Lógica e Cálculo-λ

23 de fevereiro de 2025

Capítulo 1

Cálculo Proposicional

1.1 Sintaxe

Definição: O alfabeto do cálculo proposicional, denotado por $\mathcal{A}^{cp}$, é definido da seguinte forma:
$\mathcal{A}^{cp} = \mathcal{V}^{cp} \cup \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg, \bot\} \cup \{(,)\}$

Definição: $\mathcal{V}^{cp}$ é o conjunto das variáveis da lógica proposicional, $p_0, p_1, ..., p_n, ...$

Definição: O conjunto das formulas do cálculo proposicional, denotado por $\mathcal{F}^{cp}$, é uma linguagem sobre $\mathcal{A}^{cp}$, definida indutivamente por:

- $\bot \in \mathcal{F}^{cp}$
- $p \in \mathcal{F}^{cp}$ para todo $p \in \mathcal{V}^{cp}$
- $\varphi \in \mathcal{F}^{cp} \implies \neg\varphi \in \mathcal{F}^{cp}$
- $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{cp} \implies \varphi \wedge \psi \in \mathcal{F}^{cp}$
- $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{cp} \implies \varphi \vee \psi \in \mathcal{F}^{cp}$
- $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{cp} \implies \varphi \rightarrow \psi \in \mathcal{F}^{cp}$
- $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{cp} \implies \varphi \leftrightarrow \psi \in \mathcal{F}^{cp}$

Definição: A função $subf : \mathcal{F}^{cp} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{F}^{cp})$, que dada um formula, devolve o conjunto das suas subfórmulas, é definida por recursão estrutural pela seguinte forma:

- $subf(p) = \{p\}$
- $subf(\perp) = \{\perp\}$
- $subf(\neg\varphi) = \{\neg\varphi\} \cup subf(\varphi)$
- $subf(\varphi \wedge \psi) = \{(\varphi \wedge \psi)\} \cup subf(\varphi) \cup subf(\psi)$
- $subf(\varphi \vee \psi) = \{(\varphi \vee \psi)\} \cup subf(\varphi) \cup subf(\psi)$
- $subf(\varphi \rightarrow \psi) = \{(\varphi \rightarrow \psi)\} \cup subf(\varphi) \cup subf(\psi)$
- $subf(\varphi \leftrightarrow \psi) = \{(\varphi \leftrightarrow \psi)\} \cup subf(\varphi) \cup subf(\psi)$

Definição: A função $var : \mathcal{F}^{cp} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{V}^{cp})$, que dada um fórmula, devolve o conjunto das suas variáveis proposicionais, é definida por recursão estrutural pela seguinte forma:

- $var(p) = \{p\}$
- $var(\perp) = \emptyset$
- $var(\neg\varphi) = var(\varphi)$
- $var(\varphi \wedge \psi) = var(\varphi) \cup var(\psi)$
- $var(\varphi \vee \psi) = var(\varphi) \cup var(\psi)$
- $var(\varphi \rightarrow \psi) = var(\varphi) \cup var(\psi)$
- $var(\varphi \leftrightarrow \psi) = var(\varphi) \cup var(\psi)$

Definição:Sejam $p \in \mathcal{V}^{cp}$, $\psi \in \mathcal{F}^{cp}$
A função $[\psi/p]$, que aplicada a cada fórmula $\varphi \in \mathcal{F}^{cp}$, faz corresponder a substituição de todas as ocorrências de p por ψ, é definida por recursão estrutural, pela seguinte forma:

- $\perp[\psi/p] = \perp$
- $p_i[\psi/p] = \begin{cases} \psi & \text{se } p_i = p \\ p_i & \text{se } p_i \neq p \end{cases}$
- $(\neg\varphi)[\psi/p] = \neg(\varphi)[\psi/p]$
- $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)[\psi/p] = (\varphi_1)[\psi/p] \wedge (\varphi_2)[\psi/p]$
- $(\varphi_1 \vee \varphi_2)[\psi/p] = (\varphi_1)[\psi/p] \vee (\varphi_2)[\psi/p]$
- $(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)[\psi/p] = (\varphi_1)[\psi/p] \rightarrow (\varphi_2)[\psi/p]$
- $(\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)[\psi/p] = (\varphi_1)[\psi/p] \leftrightarrow (\varphi_2)[\psi/p]$

1.2 Semântica

Def: Uma função $v : \mathcal{F}^{cp} \longrightarrow \{0{,}1\}$, diz-se uma valoração, sse:

- $v(\perp) = 0$
- $v(\neg\varphi) = f_\neg(v(\varphi))$
- $v(\varphi \wedge \psi) = f_\wedge(v(\varphi), v(\psi))$
- $v(\varphi \vee \psi) = f_\vee(v(\varphi), v(\psi))$
- $v(\varphi \to \psi) = f_\to(v(\varphi), v(\psi))$
- $v(\varphi \leftrightarrow \psi) = f_\leftrightarrow(v(\varphi), v(\psi))$

em que

$$\begin{array}{l} f_\neg : \{0,1\} \longrightarrow \{0,1\} \\ \quad \begin{array}{ccc} 0 & \mapsto & 1 \\ 1 & \mapsto & 0 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} f_\wedge : \{0,1\}^2 \longrightarrow \{0,1\} \\ \quad \begin{array}{ccc} (0{,}0) & \mapsto & 0 \\ (0{,}1) & \mapsto & 0 \\ (1{,}0) & \mapsto & 0 \\ (1{,}1) & \mapsto & 1 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} f_\vee : \{0,1\}^2 \longrightarrow \{0,1\} \\ \quad \begin{array}{ccc} (0{,}0) & \mapsto & 0 \\ (0{,}1) & \mapsto & 1 \\ (1{,}0) & \mapsto & 1 \\ (1{,}1) & \mapsto & 1 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} f_\to : \{0,1\}^2 \longrightarrow \{0,1\} \\ \quad \begin{array}{ccc} (0{,}0) & \mapsto & 1 \\ (0{,}1) & \mapsto & 1 \\ (1{,}0) & \mapsto & 0 \\ (1{,}1) & \mapsto & 1 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} f_\leftrightarrow : \{0,1\}^2 \longrightarrow \{0,1\} \\ \quad \begin{array}{ccc} (0{,}0) & \mapsto & 1 \\ (0{,}1) & \mapsto & 0 \\ (1{,}0) & \mapsto & 0 \\ (1{,}1) & \mapsto & 1 \end{array} \end{array}$$

Notação: Seja $\varphi \in \mathcal{F}^{cp}$ e v valoração.
escrevemos $v \models \varphi$ quando $v(\varphi)$=1
escrevemos $v \not\models \varphi$ quando $v(\varphi)$=0

Definição: seja $\varphi \in \mathcal{F}^{cp}$.
Dizemos que φ é uma tautologia, se para toda valoração v, $v(\varphi)$=1 ($\models \varphi$)

Definição: seja $\varphi \in \mathcal{F}^{cp}$.
Dizemos que φ é uma contradição, se para toda valoração v, $v(\varphi)$=0 ($\not\models \varphi$)

Definição: sejam $\varphi \in \mathcal{F}^{cp}$, $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{cp}$ e v valoração
φ é consequência semântica de Γ sse para toda valoração v, se $v \models \Gamma$, então $v \models \varphi$
φ não é consequência semântica de Γ sse existe uma valoração v, tal que $v \models \Gamma$, e $v \not\models \varphi$

1.3 Sistema Formal de Dedução Natural

O sistema formal será denotado por DNP

As regras de inferência para o sistema DNP são as seguintes:

$$\frac{}{\varphi}\ \mathrm{A}$$

$$\frac{\varphi \qquad \psi}{\varphi \wedge \psi}\ \mathrm{I}_{\wedge}$$

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi}\ \mathrm{I}_{\vee 1}$$

$$\frac{\varphi}{\psi \vee \varphi}\ \mathrm{I}_{\vee 2}$$

$$\frac{\begin{array}{c}[\varphi]\\ \cdots\\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi}\ \mathrm{I}_{\to}$$

$$\frac{\begin{array}{c}[\varphi]\\ \cdots\\ \psi\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\psi]\\ \cdots\\ \varphi\end{array}}{\varphi \leftrightarrow \psi}\ \mathrm{I}_{\leftrightarrow}$$

$$\frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\ \mathrm{E}_{\wedge 1}$$

$$\frac{\psi \wedge \varphi}{\varphi}\ \mathrm{E}_{\wedge 2}$$

$$\frac{\varphi \vee \psi \qquad \begin{array}{c}[\varphi]\\ \sigma\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\psi]\\ \sigma\end{array}}{\sigma}\ \mathrm{E}_{\vee}$$

$$\frac{\varphi \to \psi \qquad \varphi}{\psi}\ \mathrm{E}_{\to}$$

$$\frac{\varphi \leftrightarrow \psi \qquad \varphi}{\psi}\ \mathrm{E}_{\leftrightarrow 1}$$

$$\frac{\psi \leftrightarrow \varphi \qquad \varphi}{\psi}\ \mathrm{E}_{\leftrightarrow 2}$$

$$\frac{\varphi \qquad \neg\varphi}{\bot}\ \mathrm{E}_{\neg}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\cdots\\ \bot\end{array}}{\varphi}\ \mathrm{EFQ}$$

$$\frac{\begin{matrix}[\varphi]\\ \cdots \\ \bot\end{matrix}}{\varphi}\ \text{RAA}$$

Notação: $[\varphi]$ Denota que a hipótese φ foi cancelada.

