Material inspirado no livro "Matemática Atual 7ª série", Antônio José Lopes Bigode. São Paulo, Atual, 1994

A matemática se divide em vários ramos ou subáreas. A aritmética, por exemplo, é o ramo que estuda os números e as operações. A geometria estuda as formas. A álgebra trata das expressões matemáticas com letras, por exemplo, as fórmulas e as equações. A álgebra difere da aritmética pois faz uso da *abstração* ao usar letras para representar números desconhecidos ou que podem assumir muitos valores.

Vamos usar números, letras e sinais de operação para expressar operações e relações. Se quisermos representar **um número qualquer**, usaremos simplesmente uma letra, por exemplo, *x*. Se quisermos representar o dobro de um número qualquer, poderemos usar o número dois, que está associado à ideia de dobro, e multiplicá-lo por esse número qualquer escolhido anteriormente: *2x*.

> Lembrando que quando multiplicamos um número por uma letra, podemos omitir o sinal de multiplicação:
>
> $y \times 3 = y \cdot 3 = 3y$
>
> Nesse caso, prefere-se colocar o número antes da letra. Evita-se usar o sinal em cruz para a multiplicação (×) já que ele pode ser confundido com a letra x

Exercício 1. Complete as lacunas seguindo os exemplos:

um número qualquer:	x
outro número qualquer:	y
o dobro de um número:	2x
o sucessor de um número:	_______
o sucessor do dobro de um número:	_______
o triplo de um número:	_______
o quádruplo de um número:	_______
um número mais 5:	_______
a soma de dois números quaisquer:	_______
o quadrado de um número:	_______
o dobro do sucessor de um número:	_______

Chamamos expressões simbólicas como essas de **expressões algébricas**. Podemos relacionar duas ou mais expressões algébricas. Por exemplo, se quisermos dizer que um número é igual ao dobro de outro número, poderemos lançar mão do símbolo da igualdade (=) e escrever $a = 2b$. Se quisermos dizer que um número é maior que outro, escreveremos $m > n$.

Exercício 2. Complete as lacunas seguindo os exemplos:

um número é igual ao dobro de outro:	a = 2b
um número é maior que outro:	m > n
um número é menor que seu dobro:	x < 2x
um número é igual a outro número mais 5:	_______
o sucessor de um número é igual a outro número:	_______
o dobro de um número é menor ou igual ao triplo de outro número:	_______
um número é maior do que sete:	_______
um número é menor que seu sucessor:	_______

Compare agora as seguintes sentenças:

i) 3 + 7 = 10
ii) xy = 10
iii) m > 7
iv) 3 < 5
v) 8 é primo
vi) 2 · 3 = 5

Uma **sentença** matemática é uma expressão que afirma algo sobre alguma coisa. Por exemplo: *5 = 2 + 3* está afirmando que cinco **é** igual a dois mais três. Existem expressões que não são sentenças, por exemplo:

(3 + 5) · 8

Essa expressão não afirma nada, apenas apresenta uma conta.

Você deve ter percebido que as sentenças i e iv são verdadeiras. As sentenças v e vi são falsas. E a ii e iii?

i) 3 + 7 = 10	verdadeiro
ii) xy = 10	?
iii) m > 7	?
iv) 3 < 5	verdadeiro
v) 8 é primo	falso
vi) 2 · 3 = 5	falso

Nesses casos, *x*, *y*, e *m* são letras que podem representar qualquer número. Chamamos esses números sem valor definido de **variáveis**. Por exemplo, se *m* for igual a 8, então a ii é verdadeira. Se *m* for igual a 100, também. Se, no entanto, *m* for igual a 5, então a ii é falsa. Dá pra entender por que chamamos *m* de uma variável: seu valor varia! Ou seja, se perguntarmos se a sentença *m* > 7 é verdadeira, a resposta é: *depende do valor de m*.

Sentenças sobre as quais não é possível afirmar se são verdadeiras ou falsas devido à presença de uma variável são chamadas de **sentenças abertas**.

