
Um *contra-exemplo* de separação de roupas em conjuntos

Quando arrumamos o armário, geralmente, reservamos uma gaveta para blusas, um espaço para calças, uma gaveta para meias, e assim por diante. Quando fazemos isso estamos **classificando** as roupas de acordo com alguma característica delas, formando o **conjunto** das blusas, o conjunto das calças, o conjunto das meias... Classificar é distribuir algum tipo de ser ou objeto (roupas, animais, alunos, números, figuras geométricas, etc) em classes, conjuntos ou grupos[1], por meio de algum **critério**. Outro exemplo de classificação é separar o conjunto dos números naturais em *pares* e *ímpares*. Nesse exemplo, o critério é ser par ou ímpar. A classificação também é muito comum em geometria: quando distinguimos as figuras planas poligonais das não poligonais, estamos gerando os conjuntos dos polígonos e o conjunto dos não polígonos.

Pertencimento

O conceito mais elementar que nos permite falar de conjuntos é o conceito de pertencimento. Um conjunto fica definido quando descrevemos quem são os elementos que pertencem a ele, e, consequentemente, quais elementos não lhe pertencem. Considere, por exemplo, o conjunto dos cooperados da Arco em 2021.

[1] Nesse contexto, classe, conjunto, grupo, família e coleção são sinônimos.

Dizemos que o Enzo **pertence** ao conjunto dos cooperados da Arco. Igualmente, Danilo pertence ao conjunto dos cooperados da Arco. Não se pode dizer o mesmo de Jair Bolsonaro ou de Sócrates: Jair Bolsonaro não pertence ao conjunto de cooperados da Arco, nem Sócrates[2]. Quando algo pertence a um conjunto, dizemos que esse algo **é elemento** desse conjunto. Assim, poderíamos equivalentemente dizer que Enzo é elemento do conjunto dos cooperados da Arco.

Finalmente, vamos introduzir uma *notação* (ou seja, um jeito de escrever que significa a mesma coisa) para falar de pertencimento. Vamos usar o símbolo ∈. Seja A o conjunto dos cooperados da arco e E o cooperado Enzo. Então:

sinônimos

$E \in A$
Enzo pertence ao conjunto dos cooperados da Arco
Enzo é elemento do conjunto dos cooperados da Arco

Igualdade

Dizemos que dois conjuntos são **iguais** (ou então, que são o mesmo) se e somente se seus elementos forem os mesmos. Ou seja, o conjunto A é igual ao conjunto B se e somente se[3] todo elemento de A for também elemento de B, e se todo elemento de B for também elemento de A. Em outras palavras, o que define um conjunto são os elementos que lhe pertencem.

Tamanho de conjuntos

O **tamanho** ou **cardinalidade** de um conjunto é o número de elementos distintos que aparecem dentro dele. Seja A o conjunto dos alunos do 9º ano da arco em 2021. Então o tamanho[4] de A é 24. Outro exemplo é o conjunto dos brasileiros, cujo tamanho é de mais ou menos 211 milhões.

Alguns conjuntos têm tamanho infinito. Ou seja, não existe nenhum número natural que consiga representar o tamanho daquele conjunto[5]. Um exemplo de conjunto de cardinalidade infinita é o conjunto dos números naturais.

---

[2] Note que, uma vez que definimos um conjunto a partir de um critério, então dizer que um elemento pertence a um conjunto é a mesma coisa que dizer que esse elemento satisfaz esse critério. Em um exemplo, dizer que “Enzo pertence ao conjunto dos cooperados da Arco” é o mesmo que dizer que “Enzo é um cooperado”.
[3] Essa afirmação também é conhecida como “princípio de extensionalidade”.
[4] Essa afirmação também pode ser escrita assim: $|A| = 24$
[5] Mais precisamente, dizemos que a cardinalidade de um conjunto A é infinita quando, para cada número natural *n*, existe um subconjunto de A de cardinalidade *n*.

