Universidade do Minho
Escola de Ciências


UNIVERSIDADE DO MINHO

ESCOLA DE CIÊNCIAS

MESTRADO EM MATEMÁTICA E COMPUTAÇÃO


ANO LETIVO 2024/2025

**Projeto Integrado em Matemática e Computação**

# Calculi de Mono-Sequentes para Lógicas de Reticulados


**Autores:**

João Manuel Franqueira da Silva PG55618

Rafael Reis Teixeira Mendes Rodrigues PG55624

**Orientador:** Professor José Carlos Soares do Espírito Santo


**Data:** 25 de junho de 2025

# Agradecimentos

Agradecemos ao nosso orientador, Professor José Carlos Soares do Espírito Santo, pela sua orientação, disponibilidade, e também por todas as reuniões ao longo da realização do projeto.

**Resumo**

Neste relatório, investigamos quatro sistemas lógicos baseados em cálculos de *mono-sequentes*. Um *mono-sequente* é um sequente restrito a exatamente uma fórmula no lado esquerdo e uma fórmula no lado direito da expressão. Os sistemas analisados incluem a lógica dos reticulados, a lógica quântica paraconsistente, a lógica nelsoniana e a lógica quântica paraconsistente nelsoniana. Para cada uma destas lógicas, estabelecemos propriedades fundamentais como *correção*, *completude*, *admissibilidade do corte*, *eliminação do corte*, *decidibilidade* e *interpolação de Craig*. Estas propriedades são demonstradas diretamente nos sistemas de cálculo da lógica dos reticulados e da lógica nelsoniana, sendo subsequentemente transferidas, por meio de mergulhos sintáticos e semânticos, respetivamente, para a lógica quântica paraconsistente e a lógica quântica paraconsistente nelsoniana.

# Conteúdo

# 1 Introdução

Neste relatório, investigamos quatro sistemas lógicos: a *lógica dos reticulados*, a *lógica quântica paraconsistente*, a *lógica nelsoniana* e a *lógica quântica paraconsistente nelsoniana.* Para cada uma destas lógicas, apresentamos um sistema dedutivo baseado em *cálculo de mono-sequentes* e analisámos propriedades fundamentais, como *completude*, *correção*, *admissibilidade* e *eliminação do corte*, *interpolação de Craig* e *decidibilidade.*

Um *mono-sequente* é uma expressão da forma $\gamma \Rightarrow \delta$, em que $\gamma$ e $\delta$ são fórmulas da lógica em questão. Nesta abordagem, restringimos ambos os lados do sequente a exatamente uma fórmula, não utilizando conjuntos de fórmulas. Tal é estudado por Béziau [2].

A *lógica dos reticulados* ($LL$) capta a estrutura algébrica mínima dos reticulados, sem pressupor distributividade. Demonstramos primeiramente o *teorema da interpolação de Craig*, seguido do *teorema de completude* para esta lógica através da construção de uma *Álgebra de Lindenbaum–Tarski.* Em seguida, estabelecemos a *correção* do sistema, utilizando modelos algébricos formados por reticulados com apenas duas operações básicas: *ínfimo* ($\sqcap$) e *supremo* ($\sqcup$). Por fim, provamos os *teoremas da eliminação e admissibilidade do corte*, o que implica diretamente a *decidibilidade* da lógica. Esta lógica foi estudada em detalhe por Kamide [5].

