Sistemas de Coordenadas e Transformações

Problemas Tipo:

ENTREGA OBRIGATÓRIA da resolução dos PROBLEMA 14 e 15.

1. Dada a matriz de dimensão 3x3

$$R = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2 \\ -1/2 & -1/\sqrt{2} & 1/2 \end{bmatrix}$$

   a. Mostre que *R* é uma matriz de rotação.
   b. Determine o vector unitário que define o eixo de rotação e o valor do ângulo de rotação.
   c. Quais são os parâmetros de Euler $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ de *R*?

2. O sistema de coordenadas *{B}* está inicialmente coincidente com o sistema de coordenadas *{A}*. É efectuada a rotação de *{B}* sobre OY_B de um ângulo igual a ϕ graus seguida de uma outra rotação de *{B}* sobre OX_B de um ângulo igual a θ graus.
   a. Obtenha a matriz de rotação ${}^A_B R$, a qual permite alterar a descrição do vector *P* no sistema referencial *{B}*, ${}^B P$, para o sistema de coordenadas *{A}*, ${}^A P$.
   b. Qual é o resultado se $\theta = 60^\circ$ e $\phi = 30^\circ$?
   c. Obtenha ${}^A \hat{Z}_B$.

3. Em geral, a multiplicação de matrizes de transformação homogéneas não é comutativa. Considere o produto matricial que se apresenta

$$H = R_{OX,\alpha} \cdot T_{X,b} \cdot T_{Z,d} \cdot R_{OZ,\theta}$$

   a. Do conjunto de matrizes que se apresentam à direita da equação, diga quais os pares de matrizes que comutam. Explique as razões que suportam a sua escolha.
   b. Apresente todas as permutações destas quatro matrizes que se traduzem na mesma matriz de transformação homogénea, H.

4. Mostre que $Q_I = (1,0,0,0)$ é o elemento identidade para a multiplicação de quaterniões unitários, i.e., $QQ_I = Q_I Q = Q$ para qualquer quaternião unitário Q.

5. O conjugado Q^* de um quaternião Q é definido por $Q^* = (q_0, -q_1, -q_2, -q_3)$. Mostre que Q^* é o quaternião inverso de Q, i.e., mostre que $Q^* Q = QQ^* = (1,0,0,0)$.

6. Considere os quaterniões $Q_x = \left(\pi/2, 1,0,0\right)$ e $Q_z = \left(\pi/2, 0,0,1\right)$. Mostre que a rotação do vetor x_0 pelo quaternião composto $Q_x Q_z$ resulta no vetor z_0. Confirme que se obtém o mesmo resultado através de $R_x(\pi/2) R_z(\pi/2) x_0$

7. Dois sistemas de coordenadas A e B estão fixos relativamente a um sistema inercial base e estão relacionados pela matriz de transformação ${}^A_BT$, a qual traduz a rotação de B sobre o eixo ${}^A\vec{r} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ de um ângulo $\phi = 45^\circ$.
   a. Represente numericamente a matriz de transformação ${}^A_BT$ e obtenha os ângulos de *Roll-Pitch-Yaw* equivalentes.
   b. Qual a nova matriz de transformação que relaciona os sistemas de coordenadas A e B após se terem realizado os seguintes movimentos:
      i. Rodar o sistema de coordenadas A de um ângulo igual a $\pi/3$ sobre o eixo de rotação ${}^A\vec{r}$;
      ii. Deslocar o sistema de coordenadas B em 4 unidades segundo o eixo de rotação ${}^A\vec{r}$;
   c. Qual o deslocamento a realizar, se na sequência de movimentos da alínea anterior substituir o deslocamento realizado segundo a direção ${}^A\vec{r}$ por deslocamentos realizados segundo os eixos do sistema referencial A.
   d. Apresente graficamente as sequências de movimentos propostas nas alíneas b) e c).
   e. Qual a expressão que representa a localização da origem do referencial B após ter realizado os movimentos propostos em b)? Qual a nova localização?

