

## Velocidades e Jacobiano de Manipuladores

*Data de Entrega: 28 de Novembro 2020*

### HOMEWORK #3

### RESOLUÇÃO OBRIGATÓRIA para os problemas : 1, 4 e 12

1. Considere um manipulador cilíndrico (PRP-RR) ao qual corresponde a tabela de DH que se apresenta. O vector das variáveis de junta é dado por  $q = [d_1, \theta_2, d_3, \theta_4, \theta_5]$ .

	$\theta_i$	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$
0->1	$90^\circ$	$d_1$	0	$90^\circ$
1->2	$90^\circ + \theta_2$	0	0	$90^\circ$
2->3	$0^\circ$	$d_3$	0	$-90^\circ$
3->4	$\theta_4$	0	0	$90^\circ$
4->G	$\theta_5$	5	0	$0^\circ$

Obtenha:

- O Jacobiano Geométrico do manipulador  ${}^0J_{6 \times 5}$ ;
  - Analise as singularidades do manipulador. Justifique devidamente a resposta e desenhe o manipulador nas configurações singulares;  
(AJUDA : Analise para que configurações do manipulador se anula uma qualquer componente de velocidade);
  - Assumindo que se desloca a primeira junta do manipulador com uma velocidade  $\dot{d}_1$ , obtenha as equações de velocidade para as restantes juntas do manipulador de modo a garantir  ${}^0v | {}^0\omega^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ .
  - Se aplicar no punho do manipulador uma força  ${}^4F_{4,App} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 & 10 & 0 \end{bmatrix}^T$ , estando o manipulador na sua configuração "home" ( $q = \begin{bmatrix} 10 & 0^\circ & 10 & 0^\circ & 0^\circ \end{bmatrix}^T$ ), quais os valores de binário/força nas juntas do manipulador que asseguram o seu equilíbrio estático.
2. Considere o manipulador com 3 graus de mobilidade RPR cujas matrizes de transformação de junta se apresenta:

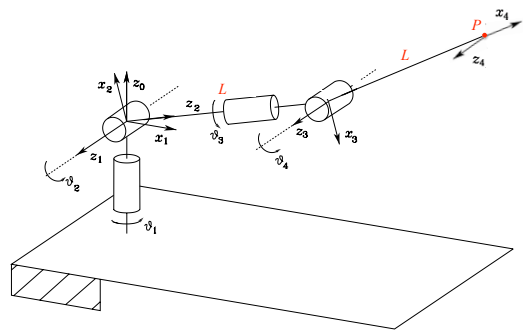
$${}^0T_1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 & L_1 \cdot C_1 \\ S_1 & 0 & C_1 & L_1 \cdot S_1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^1T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^2T_E = \begin{bmatrix} 0 & S_3 & C_3 & L_2 \cdot C_3 \\ 0 & -C_3 & S_3 & L_2 \cdot S_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Obtenha o Jacobiano do manipulador,  ${}^G J_{6 \times 3}$ , que expressa a velocidade linear e angular do *end-effector* em função da velocidade das juntas.
- Obtenha o Jacobiano de movimento angular expresso no referencial 1 ( ${}^1 J_\omega$ ). O que é que esse jacobiano lhe diz em termos da velocidade angular segundo a direção  $x$ ? Explique as diferenças verificadas entre o Jacobiano de velocidade angular obtido e o Jacobiano angular expresso no referencial base  ${}^0 J_\omega$ .
- Recorrendo a  ${}^1 J_v$ , obtenhas as configurações singulares do manipulador e explique quais as restrições de movimento que acontecem em cada caso (Ajuda: Usando as matrizes de transformação fornecidas, desenhe o esquemático do manipulador em estudo).

