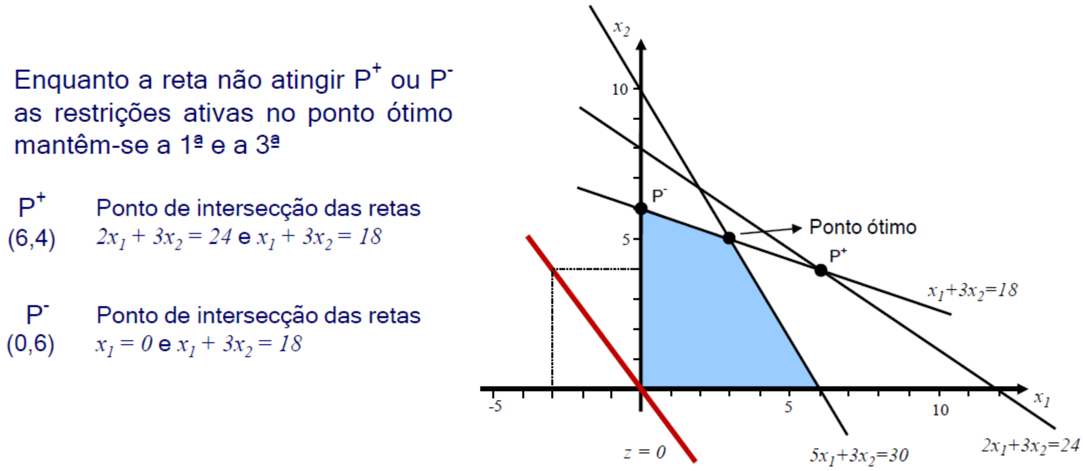
Designa-se por valor marginal (associado a uma restrição), a taxa de variação instantânea do valor ótimo do problema se houver um aumento no termo independente. Em geral, o valor marginal pode determinar-se avaliando a variação sofrida pelo valor ótimo se o termo independente em causa aumentar uma unidade:

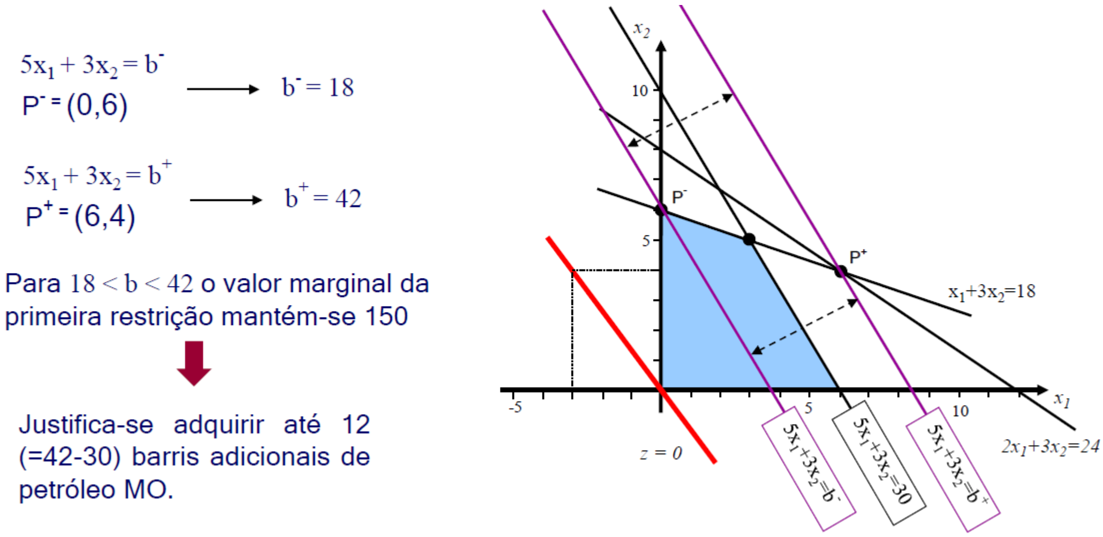


Neste caso, uma alteração de 1 unidade na primeira restrição aumentou o lucro em 150. Conclui-se portanto que o valor marginal associado a esta restrição é 150. Os valores marginais das restrições de um problema de programação linear mantêm-se enquanto o conjunto de restrições ativas no ponto ótimo não se alterar. Não há garantias da sua manutenção se o conjunto de restrições ativas for aumentado.