8. Dois sistemas de coordenadas A e B estão fixos relativamente a um sistema inercial base e estão relacionados pela matriz de transformação ${}^A_BT$. O sistema de coordenadas A encontra-se localizado em $t = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}^T$ relativamente ao sistema de coordenadas B e a matriz de rotação ${}^A_BR$ é representada pelos parâmetros de Euler que se apresentam

$$\varepsilon_1 = \frac{\sqrt{2}}{4} \quad \varepsilon_2 = \frac{2-\sqrt{2}}{4} \quad \varepsilon_3 = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \quad \varepsilon_4 = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

a) Represente numericamente a matriz de transformação ${}^A_BT$ e obtenha o QUATERNIÃO unitário equivalente para ${}^A_BR$.

b) Qual a nova matriz de transformação que relaciona os sistemas de coordenadas A e B após se terem realizado os seguintes movimentos:

1. Rodar o sistema de coordenadas B de um ângulo igual a $\pi/2$ sobre o eixo de rotação ${}^B\vec{r} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$;
2. Deslocar o sistema de coordenadas A em 4 unidades segundo o eixo de rotação ${}^B\vec{r}$;
3. Rodar o atual sistema de coordenadas A de um ângulo igual a $-\pi/2$ sobre o eixo de rotação OY_B.

c) Apresente graficamente a sequência de movimentos proposta na alínea b).

d) Apresente uma sequência alternativa de movimentos que se traduza na mesma matriz de transformação.

9. Dois sistemas de coordenadas A e B estão fixos relativamente a um sistema inercial base. Sabendo que $\hat{X}_B = \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{X}_A - \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{Z}_A$, $\hat{Y}_B = \hat{Y}_A$, $\hat{Z}_B = \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{X}_A + \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{Z}_A$, e que ${}^At_{ori_B} = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}$, obtenha;

a) A sequência de movimento a realizar de modo a recolocar o sistema de coordenadas B coincidente com o sistema de coordenadas A, i.e., ${}^A_BT = I_{4x4}$.

b) Obtenha os valores do quaternião unitário da matriz ${}^A_BR$ ($[e_1, e_2, e_3, e_4]$), e com base nos valores obtidos calcule o eixo de rotação arbitrário ${}^A\vec{r}$ e correspondente ângulo de rotação ϕ.

c) Obtenha a transformação ${}^B_{B_N}T$ que resulta da rotação do sistema de coordenadas B sobre o eixo ${}^A\vec{r}$ de um ângulo ϕ igual a $\pi/3$.

10. Considere um espaço de trabalho constituído por um manipulador equipado com uma garra, cuja localização da garra é definida na sua base através da transformação ${}^0_GT = {}^0_6T\,{}^6_GT$. O manipulador está colocado num espaço de trabalho, sendo a pose do robot nesse espaço definida através de ${}^W_0T$. O espaço de trabalho é monitorizado por uma câmara definida por ${}^W_CT$, sendo a pose da peça a manusear obtida no referencial da câmara e definida por ${}^C_OT$.

Obtenha:

a) A transformação ${}^0_6T$ que assegura a colocação da garra na posição de agarrar a peça;

b) A nova transformação ${}^{C}_{O}T$ após o robot ter movido a peça através de uma rotação θ segundo o seu eixo OZ.

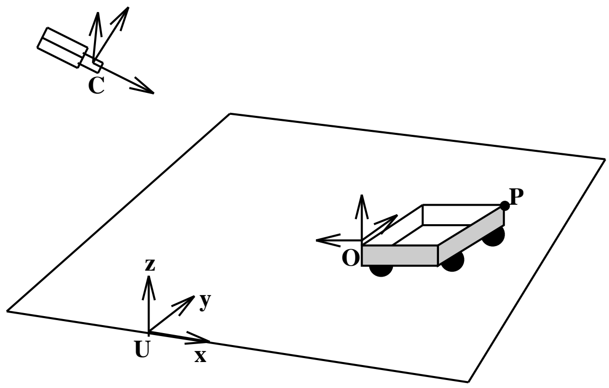
Se após ter movido a peça, rodar a câmara de um ângulo α sobre o eixo ${}^{w}\vec{r} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$, qual a expressão que representa a nova localização da câmara no referencial da garra (${}^{G}_{C_N}T$)?

