Investigando o primeiro capítulo d'O capital

Os trechos abaixo são citação de MARX, Karl. Os economistas. ***O capital****, 1996, vol. 1, pp 181 - 183*

No primeiro capítulo de seu livro "O Capital", Marx desenvolve a ideia de que o valor de uma mercadoria é **proporcional** ao tempo de trabalho necessário para produzi-la. Já que todas as mercadorias necessitam algum tempo de trabalho para serem produzidas, podemos falar de um **valor relativo** entre mercadorias, ou seja, quanto uma mercadoria vale em termos de uma outra. É disso que ele vai dizendo:

> "A equação: "20 varas de linho = 1 casaco, ou: 20 varas de linho valem 1 casaco" pressupõe que 1 casaco contém tanta substância de valor quanto 20 varas de linho, que ambas as quantidades de mercadorias custam assim o mesmo trabalho ou igual quantidade de tempo de trabalho."

Exercício 1: Se 20 varas de linha = 1 casaco,

a) quantas varas de linha valem 3 casacos?
b) quantos casacos valem 200 varas de linha?

O texto segue:

> "O tempo de trabalho necessário para a produção de 20 varas de linho ou 1 casaco altera-se, porém, com cada alteração na força produtiva da tecelagem ou da alfaiataria. A influência de tais mudanças sobre a expressão relativa da grandeza de valor deve agora ser examinada mais de perto.
>
> I. Que mude o valor do linho, enquanto o valor do casaco permanece constante. Se o tempo de trabalho necessário para a produção do linho dobra, talvez em conseqüência de crescente infertilidade do solo em que se produz o linho, então duplica seu valor. Em vez de 20 varas de linho = 1 casaco, teríamos 20 varas de linho = 2 casacos, pois 1 casaco contém agora apenas metade do tempo de trabalho das 20 varas de linho. Ao contrário, se diminui à metade o tempo de trabalho necessário para a produção do linho em conseqüência, por exemplo, da melhoria dos teares, cai também o valor do linho pela metade. Conseqüentemente, agora: 20 varas de linho =

> 1/2 casaco. O valor relativo da mercadoria A, isto é, seu valor expresso na mercadoria B, sobe e cai, portanto, diretamente com o valor da mercadoria A, enquanto permanece o mesmo o valor da mercadoria B.”

Exercício 2: Se o t*empo de trabalho* para produzir um casaco muda, o *valor* da vara de linha muda?

Exercício 3: Se o t*empo de trabalho* para produzir um casaco muda, o *valor relativo* da vara de linha, isto é, seu valor expresso no casaco, muda?

Exercício 4: Suponha que 20 varas de linho valiam o mesmo que 1 casaco. Se o tempo de trabalho para produzir a vara de linho dobra, quantos casacos valem, agora, 80 varas de linho?

Continuando...

> “II. Que o valor do linho permaneça constante, enquanto muda o valor do casaco. Se duplica, sob essas circunstâncias, o tempo de trabalho necessário para a produção do casaco, por exemplo, em conseqüência de uma tosquia desfavorável, então temos em vez de 20 varas de linho = 1 casaco, agora: 20 varas de linho = 1/2 casaco. Se, ao contrário, o valor do casaco cai à metade, então 20 varas de linho = 2 casacos. Permanecendo constante o valor da mercadoria A, cai ou sobe, portanto, seu valor relativo expresso na mercadoria B, em relação inversa à mudança de valor de B.”

Exercício 5: Suponha que 20 varas de linho valiam o mesmo que 1 casaco. Se o tempo de trabalho para produzir o casaco dobra, quantos casacos valem, agora, 40 varas de linho?

E ainda,

> “Ao se compararem os diferentes casos, sob I e II, resulta que a mesma mudança de grandeza do valor relativo pode provir de causas totalmente opostas. Assim 20 varas de linho = 1 casaco se transforma em: 1) a equação 20 varas de linho = 2 casacos, ou porque o valor do linho duplica-se, ou porque o valor dos casacos cai à metade; e 2) a equação 20 varas de linho = 1/2 casaco, ou porque o valor do linho cai à metade ou porque o valor do casaco sobe ao dobro.”