1.5 Determinação dos Limites de um Valor Marginal

Determina-se o intervalo de valores para o termo independente dessa restrição de forma que o conjunto de restrições ativas não se altere. Seguindo o exemplo anterior, para a primeira restrição:





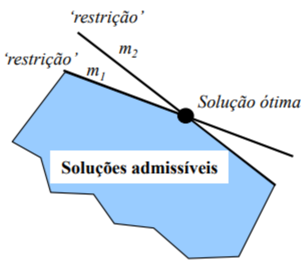
1.6 Análise de Coeficientes na Função Objetivo

Dada uma função objetivo da forma $z = c_1x_1 + c_2x_2$, esta é equivalente a ter $x_2 = (-c_1/c_2)x_1 + z/c_2$. Nesta forma:

- Uma alteração de c_1 ou c_2 provoca uma ateração do declive das retas associadas à função objetivo

- Com uma alteração de c_2 pode alterar-se o sentido da otimização

Situação 1: Intervalo de variação para c_1 (supondo c_2 inalterado)



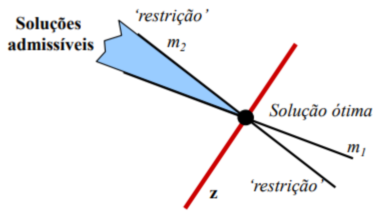
Suponhamos que otimizar equivale a 'deslocar' para 'cima' a reta associada à função objetivo.
(Como c_2 não se altera, o sentido da otimização vai manter-se)

A solução ótima mantém-se

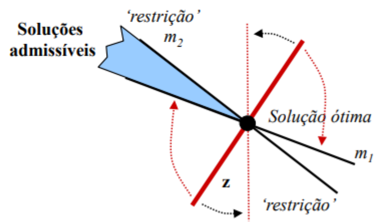
$$m_2 \leq -c_1/c_2 \leq m_1$$

A resolução desta dupla inequação em ordem a c_1 dá-nos o intervalo de variação para c_1 de forma a que a solução ótima não se altere

Situação 2: Intervalo de variação para c_1 (supondo c_2 inalterado)



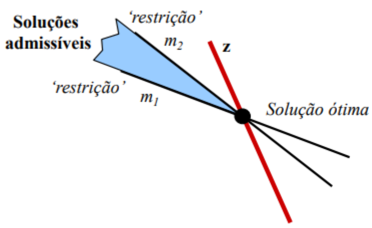
Suponhamos que otimizar equivale a 'deslocar' para 'baixo' a reta associada à função objetivo.
(Como c_2 não se altera, o sentido da otimização vai manter-se)



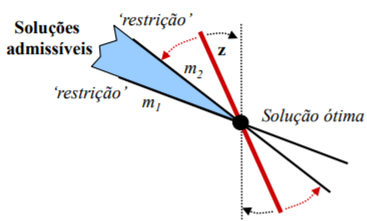
A solução ótima mantém-se

$$m_1 \leq -c_1/c_2 \leq +\infty$$

Situação 3: Intervalo de variação para c_1 (supondo c_2 inalterado)

