Quando arrumamos o armário, geralmente, reservamos uma gaveta para blusas, um espaço para calças, uma gaveta para meias, e assim por diante. Quando fazemos isso estamos **classificando** as roupas de acordo com alguma característica delas, formando o **conjunto** das blusas, o conjunto das calças, o conjunto das meias... Classificar é distribuir algum tipo de ser ou objeto (roupas, animais, alunos, números, figuras geométricas, etc) em classes, conjuntos ou grupos[1], por meio de algum **critério**. Outro exemplo de classificação é separar o conjunto dos números naturais em *pares* e *ímpares*. Nesse exemplo, o critério é ser par ou ímpar. A classificação também é muito comum em geometria: quando distinguimos as figuras planas poligonais das não poligonais, estamos gerando os conjuntos dos polígonos e o conjunto dos não polígonos.


Um *contra-exemplo* de separação de roupas em conjuntos

Pertencimento

O conceito mais elementar que nos permite falar de conjuntos é o conceito de pertencimento. Um conjunto fica definido quando descrevemos quem são os elementos que pertencem a ele, e, consequentemente, quais elementos não lhe pertencem. Considere, por exemplo, o conjunto dos cooperados da Arco em 2021.

[1] Nesse contexto, classe, conjunto, grupo, família e coleção são sinônimos.

Dizemos que o Enzo **pertence** ao conjunto dos cooperados da Arco. Igualmente, Danilo pertence ao conjunto dos cooperados da Arco. Não se pode dizer o mesmo de Jair Bolsonaro ou de Sócrates: Jair Bolsonaro não pertence ao conjunto de cooperados da Arco, nem Sócrates[2]. Quando algo pertence a um conjunto, dizemos que esse algo **é elemento** desse conjunto. Assim, poderíamos equivalentemente dizer que Enzo é elemento do conjunto dos cooperados da Arco.

Finalmente, vamos introduzir uma *notação* (ou seja, um jeito de escrever que significa a mesma coisa) para falar de pertencimento. Vamos usar o símbolo ∈. Seja A o conjunto dos cooperados da arco e E o cooperado Enzo. Então:

sinônimos

$E \in A$
Enzo pertence ao conjunto dos cooperados da Arco
Enzo é elemento do conjunto dos cooperados da Arco

Igualdade

Dizemos que dois conjuntos são **iguais** (ou então, que são o mesmo) se e somente se seus elementos forem os mesmos. Ou seja, o conjunto A é igual ao conjunto B se e somente se[3]. todo elemento de A for também elemento de B, e se todo elemento de B for também elemento de A. Em outras palavras, o que define um conjunto são os elementos que lhe pertencem.

Tamanho de conjuntos

O **tamanho** ou **cardinalidade** de um conjunto é o número de elementos distintos que aparecem dentro dele. Seja A o conjunto dos alunos do 9º ano da arco em 2021. Então o tamanho[4] de A é 24. Outro exemplo é o conjunto dos brasileiros, cujo tamanho é de mais ou menos 211 milhões.

Alguns conjuntos têm tamanho infinito. Ou seja, não existe nenhum número natural que consiga representar o tamanho daquele conjunto. Um exemplo de conjunto de cardinalidade infinita é o conjunto dos números naturais.

---

[2] Note que, uma vez que definimos um conjunto a partir de um critério, então dizer que um elemento pertence a um conjunto é a mesma coisa que dizer que esse elemento satisfaz esse critério. Em um exemplo, dizer que "Enzo pertence ao conjunto dos cooperados da Arco" é o mesmo que dizer que "Enzo é um cooperado".

[3] Essa afirmação também é conhecida como "princípio de extensionalidade".

[4] Essa afirmação também pode ser escrita assim: $|A| = 24$

Descrevendo conjuntos

Já sabemos que o que define um conjunto são os seus elementos. Vamos introduzir agora uma notação para **descrever** conjuntos. É um tanto simples: vamos usar um par de chaves (“{“ e “}”) para indicar que trata-se de um conjunto e, dentro delas, listar seus elementos, separados por vírgulas. Veja:

Conjunto dos professores de matemática da Arco: {Bigode, Enzo, Seckler}
Conjunto dos professores de música da Arco: {Leo}
Conjunto dos professores de Educação Moral e Cívica da Arco: {}

Conjunto dos números naturais (ℕ): {0, 1, 2, 3, 4, ...}
Conjunto dos número naturais menores que 3: {0, 1, 2}
Conjunto dos números naturais menores que 10 e maiores que 5: {6, 7, 8, 9}
Conjunto dos números naturais menores que 10 e maiores que 20: {}

Lembre-se que dois conjuntos são iguais se seus elementos forem os mesmos. Então temos que

{Bigode, Enzo, Seckler} = {Seckler, Bigode, Enzo}

ou então, esses dois conjuntos são *o mesmo*. Isso quer dizer que a ordem em que os elementos aparecem dentro das chaves não importa.