3. Considere o robot 4R da figura anexa do qual se conhecem as matrizes de transformação dos elos,

$${}^0_1T = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, {}^1_2T = \begin{bmatrix} C_2 & 0 & S_2 & 0 \\ S_2 & 0 & -C_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$${}^2_3T = \begin{bmatrix} C_3 & 0 & S_3 & 0 \\ S_3 & 0 & -C_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, {}^3_4T = \begin{bmatrix} C_4 & -S_4 & 0 & L \cdot C_4 \\ S_4 & C_4 & 0 & L \cdot S_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Os sistemas de coordenadas de D-H são os apresentados na figura, correspondendo a configuração apresentada ao vector de variáveis de junta

$$q = [0 \quad 6\pi/10 \quad \pi \quad 6\pi/10]^T \equiv [0^\circ \quad 108^\circ \quad 180^\circ \quad 108^\circ]^T.$$

Assumindo a configuração  $q_1 = [0 \quad 3\pi/4 \quad \pi \quad \pi]^T$  e fazendo  $L = 1m$ ,

- Obtenha o Jacobiano básico  ${}^0 J_{6 \times 4}$ .
- Mostre que na configuração  $q_1$  o manipulador consegue concretizar a velocidade  ${}^0 v \quad {}^0 \omega]^T = [0 \quad 0 \quad -L \quad 0 \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad 0]^T$ .
- Considerando unicamente a velocidade linear  ${}^0 v$ , verifique se perante a configuração  $q_1$  o manipulador se encontra numa configuração singular.

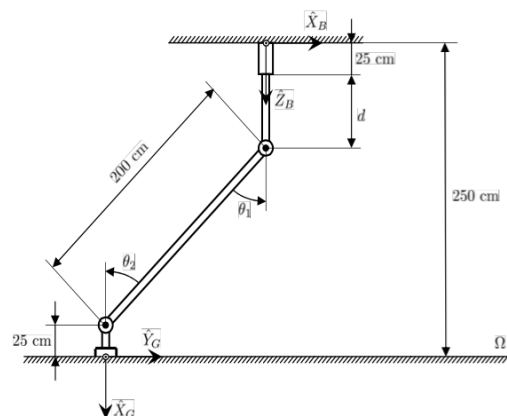
4. Observe o manipulador **PRR** apresentado na figura.

- Obtenha o modelo geométrico directo do manipulador.

- (NOTA: Respeite os sistemas de coordenadas que se apresentam para a base e garra do manipulador)

- Obtenha o Jacobiano básico do manipulador  ${}^B J_{6 \times 3}$ .

- Obtenha as expressões das velocidades angulares  $\dot{\theta}_2$ ,  $\dot{\theta}_3$ , e linear  $\dot{d}_1$ , que asseguram o movimento retilíneo com uma velocidade



linear constante de  $|v_{B_X}| = 10 \text{ cm/s}$  sobre o plano  $\Omega$ .

- d) Se quiser aplicar com o gripper uma força constante sobre o plano  $\Omega$  igual a  ${}^G F = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ , quais as expressões para os binários das juntas função da trajectória.

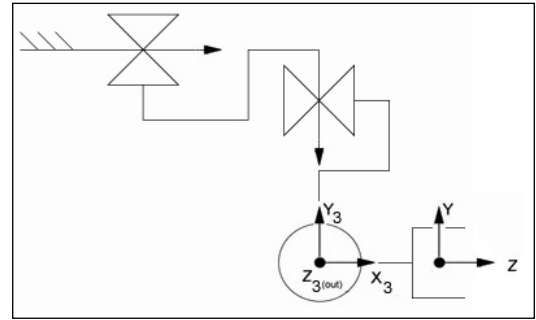
5. Considere o manipulador **PPR** da figura. Um vector de força é aplicado ao end-effector e medido no sistema de coordenadas  $\{0\}$  como

sendo igual a  ${}^0 F_{G,App} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T$ ,

estando o manipulador na configuração

$\begin{bmatrix} d_1 = 25 \text{ cm} & d_2 = 25 \text{ cm} & \theta_3 = 90^\circ \end{bmatrix}$ . Considere  $d_3 = 10 \text{ cm}$ .