Observação: Numa derivação D, a raiz é chamada de conclusão de D, as folhas são chamadas de hipóteses de D, e as folhas não canceladas são as hipóteses não canceladas de D

Definição: Seja $D \in DNP$, $\varphi \in \mathcal{F}^{cp}$ e $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{cp}$
Dizemos que D deriva φ a partir de Γ se o conjunto das hipóteses não canceladas de D estiver contido em Γ
Neste caso, escrevemos: $\begin{matrix}\Gamma\\ D\\ \varphi\end{matrix}$

Definição: Seja $D \in DNP$ e $\varphi \in \mathcal{F}^{cp}$
Dizemos que D é uma demonstração de φ, quando D deriva φ a partir de $\emptyset$, ou seja, $\begin{matrix}\emptyset\\ D\\ \varphi\end{matrix}$

Definição: Seja $\varphi \in Fcp$ e $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{cp}$
Dizemos que φ é derivável a partir de Γ ($\Gamma \vdash \varphi$) sse existe $D \in DNP$ tal que: $\begin{matrix}\Gamma\\ D\\ \varphi\end{matrix}$
Escrevemos $\Gamma \nvdash \varphi$ para denotar que φ não é derivável a partir de Γ

Definição: Seja $\varphi \in \mathcal{F}^{cp}$
Dizemos que φ é um teorema sse existe uma demonstração de φ

Teorema da Correção: $\Gamma \vdash \varphi \implies \Gamma \models \varphi$

Teorema da Completude: $\Gamma \models \varphi \implies \Gamma \vdash \varphi$

1.4 Sistema Formal de Dedução Natural com Sequentes

O sistema será denotado por $DNP \implies$
As regras de inferência para $DNP \implies$ são as seguintes

$$\frac{}{\varphi \implies \varphi}\ \text{A}$$

$$\frac{\Gamma \implies \varphi \qquad \Delta \implies \psi}{\Gamma\Delta \implies \varphi \wedge \psi}\ \text{I}_{\wedge}$$

$$\frac{\Gamma \implies \varphi}{\Gamma \implies \varphi \vee \psi}\ \text{I}_{\vee 1}$$

$$\frac{\Gamma \implies \varphi}{\Gamma \implies \psi \vee \varphi}\ \text{I}_{\vee 2}$$

$$\frac{\Gamma \implies \psi}{\Gamma \setminus \{\varphi\} \implies \varphi \to \psi}\ \mathrm{I}_{\to}$$

$$\frac{\Gamma\varphi \implies \psi \qquad \Gamma\psi \implies \varphi}{\Gamma \implies \varphi \leftrightarrow \psi}\ \mathrm{I}_{\leftrightarrow}$$

$$\frac{\Gamma \implies \varphi \wedge \psi}{\Gamma \implies \varphi}\ \mathrm{E}_{\wedge 1}$$

$$\frac{\Gamma \implies \psi \wedge \varphi}{\Gamma \implies \varphi}\ \mathrm{E}_{\wedge 1}$$

$$\frac{\Gamma \implies \varphi \vee \psi \qquad \Delta 1 \implies \sigma \qquad \Delta 2 \implies \sigma}{\Gamma \cup (\Delta 1 \setminus \{\varphi\}) \cup (\Delta 2 \setminus \{\psi\}) \implies \sigma}\ \mathrm{E}_{\vee}$$

$$\frac{\Gamma \implies \varphi \to \psi \qquad \Delta \implies \varphi}{\Gamma\Delta \implies \psi}\ \mathrm{E}_{\to}$$

$$\frac{\Gamma \implies \varphi \leftrightarrow \psi \qquad \Gamma \implies \varphi}{\Gamma \implies \psi}\ \mathrm{E}_{\leftrightarrow 1}$$

$$\frac{\Gamma \implies \psi \leftrightarrow \varphi \qquad \Gamma \implies \varphi}{\Gamma \implies \psi}\ \mathrm{E}_{\leftrightarrow 2}$$

$$\frac{\Gamma \implies \varphi \qquad \Delta \implies \neg\varphi}{\Gamma\Delta \implies \bot}\ \mathrm{E}\neg$$

$$\frac{\Gamma \implies \bot}{\Gamma \implies \varphi}\ \mathrm{EFQ}$$

$$\frac{\Gamma \implies \bot}{\Gamma \setminus \{\neg\varphi\} \implies \varphi}\ \mathrm{RAA}$$

Observação: Uma derivação deste sistema pode também ser vista como uma árvore, no entanto, ambas a conclusão e as hipóteses encontram-se na raiz da árvore, as hipóteses (não canceladas) são o conjunto de fórmulas do lado esquerdo da raiz, e a conclusão é a fórmula do lado direito do raiz

Observação: Os teoremas, definições e observações estudados no sistema DNP, aplicam-se também ao sistema $DNP \implies$, de forma análoga

Capítulo 2

Lógica Intuicionista Proposicional

2.1 Sintaxe

O alfabeto e o conjunto das fórmulas do cálculo proposicional intuicionista, são os mesmos definidos anteriormente para o cálculo proposicional

2.2 Semântica

Definição: Um Modelo de Kripke é um triplo $\mathcal{M} = (\mathcal{W}, \leq, \models)$ tal que:

- $\mathcal{W}$ é um conjunto não vazio
- $\leq$ é uma relação de ordem parcial em $\mathcal{W}$ (reflexiva, transitiva, antissimétrica)
- $\models \subseteq \mathcal{W} \times \mathcal{V}^{cp}$
- $w, w' \in \mathcal{W}, (w, w') \in \leq, p \in \mathcal{V}^{cp}, (w, p) \in \models \implies (w', p) \in \models$

Notação:

- a notação $w' \models \varphi$ será usada para representar o caso em que $(w', \varphi) \in \models$
- a notação $w' \not\models \varphi$ será usada para representar o caso em que $(w', \varphi) \notin \models$

Definição: Extensão canónica de $\models$
Seja $\mathcal{M} = (\mathcal{W}, \leq, \models)$ um Modelo de Kripke. A extensão canónica de $\models$ a $\mathcal{W} \times \mathcal{F}^{cp}$ é o menor conjunto contido em $\mathcal{W} \times \mathcal{F}^{cp}$ tal que, $\forall w.\, w \in \mathcal{W}$:

- $w \models \varphi \wedge \psi$ sse $w \models \varphi$ e $w \models \psi$
- $w \models \varphi \vee \psi$ sse $w \models \varphi$ ou $w \models \psi$
- $w \models \varphi \to \psi$ sse $\forall w'.\, w \leq w'$, se $w' \models \varphi$ então $w' \models \psi$
- $w \models \neg\varphi$ sse $\forall w'.\, w \leq w'$, então $w' \not\models \varphi$
- $w \not\models \bot$

Teorema: Propriedade da Monotonia
Seja $\mathcal{M} = (\mathcal{W}, \leq, \models)$ um Modelo de Kripke e $w \in \mathcal{W}$
Se $w \models \varphi$, então, $\forall w'.\, w \leq w'$, $w' \models \varphi$

Definição: Seja $\mathcal{M} = (\mathcal{W}, \leq, \models)$ um Modelo de Kripke
$\mathcal{M} \models \varphi$ sse $\forall w.\, w \in \mathcal{W}, w \models \varphi$

Definição: φ diz-se válido ($\models \varphi$) sse para todo $\mathcal{M}$ Modelo de Kripke, $\mathcal{M} \models \varphi$

Definição: $\Gamma \models \varphi$ sse para todo $\mathcal{M} = (\mathcal{W}, \leq, \models)$ Modelo de Kripke, $\forall w.\, w \in \mathcal{W}$, se $\forall \psi.\, \psi \in \Gamma$, $w \models \psi$ então $w \models \varphi$

2.3 Sistema Formal de Dedução Natural Intuicionista

O sistema formal será denotado por $DNPi$
As regras de inferência para o $DNPi$ são as seguintes:

$$\frac{}{\varphi}\,\mathrm{A}$$

$$\frac{\varphi \qquad \psi}{\varphi \wedge \psi}\,\mathrm{I}_\wedge$$

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi}\,\mathrm{I}_{\vee 1}$$

$$\frac{\varphi}{\psi \vee \varphi}\,\mathrm{I}_{\vee 2}$$

$$\frac{\begin{array}{c}[\varphi]\\ \cdots\\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi}\,\mathrm{I}{\to}$$

$$\frac{\begin{array}{c}[\varphi]\\ \cdots\\ \psi\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\psi]\\ \cdots\\ \varphi\end{array}}{\varphi \leftrightarrow \psi}\,\mathrm{I}{\leftrightarrow}$$

$$\frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\,\mathrm{E}_{\wedge 1}$$

$$\frac{\psi \wedge \varphi}{\varphi}\,\mathrm{E}_{\wedge 2}$$

$$\frac{\varphi \vee \psi \qquad \begin{array}{c}[\varphi]\\ \sigma\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\psi]\\ \sigma\end{array}}{\sigma}\,\mathrm{E}_\vee$$

$$\frac{\varphi \to \psi \qquad \varphi}{\psi}\, E_{\to}$$

$$\frac{\varphi \leftrightarrow \psi \qquad \varphi}{\psi}\, E_{\leftrightarrow 1}$$

$$\frac{\psi \leftrightarrow \varphi \qquad \varphi}{\psi}\, E_{\leftrightarrow 2}$$

$$\frac{\varphi \qquad \neg\varphi}{\bot}\, E_{\neg}$$

$$\ldots$$

$$\frac{\bot}{\varphi}\, \mathrm{EFQ}$$

Observação: As definições para o sistema DNP também se aplicam ao sistema $DNPi$, definidas de forma análoga.