Exercício 6: Suponha que 20 varas de linho valiam o mesmo que 1 casaco. Depois de uma mudança de clima, o tempo de trabalho para produzir uma vara de linho diminuiu pela metade, mas o valor relativo do casaco com a vara de linho ainda é a mesma. O que deve ter acontecido com o tempo de trabalho necessário para produzir um casaco?

Exercício 7: Suponha que 20 varas de linho valiam o mesmo que 1 casaco. Depois de uma mudança de clima e de uma tosquia favorável:

- o tempo de trabalho necessário para produzir um casaco tornou-se três vezes menor e;
- o tempo de trabalho necessário para produzir uma vara de linho diminuiu pela metade.

Qual é, agora, o valor relativo de uma vara de linho em relação a um casaco?

Para terminar...

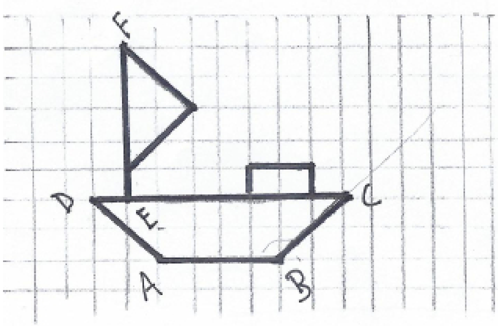
> "As mudanças reais na grandeza de valor não se refletem nem clara nem completamente, em sua expressão relativa ou na grandeza do valor relativo. O valor relativo de uma mercadoria pode mudar, apesar de seu valor permanecer constante. Seu valor relativo pode permanecer constante, apesar de mudar seu valor e, finalmente, não necessitam, de nenhuma forma, coincidir as mudanças simultâneas em sua grandeza de valor e na expressão relativa dessa grandeza."

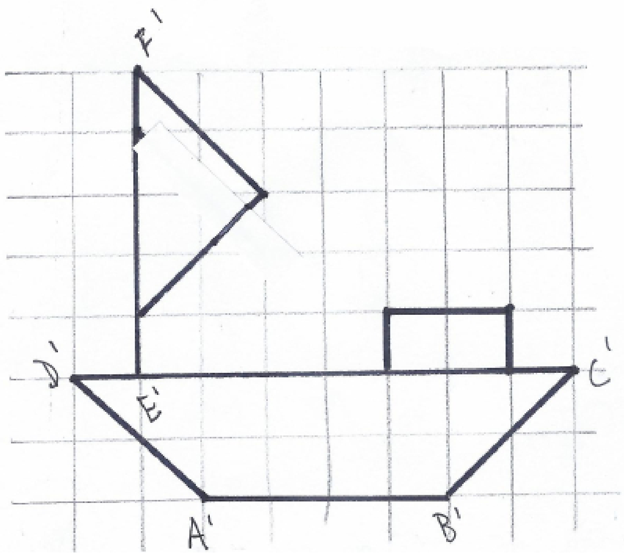
Glossário

Vara de linho – Vara é uma medida de distância. Linho é um tipo de tecido.
Tosquia – O processo pelo qual a lã é extraída dos animais.

Comparando figuras

Compare as duas imagens abaixo. A da esquerda está desenhada em quadrados de 0,5x0,5cm. Na da direita, os quadrados são de 1x1cm.





-> O que há de diferente entre elas?
-> O que é igual?

Talvez você tenha pensado algo assim: "elas têm a mesma forma, mas tamanhos diferentes", ou então, "é a mesma imagem, só que ampliada". É verdade, elas são muito parecidas exceto pelo tamanho delas. Aliás, com isso já sabemos que elas **não são congruentes**.