Exercício 3. Considere as sentenças abaixo. Para cada uma, decida se é verdadeira, falsa, ou aberta. Se for aberta, ache um ou mais valores para as variáveis que tornem a sentença verdadeira. Os três primeiros itens são exemplos.

x) $3 \cdot 4 = 7$ **Sentença falsa.**
y) $5 + 2 \leq 7$ **Sentença verdadeira.**
z) $4x = 8$ **Sentença aberta.** Ela torna-se verdadeira se x = 2
a) $0,6 \cdot 4 = 24 \div 10$ ...
b) $x + y = 17$
c) $5a = 10$
d) $3^3 = 81$
e) $5 + t = 35$
f) $\frac{x}{y} = 1$

Valor numérico de uma expressão

Dizemos que o **valor numérico** de uma expressão algébrica (ou seja, uma expressão com letras, números e operações) é o valor obtido pelo seguinte procedimento:

1) *substituir* todas as variáveis da expressão por números;
2) efetuar todas as operações.

Os números pelos quais as variáveis vão ser substituídas são dados. Por exemplo, considere a expressão algébrica correspondente a “o antecessor do triplo de um número”:

$$3n - 1$$

Vamos descobrir qual é o valor numérico dessa expressão **quando o n é igual a 15**.

$3n - 1$	Expressão inicial
$3 \cdot 15 - 1$	1) substituímos a variável pelo número correspondente (15)
$45 - 1$	2) efetuamos as operações
44	

Pronto! Quando $n = 15$, O valor numérico de $3n - 1$ é 44. Podemos expressar essa ideia, em português, da seguinte maneira:

> "qual é o valor do antecessor do triplo de um número se esse número é o 15?"

Para outros valores de n, o valor numérico da mesma expressão seria diferente. Verifique que, por exemplo, quando $n = 5$ o valor numérico da expressão é 14.

Exercício 4. Encontre o valor numérico das expressões abaixo:

i) $2z + 1$, para $z = 3$
ii) $2z + 1$, para $z = 2$
iii) $2z + 1$, para $z = 1$
iv) $2z + 1$, para $z = 0$
v) $2z + 1$, para $z =- 1$

vi) $t^2 - 1$, para $t =- 2$
vii) $t^2 - 1$, para $t =- 1$
viii) $t^2 - 1$, para $t = 0$
ix) $t^2 - 1$, para $t = 2$
x) $t^2 - 1$, para $t = 5$

Exercício 5. Complete a tabela:

a	b	c	$a + b$	$2(a + b)$	$3c$	$2(a + b) - 3c$
1	-3	-2	-2	-4	-6	2
2	-2	-1	0	0	-3	3
3	-1	0				
4	0	1				
5	1	2				
6	2	3				

7	3	4				
8	4	5				

Antes de continuar lendo, certifique-se de que você tem claro o significado dos seguintes conceitos:

- Expressão algébrica
- Valor numérico de uma expressão algébrica
- Sentença matemática
- Variável

Equações

O termo **equação** provém etimologicamente da palavra latina *æquatĭo*, que significa igualação ou igualdade. Uma equação é uma sentença matemática com uma ou mais variáveis e que afirma uma **igualdade**. Em outras palavras, é uma expressão matemática com letras, números, operadores e um símbolo de igual (=). Note que uma equação é uma sentença com uma ou mais variáveis e, portanto, é sempre uma sentença aberta.

Exercício 6. Complete tabela abaixo, cujas linhas dizem respeito a uma lista de sentenças matemáticas e cujas colunas indicam, a respeito dessas sentenças, o seguinte:

- Se a sentença é uma equação ou não;
- Exemplos de valores para as variáveis que tornam a sentença verdadeira;
- Quantas combinações de valores para as variáveis tornam a sentença verdadeira: uma, duas, muitas ou nenhuma?