Definição: seja $\varphi \in \mathcal{F}^{cp}$
φ diz-se premissa principal de uma regra de eliminação se φ é a premissa com o conectivo eliminado

Definição: Seja $D \in DNPi$, $\varphi \in \mathcal{F}^{cp}$
φ diz-se Fórmula Maximal de D se φ é simultaneamente conclusão de uma regra de introdução e premissa principal de uma regra de eliminação em D

Observação: De seguida irão ser abordados métodos para eliminar fórmulas maximais do sistema de dedução natural intuicionista, sobre o alfabeto com apenas os conectivos da negação, conjunção, e implicação. $(DNPi_{\wedge,\to})$
Esta linguagem é "equivalente" à definida anteriormente

Definição: Seja $D \in DNPi_{\wedge,\to}$
D diz-se Normal se não tem Fórmulas Maximais
Definição: Regras de Inferência Para Eliminar Fórmulas Maximais

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\mathrm{D1}\\ \varphi\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\mathrm{D2}\\ \psi\end{matrix}}{\varphi \wedge \psi}\, I_{\wedge}}{\varphi}\, I_{\vee 1} \qquad \longrightarrow \qquad \begin{matrix}\mathrm{D1}\\ \varphi\end{matrix}$$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\mathrm{D1}\\ \varphi\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\mathrm{D2}\\ \psi\end{matrix}}{\varphi \wedge \psi}\, I_{\wedge}}{\psi}\, I_{\vee 2} \qquad \longrightarrow \qquad \begin{matrix}\mathrm{D2}\\ \psi\end{matrix}$$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}[\varphi]\\ \mathrm{D1}\\ \psi\end{matrix}}{\varphi \to \psi}\, I_{\to} \qquad \begin{matrix}\mathrm{D2}\\ \varphi\end{matrix}}{\psi}\, E_{\to} \qquad \longrightarrow \qquad \begin{matrix}\mathrm{D1[D2/}\varphi]\\ \psi\end{matrix}$$

Observação: Nestes casos, dizemos que a primeira derivação (à esquerda), é um redex, enquanto a segunda derivação (à direita) é o seu contractum

Notação: $D1[D2/\varphi]$ denota que cada ocorrência de φ em $D1$, é substituída por $D2$

Definição: Sejam $D1$, $D2 \in DNPi_{\wedge,\rightarrow}$:
$D1 \xrightarrow{\beta} D2$, se existe em $D1$ uma ocorrência de um Redex, e $D2$ resulta de $D1$, por substituição deste Redex, pelo respectivo contractum

Definição: $\xrightarrow{\beta}$ diz-se redução-β em um passo

Definição: $\xrightarrow{\beta}^{*}$ diz-se redução-β (fecho reflexivo-transitivo de $\xrightarrow{\beta}$)

Teorema: Existência da Forma Normal
Sejam $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$ e $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$.
Se $\Gamma \vdash \varphi$ em $DNPi_{\wedge,\rightarrow}$, então existe em $DNPi_{\wedge,\rightarrow}$ uma derivação normal de φ a partir de Γ

Teorema: Fraco de Normalização
Sejam $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$, $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$.
Se D_1 deriva φ a partir de Γ então existe $D_2 \in DNPi_{\wedge,\rightarrow}$ tal que:

- D_2 deriva φ a partir de Γ
- D_2 é normal
- $D_1 \xrightarrow{\beta}^{*} D_2$

Definição:
Uma sequência de redução a partir de D é uma sequência de derivações (possivelmente infinita):
$D = D_0$, D_1, D_2, ..., D_n, ... tal que $D_i \xrightarrow{\beta} D_{i+1}$, $\forall i, i \in \mathbb{N}_0$

Teorema: Forte da Normalização
$\forall D, D \in DNPi_{\wedge,\rightarrow}$. Toda a sequencia de redução a partir de D é finita

Definição: Seja $D \in DNPi_{\wedge,\rightarrow}$
D é irredutível-β sse não existe D' tal que $D \xrightarrow{\beta} D'$

Observação: D é normal sse D é irredutível-β

Definição: Seja $D \in DNPi_{\wedge,\rightarrow}$
D diz-se atomizado se todas as ocorrências da regra de inferência EFQ em D, têm como conclusão um átomo (uma variável proposicional)

Teorema: Teorema da Atomização:
$\forall D.\, D \in DNPi_{\wedge,\rightarrow}$, sejam $\varphi \in \mathcal{F}^{cp}$, e $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{cp}$ tais que $\begin{matrix}\Gamma\\ D\\ \varphi\end{matrix}$, entao temos que: existe $D^{'} \in DNPi_{\wedge,\rightarrow}$ tal que:

- $\begin{matrix}\Gamma\\ D^{'}\\ \varphi\end{matrix}$
- $D^{'}$ é atomizado
- $D \overset{\beta}{\rightarrow}^{*} D^{'}$

Definição: Seja $D \in DNPi_{\wedge,\rightarrow}$
Um caminho em D é uma sequência de fórmulas $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$, que ocorrem em D, tal que:

- φ_1 é hipótese de D
- φ_n é a conclusão de D
- $\forall i, 1 \leq i < n.$ existe uma inferência em D em que φ_i é premissa e φ_{i+1} é conclusão

Definição: Seja $D \in DNPi_{\wedge,\rightarrow}$
Um trilho em D é uma sequência de fórmulas $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_k$, que ocorrem em D, tal que:

- $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_k$ é um segmento inicial de um caminho em D
- $\forall i, 1 \leq i < k.$ φ_i não é premissa auxiliar da regra $E_{\rightarrow}$

Definição: Seja $D \in DNPi_{\wedge,\rightarrow}$
Um trilho $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_k$, em D, diz-se trilho principal, se φ_k é conclusão de D ($\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_k$ é caminho em D)

Teorema: Seja $D \in DNPi_{\wedge,\rightarrow}$
Se D é normal, então existe um trilho principal em D

Notação: Em diante, $\vdash_c$ denotará a noção de consequência sintática em lógica proposicional, enquanto $\vdash_i$ a noção de consequência semântica em lógica proposicional intuicionista

Teorema: Teorema de Glivenko
Sejam sejam $\varphi \in \mathcal{F}^{cp}$, e $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{cp}$, temos que:

- $\vdash_c \varphi$ sse $\vdash_i \neg\neg\varphi$
- $\Gamma \vdash_c \varphi$ sse $\neg\neg\Gamma \vdash_i \neg\neg\varphi$

Definição: O conjunto das fórmulas negativas, N, é definido da seguinte forma:

- $\perp \in N$
- $p \in \mathcal{V}^{cp} \implies \neg p \in N$

- $v_1, v_2 \in N \implies v_1 \wedge v_2 \in N$
- $v \in N, \varphi \in \mathcal{F}^{cp} \implies \varphi \to v \in N$

Teorema: Seja $v \in N$
Entao, $\vdash_i \neg\neg v \to v$

Definição: A função $(-)^\circ : \mathcal{F}^{cp} \longrightarrow \mathcal{F}^{cp}$, é definida da seguinte forma

- $(\perp)^\circ = \perp$
- $(p)^\circ = \neg\neg p$
- $(\neg\varphi)^\circ = \neg(\varphi)^\circ$
- $(\varphi \wedge \psi)^\circ = (\varphi)^\circ \wedge (\psi)^\circ$
- $(\varphi \to \psi)^\circ = \varphi \to (\psi)^\circ$
- $(\varphi \vee \psi)^\circ = \neg((\neg\varphi)^\circ \wedge (\neg\psi)^\circ)$
- $(\varphi \leftrightarrow \psi)^\circ = ((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi))^\circ$

Teorema: Seja $\varphi \in \mathcal{F}^{cp}$
Então, $(\varphi)^\circ \in N$

Corolário: Seja $\varphi \in \mathcal{F}^{cp}$
Então, $\vdash_i \neg\neg(\varphi)^\circ \to (\varphi)^\circ$

Teorema: Teorema de Godel e Gentzen
Sejam $\varphi \in \mathcal{F}^{cp}$, $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{cp}$
Então, $\Gamma \vdash_c \varphi$ sse $(\Gamma)^\circ \vdash_i (\varphi)^\circ$

2.4 Interpretação BHK

A interpretação BHK (Brower, Heyting, Kolmogorov) é uma interpretação semântica da lógica intuicionista Em lógica intuicionista, uma proposição é considerada verdadeira se existe uma prova construtiva para tal Esta interpretação explica como cada conectivo lógico reflete esta ideia, em provas construtivas, da seguinte forma:

- Uma prova de $\varphi \wedge \psi$ é um tuplo $\langle M, N \rangle$ em que:
  - M é uma prova de φ
  - N é uma prova de ψ
- Uma prova de $\varphi \vee \psi$ é um tuplo $\langle 0, M \rangle$ em que:
  - M é uma prova de φ

  ou um tuplo $\langle 1, N \rangle$ em que:
  - N é uma prova de ψ
- Uma prova de $\varphi \to \psi$ é uma função f que transforma provas de φ em provas de ψ
- Uma prova de $\neg\varphi$ é uma prova de $\varphi \to \perp$, ou seja, uma função f que transforma provas de φ em provas de $\perp$
- Não existem provas de $\perp$

Capítulo 3

Lógica de Primeira Ordem

3.1 Sintaxe

Definição:
Um *Tipo de Linguagem* é um terno (F, R, N) tal que:

- F e R são conjuntos disjuntos
- N é uma função de $F \cup R$ em $\mathbb{N}_0$

Definição: Seja (F, R, N) um tipo de Linguagem

- Os elementos de F são chamados símbolos de função
- Os elementos de R são chamados símbolos de relação (ou símbolos de predicado)
- A função N diz-se *função aridade*, e para cada elemento de $F \cup R$, retorna um número que representa a sua aridade
- Os símbolos de relação nunca têm aridade 0
- Os símbolos de função com aridade 0, são chamados de *constantes*
- $\mathcal{C}$ é o menor conjunto que contêm todas as constantes de F

Definição:
$x_0, x_1, x_2, ..., x_n, ...$ formam o conjunto $\mathcal{V}$, estes elementos são chamados de *variáveis de primeira ordem*

Definição: Seja $L = (F, R, N)$ um tipo de Linguagem.
O alfabeto $\mathcal{A}_L$, induzido pelo tipo de linguagem L define-se da seguinte forma:
$\mathcal{A}_L = \mathcal{V} \cup \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg, \perp\} \cup \{\forall, \exists\} \cup \{(,)\} \cup F \cup R$

Definição: Seja $L = (F, R, N)$ um tipo de Linguagem
O conjunto $\mathcal{T}_L$ é o menor conjunto de palavras em $\mathcal{A}_L$ tal que:

- para todo $x \in \mathcal{V}, x \in \mathcal{T}_L$
- para todo c constante, $c \in \mathcal{T}_L$
- para todo símbolo de função f de L de aridade $n \geq 1$
  - $t_1 \in \mathcal{T}_L, ..., t_n \in \mathcal{T}_L \implies f(t_1, ..., t_n) \in \mathcal{T}_L$