Descrevendo conjuntos

Já sabemos que o que define um conjunto são os seus elementos. Vamos introduzir agora uma notação para **descrever** conjuntos. É um tanto simples: vamos usar um par de chaves ("{" e "}") para indicar que trata-se de um conjunto e, dentro delas, listar seus elementos, separados por vírgulas[6]. Veja:

Conjunto dos professores de matemática da Arco: {Bigode, Enzo, Seckler}
Conjunto dos professores de música da Arco: {Leo}
Conjunto dos professores de Educação Moral e Cívica da Arco: {}

Conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$): {0, 1, 2, 3, 4, ...}
Conjunto dos número naturais menores que 3: {0, 1, 2}
Conjunto dos números naturais menores que 10 e maiores que 5: {6, 7, 8, 9}
Conjunto dos números naturais menores que 10 e maiores que 20: {}

Lembre-se que dois conjuntos são iguais se seus elementos forem os mesmos. Então temos que

{Bigode, Enzo, Seckler} = {Seckler, Bigode, Enzo}

ou então, esses dois conjuntos são *o mesmo*. Isso quer dizer que a ordem em que os elementos aparecem dentro das chaves não importa.

Deve parecer estranho especificar o conjunto dos professores de Educação Moral e Cívica na Arco, já que essa disciplina não é oferecida na escola, portanto *não há professores que satisfaçam esse critério*. O conjunto resultante não poderá conter nenhum elemento! Logo, o conjunto especificado é o **conjunto vazio**, denotado simplesmente por {} ou por ∅. Analogamente, note que não existe nenhum número que seja menor do que 10 e que seja maior do que 20. Logo, o conjunto especificado por esse critério deve também ser o conjunto vazio.

Exercício 1. Reflita sobre o processo de classificação no seu cotidiano. Dê dois exemplos de situações no dia a dia (sem ser na aula de matemática e sem repetir o exemplo do armário do início da atividade) em que você classificou alguma coisa. Nos dois exemplos, descreva o critério utilizado e os conjuntos resultantes dessa classificação.

Exercício 2.

a) Descreva o conjunto dos professores de artes da Arco;
b) Descreva o conjunto dos professores de Etiqueta da Arco;
c) Descreva o conjunto dos números naturais **n** que satisfaça simultaneamente as

[6] Algumas vezes vamos usar o ponto e vírgula (;) para separar os elementos, para não confundir com a vírgula que separa a parte inteira das casas decimais.

três condições abaixo:

i) $n < 6$
ii) $n > 5$
iii) $n \leq 4$

Exercício 3. Para todas as respostas do exercício 2, diga qual é o tamanho do conjunto que você descreveu.

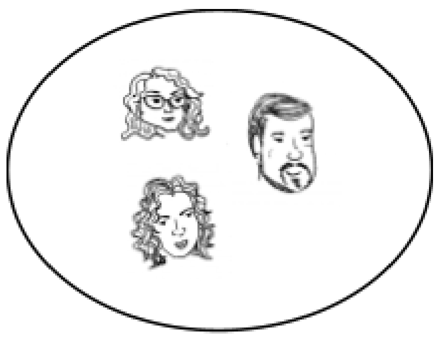
Exercício 4. Considere o conjunto A de todos o números naturais pares e o conjunto B de todos os números naturais múltiplos de 2. É correto dizer que $A = B$? Justifique.

Exercício 5[7]**.** Seja B um conjunto qualquer. Considere o conjunto $A_1 = \{B, B\}$. Qual é a cardinalidade de A_1? Considere também o conjunto $A_2 = \{B, B, B\}$ e $A_3 = \{B, B, B, B\}$. Qual é a diferença entre A_1, A_2e A_3?

