

Quando arrumamos o armário, geralmente, reservamos uma gaveta para blusas, um espaço para calças, uma gaveta para meias, e assim por diante. Quando fazemos isso estamos **classificando** as roupas de acordo com alguma característica delas, formando o **conjunto** das blusas, o conjunto das calças, o conjunto das meias... Classificar é distribuir algum tipo de ser ou objeto (roupas, animais, alunos, números, figuras geométricas, etc) em classes, conjuntos ou grupos¹, por meio de algum **critério**. Outro exemplo de classificação é separar o conjunto dos números naturais em *pares* e *ímpares*. Nesse exemplo, o critério é ser par ou ímpar. A classificação também é muito comum em geometria: quando distinguimos as figuras planas poligonais das não poligonais, estamos gerando os conjuntos dos polígonos e o conjunto dos não polígonos.



Um contra-exemplo de separação de roupas em conjuntos

Pertencimento

O conceito mais elementar que nos permite falar de conjuntos é o conceito de pertencimento. Um conjunto fica definido quando descrevemos quem são os elementos que pertencem a ele, e, conseqüentemente, quais elementos não lhe pertencem. Considere, por exemplo, o conjunto dos cooperados da Arco em 2021.



¹ Nesse contexto, classe, conjunto, grupo, família e coleção são sinônimos.

Dizemos que o Enzo **pertence** ao conjunto dos cooperados da Arco. Igualmente, Danilo pertence ao conjunto dos cooperados da Arco. Não se pode dizer o mesmo de Jair Bolsonaro ou de Sócrates: Jair Bolsonaro não pertence ao conjunto de cooperados da Arco, nem Sócrates². Quando algo pertence a um conjunto, dizemos que esse algo **é elemento** desse conjunto. Assim, poderíamos equivalentemente dizer que Enzo é elemento do conjunto dos cooperados da Arco.

Finalmente, vamos introduzir uma *notação* (ou seja, um jeito de escrever que significa a mesma coisa) para falar de pertencimento. Vamos usar o símbolo \in . Seja A o conjunto dos cooperados da arco e E o cooperado Enzo. Então:

sinônimos	$E \in A$
	Enzo pertence ao conjunto dos cooperados da Arco
	Enzo é elemento do conjunto dos cooperados da Arco

Igualdade

Dizemos que dois conjuntos são **iguais** (ou então, que são o mesmo) se e somente se seus elementos forem os mesmos. Ou seja, o conjunto A é igual ao conjunto B se e somente se todo elemento de A for também elemento de B ³. Em outras palavras, o que define um conjunto são os elementos que lhe pertencem.

Tamanho de conjuntos

O **tamanho** ou **cardinalidade** de um conjunto é o número de elementos que aparecem dentro dele. Seja A o conjunto dos alunos do 9º ano da arco em 2021. Então o tamanho⁴ de A é 24. Outro exemplo é o conjunto dos brasileiros, cujo tamanho é de mais ou menos 211 milhões.

Alguns conjuntos têm tamanho infinito. Ou seja, não existe nenhum número que consiga representar o tamanho daquele conjunto. Um exemplo de conjunto de cardinalidade infinita é o conjunto dos números naturais.

Descrevendo conjuntos

Já sabemos que o que define um conjunto são os seus elementos. Vamos introduzir agora uma notação para **descrever** conjuntos. É um tanto simples: vamos usar um

² Note que, uma vez que definimos um conjunto a partir de um critério, então dizer que um elemento pertence a um conjunto é a mesma coisa que dizer que esse elemento satisfaz esse critério. Em um exemplo, dizer que “Enzo pertence ao conjunto dos cooperados da Arco” é o mesmo que dizer que “Enzo é um cooperado”.

³ Essa afirmação também é conhecida como “princípio de extensionalidade”.

⁴ Essa afirmação também pode ser escrita assim: $|A| = 24$

par de chaves (“{” e “}”) para indicar que trata-se de um conjunto e, dentro delas, listar seus elementos, separados por vírgulas. Veja:

Conjunto dos professores de matemática da Arco: {Bigode, Enzo, Seckler}

Conjunto dos professores de música da Arco: {Leo}

Conjunto dos professores de Educação Moral e Cívica da Arco: {}

Conjunto dos números naturais (\mathbb{N}): {0, 1, 2, 3, 4, ...}

Conjunto dos número naturais menores que 3: {0, 1, 2}

Conjunto dos números naturais menores que 10 e maiores que 5: {6, 7, 8, 9}

Conjunto dos números naturais menores que 10 e maiores que 20: {}

Lembre-se que dois conjuntos são iguais se seus elementos forem os mesmos. Então temos que

$$\{\text{Bigode, Enzo, Seckler}\} = \{\text{Seckler, Bigode, Enzo}\}$$

ou então, esses dois conjuntos são *o mesmo*. Isso quer dizer que a ordem em que os elementos aparecem dentro das chaves não importa.

