Por volta do século VI a.C. pensadores gregos da escola de Pitágoras se interessavam pelas relações entre os números naturais. Uma das ideias que surge nesse período é a de que alguns números **originam** outros. Por exemplo, considere o número *1*: ele forma todos os outros números naturais: basta somar o um a ele mesmo tantas vezes quanto for necessário.

$$
\begin{aligned}
1 &= 1 \\
2 &= 1 + 1 \\
3 &= 1 + 1 + 1 \\
&\dots \\
n &= \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n \text{ vezes}}
\end{aligned}
$$

Bem, mas isso só é verdade quando se considera a adição. Na **multiplicação**, o *1* passa de super-poderoso para nulo, pois não forma nenhum número novo! Dizemos que o 1 é o *elemento neutro da multiplicação*. A partir daqui, vamos pensar a geração de números somente pela multiplicação.

E o 2? Que outros números podemos formar?

$$
\begin{aligned}
2 &= 2 \\
4 &= 2 \cdot 2 \\
8 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \\
16 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \\
&\dots
\end{aligned}
$$

Note que não conseguimos gerar o próprio 2 a partir de nenhum outro número natural. Podemos pensar que o 2 é **gerador** de outros números, mas não é gerado por nenhum outro.

**exercício 1.**

**a)** Quantos são os números que podem ser gerados pelo número dois?
**b)** Como chamam-se os números que podem ser gerados pelo número dois?
**c)** Dê um exemplo de um número que não pode ser gerado pelo número dois.

***

Você deve ter notado que existem mais números geradores além do dois. Veja os exemplos:

- O número **210** pode ser obtido multiplicando-se **6** por **35**
  - O número **6** pode ser obtido multiplicando-se **2** por **3**
  - O número **35** pode ser obtido multiplicando-se **5** e **7**
  - Os números 2, 3, 5, e, 7 não podem ser formados por outros números naturais por meio da multiplicação. Logo, eles são os geradores ou **fatores** do **210**.

$$210 = 6 \cdot 35$$
$$210 = 2 \cdot 3 \cdot 35$$
$$210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

**Produto e fatores**

Suponha que estamos fazendo uma conta de multiplicação qualquer:

$$2 \cdot 4 \cdot 6 = 48$$

**Fator** é o nome que damos aos números que estão sendo multiplicados
**Produto** é o nome que damos ao resultado da multiplicação

Analogamente, na soma temos as **parcelas** e a **soma**.

Daí o nome **fatoração**. **Fatorar** quer dizer escrever alguma coisa **como uma multiplicação**. Veja como exemplo a fatoração do número 210:

$$210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

Os  números naturais que formam outros números naturais por meio da multiplicação são chamados **números primos**. Porque primo? Um dos significados da palavra primo é “primeiro”. Os antigos gregos julgavam que os números primos são os primeiros em importância, pelo fato de gerarem todos os demais. Dizemos que os números que não são primos são **compostos**.

| | | |
|---|---|---|
| gerador | <-> | primo |
| gerado | <-> | composto |

**exercício 2.**

**a)** O número 2171 é múltiplo de 13 e de 167. O número 2171 é primo? E o número 41, é primo? Justifique as respostas.

**b)** Estamos considerando aqui a seguinte definição de número primo: “aquele que é gera mas não é gerado”. Existe outra definição, que você já deve ter ouvido, que diz que o número primo é “aquele que só é divisível pelo número 1 e por ele mesmo”. Essas duas definições são equivalentes? Ou seja, existe algum número que é primo de acordo com uma das definições mas não é primo de acordo com a outra?

**c)** Complete as sentenças.

**i)** $30 = \ldots\ldots \cdot 5 = \ldots\ldots \cdot \ldots\ldots \cdot \ldots\ldots$

**ii)** $44 = \ldots\ldots \cdot 11 = \ldots\ldots^{2} \cdot \ldots\ldots$

**iii)** $200 = 8 \cdot \ldots\ldots = \ldots\ldots^{3} \cdot \ldots\ldots^{2}$

**d)** Considere a sequência dos múltiplos de 6:

6, 12, 18, 24, 30 ...

Decomponha os seguintes múltiplos de 6 em fatores primos: **6, 18, 30 e 42**. Quais são os fatores primos comuns a todas essas decomposições?

**e)** Veja que coincidência:

- divisores de 6: **1, 2, 3**
- soma desses divisores: **1 + 2 + 3 = 6**

*O que que é um divisor, mesmo?*

Os gregos da escola de Pitágoras chamaram os números que apresentam essa propriedade de **números perfeitos**.

**i)** Descreva com suas palavras a propriedade a que estamos nos referindo. Ou então: o que faz um número ser **perfeito?**

**ii)** O número 10 é perfeito? Justifique.

**iii)** Há um número perfeito entre 25 e 30. Que número é esse? Justifique.

**exercício 3.**

Faça uma tabela como a mostrada abaixo, preenchendo-a até n = 20. Sugiro usar uma planilha eletrônica. Se fizer no caderno, você vai precisar de uma calculadora.

| **n** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1/n** | 1 | 0,5 | 0,333... | ? | ? | ? | ? |

Alguns desses quocientes são números decimais com um número **finito** de casa decimais e outros são **dízimas periódicas**, ou seja, têm infinitas casas decimais. Reflita sobre o motivo por que algumas divisões terminam e outras não, e responda a pergunta: que característica deve ter o número $n$ para que $\frac{1}{n}$ , na forma decimal, tenha um número finito de casas decimais? Registre as etapas da investigação:

exploração
elaboração de hipóteses
verificação das hipóteses elaboradas
conclusão (*somente se possível: essa é a parte menos importante*)

**exercício 4.**

**a)** Veja o exemplo ao lado. Aproveite-o e calcule:

i) mmc(77; 49)
ii) mmc(132; 165)

| | | |
|---|---|---|
| 77, | 132 | 2 |
| 77, | 66 | 2 |
| 77, | 33 | 3 |
| 77, | 11 | 7 |
| 11, | 11 | 11 |
| 1 | | |

**Conclusão:**
mmc(77; 132) = $2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 = 924$

**b)** Em uma corrida de fórmula 1, um piloto brasileiro completava uma volta na pista a cada 84 segundos. Mas um piloto alemão, com um carro mais veloz, dava uma volta a cada 66 segundos. Sabendo que eles largaram juntos, quanto tempo depois passaram juntos novamente pelo ponto de partida? Nesse momento, quantas voltas cada um completou?

**c)** Complete a tabela.

| **a** | 2 | 5 | 7 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| **b** | 3 | 7 | 11 | 13 |
| **mmc(a; b)** | | | | |

Analisando os dados da tabela, responda: se **a** e **b** são números primos, o que se pode conlcuir sobre **mmc(a; b)**?

**d)** Complete a tabela.

| **a** | 4 | 6 | 9 | 14 |
|---|---|---|---|---|
| **b** | 5 | 7 | 10 | 15 |
| **mmc(a; b)** | | | | |

Analisando os dados da tabela, responda: se **a** e **b** são números consecutivos (ou então, se **b** é *sucessor* de **a**), o que se pode conlcuir sobre **mmc(a; b)**?

**e)** Complete a tabela.

| **a** | 4 | 6 | 15 | 42 |
|---|---|---|---|---|
| **b** | 8 | 18 | 45 | 84 |
| **mmc(a; b)** | | | | |

Analisando os dados da tabela, responda: se **b** é múltiplo de **a**, o que se pode concluir sobre **mmc(a; b)**? E se **b** for divisor de **a**?