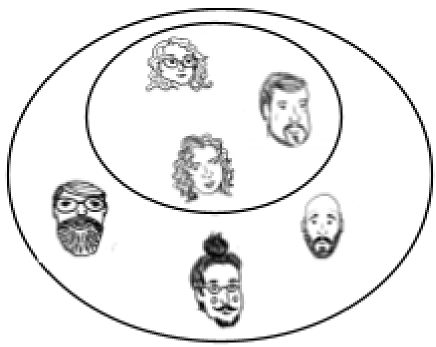
Inclusão

Informalmente, um conjunto é subconjunto de outro quando o primeiro "faz parte" do segundo. Por exemplo, considere o *conjunto de professores de humanas* da Arco em 2021 e o *conjunto de professores de história* da Arco em 2021. O segundo conjunto "faz parte" do primeiro, afinal, a história é uma disciplina de humanas.

professores de humanas



Professores de história



professores de história são um **subconjunto** dos professores de humanas

[7] Dica: releia a seção "igualdade"

Note que todos os elementos do conjunto dos professores de história também são elementos do conjunto dos professores de humanas. É isso que quer dizer “fazer parte”!

Dizemos que um conjunto A é **subconjunto**[8] de um conjunto B se todo elemento de A for também elemento de B. Para representar essa ideia, vamos usar a seguinte notação: $A \subseteq B$.

Exercício 6. Descreva outros dois casos do dia a dia em que um conjunto é subconjunto de outro.

Exercício 7. Identifique os **conjuntos**, **elementos**, relações de **inclusão** e **pertencimento** utilizados nos argumentos:

a) Todos os animais são mortais
O papagaio é um animal
____
O papagaio é mortal

b) Todos os homens são feitos de queijo
Sócrates é homem
____
Sócrates é feito de queijo

c) Toda regra tem exceção
A proposição anterior é uma regra
____
Existe regra sem exceção

Exercício 8. Considere as seguintes definições, no contexto da geometria plana:

- A é o conjunto dos polígonos;
- T é o conjunto dos triângulos;
- b é um ponto;
- F é o conjunto das figuras geométricas;
- q é um quadrado;
- R é o conjunto dos retângulos;
- L é o conjunto dos losangos;
- c é um quadrilátero

[8] Também podemos dizer que o conjunto A está **incluído** no conjunto B.

- d é uma reta;
- P é o conjunto de todos os pontos;

Descreva no mínimo seis relações de pertencimento ou de inclusão entre os objetos acima.

Exercício 9[9]. Considerando os seguintes conjuntos,

$A = \{1\}$
$B = \{1, \{1\}\}$
$C = \{1, 2\}$
$D = \{1, 2, \{1\}\}$
$E = \{1, \{1, \{1\}\}\}$

determine quais das sentenças abaixo são verdadeiras:

i) $A \in B$
ii) $A \subseteq B$
iii) $B \in E$
iv) $B \subseteq E$
v) $C \in D$
vi) $C \subseteq D$
vii) $B \subseteq D$

Conjuntos de múltiplos

Considere os conjuntos formados por múltiplos de números naturais. Por exemplo, considere o conjunto dos múltiplos de 3. Vamos chamá-lo de $M(3)$. Assim,

$$M(3) = \{0, 3, 6, 9, 12,...\}$$

Em geral, $M(n)$ é o conjunto dos múltiplos de um número natural n. Veja outro exemplo:

$$M(6) = \{0, 6, 12, 18, 24,...\}$$

Exercício 10.

a) Existe algum número que é elemento de todos os conjuntos dos múltiplos? Ou seja, existe algum número z tal que pertence a $M(n)$, qualquer que seja n?

[9] Desafio: Construa um conjunto A, diferente do conjunto vazio, tal que todo elemento de A é subconjunto de A. Dê dois exemplos.

b) Encontre um conjunto de múltiplos que seja subconjunto de outro conjunto de múltiplos. Ou seja, encontre m e n tais que $M(m) \subseteq M(n)$. Qual é a relação entre m e n ?

c) Mostre que se $a, b \in M(n)$, então $a + b \in M(n)$, para todo n.

d) Mostre que se $a \in M(n)$ e k é um número natural, então $a \cdot k \in M(n)$, para todo n.