Sabendo que  ${}^G J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ C_3 & -S_3 & d_3 \\ S_3 & C_3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$



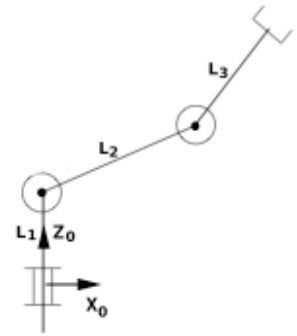
- Determine os binários nas juntas que asseguram o equilíbrio estático do manipulador.
- Quais os valores de força e binário em cada junta do manipulador.
- Qual a força e binário que uma ferramenta acoplada ao end-effector aplica quando são aplicadas nas juntas os binários calculados na alínea a). Considere que a ferramenta está alinhada com o eixo  $\hat{x}_G$  e que possui um comprimento  $L_{15 \text{ cm}}$ .

6. Observe o manipulador RRR da figura. Sabendo que as matrizes de transformação  ${}^{i-1}T_i$  são conhecidas e iguais a

$${}^0_1T = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^1_2T = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & L_2 C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & L_2 S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^2_3T = \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & L_3 C_3 \\ S_3 & C_3 & 0 & L_3 S_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

obtenha:

- O Jacobiano,  ${}^0 J_{6 \times 4}$ , que expressa a velocidade linear e angular do *end-effector* em função da velocidade das juntas.
- Para que configurações se encontra o manipulador numa singularidade? Desenhe as configurações singulares, justificando claramente cada singularidade, indicando qual o movimento condicionado com cada singularidade. (Ajuda: para simplificar os cálculos, converta o jacobiano obtido em a) para  ${}^1 J$ ).
- Para cada singularidade observada, pretende-se incorporar uma junta adicional para resolver essa singularidade. Para cada situação, desenhe o esquemático do manipulador resultante e justifique porque razão a singularidade fica resolvida com a nova junta.
- Um vector de força é aplicado ao end-effector e medido no sistema de coordenadas  $\{G\}$  como sendo igual a  ${}^G F_{G,App} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}^T$ , estando o manipulador na



configuração  $[\theta_1 = 0^\circ, \theta_2 = \pi/4, \theta_3 = \pi/2]$ . Obtenha o valor dos binário/força das juntas do manipulador que asseguram o equilíbrio estático. Considere  $L_1 = L_2 = L_3 = 1$ .

7. Considere o manipulador RRP, cujas matrizes de transformação de elos são conhecidas e representadas por

$${}^0_1T = \begin{bmatrix} -S_1 & 0 & C_1 & -aC_1 \\ C_1 & 0 & S_1 & aS_1 \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^1_2T = \begin{bmatrix} C_2 & 0 & -S_2 & 0 \\ S_2 & 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^2_E T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Obtenha o Jacobiano geométrico do manipulador  ${}^E J_{6 \times 3}$ .
- Identifique as configurações singulares de velocidade linear do manipulador. Desenhe as configurações singulares encontradas e explique porque razão são singulares.
- Para que configurações das juntas de rotação se obtém a máxima manipulabilidade posicional do manipulador? Justifique.
- Qual a configuração do manipulador que assegura o seu equilíbrio estático aplicando binários/forças nulos nas juntas do manipulador quando se aplica no end-effector o vetor de forças  ${}^0F_{E,App} = \begin{bmatrix} 0 & -f_y & 0 & -w_x & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ ?
- Assumindo que o vetor de forças da alínea d) era aplicado ao end-effector do manipulador na configuração  $(\theta_1 = 0^\circ, \theta_2 = 45^\circ, d_3 = 5cm)$ , sendo  $a = 5$ ,  $b = 1$ , obtenha os valores de força e binário em cada junta do manipulador na situação de equilíbrio estático?

8. Considere o manipulador RRRR cujos parâmetros de DH são apresentados na tabela.

	$\theta_i$	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$	Offset
$0 \rightarrow 1$	$\theta_1$	0	$l_1$	$-\pi/2$	0
$1 \rightarrow 2$	$\theta_2$	0	$l_2$	$\pi/2$	0
$2 \rightarrow 3$	$\theta_3$	0	0	$\pi/2$	$\pi/2$
$3 \rightarrow 4$	$\theta_4$	$d$	0	0	0

- Desenhe o esquemático do manipulador na sua posição de repouso (“home”). Apresente os eixos  $x_i$  e  $z_i$  dos sistemas referenciais associados a cada junta.
- Conhecendo a matriz de “pose” do “end-effector” no referencial base ( ${}^0_4T$ ), i.e., conhecendo  ${}^0_4R$  e  ${}^0p_{04}$ , obtenha a expressão que permite conhecer  ${}^0p_{02}$ .
- Obtenha as expressões de cinemática inversa para as juntas do manipulador, i.e.,  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$ . Considere comprimentos unitários para  $l_1, l_2, d$ .
- Obtenha o Jacobiano geométrico do manipulador,  ${}^0J_{6 \times 4}$ .
- Identifique as configurações singulares do manipulador. Represente as configurações singulares encontradas e explique porque razão são singulares.