Deve parecer estranho especificar o conjunto dos professores de Educação Moral e Cívica na Arco, já que essa disciplina não é oferecida na escola, portanto *não há professores que satisfaçam esse critério*. O conjunto resultante não poderá conter nenhum elemento! Logo, o conjunto especificado é o **conjunto vazio**, denotado simplesmente por {} ou por ∅. Analogamente, note que não existe nenhum número que seja menor do que 10 e que seja maior do que 20. Logo, o conjunto especificado por esse critério deve também ser o conjunto vazio.

Exercício 1. Reflita sobre o processo de classificação no seu cotidiano. Dê dois exemplos de situações no dia a dia (sem ser na aula de matemática e sem repetir o exemplo do armário do início da atividade) em que você classificou alguma coisa. Nos dois exemplos, descreva o critério utilizado e os conjuntos resultantes dessa classificação.

Exercício 2.

a) Descreva o conjunto dos professores de artes da Arco;
b) Descreva o conjunto dos professores de Etiqueta da Arco;
c) Descreva o conjunto dos números naturais **n** tais que:
i) $n < 6$

ii) $n > 5$
iii) $n \leq 4$

Exercício 3. Para todas as respostas do exercício 2, diga qual é o tamanho do conjunto que você descreveu.

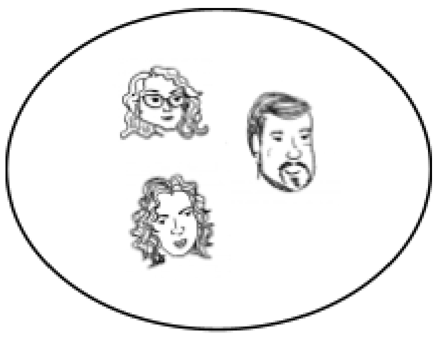
Exercício 4. Considere o conjunto A de todos o números naturais pares e o conjunto B de todos os números naturais múltiplos de 2. É correto dizer que $A = B$? Justifique.

Exercício 5[5]**.** Seja B um conjunto qualquer. Considere o conjunto $A_1 = \{B, B\}$. Qual é a cardinalidade de A_1? Considere também o conjunto $A_2 = \{B, B, B\}$ e $A_3 = \{B, B, B, B\}$. Qual é a diferença entre A_1, A_2e A_3?

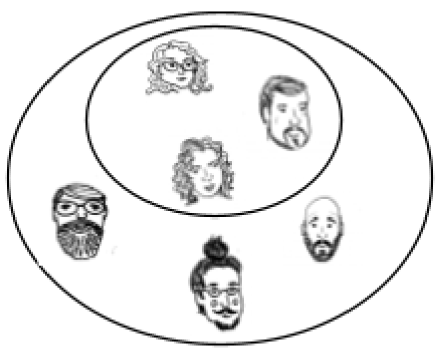
Inclusão

Informalmente, um conjunto é subconjunto de outro quando o primeiro "faz parte" do segundo. Por exemplo, considere o *conjunto de professores de humanas* da Arco em 2021 e o *conjunto de professores de história* da Arco em 2021. O segundo conjunto "faz parte" do primeiro, afinal, a história é uma disciplina de humanas.

professores de humanas



Professores de história



professores de história são um **subconjunto** dos professores de humanas

[5] Dica: releia a seção "igualdade"

Note que todos os elementos do conjunto dos professores de história também são elementos do conjunto dos professores de humanas. É isso que quer dizer "fazer parte"!

Dizemos que um conjunto A é **subconjunto**[6] de um conjunto B se todo elemento de A for também elemento de B. Para representar essa ideia, vamos usar a seguinte notação: $A \subseteq B$.