A *lógica quântica paraconsistente* ($PQL$) é uma versão fraca da lógica quântica, permitindo a existência de contradições sem que ocorra o princípio da explosão. Tal como nas lógicas quânticas, não se verificam nem a distributividade nem a lei do terceiro excluído. Para tratar os tópicos anteriormente mencionados (completude, correção, eliminação e admissibilidade do corte e decidibilidade), realizamos uma transformação das fórmulas da lógica quântica paraconsistente para fórmulas da lógica dos reticulados. Assim, efetuando um *mergulho* na lógica dos reticulados com os resultados já previamente obtidos, conseguimos transferir as propriedades de interesse para a lógica quântica paraconsistente, garantindo a sua validade neste contexto. Esta estratégia foi também explorada por Kamide [5]. O *teorema da interpolação de Craig* é demonstrado diretamente por indução sobre derivações no próprio sistema, não por meio de um mergulho. Uma abordagem semântica a respeito de reticulados limitados involutivos, isto é, reticulados limitados com uma operação de negação involutiva, foi também estudada para esta lógica por Dalla Chiara e Giuntini [3]. A extensão de primeira ordem a esta lógica é tratada por Kamide [4].

A *lógica nelsoniana* ($NL$) surge como base para o *mergulho* da *lógica quântica paraconsistente nelsoniana*, consistindo apenas nas fórmulas *positivas* dessa lógica (isto é, sem negação) e sendo formalizada precisamente através de um cálculo de mono-sequentes. Demonstramos o *teorema da interpolação de Craig*, e de seguida, um *teorema de completude* para esta lógica também através da construção de uma *Álgebra de Lindenbaum–Tarski*, e estabelecemos a *correção* do sistema, utilizando modelos algébricos formados por reticulados limitados (com elementos máximo e mínimo) dotados de mais ainda duas operações de *implicação* fraca ($\sqsupset$) e *coimplicação* fraca ($\sqsubset$). Por fim, provamos os teoremas de eliminação e admissibilidade do corte, o que implica, em consequência, a decidibilidade da lógica.

A *lógica quântica paraconsistente nelsoniana* ($NQL$) consiste na extensão *nelsoniana* da *lógica quântica paraconsistente.* Como referido anteriormente, os tópicos de completude, correção, eliminação e admissibilidade do corte e decidibilidade são também tratados por meio de um mergulho na *lógica nelsoniana*, beneficiando dos resultados já previamente obtidos para essa lógica. Esta estratégia é também abordada por Kamide [4], no entanto, nesse trabalho, o mergulho entre as duas lógicas é realizado apenas ao nível sintático, e sem inferir as propriedades aqui estudadas sobre a *lógica nelsoniana*. Ainda mais, a *lógica quântica paraconsistente nelsoniana* é precisamente uma variante da *lógica de quatro valores de Nelson*. Novamente, a *interpolação de Craig* é demonstrada também por indução nas derivações do sistema. Também foi estudado por Kamide uma extensão de primeira ordem para esta lógica em [6] e um mergulho semelhante é estudado por Kamide e Wansing [7], no qual se realiza um mergulho da *lógica de quatro valores de Nelson* na *lógica intuicionista positiva* utilizando modelos de Kripke como estruturas semânticas, e notando que os sistemas dedutivos aí estudados não se restringem a mono-sequentes.

Os diagramas a seguir têm como propósito guiar o leitor pela estrutura deste relatório, de modo a esclarecer as estratégias utilizadas para alcançar os resultados demonstrados em cada um dos quatro sistemas lógicos estudados.