Use as primeiras três linhas como exemplo.

arco

sentença	**é equação?**	**exemplos de valores para as variáveis que tornam a sentença verdadeira**	**quantos valores tornam a sentença verdadeira: um, muitos ou nenhum?**
$4x = 8$	sim	$x = 2$	um
$m < 7$	não	$m = 6$ $m = 5$ $m = 4$ $m =- 1000$ ...	muitos
$i = j$	sim	$i = 1\, e\, j = 1$ $i = 2\, e\, j = 2$ $i = 3\, e\, j = 3$ $i = 15\, e\, j = 15$ ...	muitos
$5x - 3 = 42$			
$2(a + b) = 0$			
$0 \cdot t = 15$			
$z + 3 > 100$			
$x = 2y$			
$c = c + 3$			
$3y - 4 = 11$			
$4(x + 2) = 36$			
$7k \leq 28$			

Em seguida, analise a tabela e responda:

i) Que características deve ter uma sentença matemática para haja no máximo uma combinação de valores para as variáveis que a tornem verdadeira? Ou seja, que características têm as sentenças com “nenhum” ou “um” na última coluna?
ii) Que características têm as sentenças com ou “muitos” na última coluna?

Resolução de equações

Definimos que **uma solução** de uma equação é uma combinação de valores para as variáveis dela que a tornam verdadeira. Definimos também que **resolver** uma equação é achar o conjunto de *todas* as soluções daquela equação. Repare que no exercício anterior a terceira coluna pedia *exemplos* de valores para as variáveis que tornavam a sentença verdadeira. Fornecer alguns exemplos de **soluções** não é o mesmo que **resolver**: é necessário fornecer todas elas.

Vamos começar com os casos mais simples. Talvez você tenha percebido no exercício anterior que se uma equação contém somente **uma variável**[1], então existe **no máximo uma** solução. Por exemplo, a equação

$$3y - 4 = 11$$

torna-se verdadeira se e somente se$y = 5$. Veja:

$$3y - 4 = 11$$
$$3 \cdot 5 - 4 = 11$$
$$15 - 4 = 11$$

É verdade que quinze menos quatro é igual a 11. Logo, $y = 5$é a única **solução** da equação $3y - 4 = 11$. Assim, a equação está **resolvida**.

Exercício 7. Resolva as equações abaixo. Note que todas contém somente uma variável.

i) $3n - 1 = 14$
ii) $2z + 2 = 6$
iii) $5j = 25$
iv) $4 = x + 5$
v) $a = 3 - 2a$
vi) $3n - 1 = 14$

As equações que não tem essa característica especial de conter somente uma variável também podem ser resolvidas. Considere, por exemplo a equação

[1] e se essa variável não estiver potenciada (ou seja, se estiver elevada a um)

$$2(a + b) = 0$$

que poderia ser lida como "o dobro da soma do número *a* com o número *b* é igual a zero". Talvez você tenha percebido no exercício anterior que existem *muitos* valores para *a* e *b* que tornam essa equação verdadeira:

$a = 0$ e $b = 0$
$a = 1$ e $b = -1$
$a = -1$ e $b = 1$
$a = 2$ e $b = -2$
$a = 2021$ e $b = -2021$

Na verdade, a gente sempre pode adicionar mais uma solução a essa lista. Isso quer dizer que equações como essa têm *infinitas* soluções. Bom, se resolver equações quer dizer apresentar *todas* as soluções, será que é possível resolver uma equação como essa? Teremos que apresentar uma lista infinita?

Felizmente, a tarefa não é assim impossível. Você deve ter reparado que todos os valores para *a* e *b* que tornam a igualdade verdadeira, listados acima, têm algo em comum. Em todos eles o valor de *a* é igual ao valor de *b* negativo. Ou seja, podemos *descrever o conjunto de todas as soluções* da equação sem precisar listar um por um. Essa é a maneira de **resolver** essa equação. Em outras palavras, "*a é igual a menos b*", ou então, $a = -b$ **resolve** a equação $2(a + b) = 0$.