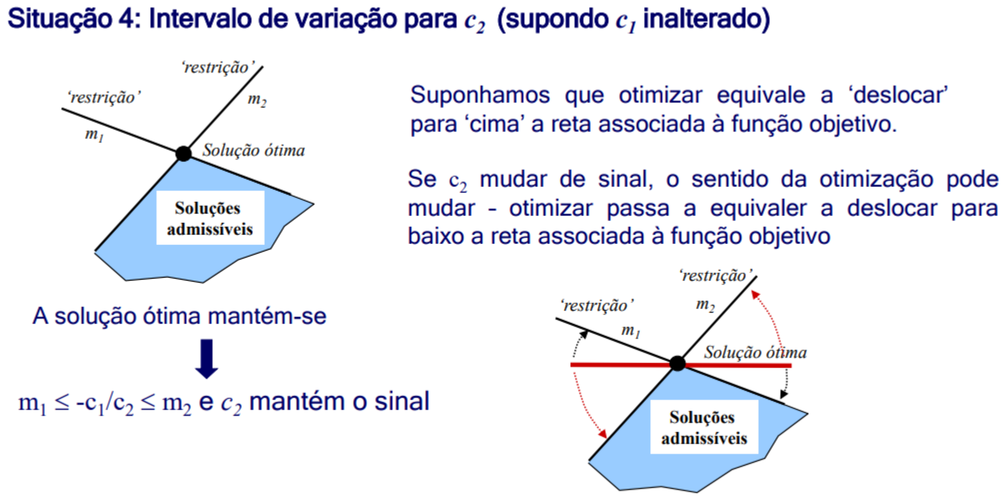


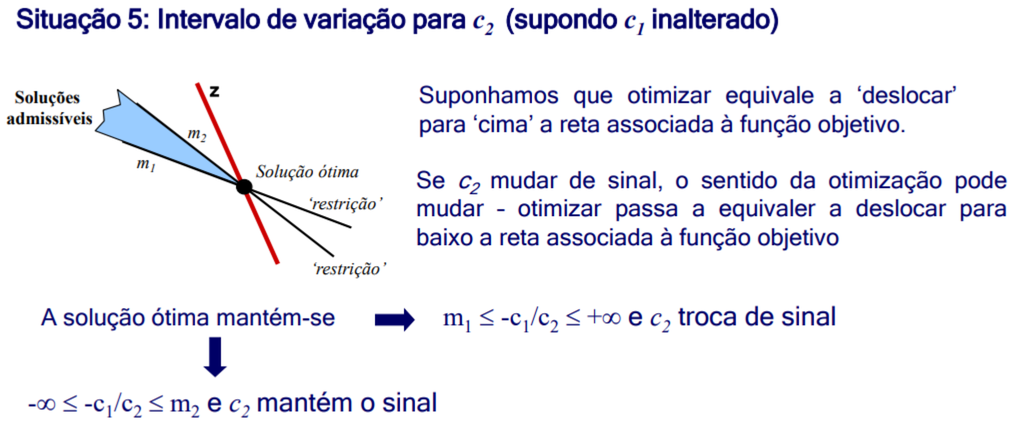
Suponhamos que otimizar equivale a 'deslocar' para 'cima' a reta associada à função objetivo.
(Como c_2 não se altera, o sentido da otimização vai manter-se)



A solução ótima mantém-se

$$-\infty \leq -c_1/c_2 \leq m_2$$





1.7 Excel Solver

O solver permite resolver problemas de programação linear com várias variáveis rapidamente. A figura seguinte demonstra um exemplo de resultado:

Células de Variável

Célula	Nome	Final Valor	Reduzido Custo	Objetivo Coeficiente	Permissível Aumentar	Permissível Diminuir
D5	x1	2	0	15	3	3
E5	x2	0	-3,5	10	3,5	1E+30
F5	x3	23	0	12	3	2

Restrições

Célula	Nome	Final Valor	Sombra Preço	Restrição Lado Direito	Permissível Aumentar	Permissível Diminuir
G7	r1	26	6	26	1,5	1
G8	r2	50	3	50	2	15,33333333
G9	r3	19,25	0	20	1E+30	0,75

Este resultado deve ser interpretado da seguinte forma:

- A coluna intitulada «Valor Final» representa a solução ótima para cada variável e restrição
- A coluna «Preço Sombra» representa os valores marginais de cada restrição
- As colunas «Restrição Lado Direito», «Permissível Aumentar» e «Permissível Diminuir» na tabela de restrições representam a possível variação nos termos independentes sem que os valores marginais se alterem. No caso, o intervalo seria, para r_1:

$$r_1 \in]26 - 1; 26 + 1,5[=]25; 27,5[$$

- As colunas «Objetivo Coeficiente», «Permissível Aumentar» e «Permissível Diminuir» na tabela de variáveis representam a possível variação nos coeficientes da função objetivo sem que a solução ótima se altere. No caso, o intervalo seria, para x_2:

$$x_2 \in]10 - \infty; 10 + 3,5[=] - \infty; 13,5[$$

Grupo 2

Grafos

2.1 Definições e Classificação

2.1.1 Grau Externo e Interno

O número de arcos cujo nodo inicial é o vértice i designa-se por grau externo do vértice i e representa-se por $d^+(i)$ e o número de arcos cujo nodo terminal é o vértice i designa-se por grau interno do vértice i e representa-se por $d^-(i)$. O número de adjacentes de i designa-se por grau do vértice i e representa-se por $d(i)$.

2.1.2 Caminho e Circuito

Chama-se caminho no grafo orientado a uma sequência de arcos em que o vértice terminal de um coincide com o vértice inicial do seguinte e chama-se circuito no grafo a um caminho em que o vértice terminal do último arco coincide com o vértice inicial do primeiro arco. Um caminho ou circuito diz-se simples se não passa mais do que uma vez pelo mesmo arco (aresta) e diz-se elementar se não passa mais do que uma vez por cada vértice.

Analogamente, num grafo não orientado, a definição de caminho corresponde a uma cadeia e a definição de circuito corresponde a um ciclo.

2.1.3 Euleriano e Hamiltoniano

Uma cadeia em G diz-se euleriana se contiver todas as arestas de G uma e uma só vez. Um ciclo em G diz-se euleriano se contiver todas as arestas de G uma e uma só vez. G diz-se euleriano se tiver pelo menos um ciclo euleriano.

Um ciclo em G diz-se hamiltoniano se contém todos os vértices de G uma e uma só vez. G diz-se hamiltoniano se contiver algum ciclo hamiltoniano.

2.2 Caminho Mais Longo e Mais Curto

Seja $G = (X, A)$ um grafo orientado e seja $s \in X$. Admita-se ainda que existe pelo menos um caminho entre s e todos os outros vértices. $\lambda(j)$ é o comprimento do caminho mais curto entre s e j se e só se:

$$\lambda(j) = min\{\lambda(i) + c_{ij}\}$$

E $\mu(j)$ é o comprimento do caminho mais longo entre s e j se e só se:

$$\mu(j) = max\{\mu(i) + c_{ij}\}$$

Em que c_{ij} representa o comprimento da aresta entre i e j.

2.3 Datas Mais Cedo e Mais Tarde

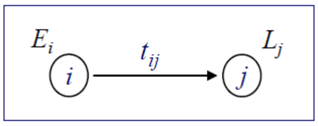
Seja $G = (X, A)$ uma rede de atividades. A data mais cedo em que é possível ocorrer o acontecimento a que corresponde o vértice $j \in X$ designa-se por data mais cedo do vértice j e representa-se por E_j:

$$E(j) = max\{E(i) + t_{ij}\}$$

E a data mais tarde em que é possível ocorrer o acontecimento a que corresponde o vértice $j \in X$ de forma a que todo o projeto fique concluído na data mais cedo (E_n) designa-se por data mais tarde do vértice j e representa-se por L_j:

$$L(j) = min\{L(i) - t_{ji}\}$$

Em que t_{ij} representa a duração da atividade (i, j).
A diferença $F_j = L_j - E_j - t_{ij}$ representa a folga do acontecimento associado ao vértice j. Se $F_j = 0$, o acontecimento diz-se crítico. Considere-se a seguinte atividade:



E_i representa a data mais cedo de início da atividade (i, j)

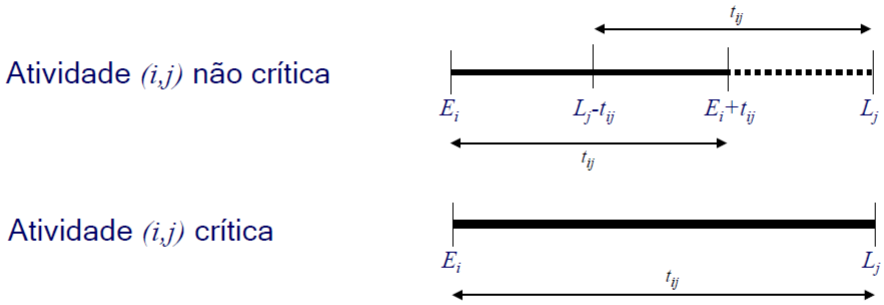
$E_i + t_{ij}$ representa a data mais cedo de conclusão da atividade (i, j)

L_j representa a data mais tarde de conclusão da atividade (i, j)

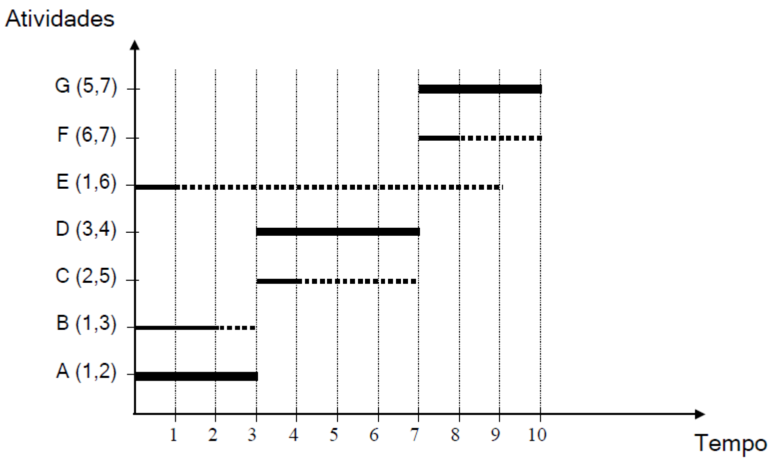
$L_j - t_{ij}$ representa a data mais tarde de início da atividade (i, j)

2.4 Cronograma

A partir das datas mais cedo e mais tarde, é possível construir um cronograma das atividades, da seguinte forma:



No final, o cronograma deverá ter o seguinte aspeto:



Grupo 3

3.1 Afetação

3.1.1 Algoritmo Húngaro

O algoritmo Húngaro tem 4 etapas:

1 Dada uma matriz de custos, subtrai-se o elemento mais baixo a cada linha e coluna, de forma a que todos os elementos sejam não negativos e haja pelo menos um zero em cada linha e coluna.

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & 8 & 4 & 5 \\ 6 & 3 & 5 & 6 \\ 2 & 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{matrix} -2 \\ -4 \\ -3 \\ -2 \end{matrix} \longrightarrow \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} & & & -1 \end{matrix} \end{array} \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

2 De seguida, determina-se o número de riscos necessário para cobrir totalmente todos os zeros presentes.

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

3 A seguir aplica-se o teste de terminação e verifica-se se a afetação é completa, isto é, compara-se o número de traços com o número de linhas/colunas. Se for menor então segue-se para o próximo passo. Se for igual, então a afetação é completa e determinam-se os pares afetos como sendo as coordenadas onde está presente um zero e não existem mais zeros na sua linha e coluna.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0* \\ 3 & 5 & 0* & 0 \\ 2 & 0* & 1 & 1 \\ 0* & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Neste exemplo, os pares afetos são $(1,4)$, $(2,3)$, $(3,2)$ e $(4,1)$ (ou $(3,1)$ e $(4,2)$), logo a máquina 1 faz a tarefa 4, a máquina 2 faz a tarefa 3, etc.