$$\begin{tikzcd}
(\wedge, \vee)\ LL & & PQL\ (\wedge, \vee, \sim) \arrow[ll, "\text{Mergulho}"'] \\
\text{Eliminação do Corte} & & \text{Eliminação do Corte} \arrow[ll, "\text{Mergulho Sintático}"'] \\
\text{Admissibilidade do Corte} & & \text{Admissibilidade do Corte} \arrow[ll, "\text{Mergulho Sintático}"'] \\
\text{Decidibilidade} & & \text{Decidibilidade} \arrow[ll, "\text{Mergulho Sintático}"'] \\
\text{Completude} & & \text{Completude} \arrow[ll, "\text{Mergulho Semântico}"'] \\
\text{Correção} & & \text{Correção} \arrow[ll, "\text{Mergulho Semântico}"'] \\
\text{Interpolação de Craig} & & \begin{array}{l}\text{Interpolação de Craig}\\ \text{(prova direta em } PQL\text{)}\end{array}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(\wedge, \vee, \supset, \subset, \top, \bot)\ NL & & NQL\ (\wedge, \vee, \supset, \subset, \sim, \top, \bot) \arrow[ll, "\text{Mergulho}"'] \\
\text{Eliminação do Corte} & & \text{Eliminação do Corte} \arrow[ll, "\text{Mergulho Sintático}"'] \\
\text{Admissibilidade do Corte} & & \text{Admissibilidade do Corte} \arrow[ll, "\text{Mergulho Sintático}"'] \\
\text{Decidibilidade} & & \text{Decidibilidade} \arrow[ll, "\text{Mergulho Sintático}"'] \\
\text{Completude} & & \text{Completude} \arrow[ll, "\text{Mergulho Semântico}"'] \\
\text{Correção} & & \text{Correção} \arrow[ll, "\text{Mergulho Semântico}"'] \\
\text{Interpolação de Craig} & & \begin{array}{l}\text{Interpolação de Craig}\\ \text{(prova direta em } NQL\text{)}\end{array}
\end{tikzcd}$$

# 2 Lógica de Reticulados

A *lógica de reticulados* ($LL$) serve como base de raciocínio sobre estruturas que satisfazem apenas as propriedades fundamentais de um reticulado, sem pressupor características adicionais como distributividade, complementaridade ou outros operadores. Trata-se, portanto, de uma lógica minimalista, suficientemente geral para englobar qualquer reticulado, servindo como base para o desenvolvimento de lógicas mais expressivas ou com restrições adicionais.

## 2.1 Sintaxe

**Definição 1** ($\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2$)
Seja $\mathcal{V}_1$ o seguinte conjunto denumerável de variáveis proposicionais, $\mathcal{V}_1 = \{q_i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$. Consideremos agora o conjunto denumerável $\mathcal{V}_2 = \{q' \mid q \in \mathcal{V}_1\}$, de novas variáveis proposicionais. Sendo $\mathcal{V}_1$ e $\mathcal{V}_2$ conjuntos denumeráveis, obtemos o conjunto $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2$, também denumerável, de variáveis proposicionais.

**Definição 2** ($\mathcal{A}^{LL}$)
O alfabeto da lógica de reticulados é dado por: $\mathcal{A}^{LL} = \mathcal{V} \cup \{\wedge, \vee, (, )\}$.

**Definição 3** ($\mathcal{F}^{LL}$)
O conjunto das fórmulas da lógica de reticulados $\mathcal{F}^{LL}$, é uma linguagem sobre $\mathcal{A}^{LL}$, definido indutivamente por:

- $p \in \mathcal{F}^{LL}$, para todo $p \in \mathcal{V}$.
- $(\alpha \wedge \beta) \in \mathcal{F}^{LL}$, para todo $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{LL}$.
- $(\alpha \vee \beta) \in \mathcal{F}^{LL}$, para todo $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{LL}$.

**Definição 4** ($V : \mathcal{F}^{LL} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{V})$)
A função $V : \mathcal{F}^{LL} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{V})$, que a cada fórmula associa o conjunto das variáveis que nela ocorrem, é definida indutivamente por:

- $V(p) = \{p\}$, para todo $p \in \mathcal{V}$.
- $V(\alpha \wedge \beta) = V(\alpha) \cup V(\beta)$, para todo $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{LL}$.
- $V(\alpha \vee \beta) = V(\alpha) \cup V(\beta)$, para todo $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{LL}$.

**Definição 5 (Mono-Sequentes em $\mathcal{F}^{LL}$)**
Um mono-sequente da Lógica de Reticulados é uma expressão da forma $\alpha \Rightarrow \beta$, em que $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{LL}$.

