Notação

Vamos introduzir uma notação para falar de semelhança de figuras. Se P e Q são figuras, podemos escrever

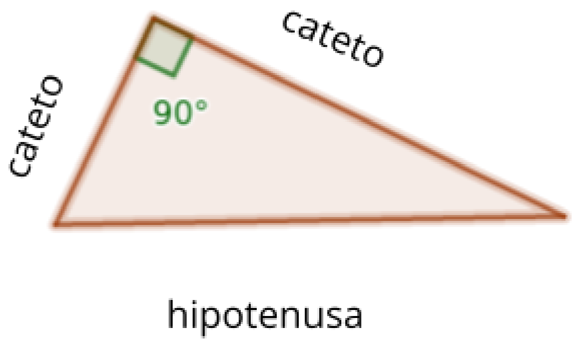
$$P \sim Q$$

para dizer que P é semelhante a Q.

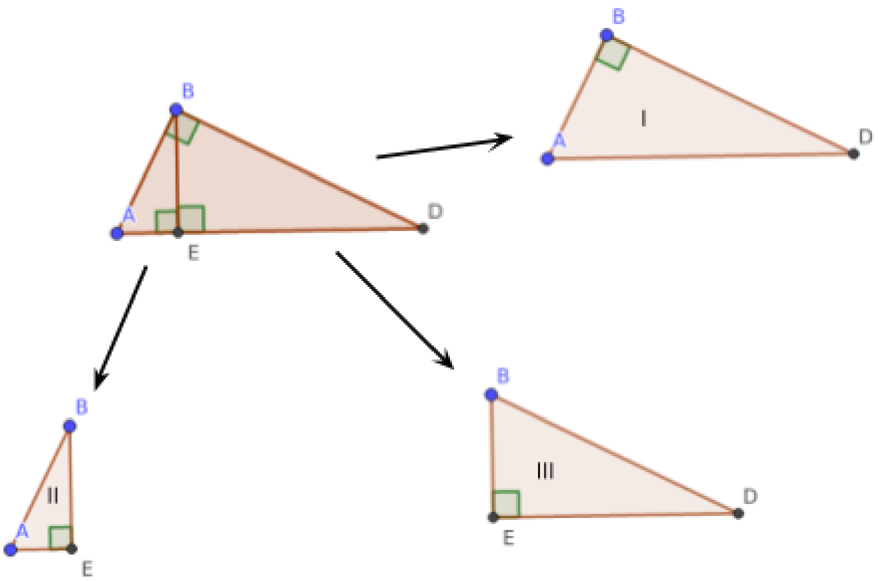
Semelhança no triângulo retângulo

Os triângulos retângulos aparecem tanto nos objetos, edifícios e na própria matemática, que seus lados acabaram recebendo nomes especiais. Lembrando:

- Hipotenusa é o nome do lado oposto ao ângulo de 90°.
- Cateto é o nome dado aos outros dois lados



Há uma propriedade envolvendo semelhança que só os triângulos retângulos possuem. Num triângulo retângulo, traçando a altura relativa à hipotenusa, dois novos triângulos retângulos são formados. Vamos designar por I, II e III esses três triângulos.



A propriedade em questão é que os três triângulos são semelhantes dois a dois. Ou seja, I é semelhante a II, II e semelhante a III e I é semelhante a III.

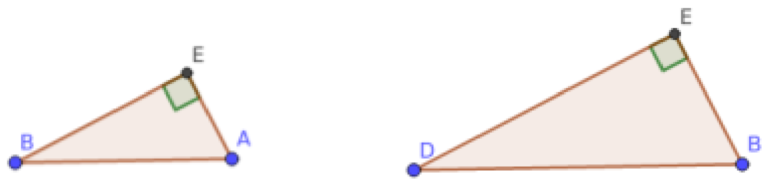
Exercício 19. O objetivo desse exercício é mostrar a propriedade acima. Vamos usar a conclusão da seção anterior de que se dois triângulos têm dois ângulos respectivamente congruentes, então eles são semelhantes.

a) Para provar que $I \sim II$, encontre um ângulo em I que seja congruente a um ângulo em II. Depois, encontre outro ângulo em I (diferente do que você acabou de achar) que seja igual a outro ângulo em II.

b) Para provar que $II \sim III$, repita o mesmo procedimento, mas considere o triângulo II ao invés do I.