Os elementos de $\mathcal{T}_L$ são chamados de $L - termos$

Notação: Seja $L = (F, R, N)$ um tipo de Linguagem
Se f é um símbolo de função de aridade 2 e $t_1, t_2 \in \mathcal{T}_L$, podemos representar o $L - termo$, $f(t_1, t_2)$ da forma $t_1 f t_2$

Definição: Seja $L = (F, R, N)$ um tipo de Linguagem
O conjunto das variáveis que ocorrem num $L - termo\ t$ é notado por $VAR(t)$, definido por recursão estrutural:

- $VAR(x) = \{x\}$ para todo $x \in \mathcal{V}$
- $VAR(c) =$ para todo $c \in C$
- $VAR(f(t_1, ..., t_n)) = \bigcup_{i=1}^{n} VAR(t_i)$, para todo símbolo de função f de aridade $n \geq 1$, e para todo $t_1, ..., t_n \in \mathcal{T}_L$

Definição: Seja $L = (F, R, N)$ um tipo de Linguagem
O conjunto dos subtermos de um $L - termo\ t$ é notado por $subt(t)$, definido por recursão estrutural:

- $subt(x) = \{x\}$ para todo $x \in \mathcal{V}$
- $subt(c) = \{c\}$ para todo $c \in C$
- $subt(f(t_1, ..., t_n)) = \{f(t_1, ..., t_n)\} \cup \bigcup_{i=1}^{n} subt(t_i)$, para todo símbolo de função f de aridade $n \geq 1$, e para todo $t_1, ..., t_n \in \mathcal{T}_L$

Definição: Seja $L = (F, R, N)$ um tipo de Linguagem
A operação de substituição de uma variável x por um $L - termo\ t$ num $L - termo\ t'$ é notada por $t'[t/x]$ definida por recursão estrutural (em t'):

- $y[t/x] = \begin{cases} t & \text{se } y = x \\ y & \text{se } y \neq x \end{cases}$
- $c[t/x] = c$ para todo $c \in C$
- $f(t_1, ..., t_n)[t/x] = f(t_1[t/x], ..., t_n[t/x])$, para todo símbolo de função f de aridade $n \geq 1$, e para todo $t_1, ..., t_n \in \mathcal{T}_L$

Definição: Seja $L = (F, R, N)$ um tipo de Linguagem
O conjunto $\mathcal{A}t_L$ é o menor conjunto de palavras sobre $\mathcal{A}_L$ tal que:

- $r \in R, t_1, ..., t_n \in \mathcal{F}_L, N(r) = n \geq 1 \implies r(t_1, ..., t_n) \in \mathcal{A}t_L$

Um elemento de $\mathcal{A}t_L$ diz-se uma *L-fórmula atómica*

Notação: Seja $L = (F, R, N)$ um tipo de Linguagem
Se r é um símbolo de relação de aridade 2 e $t_1, t_2 \in \mathcal{T}_L$, podemos representar a *L-fórmula atómica*, $r(t_1, t_2)$ da forma $t_1 r t_2$

Definição: Seja $L = (F, R, N)$ um tipo de Linguagem
O conjunto $\mathcal{F}_L$ é o menor conjunto de palavras sobre $\mathcal{A}_L$ tal que:

- $\perp \in \mathcal{F}_L$
- $\varphi \in \mathcal{A}t_L \implies \varphi \in \mathcal{F}_L$
- $\varphi \in \mathcal{F}_L \implies (\neg\varphi) \in \mathcal{F}_L$
- $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_L \implies (\varphi \wedge \psi) \in \mathcal{F}_L$
- $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_L \implies (\varphi \vee \psi) \in \mathcal{F}_L$
- $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_L \implies (\varphi \to \psi) \in \mathcal{F}_L$
- $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_L \implies (\varphi \leftrightarrow \psi) \in \mathcal{F}_L$
- $\varphi \in \mathcal{F}_L, x \in \mathcal{V} \implies (\forall x.\varphi \in \mathcal{F}_L)$
- $\varphi \in \mathcal{F}_L, x \in \mathcal{V} \implies (\exists x.\varphi \in \mathcal{F}_L)$

Os elementos de $\mathcal{F}_L$ são chamados de *L-fórmulas*

Definição: Seja $L = (F, R, N)$ um tipo de Linguagem
O conjunto dos subfórmulas de uma *L-fórmula* φ é notado por $subf(\varphi)$, definido por recursão estrutural:

- $subf(\perp) = \{\perp\}$
- $\varphi \in \mathcal{A}t_L \implies subf(\varphi) = \{\varphi\}$
- $\varphi \in \mathcal{F}_L \implies subf(\neg\varphi) = \{\neg\varphi\} \cup subf(\varphi)$
- $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_L \implies subf(\varphi \wedge \psi) = \{\varphi \wedge \psi\} \cup subf(\varphi) \cup subf(\psi)$
- $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_L \implies subf(\varphi \vee \psi) = \{\varphi \vee \psi\} \cup subf(\varphi) \cup subf(\psi)$
- $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_L \implies subf(\varphi \to \psi) = \{\varphi \to \psi\} \cup subf(\varphi) \cup subf(\psi)$
- $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_L \implies subf(\varphi \leftrightarrow \psi) = \{\varphi \leftrightarrow \psi\} \cup subf(\varphi) \cup subf(\psi)$
- $\varphi \in \mathcal{F}_L, x \in \mathcal{V} \implies subf(\forall x.\varphi) = \{\forall x.\varphi\} \cup subf(\varphi)$
- $\varphi \in \mathcal{F}_L, x \in \mathcal{V} \implies subf(\exists x.\varphi) = \{\exists x.\varphi\} \cup subf(\varphi)$

Definição: Seja $L = (F, R, N)$ um tipo de Linguagem
Seja φ uma $L-fórmula$ e seja $Qx.\psi$ uma subfórmula de φ, com $x \in \mathcal{V}$ e $Q \in \{\forall, \exists\}$
O alcance desta ocorrência do quantificador Q em φ é a $L-fórmula$ ψ

Definição: Seja $L = (F, R, N)$ um tipo de Linguagem

- Numa $L-fórmula$ φ, uma ocorrência (em subfórmulas atómicas de φ) de uma variável $x \in \mathcal{V}$ diz-se livre quando x não está ao alcance de um quantificador $Q \in \{\forall, \exists\}$, caso contrário, uma ocorrência de x diz-se ligada
- $LIV(\varphi)$ denota o conjunto de todas as variáveis com ocorrências livres em φ
- $LIG(\varphi)$ denota o conjunto de todas as variáveis com ocorrências ligadas em φ

Definição:
A operação de substituição de ocorrências livres de uma variável $x \in \mathcal{V}$ por um L-$-termo\,t$ numa $L-fórmula$ φ, é notada por $\varphi[t/x]$, definida por recursão estrutural

- $\bot[t/x] = \bot$
- $r \in R, N(r) = n, t_1, ..., t_n \in \mathcal{T}_L \implies r(t_1, ..., t_n)[t/x] = r(t_1[t/x], ..., t_n[t/x])$
- $\varphi \in \mathcal{F}_L \implies (\neg\varphi)[t/x] = \neg(\varphi[t/x])$
- $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_L \implies (\varphi \wedge \psi) = \varphi[t/x] \wedge \psi[t/x]$
- $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_L \implies (\varphi \vee \psi) = \varphi[t/x] \vee \psi[t/x]$
- $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_L \implies (\varphi \to \psi) = \varphi[t/x] \to \psi[t/x]$
- $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_L \implies (\varphi \leftrightarrow \psi) = \varphi[t/x] \leftrightarrow \psi[t/x]$
- $\varphi \in \mathcal{F}_L, y \in \mathcal{V}, Q \in \{\forall, \exists\} \implies (Qy.\varphi)[t/x] = \begin{cases} Qy.\varphi & \text{se } y = x \\ Qy.\varphi[t/x] & \text{se } y \neq x \end{cases}$

Definição
Sejam $x \in \mathcal{V}, t \in \mathcal{T}_L, \varphi \in \mathcal{F}_L$
Diz-se que x *é substituível por* t *em* φ *(sem captura de variáveis)* ou que t *é livre para* x *em* φ, quando para todas as ocorrências livres de x em φ no alcance de um quantificador Qy, $y \notin VAR(t)$ ($Q \in \{\forall, \exists\}$)

Definição: $\varphi \in \mathcal{F}_L$ diz-se uma *L-sentença* (ou *L-fórmula fechada*) quando $LIV(\varphi) = \emptyset$

3.2 Semântica

Definição: Seja $L = (F, R, N)$ um tipo de Linguagem
Uma *estrutura do tipo L*, uma *L-estrutura*, é um par $(D, \bar{\ })$ tal que:

- D é um conjunto não vazio, chamado de *domínio da estrutura*
- $\bar{\ }$ é uma função, chamada de *função de interpretação da estrutura*, tal que:
  - a cada constante $c \in \mathcal{C}$, faz corresponder um elemento de D, notado por $\bar{c}$, tal que:
  - a cada símbolo de função $f \in F$ de aridade $n \geq 1$, faz corresponder uma função do tipo $D^n \longrightarrow D$, notada por $\overline{f}$
  - a cada símbolo de relação $r \in R$ de aridade n, faz corresponder uma relação *n-ária*, ou seja, um subconjunto de D^n, notada por $\overline{r}$
- para cada símbolo $s \in F \cup R$, $\overline{s}$ é chamado de *interpretação* de s na estrutura

Definição: Seja $L = (F, R, N)$ um tipo de Linguagem e $E = (D, \bar{\ })$ uma *L-estrutura*
$dom(E)$ denota o domínio da estrutura E, ou seja, $dom(E) = D$

Definição: Seja $L = (F, R, N)$ um tipo de Linguagem e $E = (D, ^{-})$ uma *L-estrutura*
uma função $a : \mathcal{V} \longrightarrow dom(E)$ diz-se uma *atribuicão* em E

Definição: Seja $L = (F, R, N)$ um tipo de Linguagem e $E = (D, ^{-})$ uma *L-estrutura*, a uma atribuição em E, e $t \in \mathcal{T}_L$
O *valor de t em E para a*, notado por $t[a]_E$, ou por $t[a]$, é um elemento de D, definido por recursão estrutural:

- $x \in \mathcal{V} \implies x[a] = a(x)$
- $c \in \mathcal{C} \implies c[a] = \overline{c}$
- $f \in F, N(f) = n \geq 1, t_1, ..., t_n \in \mathcal{T}_L \implies f(t_1, ..., f_n)[a] = \overline{f}(t_1[a], ..., f_n[a])$

Notação: Seja $L = (F, R, N)$ um tipo de Linguagem e E uma *L-estrutura*, $x \in \mathcal{V}$, $d \in dom(E)$, a uma atribuição em E
Escrevemos $a \binom{x}{d}$ para denotar a atribuição $a^{'} : \mathcal{V} \longrightarrow dom(E)$, definida da seguinte forma:
$y \in \mathcal{V} \implies a^{'}(y) = \begin{cases} d & \text{se } y = x \\ a(y) & \text{se } y \neq x \end{cases}$

Definição: Seja $L = (F, R, N)$ um tipo de Linguagem e $E = (D, ^{-})$ uma *L-estrutura*, a uma atribuição em E, e $\varphi \in \mathcal{F}_L$.
O *valor lógico de φ em E para a* é um elemento do conjunto $\{0, 1\}$, notado por $\varphi[a]_E$, ou por $\varphi[a]$, definido por recursão da seguinte forma:

- $\perp[a] = 0$
- $r \in R, t_1, ..., t_n \in \mathcal{T}_L, N(r) = n \geq 1 \implies r(t_1, ..., t_n)[a] = 1$ sse $(t_1[a], ..., t_n[a]) \in \overline{r}$
- $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_L \implies (\neg\varphi)[a] = f_{\neg}(\varphi[a])$
- $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_L \implies (\varphi \wedge \psi)[a] = f_{\wedge}(\varphi[a], \psi[a])$
- $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_L \implies (\varphi \vee \psi)[a] = f_{\vee}(\varphi[a], \psi[a])$
- $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_L \implies (\varphi \rightarrow \psi)[a] = f_{\rightarrow}(\varphi[a], \psi[a])$
- $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_L \implies (\varphi \leftrightarrow \psi)[a] = f_{\leftrightarrow}(\varphi[a], \psi[a])$
- $\varphi \in \mathcal{F}_L, x \in \mathcal{V} \implies (\exists x\varphi)[a] = 1$ sse $\varphi[a \binom{x}{d}] = 1$, para algum $d \in D$
- $\varphi \in \mathcal{F}_L, x \in \mathcal{V} \implies (\forall x\varphi)[a] = 1$ sse $\varphi[a \binom{x}{d}] = 1$, para todo $d \in D$

Definição: Seja $L = (F, R, N)$ um tipo de Linguagem e $E = (D, ^{-})$ uma *L-estrutura*, a uma atribuição em E, e $\varphi \in \mathcal{F}_L$.

- dizemos que E *satisfaz φ para a*, $E \models \varphi[a]$, quando $\varphi[a]_E = 1$
- dizemos que E *não satisfaz φ para a*, $E \not\models \varphi[a]$, quando $\varphi[a]_E = 0$

Definição: Seja $L = (F, R, N)$ um tipo de Linguagem, $E = (D, ^-)$ uma *L-estrutura* e $\varphi \in \mathcal{F}_L$.

- dizemos que E *valida* φ, $E \models \varphi$, quando para toda atribuição a em E, tal que E satisfaz φ para a
- dizemos que E *não valida* φ, $E \not\models \varphi$, quando existe um atribuição a em E, tal que E não satisfaz φ para a

Definição: Seja $L = (F, R, N)$ um tipo de Linguagem e $\varphi \in \mathcal{F}_L$

- dizemos que φ *é (universalmente) válido*, $\models \varphi$, quando para toda a *L-estrutura* E, E valida φ
- dizemos que φ *não é (universalmente) válido*, $\not\models \varphi$, quando existe uma *L-estrutura* E tal que E não valida φ

Definição: Seja $L = (F, R, N)$ um tipo de Linguagem e $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_L$
φ *é logicamente equivalente a* ψ, $\varphi \Leftrightarrow \psi$ quando para toda a *L-estrutura* E e para toda atribuição a em E, $E \models \varphi[a]$ sse $E \models \psi[a]$

Definição: Seja $L = (F, R, N)$ um tipo de Linguagem, $\varphi \in \mathcal{F}_L$, $\Gamma \subseteq \mathcal{F}_L$

- φ diz-se *consequência semântica de* Γ, $\Gamma \models \varphi$, quando para toda a *L-estrutura* E, e para toda a *atribuição* a em E, se $E \models \Gamma[a]$ então $E \models \varphi[a]$
- caso contrário, φ *não é consequência semântica de* Γ, $\Gamma \not\models \varphi$

3.3 Sistema Formal de Dedução Natural

O sistema formal será denotado por DNL
As regras de inferência para o sistema DNL são as seguintes:

$$\frac{}{\varphi}\ \mathrm{A}$$

$$\frac{\varphi \qquad \psi}{\varphi \wedge \psi}\ \mathrm{I}_\wedge$$

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi}\ \mathrm{I}_{\vee 1}$$

$$\frac{\varphi}{\psi \vee \varphi}\ \mathrm{I}_{\vee 2}$$

$$\frac{\begin{matrix}[\varphi] \\ \cdots \\ \psi\end{matrix}}{\varphi \rightarrow \psi}\ \mathrm{I}_\rightarrow$$

$$\frac{\begin{matrix}[\varphi] \\ \cdots \\ \psi\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[\psi] \\ \cdots \\ \varphi\end{matrix}}{\varphi \leftrightarrow \psi}\ \mathrm{I}_\leftrightarrow$$

$$(a)\dfrac{\varphi}{\forall x\varphi}\ \mathrm{I}_\forall$$

$$(b)\dfrac{\varphi[t/x]}{\exists x\varphi}\ \mathrm{I}_\exists$$

$$\dfrac{\varphi\wedge\psi}{\varphi}\ \mathrm{E}_{\wedge 1}$$

$$\dfrac{\psi\wedge\varphi}{\varphi}\ \mathrm{E}_{\wedge 2}$$

$$\dfrac{\varphi\vee\psi \qquad \begin{matrix}[\varphi]\\ \sigma\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[\psi]\\ \sigma\end{matrix}}{\sigma}\ \mathrm{E}_\vee$$

$$\dfrac{\varphi\to\psi \qquad \varphi}{\psi}\ \mathrm{E}_\to$$

$$\dfrac{\varphi\leftrightarrow\psi \qquad \varphi}{\psi}\ \mathrm{E}_{\leftrightarrow 1}$$

$$\dfrac{\psi\leftrightarrow\varphi \qquad \varphi}{\psi}\ \mathrm{E}_{\leftrightarrow 2}$$

$$\dfrac{\varphi \qquad \neg\varphi}{\bot}\ \mathrm{E}_\neg$$

$$\begin{matrix}\cdots\\ \dfrac{\bot}{\varphi}\ \mathrm{EFQ}\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}[\varphi]\\ \cdots\\ \dfrac{\bot}{\varphi}\ \mathrm{RAA}\end{matrix}$$

$$(c)\dfrac{\forall x\varphi}{\varphi[t/x]}\ \mathrm{E}_\forall$$

$$(d)\ \dfrac{\varphi[t/x] \qquad \begin{matrix}[\varphi]\\ \cdots\\ \theta\end{matrix}}{\theta}\ \mathrm{E}_\exists$$

(a) se x não tem ocorrências livres nas hipóteses não canceladas na derivação da premissa

(b) se x é substituível sem captura de variáveis por t em φ

(c) se x é substituível sem captura de variáveis por t em φ

(d) se x não tem ocorrências livres em θ, e se x não tem ocorrências livres nas hipóteses não canceladas distintas de φ na derivação da segunda premissa

Observação: Todas as definições estudadas no sistema DNP, também se definem de forma análoga no sistema DNL, substituindo fórmulas do cálculo proposicional, por *L-fórmulas*

Teorema da Correção: $\Gamma \vdash \varphi \implies \Gamma \models \varphi$

Teorema da Completude: $\Gamma \models \varphi \implies \Gamma \vdash \varphi$

Capítulo 4

Lógica Intuicionista de Primeira Ordem

4.1 Sintaxe

Todas definições previamente utilizadas em Lógica de Primeira Ordem, aplicam-se, de forma análoga, à lógica Intuicionista de Primeira Ordem

4.2 Semântica

Definição: Seja $L = (F, R, N)$ um tipo de Linguagem
Um *L-Modelo de Kripke* é um triplo $\mathcal{W} = (W, \leq, D, I)$ tal que:

- W é um conjunto não vazio
- $\leq$ é uma relação de ordem parcial em W (reflexiva, transitiva, antissimétrica)
- D: $W \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{U})$, chamada de *função de domínio* em que U é um conjunto chamado de *Domínio Universal*. Cada $u \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$ é chamado de *Domínio de interpretação* tal que:
  - $w^{'}, w \in W, w \leq w^{'} \implies D(w) \subseteq D(w^{'})$
- I é uma função com domínio em $W \times (F \cup R)$, e chamada de *função de interpretação* tal que:
  - $f \in F, N(f) = n \geq 1, w \in W \implies I(w, f)$ retorna uma função $I_{(w,f)} : D(w)^n \longrightarrow D(w)$ tal que:
    - $w, w' \in W, f \in F, N(f) = n \geq 1, u_1, ..., u_n \in D(w) \implies I_{(w,f)}(u_1, ..., u_n) = I_{(w',f)}(u_1, ..., u_n)$
  - c constante $(c \in F, N(c) = 1)$, $w \in W \implies I(w, c) = u$, para algum $u \in D(w)$, tal que:
    - $w, w' \in W, c \in C \implies I_{(w,c)} = I_{(w',c)}$
  - $r \in R, N(r) = n, w \in W \implies I(w, r)$ retorna uma conjunto $I_{(w,r)} \subseteq D(w)^n$ tal que:
    - $w, w' \in W, r \in R \implies I_{(w,r)} \subseteq I_{(w',r)}$