## 2.2 Semântica

**Definição 6 (Reticulado)**
Um Reticulado é um tuplo $\mathcal{L} = (L, \sqcup, \sqcap)$ tal que:

- $\sqcup, \sqcap$ são operações binárias em $L$.
- para quaisquer $\alpha, \beta, \gamma \in L$, temos que:
  - $\alpha \sqcup \beta = \beta \sqcup \alpha$ e $\alpha \sqcap \beta = \beta \sqcap \alpha$ (comutatividade)
  - $\alpha \sqcup (\beta \sqcup \gamma) = (\alpha \sqcup \beta) \sqcup \gamma$ e $\alpha \sqcap (\beta \sqcap \gamma) = (\alpha \sqcap \beta) \sqcap \gamma$ (associatividade)
  - $\alpha = \alpha \sqcup \alpha$ e $\alpha = \alpha \sqcap \alpha$ (idempotência)
  - $\alpha = \alpha \sqcup (\alpha \sqcap \beta)$ e $\alpha = \alpha \sqcap (\alpha \sqcup \beta)$ (absorção)

**Proposição 7**
Seja $\mathcal{L} = (L, \sqcup, \sqcap)$ um reticulado. Temos que, para quaisquer $\alpha, \beta \in L$, $\alpha = \alpha \sqcap \beta$ se e só se $\beta = \alpha \sqcup \beta$.

*Demonstração.*
$\rightarrow$
Supomos $\alpha = \alpha \sqcap \beta$, temos que, pela absorção, $\beta = \beta \sqcup (\beta \sqcap \alpha)$, logo, pela comutatividade, $\beta = \beta \sqcup (\alpha \sqcap \beta)$, novamente pela hipótese $\beta = \beta \sqcup \alpha$.
$\leftarrow$
Supomos $\beta = \alpha \sqcup \beta$, temos que, pela absorção, $\alpha = \alpha \sqcap (\alpha \sqcup \beta)$, novamente pela hipótese $\alpha = \alpha \sqcap \beta$. $\square$

**Proposição 8 (Ordem Parcial de um Reticulado)**
Seja $\mathcal{L} = (L, \sqcup, \sqcap)$ um reticulado. Temos que $\sqcup, \sqcap$, formam uma relação de ordem parcial em $L$, denotada por $\sqsubseteq_{\mathcal{L}}$ e definida da seguinte forma:

$$\alpha \sqsubseteq_{\mathcal{L}} \beta \quad \text{sse} \quad \alpha = \alpha \sqcap \beta.$$

*Demonstração.*
<u>Reflexividade</u>
Seja $\alpha \in L$. Pela idempotência, $\alpha = \alpha \sqcap \alpha$, logo, $\alpha \sqsubseteq_{\mathcal{L}} \alpha$.

<u>Anti-Simetria</u>
Sejam $\alpha, \beta \in L$, tal que $\alpha \sqsubseteq_{\mathcal{L}} \beta$ e $\beta \sqsubseteq_{\mathcal{L}} \alpha$. Então $\alpha = \alpha \sqcap \beta$ e $\beta = \beta \sqcap \alpha$, logo, $\alpha = \alpha \sqcap (\beta \sqcap \alpha)$, pela comutatividade, $\alpha = \alpha \sqcap (\alpha \sqcap \beta)$, pela associatividade, $\alpha = (\alpha \sqcap \alpha) \sqcap \beta$, pela idempotência $\alpha = \alpha \sqcap \beta$, pela comutatividade $\alpha = \beta \sqcap \alpha$, e novamente pela hipótese $\alpha = \beta$.

<u>Transitividade</u>
Sejam $\alpha, \beta, \gamma \in L$, tal que $\alpha \sqsubseteq_{\mathcal{L}} \beta$ e $\beta \sqsubseteq_{\mathcal{L}} \gamma$. Então $\alpha = \alpha \sqcap \beta$ e $\beta = \beta \sqcap \gamma$, logo, $\alpha = \alpha \sqcap (\beta \sqcap \gamma)$, pela associatividade, $\alpha = (\alpha \sqcap \beta) \sqcap \gamma$, novamente pela hipótese, $\alpha = \alpha \sqcap \gamma$, e concluímos $\alpha \sqsubseteq_{\mathcal{L}} \gamma$.