Exercício 8. Resolva as seguintes equações:

i) $3(y + x) = 3$
ii) $4a = 104$
iii) $5j = 25t$
iv) $4z = x + 5$
v) $3(w + y) = y$
vi) $17 = 3 + 2k$

O grau da equação

Dizemos que uma equação é de **primeiro grau** quando todas as variáveis aparecem elevadas a um, ou seja, quando elas aparecem sem expoente. Se alguma variável aparece numa equação elevada a dois, dizemos que essa equação é de **segundo grau**, e assim por diante[2]. Veja exemplos:

$4z = x + 5$	1º grau
$4^2 z = x + 5^2$	1º grau
$4z^2 = x + 5$	2º grau
$4z^3 = x^2 + y$	3º grau
$a^{10} = b^2 + c^3 + d^4$	10º grau

Note que elevar um número à primeira potência ("elevar a um") nos dá esse mesmo número:

$5^3 = 125$
$5^2 = 25$
$5^1 = 5$

Ou seja, para qualquer valor de *n*,

$n^1 = n$

Essa distinção nos interessa quando queremos saber o número de soluções que uma determinada equação tem. Vamos resolver a seguinte equação:

$$x^2 = 9$$

Que é o mesmo que responder à pergunta: que número vezes ele mesmo resulta em nove? Não deve ser difícil lembrar que $3 \cdot 3 = 9$, logo, três é uma solução. Acontece que não é a *única* solução. Talvez você tenha percebido que o menos três também é solução:

$$(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$$

Esse exemplo ilustra que equações de grau maior do que um, mesmo as que só têm uma variável, podem ter mais de uma solução. Isso não vale, no entanto, para as de primeiro grau: *equações de primeiro grau com uma variável têm no máximo uma solução*. Ou seja: é fácil de resolver.

Por causa dessa propriedade, nesse primeiro momento, vamos nos limitar a estudar as **equações de primeiro grau com uma variável**. Por exemplo:

$$4a = 104$$

---

[2] De modo geral, dizemos que uma equação tem **grau *n*** se houver pelo menos uma variável elevada a *n* e nenhuma variável elevada a um número maior que *n*. Essa definição serve somente para equações em que as variáveis não estão multiplicadas entre si. Caso haja multiplicação entre variáveis, o grau da equação é definido pela maior soma de expoentes de variáveis que estão multiplicadas. Por exemplo, $x^2y^3 + z^4 = 0$ é uma equação de quinto grau. Mas essa distinção não é muito importante para nossos propósitos.

Sabemos que só existe um valor para a variável a que satisfaz a equação. É natural que tentemos *descobrir* que valor é esse. Nesse contexto, é comum chamá-la de **incógnita** ao invés de variável, visto que não estamos tão preocupados com todos os valores sobre os quais ela pode variar, e sim com o único valor que, ao assumir, satisfaz a equação.

O vocabulário está se acumulando! São vários nomes, mas as ideias por trás deles são relativamente simples. Note que cada conceito apresentado é usado para definir os próximos:

- *Expressão algébrica* - expressão com letras, números e operações
- *Variável* - uma letra dentro de uma expressão algébrica
- *Valor numérico de uma expressão algébrica* - o que acontece quando substituímos alguma variável por um número
- *Sentença matemática* - uma expressão que afirma algo (que inclui =, <, >, etc)
- *Equação* - uma sentença que afirma uma igualdade (que inclui =)
- *Solução da equação* - valores para as variáveis que satisfazem a equação
- *Resolver a equação* - achar todas as soluções
- *Grau da equação* - o maior expoente que aparece numa variável
- *Incógnita* - outro nome para variável

A balança de dois pratos

É uma dos meios mais antigos[3] de descobrir ou comparar o peso de objetos. Em sua forma mais simples, consiste em dois pratos pendurados nas duas pontas de um eixo suspenso pelo seu centro, de forma que os dois pratos mantêm a mesma altura desde que o peso dos objetos sobre eles seja o mesmo.