9. Considere a existência de dois sistemas referenciais  $\{A\}$  e  $\{B\}$ , relacionados através da seguinte matriz de transformação

$${}^A T_B = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -0.5 & 0 & 5.0 \\ 0.5 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 10.0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Um observador situado na origem do referencial  $\{B\}$  vê um corpo rígido  $P$  localizado em  ${}^B P = [2, 1, 1]^T$  e mede a velocidade de  $P$  no referencial  $\{B\}$  como sendo igual a  ${}^B v_P = \begin{bmatrix} v_{1x3} & w_{1x3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & -1 & 5 & 2 \end{bmatrix}^T$ . Entretanto um observador colocado na origem do referencial  $\{A\}$  mede a velocidade do referencial  $\{B\}$  como sendo igual a  ${}^A v_B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 & -5 & 10 \end{bmatrix}^T$ .

Obtenha o vector de velocidade 6x1 do corpo rígido  $P$  na perspectiva do observador colocado em  $\{A\}$ .

10. Considere um manipulador cilíndrico (RRP-RRR) ao qual corresponde a tabela de DH que se apresenta. O vector das variáveis de junta é dado por  $q = [\theta_1, \theta_2, d_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6]$ .

	$\theta_i$	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$	$off_i$
B->0	$\theta_1$	0	0	$-90^\circ$	$0^\circ$
1->2	$\theta_2$	$a$	0	$-90^\circ$	$-90^\circ$
2->3	$0^\circ$	$d_3$	0	$0^\circ$	0
3->4	$\theta_4$	0	0	$90^\circ$	$90^\circ$
4->5	$\theta_5$	0	0	$-90^\circ$	$0^\circ$
5->G	$\theta_6$	$l_G$	0	$0^\circ$	$-90^\circ$

Obtenha:

- O esquemático do manipulador na sua configuração "home";
- O Jacobiano geométrico do manipulador  ${}^G J_{6 \times 6}$  no sistema de coordenadas da garra.
- Considerando um comportamento estático para a junta  $\theta_4$ , i.e.  $\dot{\theta}_4 = 0 \text{ rad/s}$ , e estando a junta na configuração  $\theta_4 = 0^\circ$ , identifique as configurações singulares de velocidade linear do manipulador. Baseie-se para o efeito no cálculo do Jacobiano linear  ${}^1 J_v$ . Desenhe as configurações singulares encontradas e explique porque razão são singulares.
- Para que configurações das juntas se obtém a máxima manipulabilidade posicional do punho do manipulador? Justifique.

11. Considere o manipulador RRP que se apresenta na figura. Um vector de força é aplicado na garra e medido no sistema de coordenadas  $\{1\}$  como sendo igual a

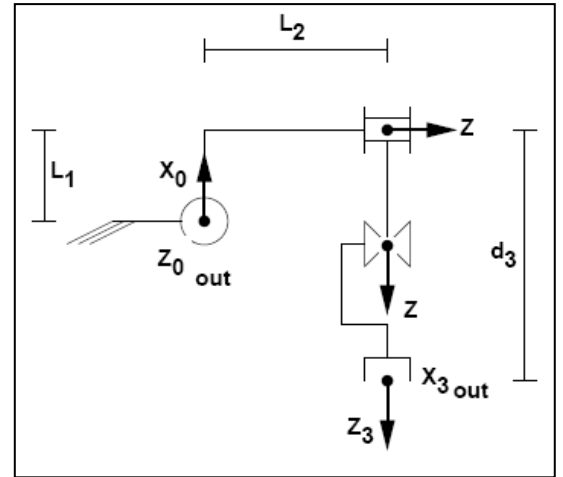
${}^1F_{3\_App} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ , estando o manipulador na configuração  $\left[ \theta_1 = \frac{\pi}{4} \text{ rad} \quad \theta_2 = \frac{\pi}{2} \text{ rad} \quad d_3 = 10 \text{ cm} \right]$ . Considere  $L_1 = 10 \text{ cm}$  e  $L_2 = 25 \text{ cm}$ .