Concluímos então que $\sqsubseteq_{\mathcal{L}}$ é uma relação de ordem parcial em $L$. $\square$

**Definição 9 (Valoração)**
Seja $\mathcal{L} = (L, \sqcup, \sqcap)$ um reticulado. Uma função $v : \mathcal{F}^{LL} \longrightarrow L$ diz-se uma valoração em $\mathcal{L}$ quando para todo $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{LL}$:

- $v(\alpha \wedge \beta) = v(\alpha) \sqcap v(\beta)$
- $v(\alpha \vee \beta) = v(\alpha) \sqcup v(\beta)$

**Definição 10** ($LL \models^v \alpha \Rightarrow \beta$)
Sejam $\mathcal{L}$ um reticulado, $v$ uma valoração em $\mathcal{L}$, e $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{LL}$. $\alpha \Rightarrow \beta$ é verdadeiro sobre $v$ sse $v(\alpha) \sqsubseteq_{\mathcal{L}} v(\beta)$, denotado por $LL \models^v \alpha \Rightarrow \beta$.

**Definição 11** ($LL \models \alpha \Rightarrow \beta$)
Sejam $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{LL}$. $\alpha \Rightarrow \beta$ é $LL-$válido sse para todo reticulado $\mathcal{L}$ e valoração $v$ em $\mathcal{L}$, $\alpha \Rightarrow \beta$ é verdadeiro sobre $v$, denotado por $LL \models \alpha \Rightarrow \beta$.

## 2.3 Sistema Dedutivo para a Lógica de Reticulados Interpolação de Craig

**Definição 12** ($LL$)
O sistema dedutivo $LL$ é um cálculo de mono-sequentes com as seguintes regras de inferência:

$$\frac{}{p \Rightarrow p}\ A$$

$$\frac{\alpha_1 \Rightarrow \beta}{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \beta}\ \wedge_{L1} \qquad \frac{\alpha_2 \Rightarrow \beta}{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \beta}\ \wedge_{L2} \qquad \frac{\alpha \Rightarrow \beta_1 \qquad \alpha \Rightarrow \beta_2}{\alpha \Rightarrow \beta_1 \wedge \beta_2}\ \wedge_R$$

$$\frac{\alpha_1 \Rightarrow \beta \qquad \alpha_2 \Rightarrow \beta}{\alpha_1 \vee \alpha_2 \Rightarrow \beta}\ \vee_L \qquad \frac{\alpha \Rightarrow \beta_1}{\alpha \Rightarrow \beta_1 \vee \beta_2}\ \vee_{R1} \qquad \frac{\alpha \Rightarrow \beta_2}{\alpha \Rightarrow \beta_1 \vee \beta_2}\ \vee_{R2}$$

$$\frac{\alpha \Rightarrow \gamma \qquad \gamma \Rightarrow \beta}{\alpha \Rightarrow \beta}\ cut$$

**Definição 13 (Derivação de $LL$)**
Uma derivação $D$ em $LL$ de um mono-sequente $\alpha \Rightarrow \beta$ é uma árvore que pode ser definida indutivamente da seguinte maneira:

- A regra aplicada a todo o sequente que seja uma folha da árvore é necessariamente a regra A, que não tem premissas.
- Cada nó interno da árvore é obtido pela aplicação de uma regra de inferência do sistema $LL$, a partir de um ou dois mono-sequentes já presentes nos nós filhos.
- O sequente $\alpha \Rightarrow \beta$ é a raíz da árvore.

**Notação 14** ( $\underset{\alpha\Rightarrow\beta}{D}$ **em** $LL$)
Denotamos $\underset{\alpha\Rightarrow\beta}{D}$ quando $D$ é uma derivação em $LL$ cuja conclusão é mono-sequente $\alpha \Rightarrow \beta$, com $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{LL}$. Neste caso dizemos que $D$ deriva $\alpha \Rightarrow \beta$.