Para entender melhor o que está acontecendo, vamos comparar, primeiro, os **ângulos** correspondentes nas figuras. Deve ser fácil ver que eles são congruentes, ou seja, a cada ângulo na figura da esquerda corresponde um ângulo de mesma medida na figura da direita.

Depois, vamos comparar as **medidas** dos segmentos correspondentes das duas imagens. Estamos chamando de lado o a medida de um lado de um quadrado que compõe o quadriculado da figura (na figura pequena, um lado = 0,5 cm, enquanto na grande um lado = 1 cm)

AB = 4 lados = 2cm	A’B’ = 4 lados = 4cm
DC = 8 lados = 4cm	D’C’ = 8 lados = 8cm
EF = 5 lados = 2,5cm	A’B’ = 5 lados = 5cm
EC = 7 lados = 3,5cm	A’B’ = 7 lados= 3,5cm

Você deve ter percebido que cada segmento da figura da direita mede o mesmo número de lados do segmento correspondente do lado esquerdo. Mas o lado da cada quadradinho na figura da esquerda é metade do quadradinho da figura da direita. Então a medida da figura de um segmento da direita é sempre o dobro da medida do segmento correspondente à esquerda! Podemos reescrever esse fato da seguinte maneira:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{DC}{D'C'} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{EF}{E'F'} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{EC}{E'C'} = \frac{1}{2}$$

Ou então, mais sucintamente:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{DC}{D'C'} = \frac{EF}{E'F'} = \frac{EC}{E'C'} = \frac{1}{2}$$

Em outras palavras, a **razão** entre os lados correspondentes é a mesma. Quando isso ocorre, dizemos que as figuras são **proporcionais** e que a constante de proporcionalidade é $\frac{1}{2}$.

Razão é uma relação entre dois valores que indica quantas vezes um valor contém o outro, ou então, quantas veze o outro "cabe" no um. Podemos expressar a razão de 1 para 2 de alguns jeitos:

- 1/2
- 1 : 2
- 0,5
- "um está para dois..."

No primeiro semestre nos perguntávamos se duas figuras eram iguais ou não (para se relembrar, retome a atividade *03 - Congruência*[1]). Foi um pouco confuso tentar responder isso, e chegamos à conclusão que a igualdade entre figuras não era um conceito muito preciso, pelo menos não matematicamente. Por isso, introduzimos o conceito de congruência. A ideia era a seguinte: duas figuras são congruentes se têm a mesma forma e o mesmo tamanho.

Agora, nos deparamos com duas figuras que não são congruentes, mas tem algo em comum... Parece que elas têm a mesma forma, mas não o mesmo tamanho. Para falar de figuras que satisfazem essas condições, vamos introduzir o conceito de semelhança.

Semelhança

Informalmente, dizemos que duas figuras são semelhantes se têm a mesma forma, mas não necessariamente o mesmo tamanho. Se tratarmos de polígonos, poderemos ser mais precisos: dois polígonos são semelhantes se

1) as medidas dos lados que se correspondem forem proporcionais e;

2) os ângulos correspondentes forem congruentes.