Deve parecer estranho especificar o conjunto dos professores de Educação Moral e Cívica na Arco, já que essa disciplina não é oferecida na escola, portanto *não há professores que satisfaçam esse critério*. O conjunto resultante não poderá conter nenhum elemento! Logo, o conjunto especificado é o **conjunto vazio**, denotado simplesmente por {} ou por \emptyset . Analogamente, note que não existe nenhum número que seja menor do que 10 e que seja maior do que 20. Logo, o conjunto especificado por esse critério deve também ser o conjunto vazio.

Exercício 1. Reflita sobre o processo de classificação no seu cotidiano. Dê dois exemplos de situações no dia a dia (sem ser na aula de matemática e sem repetir o exemplo do armário do início da atividade) em que você classificou alguma coisa. Nos dois exemplos, descreva o critério utilizado e os conjuntos resultantes dessa classificação.

Exercício 2.

- a) Descreva o conjunto dos professores de artes da Arco;
- b) Descreva o conjunto dos professores de Etiqueta da Arco;
- c) Descreva o conjunto dos números naturais n tais que:
 - i) $n < 6$
 - ii) $n > 5$
 - iii) $n \leq 4$

Exercício 3. Para todas as respostas do exercício 2, diga qual é o tamanho do conjunto que você descreveu.

Exercício 4. Considere o conjunto A de todos os números naturais pares e o conjunto B de todos os números naturais múltiplos de 2. É correto dizer que $A = B$? Justifique.

Exercício 5⁵. Seja B um conjunto qualquer. Considere o conjunto $A_1 = \{B, B\}$. Qual é a cardinalidade de A_1 ? Considere também o conjunto $A_2 = \{B, B, B\}$ e $A_3 = \{B, B, B, B\}$. Qual é a diferença entre A_1 , A_2 e A_3 ?

Inclusão

Informalmente, um conjunto é subconjunto de outro quando o primeiro “faz parte” do segundo. Por exemplo, considere o *conjunto de professores de humanas* da Arco em 2021 e o *conjunto de professores de história* da Arco em 2021. O segundo conjunto “faz parte” do primeiro, afinal, a história é uma disciplina de humanas.



⁵ Dica: releia a seção “igualdade”

Note que todos os elementos do conjunto dos professores de história também são elementos do conjunto dos professores de humanas. É isso que quer dizer “fazer parte”!

Dizemos que um conjunto A é **subconjunto**⁶ de um conjunto B se todo elemento de A for também elemento de B . Para representar essa ideia, vamos usar a seguinte notação: $A \subseteq B$.

Exercício 6. Descreva outros dois casos do dia a dia em que um conjunto é subconjunto de outro.

Exercício 7. Identifique os **conjuntos**, **elementos**, relações de **inclusão** e **pertencimento** utilizados nos argumentos:

- a) Todos os animais são mortais
O papagaio é um animal

O papagaio é mortal
- b) Todos os homens são feitos de queijo
Sócrates é homem

Sócrates é feito de queijo
- c) Toda regra tem exceção
A proposição anterior é uma regra

Existe regra sem exceção

Exercício 8. Considere as seguintes definições, no contexto da geometria plana:

- A é o conjunto dos polígonos;
- T é o conjunto dos triângulos;
- B é um ponto;
- F é o conjunto das figuras geométricas;
- Q é um quadrado;
- R é o conjunto dos retângulos;
- L é o conjunto dos losangos;
- C é um quadrilátero

⁶ Também podemos dizer que o conjunto A está **incluído** no conjunto B .

- D é uma reta;
- P é o conjunto de todos os pontos;

Descreva no mínimo seis relações de pertencimento ou de inclusão entre os objetos acima.

Exercício 9. Considerando os seguintes conjuntos,

$$A = \{1\}$$

$$B = \{1, \{1\}\}$$

$$C = \{1, 2\}$$

$$D = \{1, 2, \{1\}\}$$

$$E = \{1, \{1, \{1\}\}\}$$

determine quais das sentenças abaixo são verdadeiras:

i) $A \in B$

ii) $A \subseteq B$

iii) $B \in E$

iv) $B \subseteq E$

v) $C \in D$

vi) $C \subseteq D$

vii) $B \subseteq D$