**Definição 15 (Derivabilidade em $LL$)**

Um mono-sequente $\alpha \Rightarrow \beta$, com $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{LL}$, diz-se derivável em $LL$ se e só se existe $D \in LL$ tal que $\underset{\alpha \Rightarrow \beta}{D}$, e denotamos por $LL \vdash \alpha \Rightarrow \beta$.

**Definição 16 ($LL$-*cut*)**

O sistema dedutivo $LL$-*cut* é o sistema obtido a partir de $LL$ pela remoção da regra de corte.

**Definição 17 (Derivação de $LL$-*cut*)**

Uma derivação $D$ em $LL$-*cut* de um mono-sequente $\alpha \Rightarrow \beta$ é uma árvore que pode ser definida indutivamente da seguinte maneira:

- A regra aplicada a todo o sequente que seja uma folha da árvore é necessariamente a regra A, que não tem premissas.
- Cada nó interno da árvore é obtido pela aplicação de uma regra de inferência do sistema $LL$-*cut*, a partir de um ou dois mono-sequentes já presentes nos nós filhos.
- O sequente $\alpha \Rightarrow \beta$ é a raíz da árvore.

**Notação 18 ( $\underset{\alpha \Rightarrow \beta}{D}$ em $LL$-*cut*)**

Denotamos $\underset{\alpha \Rightarrow \beta}{D}$ quando $D$ é uma derivação em $LL$-*cut* cuja conclusão é mono-sequente $\alpha \Rightarrow \beta$, com $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{LL}$. Neste caso dizemos que $D$ deriva $\alpha \Rightarrow \beta$.

**Definição 19 (Derivabilidade em $LL$-*cut*)**

Um mono-sequente $\alpha \Rightarrow \beta$, com $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{LL}$, diz-se derivável em $LL$-*cut* se e só se existe $D \in LL$-*cut* tal que $\underset{\alpha \Rightarrow \beta}{D}$, e denotamos por $LL$-*cut* $\vdash \alpha \Rightarrow \beta$.

**Proposição 20 (Derivabilidade de $\alpha \Rightarrow \alpha$)**

Para todo $\alpha \in \mathcal{F}^{LL}$, o mono-sequente $\alpha \Rightarrow \alpha$ é derivável em $LL$.

*Demonstração.* Por indução em $\alpha$.

Para qualquer $\alpha \in \mathcal{F}^{LL}$, $P(\alpha)$ : Existe $D \in LL$ tal que $\underset{\alpha \Rightarrow \alpha}{D}$.

**Caso $\alpha = p$:**

Consideremos a seguinte derivação $D \in LL$:

$$\frac{}{p \Rightarrow p}\, A$$

Temos que $\underset{p \Rightarrow p}{D}$, e obtemos $P(p)$.

**Caso $\alpha = \alpha_1 \wedge \alpha_2$:**

Assumimos $P(\alpha_1), P(\alpha_2)$ como hipóteses de indução.

De $P(\alpha_1)$, existe $D_1 \in LL$ tal que $\underset{\alpha_1 \Rightarrow \alpha_1}{D_1}$. De $P(\alpha_2)$, existe $D_2 \in LL$ tal que $\underset{\alpha_2 \Rightarrow \alpha_2}{D_2}$.

Consideremos a seguinte derivação $D \in LL$:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}D_1\\ \alpha_1 \Rightarrow \alpha_1\end{array}}{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \alpha_1}\wedge_{L1} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}D_2\\ \alpha_2 \Rightarrow \alpha_2\end{array}}{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \alpha_2}\wedge_{L2}}{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \alpha_1 \wedge \alpha_2}\wedge_R$$

Temos que $\underset{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \alpha_1 \wedge \alpha_2}{D}$, e obtemos $P(\alpha_1 \wedge \alpha_2)$.