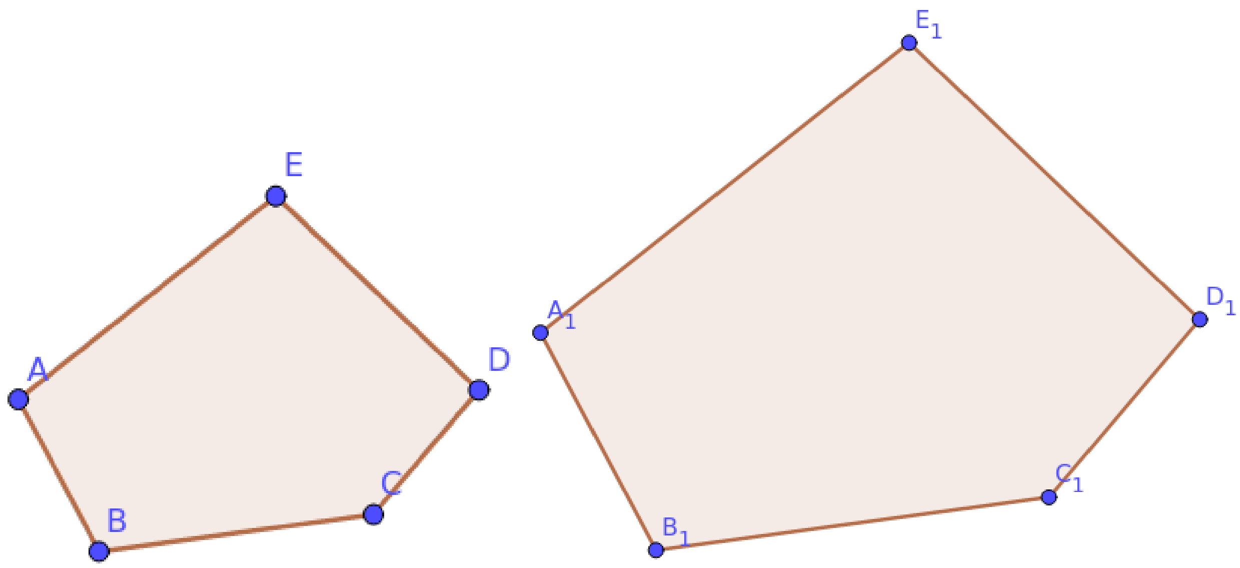
Alternativamente, podemos pensar que duas figuras quaisquer são semelhantes se partindo de uma é possível chegar na outra somente com as seguintes operações:

- Ampliação/Redução
- Rotação
- Reflexão
- Translação

Como vimos, é o caso das duas figuras no início da página: seus segmentos são proporcionais e os ângulos são iguais. As figuras são semelhantes!

[1] https://arco.coop.br/~jseckler/mat-9-2021/03.pdf

Lados que se **correspondem** são os que estão na mesma posição relativa nos dois polígonos. Na figura do início da seção, AB corresponde a A'B', DC corresponde a D'C', etc. Vamos ver outro exemplo:



Os dois pentágonos foram desenhados de modo que sejam semelhantes. Por isso, ocorrem essas relações:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{DE}{D_1E_1} = k$$

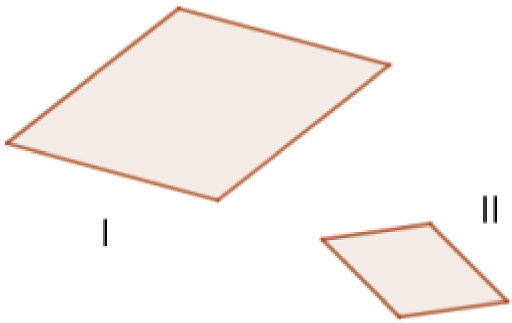
O número **k**, que é a constante da proporção, chama-se **razão de semelhança**. Nesse exemplo, temos $k = \frac{2}{3}$, ou seja, a razão dessa semelhança é de 2 para 3.

Exercício 8. Classifique cada afirmação como verdadeira ou falsa. Se a afirmação for falsa, desenhe um contra exemplo para ela.