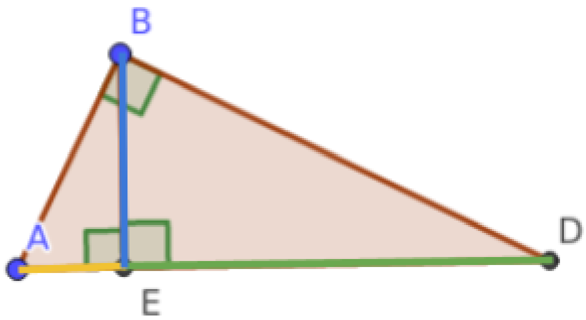
c) Por fim, mostre que se $I \sim II$ e $II \sim III$ então $I \sim III$

Com base nessas semelhanças, podemos encontrar várias relações entre as medidas dos lados desses triângulos. Como exemplo, vamos olhar para o caso dos triângulos II e III. Colocando-os em posição semelhante, é fácil escrever as relações de proporcionalidade:



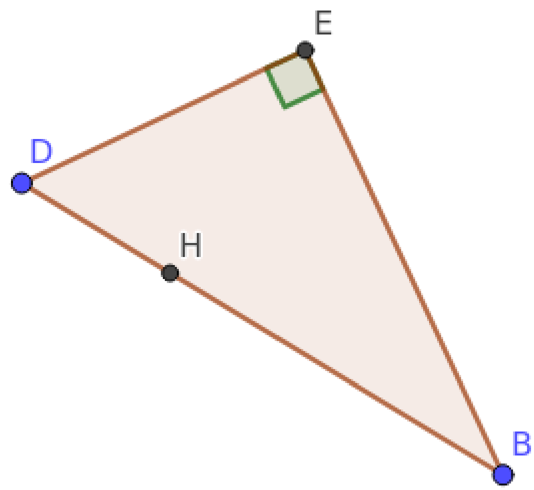
$$\frac{BE}{DE} = \frac{AE}{BE}$$

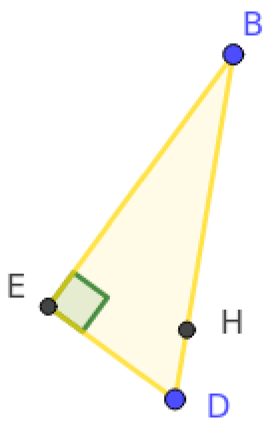
Aplicando a regra de três, ficamos com $(BE)^2 = DE \cdot AE$. Veja só:



Sabemos que o comprimento em azul ao quadrado é igual ao comprimento amarelo vezes o verde!

Exercício 20. Considere o triângulo EDB, em que o ângulo Ê é de 90°, EH é a altura em relação à hipotenusa, DH = 2 e HB = 8. Calcule a altura EH. Considere que as medidas estão em metros.





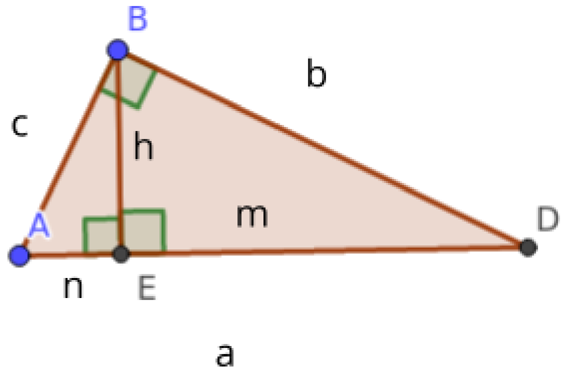
Exercício 21. No triângulo EBD, o ângulo $\hat{B}$ mede 32°, e EH é a altura do triângulo em relação a BD.

a) Quais são as medidas dos ângulos internos do triângulo EHB?

b) Quais são as medidas dos ângulos internos do triângulo EHD?

c) Os triângulos EDH e EHB são semelhantes ao triângulo EBD?

Exercício 21. Para simplificar, vamos escrever os comprimentos dos triângulos abaixo usando as letras *a, b, c, m*, *n* e *h*, como na figura abaixo:



De forma que a fórmula envolvendo a altura do triângulo, descoberta no início da seção, é dada por $h^2 = m \cdot n$. Descubra outras duas fórmulas como essa, ou seja, encontre outras duas relações métricas no triângulo retângulo.