4 Ultimamente, determina-se m como sendo o mínimo dos elementos não cobertos por um risco e subtrai-se m aos elementos não cobertos e adiciona-se m aos elementos duplamente cobertos. Retorna-se ao passo 2.

Nota: O algoritmo Húngaro pode ser utilizado para resolver um problema de afetação em que o objetivo seja a maximização de uma medida de performance. Para tal basta multiplicar por -1 todos os elementos da matriz de custos aplicando o algoritmo à matriz obtida.

3.2 Gestão de Stocks

3.2.1 Notação

- d Procura/consumo por unidade de tempo
- c Custo unitário de aquisição/produção
- K Custo fixo de encomenda
- h Custo de armazenamento por unidade do artigo e por unidade de tempo
- Q Número de unidades a encomendar de cada vez
- T Duração de um ciclo ou período (tempo entre dois re-abastecimentos consecutivos)

3.2.2 Modelo Determinístico Básico

O nível do stock no instante t é dado por:

$$S(T) = Q - dt$$

Os custos associados a uma encomenda são dados por $K + c \times Q$ e os custos de armazenamento por $h \times \frac{Q^2}{2d}$, logo o custo total por período é:

$$K + c \times Q + h \times \frac{Q^2}{2d}$$

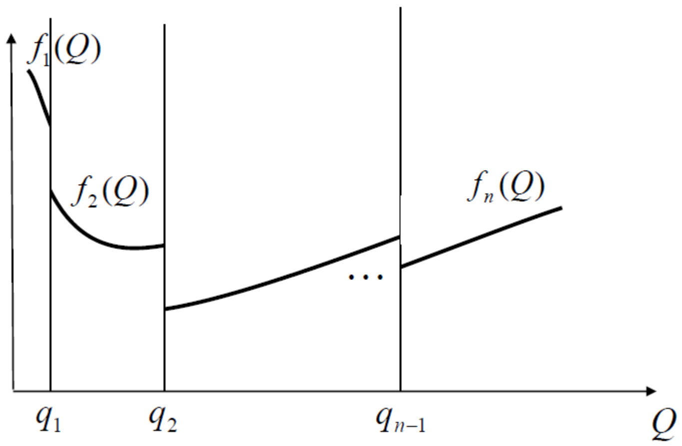
O custo total por unidade de tempo $f(Q)$ é dado pelo custo total por período a dividir pela duração de um período, $f(Q) = \frac{dK}{Q} + cd + \frac{hQ}{2}$.
A quantidade ótima a encomendar Q^* é o ponto mínimo de $f(Q)$ e calcula-se por $Q^* = \sqrt{\frac{2dK}{h}}$, sendo que o custo ótimo por unidade de tempo é $f(Q^*) = cd + \sqrt{2dKh}$. O comprimento de um período ótimo $T^* = \frac{Q^*}{d}$.

3.2.3 MDB com Tempo de Entrega

É possível considerar uma variante do modelo determinístico básico em que se tem em conta o tempo de entrega, l. Neste modelo, o momento em que deve ser lançada a encomenda para que não haja rutura do stock é $T - l$, sendo o stock nesse momento igual a dl, apelidado de ponto de encomenda.

3.2.4 MDB com Descontos por Quantidade

Por vezes são oferecidos descontos por quantidade, neste caso, $f(Q)$ tem o seguinte aspeto:



A solução ótima é Q^* ou um dos q_j maiores ou iguais a Q^*. Para determinar a quantidade ótima a encomendar procede-se da seguinte forma:

- Determinar Q^* e $f(Q^*)$
- Seja $q_s = min\{q_j : q_j > Q^*\}$
- Seja $i = s$; enquanto $i \leq n-1$, se $f(q_i) < f(Q^*)$ fazer $Q^* = q_i$ e $i = i+1$.