Balança de pratos

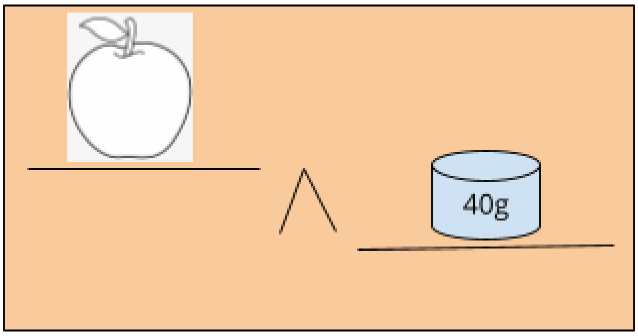
versão "gambiarco"

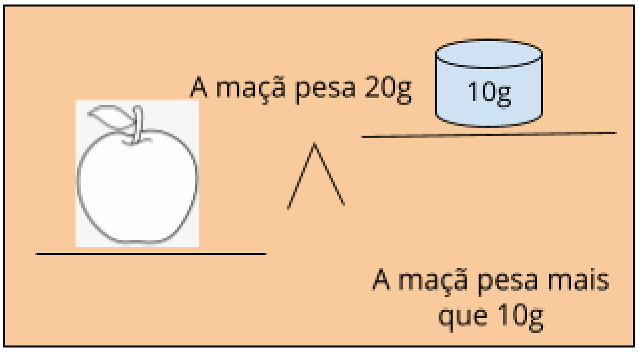
[3] O nome *balança*, inclusive, vem do latim *bis* - dois e *linx* - prato (fonte)

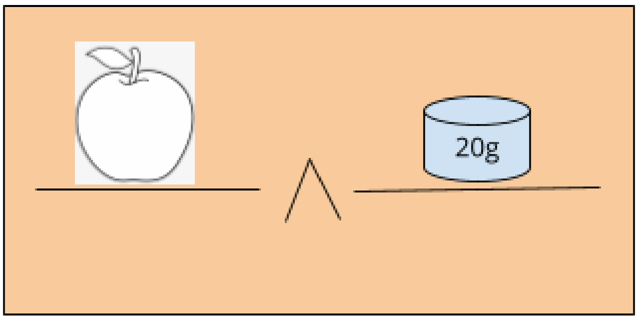
Esse tipo de balança, a princípio, não pode ser usado para medir o *valor absoluto* do peso de objetos: ela só faz **comparar** o peso de duas coisas, ou seja, dizer se um objeto é mais, menos ou igualmente pesado que outro. Isso é diferente de uma balança eletrônica, por exemplo, que te dá o peso em gramas ou quilogramas do que quer que você coloque em cima dela.

Se houver, no entanto, objetos com pesos absolutos conhecidos, é possível determinar o valor absoluto do peso de outros objetos também, ao comparar uma coisa com a outra. Esse é o papel desses pequenos cilindros de metal que se vê na foto acima.

Por exemplo, suponha que você quer descobrir o peso de uma maçã. Você coloca essa maçã em um prato, e um peso de 20g no outro. Se os pratos estiverem equilibrados (*balanceados)*, ou seja, se um prato estiver na mesma altura que o outro, isso quer dizer que a maçã pesa 20g.







Exercício 9. Um comerciante de especiarias recebeu de seu fornecedor pequenos sacos de pimenta-do-reino. Neles lê-se:

i) 4g
ii) 10g
iii) 12g
iv) 8g
v) 5g

O comerciante, no entanto, desconfia que o fornecedor não tenha pesado os produtos corretamente. Provido apenas de uma balança de pratos, um peso de 1g, um de 3g e um de 9g, deseja conferir se o peso declarado corresponde ao peso real dos produtos. Para cada um dos cinco sacos descritos acima, que pesos o comerciante deve usar em cada prato de sua balança para fazer essa conferência[4]?

---

[4] *Desafio 1*: faça esse exercício para todos os números inteiros de 1 a 13.
Desafio 2: mostre que se tivermos peças de peso 1, 3, 3^2 e 3^3 (uma de cada), poderemos pesar todos os valores inteiros de 1 até 40.
Desafio 3 (esse é difícil mesmo): mostre que se tivermos peças de peso $1, 3, 3^2, 3^3 \dots 3^n$, poderemos pesar todos os valores inteiros de 1 até a soma de todos esses pesos.
Desafio 4 (esse também): Mostre que se tivermos peças de peso $1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, \dots 2^n$, poderemos pesar todos os valores inteiros de 1 até $2^{n+1} - 1$ colocando todas as peças no mesmo prato (primeiro mostre que $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2n = 2n + 1 - 1$)