11. Analisando a figura que se apresenta, a qual pretende descrever o universo dos sistemas de coordenadas envolvidos num processo de localização de objectos, identificam-se três sistemas referenciais:

- O sistema referêncial C, acoplado à camara e com o eixo OZ coincidente com o eixo óptico da câmara;
- O sistema referencial O, acoplado a uma plataforma que se desloca no espaço de monitorização visual;
- O sistema referêncial inercial U, solidário ao espaço de monitorização.

Sabendo que

$$ {}^{U}_{C}T = \begin{bmatrix} 0.6124 & 0.7071 & 0.3536 & -100 \\ 0.6124 & 0.7071 & 0.3536 & 50 \\ -0.5 & 0 & 0.8660 & 75 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, $$



obtenha:

a. A sequência de movimentos a efetuar em U para colocar C na pose definida por ${}^{U}_{C}T$.

b. Qual a transformação ${}^{C}_{C_N}T$ que resulta da rotação de C sobre o eixo ${}^{U}r = \begin{bmatrix} 0.707 & 0.707 & 0 \end{bmatrix}^T$ que passa no ponto ${}^{U}p = \begin{bmatrix} 1.0 & 2.0 & 3.0 \end{bmatrix}^T$? (pergunta de seleção)

c. Incorporando um manipulador ao ambiente de trabalho, o qual está localizado em ${}^{U}_{R}T$ e com a garra na pose ${}^{U}_{Actual}T$, obtenha a expressão que representa o deslocamento a ser efetuado pela garra de modo a se colocar coincidente com a pose do ponto P (${}^{Gripper}_{P}T$), conhecendo ${}^{C}_{O}T$?

12. Considere a existência de dois sistemas de coordenadas A e B, inicialmente coincidentes aos quais é aplicada a seguinte sequência de movimentos:

1. Deslocação do sistema de coordenadas B em 4 unidades segundo o eixo ${}^{A}\overline{r} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$.
2. Rotação do sistema de coordenadas B de um ângulo igual a $-\pi/2$ segundo o eixo ${}^{A}\overline{r}$.

3. Rotação do sistema de coordenadas A de um ângulo igual a $-\pi/2$ segundo o eixo $\hat{Z}_B$ do referencial B atual.

a) Obtenha a matriz de transformação que mapeia B em A, i.e., ${}^{A}_{B}T$.

b) Represente a sequência de movimentos realizada anteriormente através da conjugação de um movimento translacional puro t combinado com uma rotação sobre um eixo arbitrário ${}^{A}\bar{r}$ de um ângulo ϕ. Obtenha os valores para ϕ, t e ${}^{A}\bar{r}$.

13. Dois sistemas de coordenadas A e B estão fixos relativamente a um sistema inercial base e estão relacionados pela matriz de transformação

$$ {}^{A}_{B}T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. $$

a. Obtenha uma sequência de movimentos que se traduz na matriz de transformação previamente apresentada.

b. Obtenha a nova matriz de transformação ${}^{A}_{B}T$, após serem realizados os movimentos complementares apresentados a seguir:

   i. Rotação do sistema de coordenadas B de um ângulo α segundo o eixo $OY_{A_{ATUAL}}$.

   ii. Deslocação do sistema de coordenadas A em d unidades segundo o eixo $OZ_{B_{INICIAL}}$.

   iii. Rotação do sistema de coordenadas B de um ângulo β segundo o eixo $OX_{A_{ATUAL}}$.

c. Sabendo que a matriz de transformação que relaciona os dois sistemas de coordenadas, após a sequência de movimentos da alínea a), é representada por

$$ {}^{A'}_{B''}T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, $$

obtenha os valores de (α,β,d) que conduzem à matriz apresentada. Confirme o resultado graficamente.

d. Apresente uma sequência alternativa de movimentos, composta apenas por uma rotação e uma translação, que se traduza na mesma matriz de transformação

14. Dois sistemas de coordenadas A e B estão fixos relativamente a um sistema inercial base e estão relacionados pela matriz de transformação ${}^{A}_{B}T = I_{4x4}$.

