

Material inspirado no livro “Matemática Atual 8ª série”, Antônio José Lopes Bigode. São Paulo, Atual, 1994

O estudo das medidas numa circunferência remonta à antiguidade. Já na Bíblia há referências à relação entre as medidas do perímetro e do diâmetro de uma circunferência. Numa passagem, conta-se que rei Salomão mandou que um artesão de nome Hirão, especialista em trabalhos de bronze, fizesse um trabalho num templo em Jerusalém, construído entre 1014 e 1007 a.C. No primeiro livro dos Reis, consta a descrição de um tipo de reservatório de forma circular.

“Fez mais o mar de fundição, de dez côvados de uma borda até à outra borda, perfeitamente redondo, e de cinco côvados de alto; e um cordão de trinta côvados o cingia em redor” (I Reis capítulo 7, versículo 23)¹

Mar de fundição “era uma enorme bacia, sobre um pé ornamentado, na qual lavavam as mãos e os pés os sacerdotes, na ocasião em que iam cumprir os seus deveres rituais.”² Côvado é uma unidade de medida de comprimento adotada na época.

Exercício 1.

- a) De acordo com o texto bíblico, qual é o diâmetro do *Mar de fundição*?
- b) De acordo com o texto, qual é a altura do *Mar de fundição*?
- c) E qual é seu perímetro?
- d) De acordo com o texto, qual é a razão entre o perímetro e o diâmetro da circunferência?

É de se supor que se saiba, já há alguns milênios, que a razão entre o perímetro e o diâmetro de uma circunferência é **um número constante**, ou seja: a relação entre os dois é sempre a mesma. O problema que se coloca desde aquela época até hoje é o de determinar um valor mais preciso desse número constante.

O símbolo usado para designar a constante obtida pela razão entre a medida do contorno de uma circunferência e seu diâmetro é a letra π , inicial da palavra grega περίμετρος, que significa contorno ou perímetro. Provavelmente William Jones³ adotou esse símbolo pela primeira vez em 1706, mas ele foi popularizado alguns anos mais tarde pelo matemático suíço Leonhard Euler.

¹ BÍBLIA ONLINE. Disponível em: <<https://www.bibliaonline.com.br/acf/1rs/7>>. Acesso em: 2 de set. de 2021.

² BIBLIA.COM.BR. Disponível em: <<https://biblia.com.br/dicionario-biblico/m/mar-de-fundicao/>>. Acesso em: 2 de set. de 2021.

³ PI. In: WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre. Flórida: Wikimedia Foundation, 2021. Disponível em: <<https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Pi&oldid=60989818>>. Acesso em: 23 abr. 2021.

Exercício 2. Tente encontrar o valor de π . Pegue um barbante, uma régua e uma calculadora para determinar valores experimentais aproximados para a razão entre o comprimento e diâmetro de uma circunferência. Encontre ao menos 4 objetos circulares para essa atividade e anote as contas que você fez e a que valores chegou para cada um deles. Recomenda-se fazer uma tabela como a seguinte:

Objeto	Medida do comprimento do contorno (C)	Medida do diâmetro (d)	Razão C/d
Lata			
Copo			
Relógio			
Panela			
...			

Aproximações de Pi

A descoberta de que π é um número irracional só aconteceu no século XVII. Com isso, seu uso prático só é possível através de valores aproximados. Num papiro egípcio, atribuído ao escriba Ahmes, o valor da área de um círculo é calculado a partir da fração $\frac{256}{81}$, ou seja, $\pi \approx 3,16$. Os povos da mesopotâmia antiga usaram $\pi \approx \frac{25}{8}$ para calcular a área do círculo. Arquimedes usou a fração $\frac{22}{7}$ como valor para a constante π . Veja:

$$\frac{22}{7} = 3 + \frac{1}{7} = 3,142857142857...$$

Trata-se de uma dízima periódica com período 142857. Geômetras chineses foram ainda mais longe e encontraram o valor $\frac{355}{113}$ para Pi, ainda mais preciso. Foi somente em 1761 que o francês Lambert provou que π é um número irracional.

Exercício 3. Suponha que você tem que determinar a medida do contorno de uma circunferência (C) cujo diâmetro é 5m.