Definição: Seja $L = (F, R, N)$ um tipo de Linguagem, $\mathcal{W} = (W, \leq, D, I)$ um L-Modelo de Kripke, $w \in W$ uma função parcial $a_w : \mathcal{V} \longrightarrow D(w)$ chama-se uma *atribuição em w*

Definição: Seja $L = (F, R, N)$ um tipo de Linguagem, $\mathcal{W} = (W, \leq, D, I)$ um L-Modelo de Kripke, $w, w' \in W$, $w \leq w'$, a_w uma atribuição em w
uma função parcial $a_w^{w'} : \mathcal{V} \longrightarrow D(w')$ diz-se uma *atribuição em w extendida a w'* quando:

- $u \in D(w), x \in \mathcal{V}, a_w(u) = x \implies a_w^{w'}(u) = x = a_w(u)$

Definição: Seja $L = (F, R, N)$ um tipo de Linguagem, $\mathcal{W} = (W, \leq, D, I)$ um L-Modelo de Kripke, $w \in W$, a_w uma atribuição em w, $t \in \mathcal{T}_L$
O *valor de t em w para a*, notado por $t[a_w]$, é um elemento de $D(w)$, definido por recursão:

- $x \in \mathcal{V} \implies x[a_w] = a_w(x)$
- c *constante* $\implies c[a_w] = I(w, c) = I_{w,c}$
- $f \in F, N(f) = n \geq 1, t_1, ..., t_n \in \mathcal{T}_L \implies f(t_1, ..., t_n)[a_w] = I(w, f)(t_1[a_w], ..., t_n[a_w]) = I_{w,f}(t_1[a_w], ..., t_n[a_w])$

Notação: Seja $L = (F, R, N)$ um tipo de Linguagem, $\mathcal{W} = (W, \leq, D, I)$ um L-Modelo de Kripke, $w \in W$, a_w uma atribuição em w, $d \in D(w)$
Escrevemos $a_w \binom{x}{d}$ para denotar a atribuição $e_w : \mathcal{V} \longrightarrow D(w)$, definida da seguinte forma:
$y \in \mathcal{V}, d' \in D(w), a_w(y) = d' \implies e_w(y) = \begin{cases} d & \text{se } y = x \\ a_w(y) & \text{se } y \neq x \end{cases}$

Definição: Seja $L = (F, R, N)$ um tipo de Linguagem, $\mathcal{W} = (W, \leq, D, I)$ um L-Modelo de Kripke, $w \in W$, a_w uma atribuição em w, $\varphi \in \mathcal{F}_L$
A *relação de satisfação de φ para w em a_w*, denotada por $\models$ define-se:

- $w \not\models \bot[a_w]$
- $r \in R, f(r) = n, t_1, ..., t_n \in \mathcal{T}_L \implies w \models r(t_1, ..., t_n)[a_w]$ sse $(t_1[a_w], ..., t_n[a_w]) \in I(w, r)$
- $\varphi \in \mathcal{F}_L \implies w \models (\neg\varphi)[a_w]$ sse para todo $w' \in W.w \leq w'$, $w' \not\models \varphi[a_w^{w'}]$
- $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_L \implies w \models (\varphi \wedge \psi)[a_w]$ sse $w \models \varphi[a_w]$ e $w \models \psi[a_w]$
- $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_L \implies w \models (\varphi \vee \psi)[a_w]$ sse $w \models \varphi[a_w]$ ou $w \models \psi[a_w]$
- $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_L \implies w \models (\varphi \to \psi)[a_w]$ sse para todo $w' \in W.w \leq w'$, se $w' \models \varphi[a_w^{w'}]$ então $w' \models \psi[a_w^{w'}]$
- $\varphi \in \mathcal{F}_L, x \in \mathcal{V} \implies w \models \forall x\varphi[a_w]$ sse para todo $w' \in W.w \leq w', d \in D(w')$, $w' \models \varphi[a_w^{w'}] \binom{x}{d}$
- $\varphi \in \mathcal{F}_L, x \in \mathcal{V} \implies w \models \exists x\varphi$ sse existe $d \in D(w)$ tal que $w \models \varphi[a_w^{w'}] \binom{x}{d}$

Teorema: Propriedade da Monotonia
$L = (F, R, N)$ um tipo de Linguagem, $\mathcal{W} = (W, \leq, D, I)$ um L-Modelo de Kripke, $w \in$, a_w uma atribuição em w $\varphi \in \mathcal{F}_L$

Se $w \models \varphi[a_w]$, então, $\forall w'. \, w \leq w'$, $w' \models \varphi[a_w^{w'}]$

Definição: Seja $L = (F, R, N)$ um tipo de Linguagem, $\mathcal{W} = (W, \leq, D, I)$ um L-Modelo de Kripke
$\mathcal{W} \models \varphi$ sse $\forall w. \, w \in W$, para toda atribuição a_w em w, $w \models \varphi[a_w]$

Definição: φ diz-se válido ($\models \varphi$) sse para todo $\mathcal{W}$ Modelo de Kripke, $\mathcal{W} \models \varphi$

Definição: Seja $L = (F, R, N)$ um tipo de Linguagem
$\Gamma \models \varphi$ sse para todo $\mathcal{W} = (W, \leq, D, I)$ um L-Modelo de Kripke, $\forall w. \, w \in W$, para toda a atribuição a_w em w, $\forall \psi. \, \psi \in \Gamma$, se $w \models \psi[a_w]$ então $w \models \varphi[a_w]$

4.3 Sistema Formal de Dedução Natural Intuicionista

O sistema formal será denotado por $DNLi$
As regras de inferência para o $DNLi$ são as seguintes:

$$\frac{}{\varphi} \, \mathrm{A}$$

$$\frac{\varphi \qquad \psi}{\varphi \wedge \psi} \, \mathrm{I}_{\wedge}$$

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi} \, \mathrm{I}_{\vee 1}$$

$$\frac{\varphi}{\psi \vee \varphi} \, \mathrm{I}_{\vee 2}$$

$$\frac{\begin{array}{c}[\varphi] \\ \cdots \\ \psi\end{array}}{\varphi \rightarrow \psi} \, \mathrm{I}_{\rightarrow}$$

$$\frac{\begin{array}{c}[\varphi] \\ \cdots \\ \psi\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\psi] \\ \cdots \\ \varphi\end{array}}{\varphi \leftrightarrow \psi} \, \mathrm{I}_{\leftrightarrow}$$

$$(a)\frac{\varphi}{\forall x \varphi} \, \mathrm{I}_{\forall}$$

$$(b)\frac{\varphi[t/x]}{\exists x \varphi} \, \mathrm{I}_{\exists}$$

$$\frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi} \, \mathrm{E}_{\wedge 1}$$

$$\frac{\psi \wedge \varphi}{\varphi} \, \mathrm{E}_{\wedge 2}$$

$$\dfrac{\varphi \vee \psi \qquad \begin{matrix}[\varphi] \\ \sigma\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[\psi] \\ \sigma\end{matrix}}{\sigma}\ \mathrm{E}_{\vee}$$

$$\dfrac{\varphi \to \psi \qquad \varphi}{\psi}\ \mathrm{E}_{\to}$$

$$\dfrac{\varphi \leftrightarrow \psi \qquad \varphi}{\psi}\ \mathrm{E}_{\leftrightarrow 1}$$

$$\dfrac{\psi \leftrightarrow \varphi \qquad \varphi}{\psi}\ \mathrm{E}_{\leftrightarrow 2}$$

$$\dfrac{\varphi \qquad \neg\varphi}{\bot}\ \mathrm{E}_{\neg}$$

$$\begin{matrix}\cdots \\ \dfrac{\bot}{\varphi}\ \mathrm{EFQ}\end{matrix}$$

$$(c)\dfrac{\forall x \varphi}{\varphi[t/x]}\ \mathrm{E}_{\forall}$$

$$(d)\ \dfrac{\varphi[t/x] \qquad \begin{matrix}[\varphi] \\ \cdots \\ \theta\end{matrix}}{\theta}\ \mathrm{E}_{\exists}$$

(a) se x não tem ocorrências livres nas hipóteses não canceladas na derivação da premissa

(b) se x é substituível sem captura de variáveis por t em φ

(c) se x é substituível sem captura de variáveis por t em φ

(d) se x não tem ocorrências livres em θ, e se x não tem ocorrências livres nas hipóteses não canceladas distintas de φ na derivação da segunda premissa

Observação: As definições para o sistema DNL também se aplicam ao sistema $DNLi$, definidas de forma análoga.