e) Obtenha a expressão que representa a seguinte sequência de movimentos:
   1. Deslocar o sistema de coordenadas A em 2 unidades segundo o eixo de rotação ${}^{B}\vec{r} = \left[0,0,1\right]^T$;
   2. Rodar o sistema de coordenadas B de um ângulo igual a $-\pi/2$ sobre o eixo de rotação ${}^{A_{INI}}\vec{r} = \left[0,-1,0\right]^T$ inicial;
   3. Rodar o sistema de coordenadas B atual de um ângulo igual a $\pi/2$ sobre o eixo de rotação ${}^{A}\vec{r} = \left[1,0,0\right]^T$ atual;

b) Obtenha o movimento, ou sequência de movimentos, a efetuar sobre o(s) eixo(s) do sistema de coordenadas B atual, que recolocam os dois sistemas de coordenadas na configuração inicial, i.e., ${}^{A}_{B}T = I_{4x4}$

   NOTA: Não são aceites resoluções gráficas para esta alínea.

c) Se após ter realizado os movimento propostos em a) incorporasse uma rotação adicional de $\pi/4$ sobre o eixo *OY* do referencial B inicial, qual a nova configuração de B relativamente a B inicial.

d) Obtenha o quaternião unitário que representa a matriz de rotação ${}^{A}_{B}R$ após ter realizado os movimentos descritos em a) e c).

15. Dois sistemas de coordenadas W e R estão relacionados entre si pela matriz de transformação ${}^{W}_{R}T$, a qual representa a composição dos seguintes movimentos:
   1. Rotação R, representada pelo vetor de Rodrigues $\rho = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right]^T$;
   2. Deslocamento $t = [10{,}30{,}0]^T$, efetuado por B segundo os eixos do sistema de coordenadas A;

f) Represente numericamente a matriz de transformação ${}^{W}_{R}T$ que relaciona os dois sistemas de coordenadas.

Considere que W representa o sistema de coordenadas de um espaço de trabalho (*World*) e que R representa o sistema de coordenadas base de um manipulador RRP (SCARA), onde a localização da *Garra* é definida pela cadeia cinemática ${}^{R}_{E}T = {}^{R}_{1}T \cdot {}^{1}_{2}T \cdot {}^{2}_{P}T \cdot {}^{P}_{G}T$. Considere também que o manipulador tem acoplado ao punho P uma câmara C, da qual se conhece a transformação ${}^{P}_{C}T$. A "pose" de um objeto (Obj) a manusear pelo manipulador é conhecida no sistema de coordenadas da câmara C e é definida por ${}^{C}_{Obj}T$.

g) Assumindo as transformações

$$ {}^{R}_{1}T = \begin{bmatrix} C_{\theta_1} & -S_{\theta_1} & 0 & 30C_{\theta_1} \\ S_{\theta_1} & C_{\theta_1} & 0 & 30S_{\theta_1} \\ 0 & 0 & 1 & 50 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, {}^{1}_{2}T = \begin{bmatrix} C_{\theta_2} & S_{\theta_2} & 0 & 20C_{\theta_2} \\ S_{\theta_2} & -C_{\theta_2} & 0 & 20S_{\theta_2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, {}^{2}_{P}T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5+d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, $$

$$ {}^{P}_{G}T = \begin{bmatrix} C_{\theta_g} & -S_{\theta_g} & 0 & 0 \\ S_{\theta_g} & C_{\theta_g} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \; e \; {}^{P}_{C}T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

obtenha:

1. A transformação ${}^{W}_{Obj}T$, sabendo que na configuração do manipulador $q = \left[\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, 10, ?\right]$ a transformação ${}^{C}_{Obj}T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
2. A transformação de "pose" imposta à câmara após rodar a junta 2 do manipulador em $\frac{\pi}{4} rad$, i.e, ${}^{C}_{C_N}T$. Considere que a configuração inicial do manipulador é a indicada no ponto 1.
3. A transformação de movimento a realizar pelo manipulador para colocar a *Garra* em condição de agarrar o objeto, após ter realizado o movimento proposto em 2. Considere que a configuração inicial do manipulador é a indicada no ponto 1.
4. A rotação θ_g a realizar pela Garra para alinhar o seu eixo X_G com o eixo X_{Obj}?