- a) Qual o valor de C , caso seja adotado o valor $\pi \approx 3$, dado pela bíblia?
- b) Qual é o valor de C , caso seja adotado o valor $\pi \approx 3,16$, dado pelos egípcios?
- c) Qual é o valor de C , caso seja adotado o valor $\frac{22}{7}$, usado por Arquimedes?
- d) Qual é o valor de C , caso seja adotado o π chinês, $\frac{355}{113}$?
- e) Escolha um valor para π encontrado por você no exercício 2. Usando-o, determine o valor de C .

Exercício 4.

- a) Construa um quadrado inscrito numa circunferência e determine a razão $\frac{P}{d}$, em que P é o perímetro do quadrado e d é o diâmetro da circunferência.
- b) Construa um hexágono regular inscrito numa circunferência e determine a razão $\frac{P}{d}$, em que P é o perímetro do hexágono e d é o diâmetro da circunferência.
- c) A partir do hexágono do item anterior, construa um dodecágono regular inscrito na circunferência. Em seguida, determine a razão $\frac{P}{d}$, em que P é o perímetro do dodecágono e d é o diâmetro da circunferência.

O comprimento da circunferência

Admitindo que a razão entre o comprimento (C) e diâmetro (d) da circunferência é constante, temos:

$$\pi = \frac{C}{d}$$

Mas sabemos que o diâmetro da circunferência é duas vezes seu raio (r):

$$d = 2r$$

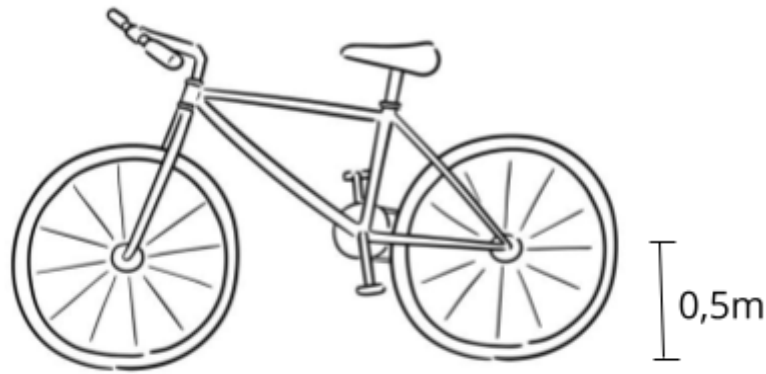
Então

$$\pi = \frac{C}{2r}$$

E por fim:

$$C = 2\pi r$$

Essa fórmula nos dá o valor do comprimento (ou perímetro) de uma circunferência quando conhecemos a medida do raio.



Por exemplo, supondo que o raio da roda de uma bicicleta mede $\frac{1}{2}$ metro, é possível calcular quantos metros a pessoa anda a cada volta completa da roda:

$$C = 2 \cdot (3,14) \cdot \frac{1}{2} = 3,14 \text{ metros.}$$

Exercício 4. Adotando $\pi = 3,14$, calcule o comprimento aproximado das circunferências cujo:

- | | |
|--------------------|-------------------|
| a) Diâmetro = 15m | d) raio = 20mm |
| b) raio = 7,5m | e) diâmetro = 6cm |
| c) Diâmetro = 10mm | f) raio = 8cm |

Exercício 5. Adotando $\pi = 3,14$, calcule o raio e o diâmetro das circunferências cujo perímetro é

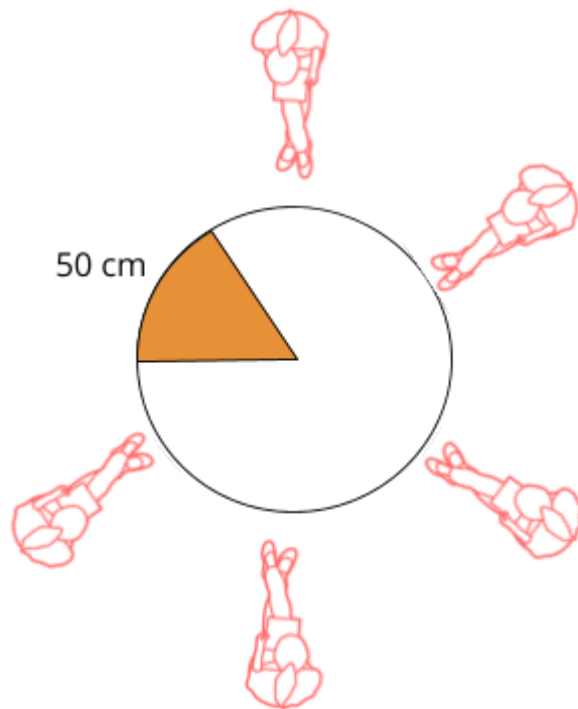
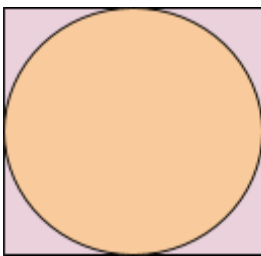
- | | |
|-------------|-----------|
| a) 81,64 km | d) 15,7 m |
| b) 25,12 m | e) 314 cm |
| a) 9,42 cm | f) 6,28 m |