União

Podemos criar novos conjuntos a partir de conjuntos dados de diversas maneiras. Por exemplo, "juntando" dois deles. A **união** de dois conjuntos A e B é o conjunto que contém todos os elementos que pertencem a A ou que pertencem a B. Usaremos a seguinte notação para indicar a união de A e B:

$$A \cup B$$

Veja um exemplo: seja A o conjunto dos estudantes da Arco, EF o conjunto dos estudante do Ensino Fundamental II da Arco, e EM o conjunto dos estudantes do Ensino Médio da Arco. Então:

$$A = EM \cup EF$$

Seja também EM_1 o conjunto dos estudantes da 1ª série o médio, EM_2 da 2ª série, e assim por diante. Então:

$$EM = EM_1 \cup EM_2 \cup EM_3$$

$$EF = EF_6 \cup EF_7 \cup EF_8 \cup EF_9$$

Intersecção

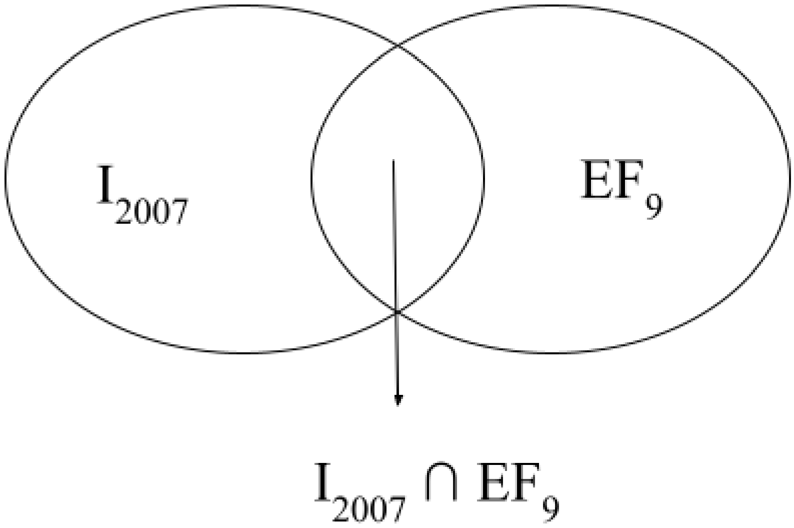
Ao invés de "juntar" dois conjuntos, podemos também "pegar o que eles têm em comum". A **intersecção** entre dois conjuntos A e B é o conjunto que contém os elementos que são elementos tanto de A quanto de B. Usaremos a seguinte notação para denominá-lo:

$$A \cap B$$

Veja um exemplo: considere que I_{2007} é o conjunto dos estudantes da Arco que nasceram no ano de 2007. Considere o conjunto:

$$EF_9 \cap I_{2007}$$

Ele é o conjunto de estudantes do 9ª que são de 2007! Repare que ele não corresponde nem à classe do 9º ano inteira nem ao conjunto dos alunos da arco que nasceram em 2007, mas sim à parte em comum entre esses dois conjuntos.



Exercício 11. Descreva os conjuntos:

a) $M(2) \cup M(4)$
b) $M(2) \cap M(4)$
c) $M(2) \cup M(3)$
d) $M(2) \cap M(3)$
e) $M(3) \cup M(9)$
f) $M(3) \cap M(9)$

Conjuntos numéricos

O conjunto dos números naturais

O conjunto dos números naturais é o mais simples entre os que nos interessam aqui. Através de seus elementos, as crianças têm seus primeiros contatos com a matemática, e foram os primeiros a aparecerem na história da humanidade. Também são conhecidos como *números para contar*: um, dois, três, quatro... Os matemáticos acrescentaram o número 0 e o denominaram conjunto dos números naturais:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

Exercício 12. Dê dois exemplos de subconjuntos de $\mathbb{N}$ com 6 elementos que satisfaçam simultaneamente às seguintes condições:

i) Todos maiores que 100 e menores que 200;
ii) Não podem ser múltiplos de 5;
iii) Dois elementos quaisquer não podem satisfazer à equação $x + y = 300$

Exercício 13. Aponte um subconjunto de cardinalidade infinita em que qualquer elemento, com exceção do menor de todos, pode ser obtido a partir da soma de outro elemento com 3.