Conhecendo as matrizes de transformação  ${}^{i-1}T_i$  do manipulador

$${}^0_1T = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & S_1 & l_1 C_1 \\ S_1 & 0 & -C_1 & l_1 S_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, {}^1_2T = \begin{bmatrix} -S_2 & 0 & -C_2 & 0 \\ C_2 & 0 & -S_2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, {}^2_3T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

obtenha:

- A matriz Jacobiana  ${}^1J_{6 \times 3}$
- As configurações singulares para a velocidade linear. Justifique as configurações encontradas.
- Os binários nas juntas que asseguram o equilíbrio estático do manipulador.
- Os valores de força e binário em cada junta do manipulador.
- Os valores da força e binário que uma ferramenta acoplada ao end-effector aplica quando são aplicadas nas juntas os binários calculados na alínea c). Considere que a ferramenta está alinhada com o eixo  $\hat{Y}_3$  e que possui um comprimento  $L=10 \text{ cm}$  (O eixo dos Z da ferramenta está alinhado segundo o seu eixo).



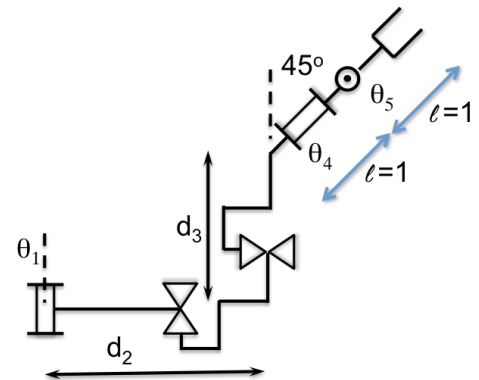
12. Considere o manipulador *RPP-RR* que se apresenta na figura. O vetor das variáveis de junta é dado por  $q = [\theta_1, d_2, d_3, \theta_4, \theta_5]$ .

Obtenha:

- A tabela dos parâmetros de D-H (standard). Transfira o esquemático do manipulador para a folha de prova e acrescente os referenciais necessários à obtenção do modelo geométrico direto do manipulador. Apresente as matrizes de transformação associadas a cada elo ( ${}^{i-1}T_i$ ).

*NOTA : A configuração apresentada na figura corresponde à posição de "home".*

- O Jacobiano geométrico ( $J^0$ ) para o punho do manipulador e identifique as configurações singulares de velocidade linear para o punho.
- Os valores de força e binário nas juntas, em situação de equilíbrio estático, quando se aplica no punho o vetor de força  ${}^P F = [0, -1, 0, 0, +1, -2]^T$ . Qual o vetor de força  ${}^G F$  exercido pela garra na situação de equilíbrio estático para a configuração  $\theta_5 = \frac{\pi}{4}$ ?

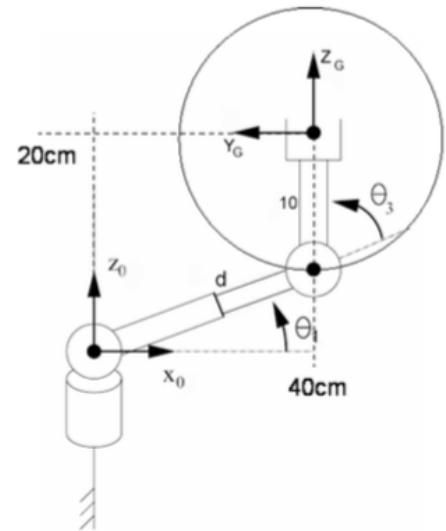


## LABWORK #3

### • (AULA 1 )

Observe o manipulador **RRP-R** apresentado na figura. Desenvolva um programa em MATLAB que permita visualizar o modo de funcionamento do manipulador. Tenha em atenção os seguintes aspetos:

1. Obter o modelo cinemático direto do manipulador recorrendo aos parâmetros de Denavit-Hartenberg.
2. Pretende-se mover o manipulador ao longo de trajetórias circulares de raio  $r$  centradas no ponto  $C=[40,0,20]^T_{(cm)}$ . Obter a solução de cinemática inversa do manipulador  $([\theta_0, \theta_1, d_2, \theta_3]=f(c_x, c_y, c_z, r))$  que permite efetuar o movimento circular da garra.
3. Calcule as expressões para a velocidade de rotação das juntas  $\dot{q} = \begin{bmatrix} \omega_1 & v_d & \omega_3 \end{bmatrix}^T$  que asseguram um movimento circular com uma velocidade angular igual a  $\pi/2$  rad/s.
4. Realize o movimento do manipulador tendo em atenção a restrição de velocidade anteriormente referida ( $|\omega|=\pi/2$  rad/s).



Para tal considere as duas possíveis abordagens de controlo:

- a. Abordagem Integradora - Controlo de movimento discreto no tempo considerando

$$\dot{q}^* = J(q(k))^{-1} v^*$$

$$q^*(k+1) = q(k) + \Delta t \cdot \dot{q}^*(k)$$

- b. Abordagem em malha fechada – A abordagem anterior, puramente integradora, sofre de acumulação de erro posicional, podendo ser *eliminado* recorrendo a uma solução em malha fechada baseada na

diferença entre a pose desejada  $p^*(k)$  e a pose atual  $f(q(k))$ .

$$\dot{q}^*(k) = J(q(k))^{-1} (p^*(k) - f(q(k)))$$

$$q^*(k+1) = q(k) + K_p \cdot \Delta t \cdot \dot{q}^*(k)$$

5. (VALORIZAÇÃO ADICIONAL / Facultativo ) Considere que substitua a junta de rotação terminal do manipulador por uma garra esférica, dando origem a um manipulador **RRP-RRR**. Estenda a solução implementada em 4. de modo a permitir a realização de movimentos circulares no plano  $Z=20cm$ .

Os programas a desenvolver deverão apresentar a velocidade das juntas em função do tempo para os requisitos do ponto 3 e 5.

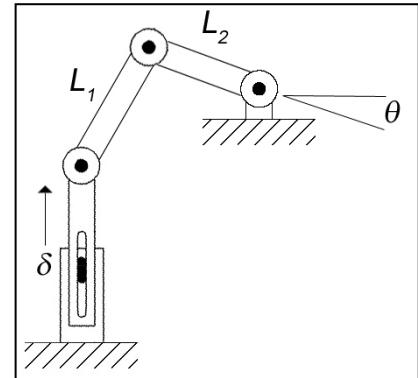
Use as funções da Toolbox Robotics para validar e visualizar os resultados.

- (AULA 2)

Considere o robot planar PRRR apresentado na figura e estudado no labwork #2.

a) Recupere o modelo geométrico do manipulador de acordo com a metodologia de D-H standard obtido no labwork#2.

b) Assumindo que os elos apresentam um comprimento  $L_1 = L_2 = L$  e que o eixo prismático realiza um deslocamento  $d_1 = \delta$ , obtenha as expressões para a velocidade de rotação das juntas  $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$  que garantem o deslocamento da junta de translação com uma velocidade linear igual a  $\dot{d}_1 = 5\text{cm/s}$ . Considere



que os pontos de acoplamento de ambas as extremidades do manipulador estão afastadas  $\begin{bmatrix} x & 0 & z \end{bmatrix}$ , sendo que  $x = z = L$ . Considere nos cálculos a realizar que a distância  $d$  do elo terminal é unitária e que o comprimento dos elos é igual a dois, i.e.,  $L = 2$ .

c) Simule o movimento identificado em b) usando unicamente a estratégia de controle em malha fechada.

O programa a desenvolver deverá apresentar a velocidade das juntas em função do tempo para os requisitos do movimento a realizar.

Use as funções da Toolbox Robotics para validar e visualizar os resultados.