Exercício 6. Suponha que um ciclista está pedalando na marcha mais pesada de uma bicicleta cuja roda tem 28 polegadas. A engrenagem a que a corrente está engatada na frente tem 50 dentes, e a de trás tem 11 dentes, como na imagem. Isso quer dizer que a cada pedalada completa que o ciclista dá, a roda da bicicleta dá $\frac{50}{11}$ voltas completas. Nessas condições, quantas pedaladas o ciclista deverá dar para andar 1 km? Adote $\pi = 3,14$ e que uma polegada é igual a 2,54 cm.

Exercício 7. O raio médio da Terra é de aproximadamente 6400 km. Baseado nesse dado calcule o comprimento aproximado da linha do equador.

Exercício 8. Um marceneiro deve construir uma mesa redonda que comporte 6 pessoas em sua volta. Qual deve ser o raio dessa mesa para que cada pessoa possa dispor de um arco de 50 cm?

Exercício 9. Determine o comprimento de uma circunferência inscrita num quadrado de lado 2 cm.



Área do círculo

Observe o desenho. Podemos afirmar que:

Área do quadrado inscrito (verde)

<

Área do círculo (laranja)

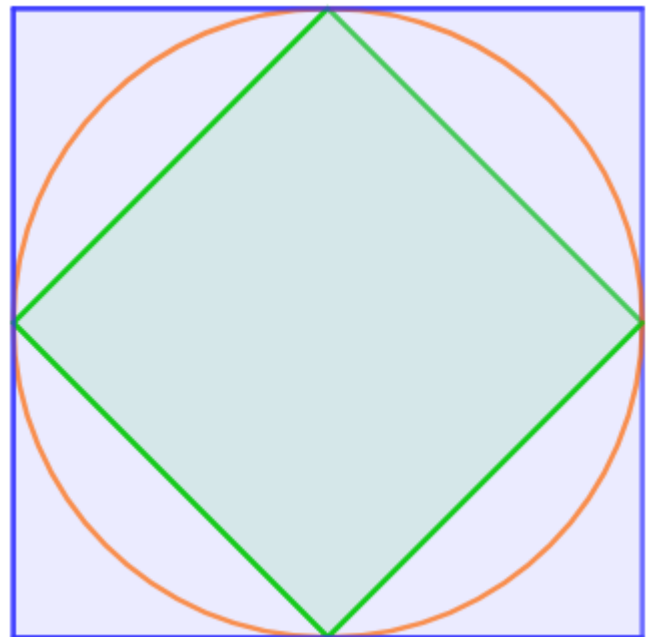
<

Área do quadrado circunscrito (azul)

Vamos chamar a área do círculo de A_c e o raio do círculo de r . Temos, então:

$$(\sqrt{2}r)^2 < A_c < (2r)^2$$

$$3r^2 < A_c < 4r^2$$



Pode-se chegar a um cálculo mais preciso comparando a área do círculo à área de dois octógonos, um inscrito e o outro circunscrito:

Semelhantemente:

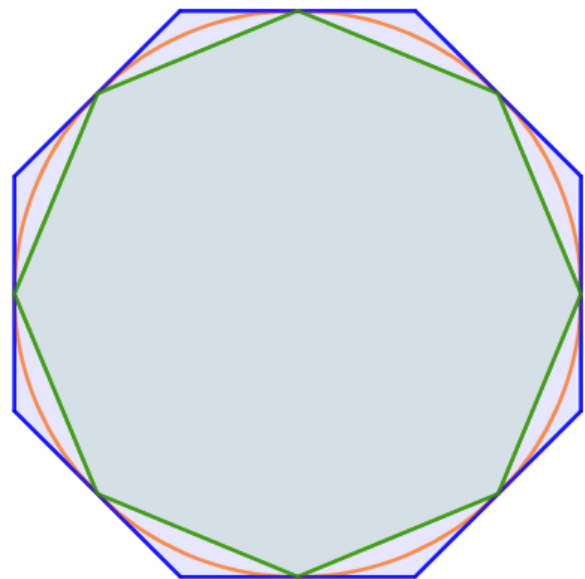
Área do octógono inscrito (verde)

<

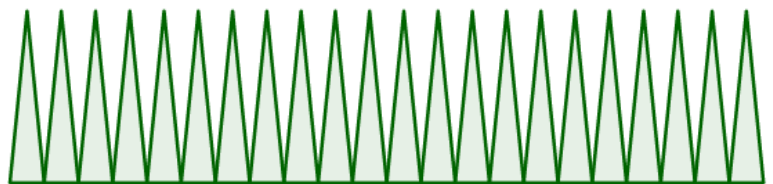
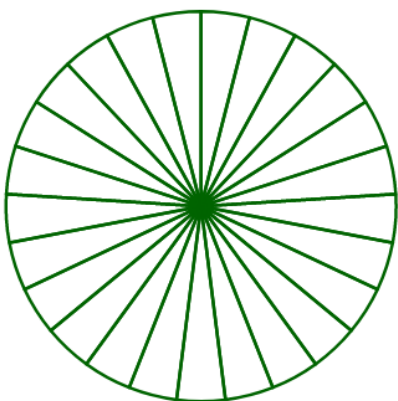
Área do círculo (laranja)

<

Área do octógono circunscrito (azul)



Mas agora a aproximação é melhor. Vamos imaginar agora uma situação limite, em que o círculo se confunde com um polígono regular de infinitos lados, composto por infinitos triângulos cuja altura é igual ao raio r do círculo e cuja base é infinitamente pequena:



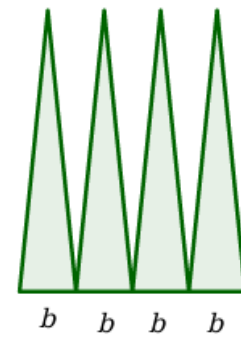
A soma da área desses triângulos é muito próxima da área do círculo.

Exercício 10. Considere um dos triângulos verdes retirados de um círculo com raio r , como acima. Seja b a medida da base dele.

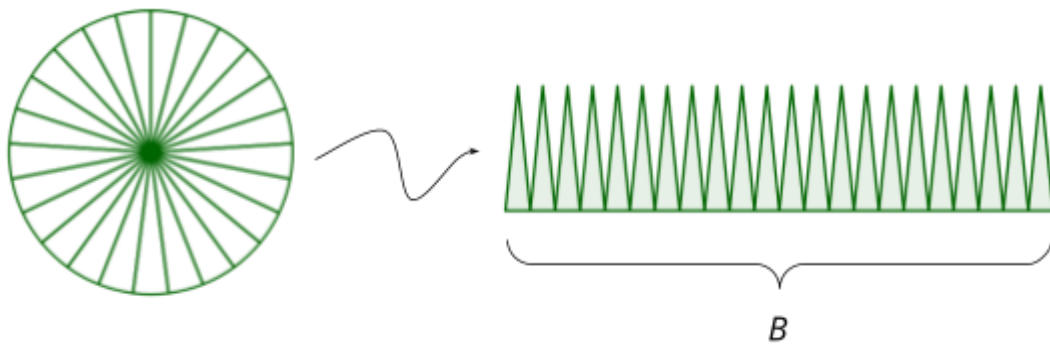
- Qual é a altura desse triângulo?
- Qual é a área desse triângulo?



c) Considere agora a figura formada por quatro desses triângulos. Qual é sua área?



d) Considere a figura formada por todos os triângulos retirados do círculo, como mostra a figura. Vamos chamar a soma das medidas de todas as bases desses triângulos de B . Qual é o comprimento de B ?



e) Qual é a área da figura formada por todos os triângulos retirados do círculo?