Exercício 14. Um conjunto se diz **fechado** em relação à adição se, somando quaisquer dois elementos desse conjunto, o resultado também pertence a esse conjunto. De forma análoga, o mesmo se diz sobre um conjunto ser fechado em relação à multiplicação.

Em outras palavras, um conjunto A é fechado em relação à adição se e somente se, para todo $x, y \in A$, for verdade que $x + y \in A$.

a) O conjunto $\mathbb{N}$ é fechado em relação à adição? E em relação à multiplicação?
b) Forneça um subconjunto de $\mathbb{N}$ que seja fechado em relação à adição.
c) Forneça um subconjunto de $\mathbb{N}$ que seja fechado em relação à multiplicação.
d) Forneça um subconjunto de $\mathbb{N}$ que não seja fechado em relação à adição nem à multiplicação.
e) Existe algum subconjunto de $\mathbb{N}$ de cardinalidade finita fechado em relação à adição? Se sim, forneça-o.
f) Existe algum subconjunto de $\mathbb{N}$ de cardinalidade finita fechado em relação à multiplicação? Se sim, forneça-o.
g) O conjunto $\mathbb{N}$ é fechado em relação à subtração?
h) Encontre alguma operação que não seja a adição, multiplicação e subtração em relação à qual o conjunto dos naturais *não* seja fechado.
i) Encontre alguma operação que não seja a adição, multiplicação e subtração em relação à qual o conjunto dos naturais seja fechado.

Exercício 15. Dizemos que um elemento de um conjunto é **neutro** em relação a uma operação quando fazer essa operação entre ele e qualquer outro elemento do conjunto nos dá esse outro elemento mesmo. Ou seja, fazer a operação com esse elemento é a mesma coisa que não fazer nada.

Por exemplo, o elemento neutro da adição é o 0. Isso porque qualquer número mais zero é igual a ele mesmo.

a) Qual é o elemento neutro da multiplicação.
b) E o da divisão?
c) E o da subtração?

O conjunto dos números inteiros

Juntando os elementos do conjunto dos números naturais com seus opostos[10], obtemos um novo conjunto: o dos números inteiros.

$$\mathbb{Z} = \{... - 5, - 4, - 3, - 2, - 1, 0\} \cup \{0, 1, 2, 3, 4, 5,...\}$$

O símbolo comumente utilizado para identificar os números inteiros é o Z maiúsculo, inicial da palavra *Zahl*, que em alemão significa “número”.

Exercício 16.

a) Qual a cardinalidade de $\mathbb{Z}$?
b) Dê três exemplos de subconjuntos infinitos de $\mathbb{Z}$.
c) Quantos subconjuntos tem o conjunto $\mathbb{Z}$?
d) Decida se a seguinte proposição é verdadeira: “existe um elemento em $\mathbb{Z}$ que é menor que qualquer outro número”
e) Faça o mesmo para essa: “existe um elemento em $\mathbb{N}$ que é menor que qualquer outro número”

Exercício 17. Verifique se $\mathbb{Z}$ é fechado para cada uma das 4 principais operações (soma, subtração, multiplicação e divisão).

Exercício 18.

a) Forneça um subconjunto de $\mathbb{Z}$ fechado em relação à adição
b) Forneça um subconjunto de $\mathbb{Z}$ fechado em relação à subtração
c) Forneça um subconjunto de $\mathbb{Z}$ fechado em relação à multiplicação
d) Forneça um subconjunto de $\mathbb{Z}$ fechado em relação à divisão

Equações em $\mathbb{N}$ e em $\mathbb{Z}$

A solução de uma equação pode ter resultados diferentes, dependendo do conjunto com que estamos trabalhando. Considere a equação $x + 2 = 4$, para $x \in \mathbb{N}$. Ela tem solução, já que $x = 2$ é um elemento de $\mathbb{N}$. Nesse caso, dizemos que trata-se de uma **solução em** $\mathbb{N}$.