Observação: As definições para o sistema $DNPi$ extendem-se também para o sistema $DNLi$

Observação: Tal como anteriormente, as regras para eliminar fórmulas maximais irão ser definidas para o sistema de dedução natural sobre o alfabeto com apenas os conectivos da negação, conjunção, e implicação. ($DNLi_{\wedge,\to}$)

Definição: Regras de Inferência Para Eliminar Fórmulas Maximais
(as definições das regras regras para elminar fórmulas maximais no caso da implicação e conjução, são extendidas do sistema $DNPi_{\wedge,\to}$)

$$\dfrac{\dfrac{\varphi}{\forall x \varphi}\,\mathrm{I}_\forall}{\varphi[t/x]}\,\mathrm{E}_\forall \qquad \longrightarrow \qquad \begin{array}{c} \mathrm{D[t/x]} \\ \cdots \\ \varphi[t/x] \end{array}$$

Notação: $D[t/x]$ denota que cada ocorrência de x em D, é substituída por t

Definição: A função $(-)^\circ : \mathcal{F}^{cp} \longrightarrow \mathcal{F}^{cp}$, é definida da seguinte forma

- $(\bot)^\circ = \bot$
- $(p)^\circ = \neg\neg p$
- $(\neg\varphi)^\circ = \neg(\varphi)^\circ$
- $(\varphi \wedge \psi)^\circ = (\varphi)^\circ \wedge (\psi)^\circ$
- $(\varphi \rightarrow \psi)^\circ = \varphi \rightarrow (\psi)^\circ$
- $(\varphi \vee \psi)^\circ = \neg((\neg\varphi)^\circ \wedge (\neg\psi)^\circ)$
- $(\varphi \leftrightarrow \psi)^\circ = ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi))^\circ$
- $(\forall x\varphi)^\circ = \forall x(\varphi)^\circ$
- $(\exists x\varphi)^\circ = \neg\forall x\neg(\varphi)^\circ$

Teorema: Teorema de Godel e Gentzen
$\Gamma \vdash_c \varphi$ sse $(\Gamma)^\circ \vdash_i (\varphi)^\circ$

4.4 Interpretação BHK

- Uma prova de $\varphi \wedge \psi$ é um tuplo $\langle M, N\rangle$ em que:
  - M é uma prova de φ
  - N é uma prova de ψ
- Uma prova de $\varphi \vee \psi$ é um tuplo $\langle 0, M\rangle$ em que:
  - M é uma prova de φ

  ou um tuplo $\langle 1, N\rangle$ em que:
  - N é uma prova de ψ
- Uma prova de $\varphi \rightarrow \psi$ é uma função f que transforma provas de φ em provas de ψ
- Uma prova de $\neg\varphi$ é uma prova de $\varphi \rightarrow \bot$, ou seja, uma função f que transforma provas de φ em provas de $\bot$
- Não existem provas de $\bot$
- Uma prova de $\forall x\varphi$ é uma função f que transforma elementos d no domínio de interpretação, em provas de $[\overline{d}/x]\varphi$

- Uma prova de $\exists x\varphi$ é um tuplo $\langle d, M\rangle$ tal que:
  - d é um elemento do domínio de interpretação
  - M é uma prova de $[\overline{d}/x]\varphi$

Observação: A notação $[\overline{d}/x]\varphi$ é usada para representar a substituição das ocorrências "livres"de x em φ por d, um elemento do domínio de interpretação

Capítulo 5

Calculo-λ

Definição:
O alfabeto do $cálculo - \lambda$, denotado por $\mathcal{A}$, define-se da seguinte forma:
$\mathcal{A} = \mathcal{V} \cup \{\lambda, (,)\}$
em que $\mathcal{V}$ é o conjunto das variáveis, $x, y, z, ...$ do $cálculo - \lambda$

Definição:
O conjunto dos $\lambda - termos$, denotado por $\Lambda \in \mathcal{A}^*$, define-se da seguinte forma:

- $x \in \mathcal{V} \implies x \in \lambda$
- $M, N \in \Lambda \implies (M, N) \in \Lambda$
- $x \in \mathcal{V}, M \in \Lambda \implies (\lambda x.M) \in \Lambda)$

(M, N) diz-se uma *aplicação de M a N*
$(\lambda x.M)$ diz-se uma *abstração* em que x é o *parâmetro formal* e M é o *corpo*

Notação: A seguinte simplificação da notação permite reduzir o tamanho dos $\lambda - termos$, omitindo certas ocorrências de parênteses, da seguinte forma

- A aplicação de funções é associativa à esquerda
  - $((MN)O) = MNO$
- Os parênteses mais externos podem ser omitidos
  - $(MN) = MN$
- Uma abstração contida noutra abstração pode-se simplificar da seguinte forma
  - $(\lambda x(\lambda y.M)) = \lambda xy.M$
- As abstrações extendem-se o mais longe possível
  - $(\lambda x.((\lambda y.M)N)) = \lambda x.(\lambda y.M)N$

Definição: Sejam $x \in \mathcal{V}, M \in \Lambda$

- uma ocorrência de x em M diz-se *ligada* se esta pertence ao corpo de uma abstração em M cujo parâmetro formal é x
- caso contrário, esta ocorrência diz-se *livre*

Definição:
A função $LIV : \Lambda \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{V})$, que dado um $\lambda - termo$, devolve o conjunto das variáveis com ocorrências livres neste, é definida da seguinte forma

- $LIV(x) = \{x\}$
- $LIV(MN) = LIV(M) \cup LIV(N)$
- $LIV(\lambda x.M) = LIV(M) \setminus \{x\}$

Definição:
A função $LIG : \Lambda \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{V})$, que dado um $\lambda - termo$, devolve o conjunto das variáveis com ocorrências ligadas neste, é definida da seguinte forma

- $LIG(x) = \emptyset$
- $LIG(MN) = LIG(M) \cup LIG(N)$
- $LIG(\lambda x.M) = LIG(M) \cup (LIV(M) \cap \{x\})$

Definição:
A função $subt : \Lambda \longrightarrow \mathcal{P}(\Lambda)$, que dado um $\lambda - termo$, devolve o conjunto dos seus $\Lambda - subtermos$, é definida da seguinte forma

- $subt(x) = \{x\}$
- $subt(MN) = \{MN\} \cup subt(M) \cup subt(N)$
- $subt(\lambda x.M) = \{\lambda x.M\} \cup subt(M)$

Definição: Sejam $x \in \mathcal{V}, M, N \in \Lambda$
$M[N/x]$ denota a substituição de todas as ocorrências livres de x por M por N

Definição: Sejam $x \in \mathcal{V}, M, N \in \Lambda$
dizemos que $M[N/x]$ produz *captura de variáveis* se x ocorre livre em M no corpo de uma abstração cujo parâmetro formal $\in LIV(N)$

Definição: Sejam $x \in \mathcal{V}, M, N \in \Lambda$
dizemos que x está livre para N em M (x é substituível por N em M) se $M[N/x]$ não produzir captura de variáveis

Definição: $Axioma - \alpha$
Ao adotar este axioma, para todo $x, y \in \mathcal{V}, M \in \Lambda$, assumimos as seguintes expressões como equivalentes
$\lambda x.M = \lambda y.M[y/x]$

Definição: β
O conjunto $\beta \in \Lambda \times \Lambda$, define-se como o seguinte:
$\beta = \{((\lambda x.M)N, M[N/x]) | M, N \in \Lambda, x \in \mathcal{V}\}$

Definição: $\rightarrow_\beta$
A relação $\rightarrow_\beta \in \Lambda \times \Lambda$, diz-se o *fecho compatível de* β, e define-se da seguinte forma:

- $(M, M') \in \beta \implies (M, M') \in \rightarrow_\beta$
- $(M, M') \in \rightarrow_\beta \implies (MN, M'N) \in \rightarrow_\beta$
- $(M, M') \in \rightarrow_\beta \implies (NM, NM') \in \rightarrow_\beta$
- $(M, M') \in \rightarrow_\beta \implies (\lambda x.M, \lambda x.M') \in \rightarrow_\beta$

Definição:

- $\rightarrow_\beta^+$ é o *fecho transitivo de* $\rightarrow_\beta$
- $\rightarrow_\beta^*$ é o *fecho transitivo e reflexivo de* $\rightarrow_\beta$
- $=_\beta$ é o *fecho de equivalência de* $\rightarrow_\beta$ (transitivo, reflexivo, simétrico)

Notação:
Para denotar que $(M, N) \in \rightarrow_\beta$, podemos também escrever $M \rightarrow_\beta N$
Esta notação também se aplica às relações $\rightarrow_\beta^+, \rightarrow_\beta^*, =_\beta$

Notação:
Para denotar que $M \rightarrow_\beta N$, podemos também escrever $N \leftarrow_\beta M$
Esta notação também se aplica às relações $\rightarrow_\beta^+, \rightarrow_\beta^*$

Definição:

- β diz-se *noção de redução-β*
- $\rightarrow_\beta$ diz-se *redução-β num passo*
- $\rightarrow_\beta^+$ diz-se *redução-β em vários passos*
- $\rightarrow_\beta^*$ diz-se *redução-β*
- $=_\beta$ diz-se *igualdade-β*

Observação:
$\beta \subseteq \rightarrow_\beta \subseteq \rightarrow_\beta^+ \subseteq \rightarrow_\beta^* \subseteq =_\beta$

Definição: Seja $M \in \Lambda$
M diz-se um *combinador* se $LIV(M) = \emptyset$

Definição:
Alguns combinadores utilizados no estudo do $\lambda - cálculo$

- $I = \lambda x.x$
- $C = \lambda xyz.x(zy)$
- $B = \lambda xyz.x(yz)$
- $S = \lambda xyz.(xz)(yz)$
- $K = \lambda xy.z$
- $W = \lambda xy.xyy$
- $\Omega = (\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$
- $Y = \lambda x.(\lambda y.x(yy))(\lambda y.x(yy))$

Definição: Sejam $M, M' \in \Lambda$

- M diz-se *forma normal-β (fn-β)* se não contêm nenhum $redex - \beta$
- M diz-se *forma normal-β de M' (fn-β de M')* se:
  - M é $fn - \beta$
  - $M' =_\beta M$

Teorema: Teorema da Confluência
Sejam $M, N_1, N_2 \in \Lambda$ tais que $N_1 \leftarrow_\beta^* M \rightarrow_\beta^* N_2$
então existe $N \in \Lambda$ tal que $N_1 \rightarrow_\beta^* N \leftarrow_\beta^* N_2$

Corolário: Teorema de Church-Rosser
Sejam $M_1, M_2 \in \Lambda$ tais que $M_1 =_\beta M2$
então existe $M \in \Lambda$ tal que $M_1 \rightarrow_\beta^* M \leftarrow_\beta^* M_2$

Corolário: Unicidade da $fn - \beta$
Sejam $M, N_1, N_2 \in \Lambda$ tais que N_1 e N_2 são $fn - \beta$ de M
então $N1 = N2$

Teorema: Consistência do $cálculo - \lambda$ (Existem A, B tal que $A \neq_\beta B$)
Sejam $x, y \in \mathcal{V}$ tais que $x \neq y$, temos que $x, y \in \Lambda$
se $x =_\beta y$, então pelo Teorema de Church-Rosser, existe $M \in \Lambda$ tal que $x \rightarrow_\beta^* M \leftarrow_\beta^* y$
porém x e y são $fn - \beta$, logo $x = M = y \implies x = y$
por redução ao absurdo, concluímos que $x =_\beta y$