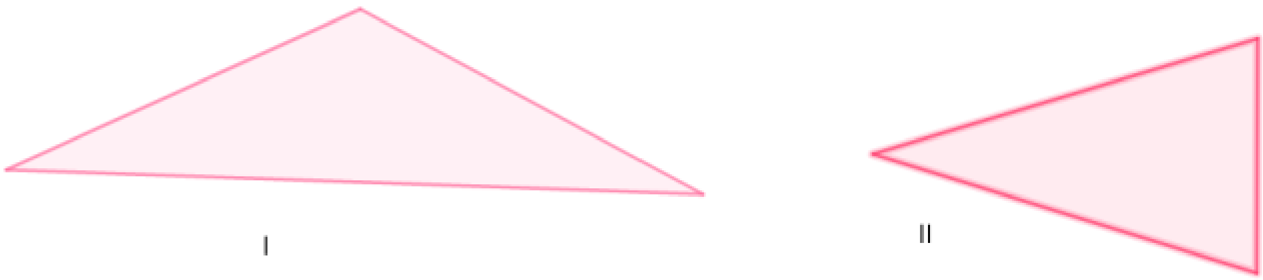
a) Dois triângulos são sempre semelhantes.
b) Dois triângulos equiláteros são sempre semelhantes.
c) Dois triângulos isósceles são sempre semelhantes
d) Dois retângulos são sempre semelhantes.
e) Dois quadrados são sempre semelhantes.

Exercício 9. Nos casos seguintes, diga se os polígonos I e II são semelhantes:

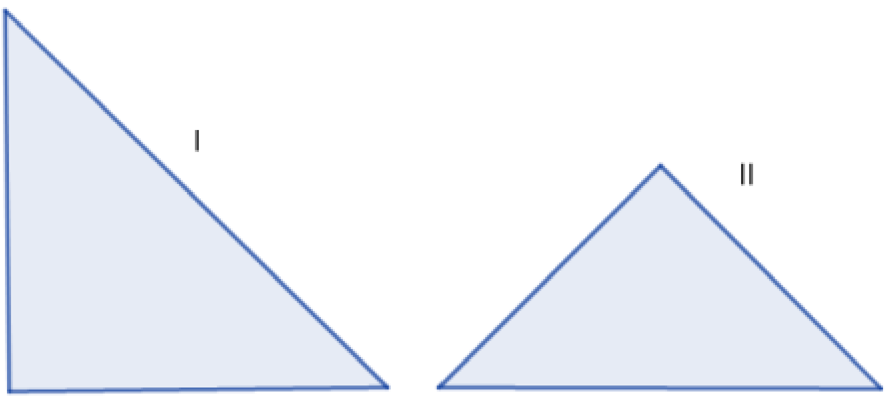
a) I e II são losangos;



b) I e II são triângulos isósceles;



c) I e II são triângulos retângulos e isósceles.



Exercício 10. A miniatura é semelhante ao automóvel e a razão dessa semelhança é de $1:20$.

a) Qual é o comprimento da miniatura, se o carro tem 4,0 m de comprimento?

b) Na miniatura, a distância entre as rodas é 6,5 cm. No automóvel, qual é essa medida?

Exercício 11. A ampliação de uma foto deve ser executada de maneira precisa para que se obtenham imagens matematicamente semelhantes. Se uma foto 6 por 9 (isto é, uma foto retangular com largura 6 cm e altura de 9 cm) for ampliada para ter 21 cm de largura, qual será sua altura?

Regra de três

Vários questões de semelhança e proporcionalidade nos levam a perguntas com a seguinte “cara”:

“**x** está para 5 assim como 20 está para 25”

Ou seja, razão entre **x** e 5 segue a mesma proporção que a razão entre 20 e 25. Nesses casos, podemos montar uma equação:

$$\frac{x}{5} = \frac{20}{25}$$

Nos já sabemos resolver uma equação desse tipo: Basta multiplicar por 5 dos dois lados!

$$x = \frac{20}{25} \cdot 5$$

$$x = 4$$

A **regra de três**, em sua forma mais simples, é um processo prático para simplificar a resolução desse tipo de equação. A ideia por trás dela é a de “multiplicar em cruz”, como abaixo:

$$\frac{x}{5} = \frac{20}{25} \Rightarrow x \cdot 25 = 20 \cdot 5$$

$$x = \frac{20 \cdot 5}{25}$$

$$x = 4$$

Ou seja: quando temos que uma fração é igual a outra, sabemos que o numerador da primeira vezes o denominador da segunda é igual ao numerador da segunda vezes o denominador da primeira. Nesse exemplo, a regra nem parece tão prática. Suponha que tivéssemos, no entanto, a seguinte situação:

"10 está para **x** assim como 50 está para 45"

Veja a resolução:

$$\frac{10}{x} = \frac{50}{45} \Rightarrow 10 \cdot 45 = 50 \cdot x$$

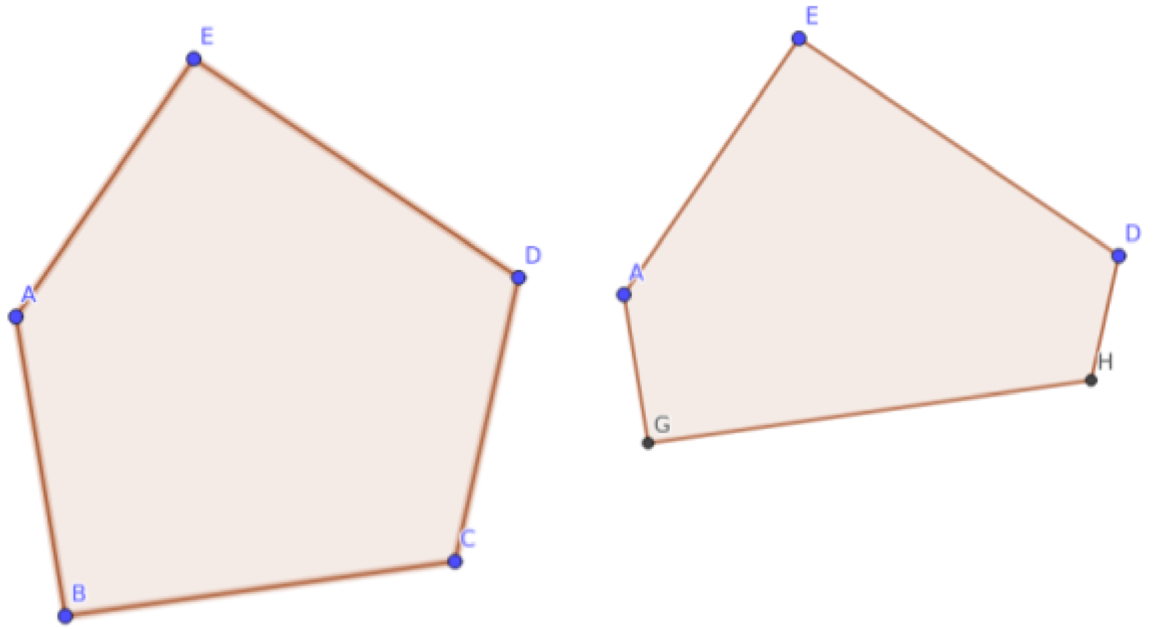
$$x = \frac{10 \cdot 45}{50}$$

$$x = 9$$

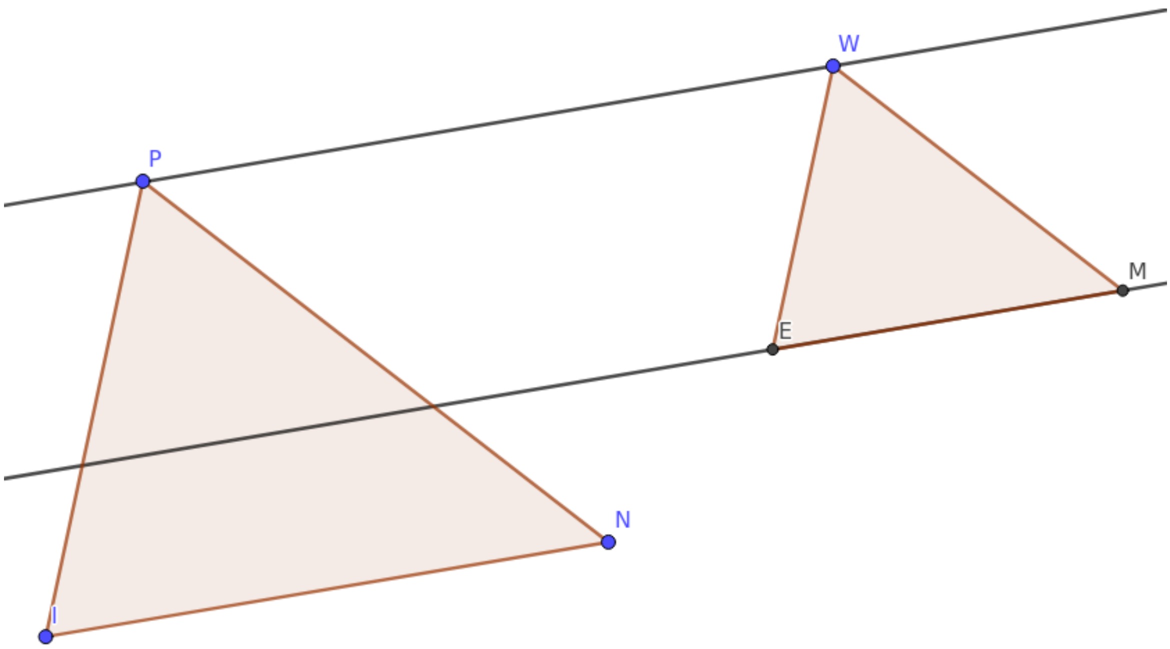
De modo geral, a regra de três diz que se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, então $ad = bc$.

Triângulos semelhantes

O pentágono ABCDE foi cortado por uma reta paralela a um de seus lados:



Por observação visual, percebe-se que os pentágonos ABCDE e AGHDE não são semelhantes. De fato, eles têm ângulos de mesma medida, mas seus lados não são proporcionais, pois de AB para AG o lado diminui, enquanto outros lados, como AE, ficaram os mesmos. Vamos agora cortar o triângulo PIN por uma reta paralela a um de seus lados. Os triângulos PIN e WEM têm ângulos iguais:

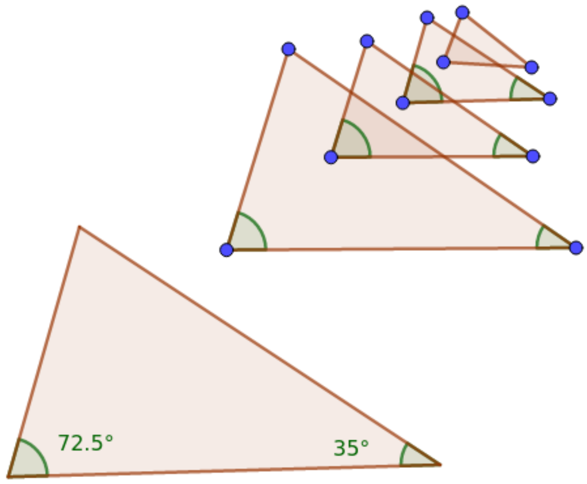


Note que para formar WEM, os três lados de PIN diminuíram. A conclusão é a seguinte: basta que dois triângulos tenham os **ângulos respectivamente iguais** para serem **semelhantes.**

Além disso, no momento em que determinamos dois ângulos de um triângulo, já poderemos saber qual é o terceiro ângulo, já que os três totalizam 180º. Ou seja, a *forma* de um triângulo fica totalmente definida quando são conhecidos dois de seus ângulos.

Note que essa conclusão só vale para triângulos, e não para quaisquer polígonos, como é possível perceber com o exemplo dos pentágonos ABCDE e AGHDE acima.

De acordo com essa conclusão, todos os triângulos com um ângulo de 72,5º e outro de 35º têm o mesmo formato!



Exercício 12. Baseie-se no caso **ALA** de congruência de triângulos para argumentar que a conclusão "basta que dois triângulos tenham os ângulos respectivamente iguais para serem semelhantes" é verdadeira.