A equação $x + 2 = 4$, para $x \in \mathbb{Z}$ também tem solução, pois 2 também é um número inteiro.

Considere agora a equação $x + 2 = 1$, com $x \in \mathbb{N}$. Essa equação não tem solução, já que não existe nenhum número natural que a satisfaça (verifique). Se, no entanto, considerarmos $x \in \mathbb{Z}$, então a equação tem solução: $x =- 1$.

[10] Dizemos que um número *a* é **oposto** a *b* se a = -b

Exercício 19. Indique quais são as soluções das equações abaixo, considerando que $x \in \mathbb{N}$:

a) $2x - 4 = 0$
b) $3x - 1 = 4$
c) $2x + 1 = 5$
d) $2x - 1 = 1$
e) $x + 5 = 4$
f) $2x + 1 = 0$
g) $x^2 - 9 = 0$
h) $(x - 4)^2 = 25$
i) $(- 6 + x)^2 - 9 = 0$
k) $2x^2 - 4x = 0$
j) $x^2 + 10x + 25 = 16$

Definindo conjuntos por compreensão

Até agora definimos conjuntos de dois modos. Ou usamos o português, por exemplo: "O conjunto dos números naturais pares", ou então usamos a notação com chaves, exemplo: $\{0, 2, 4, 8, 10,...\}$. O primeiro sofre de não ser enxuto. O segundo sofre de falta de precisão em se tratando de conjuntos de cardinalidade infinita (nem sempre fica preciso o que querem dizer as reticências).

Vamos introduzir uma nova notação que representa conjuntos por **compreensão**. Vamos usar as mesmas chaves, mas ao invés de listar os elementos, vamos descrevê-los através de uma propriedade. Por exemplo, considere que B é o conjunto de números inteiros menores que 5. Podemos representar B da seguinte maneira:

$\{x \in \mathbb{Z}: x < 5\}$

Se quisermos representar o conjunto dos naturais maiores ou iguais a 6, poderemos dizer:

$\{x \in \mathbb{N}: x \geq 6\}$

Outro exemplo é o conjunto dos cooperados da Arco em 2021. Poderíamos representá-lo assim:

$\{c: c \text{ é } cooperado\ da\ arco\ em\ 2021\}$

Podemos ler os dois pontos (:)[11] como “tais que”. Assim, o conjunto acima poderia ser lido da seguinte forma: “O conjunto dos números naturais *x* tais que *x* é maior ou igual a 6”. Veja como poderíamos descrever o conjunto dos números inteiros pares:

$$\{x \in \mathbb{Z}\text{: } existe\ k \in \mathbb{Z}\ tal\ que\ 2k = x\}$$

Exercício 20.

a) Represente o conjunto dos números naturais menores que 5 de três jeitos diferentes.
b) Represente por compreensão o conjunto dos números inteiros menores que 100.
c) Represente por compreensão o conjunto dos países da américa do sul
d) Represente por compreensão o conjunto *{tipuana, seringueira, resedá, pau-brasil, ...}*
e) Represente por compreensão o conjunto dos números quadrados (isto é, números naturais que podem ser escritos como um outro número natural ao quadrado)
f) Represente por compreensão o conjunto dos números naturais ímpares.
g) Represente por compreensão o seguinte conjunto:

{ a : a é triângulo } ∪ { a : a é quadrado } ∪ { a : a é pentágono } ∪
{ a : a é hexágono } ∪ { a : a é heptágono } ∪ ...

Exercício 21. Seja A um conjunto. Seja B outro conjunto dado por $B = \{i \in \mathbb{Z}: i \neq i\}$.

a) Quantos elementos tem o conjunto B?
b) Forneça outra representação por compreensão para B.