LABWORK #1 *Data de Entrega: 15 de Outubro 2019*

A componente laboratorial desta disciplina é realizada tirando partido da *toolbox ROBOTICS* desenvolvida pelo professor *Peter Corke*. Para tal deverá instalar a *toolbox* na sua plataforma de trabalho, a qual pode ser descarregada no endereço

https://petercorke.com/toolboxes/robotics-toolbox/

Siga as instruções descritas na página de acesso para integrar as funções da *toolbox* no seu ambiente de trabalho MATLAB.

1. EXERCÍCIO MATLAB (Aula Laboratorial #1)

Considere a existência de um objeto tridimensional de dimensão (2 x 3 x 4) colocado num espaço de trabalho (*World*) de dimensão $[-15..+15, -15..+15, -15..+15]$. O objeto tem um sistema de coordenadas ortonormado acoplado a um dos seus vértices e está localizado no espaço de trabalho na seguinte configuração:

$$ {}^{World}_{Object}T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. $$

Explorando as potencialidades das funções *trinterp, ctraj* e *mtraj* da toolbox ROBOTICS, ou desenvolvendo funções próprias, desenvolva uma aplicação em *matlab* que permita visualizar os movimentos do objeto quando lhe é aplicada a seguinte sequência de movimentos:

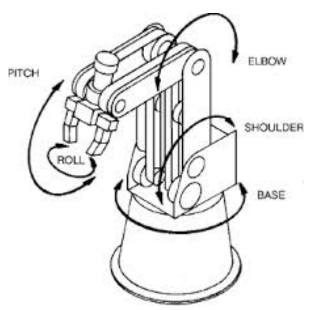
1. Rotação de +45º sobre o eixo OX do sistema de coordenadas *World*;
2. Deslocação de 5 unidades sobre o eixo OZ do atual sistema de coordenadas *Object*;
3. Rotação de -60º sobre o eixo $[-1,1,+1]$ do sistema de coordenadas *Object* inicial;
4. Rotação de -90º do sistema de coordenadas *World* sobre o seu próprio eixo OZ.

2. EXERCÍCIO MATLAB (Aula laboratorial #2)

Sabendo que a matriz de transformação que modela um elo (*link*) de um manipulador é representada por

$$
{}^{i-1}_{i}A = \begin{bmatrix} c_{\theta_i+off} & -s_{\theta_i+off}\cdot c_{\alpha_i} & s_{\theta_i+off}\cdot s_{\alpha_i} & a_i\cdot c_{\theta_i+off} \\ s_{\theta_i+off} & c_{\theta_i+off}\cdot c_{\alpha_i} & -c_{\theta_i+off}\cdot s_{\alpha_i} & a_i\cdot s_{\theta_i+off} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

onde $\left[\theta_i, d_i, \alpha_i, a_i\right]_{i=1..n}$ representam os 4 parâmetros de Denavith-Hartenberg, elabore um programa em Matlab que desenhe o esquemático de um manipulador na sua configuração "*home*" e que efetue a animação de movimento do manipulador mediante a interação nas suas variáveis de junta $\left[\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5\right]$. Para tal, considere que conhece a tabela de parâmetros D-H dos elos do manipulador. Para efeitos demonstrativos, use como exemplo a tabela de D-H que se apresenta e que corresponde ao manipulador (RRR-RR)

	θ_i	d_i	a_i	α_i	$Offset$	R/T	$Range$	
${}^0T_1(0\rightarrow 1)$	θ_1	0	0	$\pi/2$	0_{rad}	R	$\left[-\pi/2..\pi/2\right]$	
${}^1T_2(1\rightarrow 2)$	θ_2	0	4	0_{rad}	$\pi/2$	R	$\left[-\pi/3..\pi/4\right]$	
${}^2T_3(2\rightarrow 3)$	θ_3	0	2	0_{rad}	0_{rad}	R	$\left[-\pi/2..\pi/2\right]$	
${}^3T_4(3\rightarrow 4)$	θ_4	0	0	$-\pi/2$	$-\pi/2$	R	$\left[-\pi/2..\pi/2\right]$	
${}^4T_G(4\rightarrow G)$	θ_5	1	0	0_{rad}	0_{rad}	R	$\left[-\pi..\pi\right]$	