Exercício 6. Descreva outros dois casos do dia a dia em que um conjunto é subconjunto de outro.

Exercício 7. Identifique os **conjuntos**, **elementos**, relações de **inclusão** e **pertencimento** utilizados nos argumentos:

a) Todos os animais são mortais
O papagaio é um animal

O papagaio é mortal

b) Todos os homens são feitos de queijo
Sócrates é homem

Sócrates é feito de queijo

c) Toda regra tem exceção
A proposição anterior é uma regra

Existe regra sem exceção

Exercício 8. Considere as seguintes definições, no contexto da geometria plana:

- A é o conjunto dos polígonos;
- T é o conjunto dos triângulos;
- b é um ponto;
- F é o conjunto das figuras geométricas;
- q é um quadrado;
- R é o conjunto dos retângulos;
- L é o conjunto dos losangos;
- c é um quadrilátero

[6] Também podemos dizer que o conjunto A está **incluído** no conjunto B.

- d é uma reta;
- P é o conjunto de todos os pontos;

Descreva no mínimo seis relações de pertencimento ou de inclusão entre os objetos acima.

Exercício 9[7]. Considerando os seguintes conjuntos,

$A = \{1\}$
$B = \{1, \{1\}\}$
$C = \{1, 2\}$
$D = \{1, 2, \{1\}\}$
$E = \{1, \{1, \{1\}\}\}$

determine quais das sentenças abaixo são verdadeiras:

i) $A \in B$
ii) $A \subseteq B$
iii) $B \in E$
iv) $B \subseteq E$
v) $C \in D$
vi) $C \subseteq D$
vii) $B \subseteq D$

Conjuntos de múltiplos

Considere os conjuntos formados por múltiplos de números naturais. Por exemplo, considere o conjunto dos múltiplos de 3. Vamos chamá-lo de $M(3)$. Assim,

$M(3) = \{0, 3, 6, 9, 12, ...\}$

Em geral, $M(n)$ é o conjunto dos múltiplos de um número natural n. Veja outro exemplo:

$M(6) = \{0, 6, 12, 18, 24, ...\}$

Exercício 10.

a) Existe algum número que é elemento de todos os conjuntos dos múltiplos? Ou seja, existe algum número z tal que pertence a $M(n)$, qualquer que seja n?

[7] Desafio: Construa um conjunto A, diferente do conjunto vazio, tal que todo elemento de A é subconjunto de A. Dê dois exemplos.

b) Encontre um conjunto de múltiplos que seja subconjunto de outro conjunto de múltiplos. Ou seja, encontre m e n tais que $M(m) \subseteq M(n)$. Qual é a relação entre m e n ?

c) Mostre que se $a, b \in M(n)$, então $a + b \in M(n)$, para todo n.

d) Mostre que se $a \in M(n)$ e k é um número natural, então $a \cdot k \in M(n)$, para todo n.

União

Podemos criar novos conjuntos a partir de conjuntos dados de diversas maneiras. Por exemplo, "juntando" dois deles. A **união** de dois conjuntos A e B é o conjunto que contém todos os elementos que pertencem a A ou que pertencem a B. Usaremos a seguinte notação para indicar a união de A e B:

$$A \cup B$$

Veja um exemplo: seja A o conjunto dos estudantes da Arco, EF o conjunto dos estudante do Ensino Fundamental II da Arco, e EM o conjunto dos estudantes do Ensino Médio da Arco. Então:

$$A = EM \cup EF$$

Seja também EM_1 o conjunto dos estudantes da 1ª série o médio, EM_2 da 2ª série, e assim por diante. Então:

$$EM = EM_1 \cup EM_2 \cup EM_3$$

$$EF = EF_6 \cup EF_7 \cup EF_8 \cup EF_9$$

Intersecção

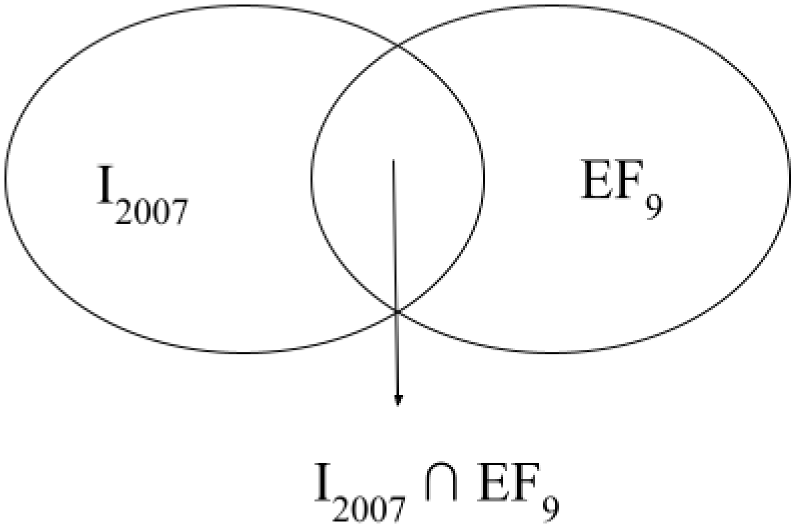
Ao invés de "juntar" dois conjuntos, podemos também "pegar o que eles têm em comum". A **intersecção** entre dois conjuntos A e B é o conjunto que contém os elementos que são elementos tanto de A quanto de B. Usaremos a seguinte notação para denominá-lo:

$$A \cap B$$

Veja um exemplo: considere que I_{2007} é o conjunto dos estudantes da Arco que nasceram no ano de 2007. Considere o conjunto:

$$EF_9 \cap I_{2007}$$

Ele é o conjunto de estudantes do 9ª que são de 2007! Repare que ele não corresponde nem à classe do 9º ano inteira nem ao conjunto dos alunos da arco que nasceram em 2007, mas sim à parte em comum entre esses dois conjuntos.



Exercício 11. Descreva os conjuntos:

a) $M(2) \cup M(4)$
b) $M(2) \cap M(4)$
c) $M(2) \cup M(3)$
d) $M(2) \cap M(3)$
e) $M(3) \cup M(9)$
f) $M(3) \cap M(9)$

Conjuntos numéricos

O conjunto dos números naturais

O conjunto dos números naturais é o mais simples entre os que nos interessam aqui. Através de seus elementos, as crianças têm seus primeiros contatos com a matemática, e foram os primeiros a aparecerem na história da humanidade. Também são conhecidos como *números para contar*: um, dois, três, quatro... Os matemáticos acrescentaram o número 0 e o denominaram conjunto dos números naturais:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

Exercício 12. De dois exemplos de subconjuntos de $\mathbb{N}$ com 6 elementos que satisfaçam simultaneamente às seguintes condições:

i) Todos maiores que 100 e menores que 200;
ii) Não podem ser múltiplos de 5;
iii) Dois elementos quaisquer não podem satisfazer à equação $x + y = 300$

Exercício 13. Aponte um subconjunto de cardinalidade infinita em que qualquer elemento, com exceção do menor de todos, pode ser obtido a partir da soma de outro elemento com 3.

Exercício 14. Um conjunto se diz **fechado** em relação à adição se, somando quaisquer dois elementos desse conjunto, o resultado também pertence a esse conjunto. De forma análoga, o mesmo se diz sobre um conjunto ser fechado em relação à multiplicação.

Em outras palavras, um conjunto A é fechado em relação à adição se e somente se, para todo $x, y \in A$, for verdade que $x + y \in A$.

a) O conjunto $\mathbb{N}$ é fechado em relação à adição? E em relação à multiplicação?
b) Forneça um subconjunto de $\mathbb{N}$ que seja fechado em relação à adição.
c) Forneça um subconjunto de $\mathbb{N}$ que seja fechado em relação à multiplicação.
d) Forneça um subconjunto de $\mathbb{N}$ que não seja fechado em relação à adição nem à multiplicação.
e) Existe algum subconjunto de $\mathbb{N}$ de cardinalidade finita fechado em relação à adição? Se sim, forneça-o.
f) Existe algum subconjunto de $\mathbb{N}$ de cardinalidade finita fechado em relação à multiplicação? Se sim, forneça-o.
g) O conjunto $\mathbb{N}$ é fechado em relação à subtração?
h) Encontre alguma operação que não seja a adição, multiplicação e subtração em relação à qual o conjunto dos naturais *não* seja fechado.
i) Encontre alguma operação que não seja a adição, multiplicação e subtração em relação à qual o conjunto dos naturais seja fechado.