O conjunto dos números racionais

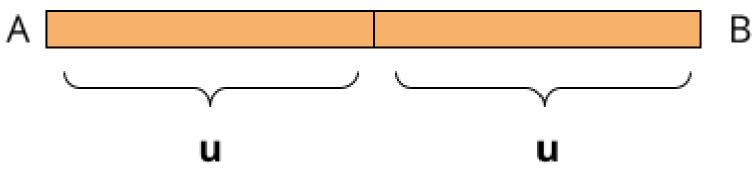
Depois de ter criado os números e desenvolvido vaŕios sistemas de contagem e numeração, o homem deparou com um problema que não podia ser resolvido com os número de que dispunha. O problema da **medida**. Abaixo, vemos uma passagem de Heródoto[12], um historiador grego que viveu no século V a.C.

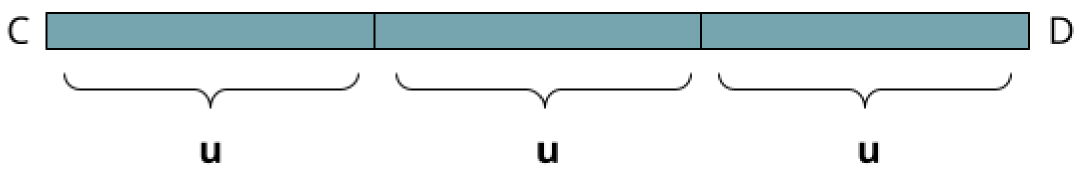
> *Disseram-me que este rei [Sesóstris] tinha repartido todo o Egito entre os egípcios, e que tinha dado a cada um uma porção igual e retangular de terra, com a obrigação de pagar por ano um certo tributo. Se a porção de algum fosse diminuída pelo rio [Nilo], ele que fosse procurar o rei e lhe expusesse o que tinha acontecido à sua terra, que ao mesmo tempo o rei enviaria medidores ao local e faria medir a terra, a fim de saber de quanto ela estava diminuída e de só fazer pagar o tributo conforme o que tivesse ficado em*

[11] É comum também usar uma barra vertical (|) ao invés dos dois pontos. Ambos têm o mesmo significado.
[12] Heródoto é conhecido como o pai da História.

terra. Eu creio que foi daí que nasceu a Geometria e que depois ela passou aos gregos.

Se a geometria nasceu como sugere Heródoto, é possível que as frações também tenham surgido do problema da medida. Veja: um segmento AB pode ser medido com a unidade **u**.





Mas como medir um segmento PQ muito longo ou muito curto, tendo **u** como unidade? Problemas desse tipo levaram ao surgimento dos números **racionais**.

O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais inclui todos os números inteiros e mais os números representados por frações (positivas e negativas). Em outras palavras, o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é formado por todos os números que podem ser colocados na forma $\frac{a}{b}$, com $a, b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$.

$$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b}: a, b \in \mathbb{Z}\ e\ b \neq 0\}$$

Exercício 17. Verifique se $\mathbb{Q}$ é fechado para cada uma das 4 principais operações (soma, subtração, multiplicação e divisão).

Exercício 18. Verifique se $\mathbb{Q}$ é fechado em relação à potenciação e à radiciação. Ou seja, verifique se um número racional qualquer elevado a outro racional qualquer é sempre um número racional. Em seguida, verifique se a raiz *r*-ésima de um número racional qualquer, sendo *r* um racional qualquer, é também um racional.

Exercício 19. Compare os números racionais abaixo, usando os sinais de <, >, ou =.

a) $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{3}$

b) $\frac{3}{4}$ e $\frac{4}{5}$

c) $\frac{8}{9}$ e $\frac{7}{8}$

d) $\frac{5}{100}$ e $\frac{4}{99}$

e) $\frac{87}{91}$ e $\frac{82}{86}$

f) $\frac{(a+1)}{15}$ e $\frac{a}{14}$

a) $\frac{998}{999}$ e $\frac{98}{99}$