Teorema: Teorema do Ponto Fixo
seja $F \in \Lambda$ (recorda-se o combinador $Y = \lambda x.(\lambda y.x(yy))(\lambda y.x(yy)))$
temos que, $F(YF) =_\beta YF$

Teorema:
$\forall x, y_1..., y_n \in \mathcal{V}, N \in \Lambda$, existe solução para a seguinte equação em x
$xy_1...y_n =_\beta N$
ou seja, $\exists M \in \Lambda$ tal que $My_1...y_n =_\beta [M/x]N$
basta tomar $M = Y(\lambda xy_1...y_n.N)$

Definição:
Sejam $F, N \in \Lambda, n \in \mathbb{N}_0$
F^nN define-se por recursão em n: $\begin{cases} \mathrm{F}^0N = N \\ \mathrm{F}^{n+1}N = F(F^nN) \end{cases}$

Definição: Numerais de Church
$\forall n \in \mathbb{N}_0.\overline{n} = \lambda fx.f^nx$

Teorema:
sejam $M, N, F \in \Lambda, x \in \mathcal{V}$
$[M/x](F^nN) = ([M/x]F^n)([M/x]N)$

Teorema:
sejam $M, N, F \in \Lambda, x \in \mathcal{V}$
$\overline{n}FN \to_\beta^* F^nN$

Definição:
seja $f : \mathbb{N}_0^k \to \mathbb{N}_0$, $F \in \Lambda$
Dizemos que F *representa* f sse $\forall (n_1, ..., n_k) \in \mathbb{N}_0, F\overline{n_1}...\overline{n_k} =_\beta \overline{f(n_1, ..., n_k)}$

Definição:
seja $f : \mathbb{N}_0^k \to \mathbb{N}_0$
Dizemos que f é *representável* se $\exists F \in \Lambda$ tal que F representa f

Definição:
seja $s = \lambda xyz.y(xyz) \in \Lambda$
s representa a seguinte função f
$f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$
$\quad n \mapsto$n+1

Capítulo 6

Calculo-λ com tipos simples (STLC)

Definição:
O alfabeto do $STLC$ denotado por $\mathcal{A}'$, define-se da seguinte forma:
$\mathcal{A} = \mathcal{V} \cup \{\lambda, (,)\} \cup \mathcal{V}'$
em que:

- $\mathcal{V}$ é o conjunto das variáveis, $x, y, z, ...$ do $cálculo - \lambda$
- $\mathcal{V}'$ é o conjunto dos tipos, $\sigma, \tau, \rho, \sigma \to \tau, ...$

Notação:
As definições, teoremas, funções, etc, definidas para o $cálculo - \lambda$ *sem tipos*, aplicam-se de forma análoga para o $STLC$

Definição:
O conjunto dos λ-*termos com tipos simples*, denotado por $\Lambda_{church} \in \mathcal{A}'^*$, define-se da seguinte forma:

- $x \in \mathcal{V} \implies x \in \Lambda_{church}$
- $M, N \in \Lambda_{church} \implies (M, N) \in \Lambda_{church}$
- $x \in \mathcal{V}, \sigma \in \mathcal{V}', M \in \Lambda_{church} \implies (\lambda x^\sigma.M) \in \Lambda_{church}$

Definição:
um *contexto* é um conjunto finito de declarações (x, σ), com $x \in \mathcal{V}, \sigma \in \mathcal{V}'$ em que nenhuma variável é declarada com dois tipos diferentes

Definição: Seja Γ contexto, $M \in \Lambda_{church}, \sigma \in \mathcal{V}'$
$\Gamma \vdash M : \sigma$ denota que podemos atribuir o tipo σ ao termo M no contexto Γ

Definição: a relação de atribuição de tipos a um termo num contexto é definida indutivamente:

$$\frac{}{\Gamma, (x, \sigma) \vdash x : \sigma} \text{VAR}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \to \tau \qquad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash MN : \tau} \text{ APP}$$

$$\frac{\Gamma, (x, \sigma) \vdash M : \tau}{\Gamma \backslash (x, \sigma) \vdash \lambda x^\sigma M : \sigma \to \tau} \text{ ABS}$$

Definição:
Uma derivação é uma árvore de sequentes construída através das regras VAR, APP, e ABS

Definição: Seja Γ contexto
$Dom(\Gamma) = \{x | x \in \mathcal{V} \wedge \exists \sigma \in \mathcal{V}'.(x, \sigma) \in \Gamma\}$

Definição: Seja Γ contexto, $x \in Dom(\Gamma)$
$\Gamma(x)$ é uma função que retorna o tipo associado com x em Γ

Teorema: Seja Γ contexto, $M \in \Lambda_{church}, \sigma \in \mathcal{V}'$
se $\Gamma \vdash M : \sigma$ é derivável, então $LIV(M) \subseteq Dom(\Gamma)$

Teorema: Unicidade do tipo (1)
Seja Γ contexto, $M \in \Lambda_{church}, \sigma, \tau \in \mathcal{V}'$
se $\Gamma \vdash M : \sigma$ e $\Gamma \vdash M : \tau$ são deriváveis, então $\sigma = \tau$

Definição: Seja $M \in \Lambda_{church}$
M diz-se $tipific\acute{a}vel$ sse existem Γ contexto, $\sigma \in \mathcal{V}'$, tal que $\Gamma \vdash M : \sigma$ é derivável

Teorema: Unicidade do tipo (2)
Seja Γ, Δ contextos, $M \in \Lambda_{church}, \sigma, \tau \in \mathcal{V}'$
se $\Gamma \vdash M : \sigma$ e $\Delta \vdash M : \tau$ e para todo $x \in LIV(M).\Gamma(x) = \Delta(x)$, então $\sigma = \tau$

Corolário: Seja $M \in \Lambda_{church}$
se M é um combinador tipificável, então M tem tipo único (independente do contexto)

Observação: Seja $M, N \in \Lambda_{church}$

- MN tipificável $\Rightarrow$ M e N tipificáveis
- M e N tipificáveis $\not\Rightarrow$ MN tipificável
- M tipificável $\Rightarrow \exists \sigma \in \mathcal{V}', x \in \mathcal{V}.$ tal que, $\lambda x^\sigma.M$ é tipificável

Definição: Seja $M \in \Lambda_{church}$
M é $\beta - SN$ sse não existem sequências infinitas de redução-β num passo, a partir de M

Teorema: Teorema da Normalização Forte
Seja $M \in \Lambda_{church}$
Se M é tipificável, então M é $\beta - SN$

Definição Seja $\rightarrow \subseteq A \times A, a \in A$
dizemos que a é SN quando não existem sequências infinitas de redução em um passo a partir de a

Definição Seja $\rightarrow \subseteq A \times A$
dizemos que $\rightarrow$ satisfaz SN quando, $\forall a \in A.\ a$ é SN

Definição Seja $\rightarrow \subseteq A \times A$
dizemos que $\rightarrow$ satisfaz confluência quando, $\forall a, b_1, b_2 \in A.$ se $b_1 \leftarrow a \rightarrow b_2$, então $\exists c \in A.\ b_1 \rightarrow^* c \leftarrow^* b_2$

Definição Seja $\rightarrow \subseteq A \times A$
dizemos que $\rightarrow$ satisfaz confluência fraca quando, $\forall a, b_1, b_2 \in A.$ se $b_1 \leftarrow^* a \rightarrow^* b_2$, então $\exists c \in A.$ $b_1 \rightarrow^* c \leftarrow^* b_2$

Lema de Newman: Seja $\rightarrow \subseteq A \times A$
Supomos que $\rightarrow$ satisfaz SN e confluência fraca
Então $\rightarrow$ satisfaz confluência

Definição: Seja $\rightarrow \subseteq A \times A$, $b \in A$
b diz-se *fórmula normal* se $\nexists c \in A.\ b \rightarrow c$

Definição: Seja $\rightarrow \subseteq A \times A$, $a, b \in A$
b diz-se *fórmula normal de* a se $a \rightarrow^* b$ e b é fórmula normal

Teorema:
Seja $\rightarrow \subseteq A \times A$
se $\rightarrow$ satisfaz SN, então, $\forall a \in A.$ a têm fórmula normal

Definição: Seja $\rightarrow \subseteq A \times A$, $a \in A$
a diz-se *ambíguo* se a tem duas formulas normais distintas

Teorema 1:
Seja $\rightarrow \subseteq A \times A$
se $\forall a \in A.\ a$ não é ambíguo, então $\rightarrow$ satisfaz confluência

Teorema 2:
Seja $\rightarrow \subseteq A \times A$, tal que $\rightarrow$ satisfaz confluência fraca, $a \in A$
se a é ambíguo, então $\exists b \in A$ tal que:

- $a \rightarrow b$
- $a \neq b$
- b é ambíguo

Teorema 3:
Seja $\rightarrow \subseteq A \times A$, tal que $\rightarrow$ satisfaz confluência fraca, $a \in A$
se a é ambíguo, então a não é SN

Corolário do Lema de Newman:
Seja $\rightarrow \subseteq A \times A, a \in A$, $\rightarrow$ satisfaz SN
então, $\forall a \in A.\ a$ não é ambíguo

Teorema: Preservação de Tipos (Subject Reduction)
Seja $\Gamma \subseteq \Lambda_{church}, M, M' \in \Lambda_{church}, \sigma \in \mathcal{V}'$
se $\Gamma \vdash M : \sigma$ e $M \rightarrow_\beta M'$, então $\Gamma \vdash M' : \sigma$

Teorema: $(\{M \in \Lambda_{church} | M \text{ é tipificável } \}, \rightarrow_\beta)$
Como $\rightarrow_\beta$ satisfaz SN, pelo Lema de Newman temos que:
$\rightarrow_\beta$ satisfaz confluência fraca sse $\rightarrow_\beta$ satisfaz confluência

Teorema: Seja $M, N \in \Lambda_{church}$, M e N tipificáveis
É decidível se $M =_\beta N$ (existe algoritmo para decidir)

Teorema: $\rightarrow_\beta$ satisfaz confluência fraca

Corolário: $\rightarrow_\beta$ satisfaz confluência