**Caso $\alpha = \alpha_1 \vee \alpha_2$:**

Assumimos $P(\alpha_1), P(\alpha_2)$ como hipóteses de indução.

De $P(\alpha_1)$, existe $D_1 \in LL$ tal que $\underset{\alpha_1 \Rightarrow \alpha_1}{D_1}$. De $P(\alpha_2)$, existe $D_2 \in LL$ tal que $\underset{\alpha_2 \Rightarrow \alpha_2}{D_2}$.

Consideremos a seguinte derivação $D \in LL$:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}D_1\\ \alpha_1 \Rightarrow \alpha_1\end{array}}{\alpha_1 \Rightarrow \alpha_1 \vee \alpha_2}\vee_{R1} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}D_2\\ \alpha_2 \Rightarrow \alpha_2\end{array}}{\alpha_2 \Rightarrow \alpha_1 \vee \alpha_2}\vee_{R2}}{\alpha_1 \vee \alpha_2 \Rightarrow \alpha_1 \vee \alpha_2}\vee_L$$

Temos que $\underset{\alpha_1 \vee \alpha_2 \Rightarrow \alpha_1 \vee \alpha_2}{D}$, e obtemos $P(\alpha_1 \vee \alpha_2)$. □

**Teorema 21 (Interpolação de Craig em $LL$-*cut*)**

Para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{LL}$, se $LL$-*cut* $\vdash \alpha \Rightarrow \beta$, então existe $\gamma \in \mathcal{F}^{LL}$ tal que $LL$-*cut* $\vdash \alpha \Rightarrow \gamma$, $LL$-*cut* $\vdash \gamma \Rightarrow \beta$ e $V(\gamma) \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta)$.

*Demonstração.* Por indução em derivações de $LL$-*cut*.

Para todo $D \in LL$-*cut*, $P(D)$ : se $\underset{\alpha \Rightarrow \beta}{D}$, com $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{LL}$, então existem $\gamma \in \mathcal{F}^{LL}$, $D_1, D_2 \in LL$-*cut* tais que $\underset{\alpha \Rightarrow \gamma}{D_1}$, $\underset{\gamma \Rightarrow \beta}{D_2}$ e $V(\gamma) \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta)$.

**Caso $A$:**

$$\overline{p \Rightarrow p}\ A$$

Sejam $D_1 = D_2 = D \in LL$-*cut*. Temos que $\underset{p \Rightarrow p}{D_1}$, $\underset{p \Rightarrow p}{D_2}$, e mais ainda, $V(p) = \{p\} \subseteq V(p) \cap V(p)$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\wedge_{L1}$:**

$$\dfrac{\begin{array}{c}D'\\ \alpha_1 \Rightarrow \beta\end{array}}{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \beta}\wedge_{L1}$$

Assumimos $P(D')$ como hipótese de indução.

De $P(D')$, existem $\gamma \in \mathcal{F}^{LL}$, $D_1', D_2 \in LL$-*cut*, tais que $\underset{\alpha_1 \Rightarrow \gamma}{D_1'}$, $\underset{\gamma \Rightarrow \beta}{D_2}$ e $V(\gamma) \subseteq V(\alpha_1) \cap V(\beta)$.

Consideremos então a seguinte derivação $D_1 \in LL$-*cut*:

$$\dfrac{\begin{array}{c}D_1'\\ \alpha_1 \Rightarrow \gamma\end{array}}{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \gamma}\wedge_{L1}$$

Temos que $\underset{\alpha_1\wedge\alpha_2\Rightarrow\gamma}{D_1}$, $\underset{\gamma\Rightarrow\beta}{D_2}$, e mais ainda, como $V(\gamma) \subseteq V(\alpha_1) \cap V(\beta)$ e $V(\alpha_1) \subseteq V(\alpha_1 \wedge \alpha_2)$, ou seja, $V(\alpha_1) \cap V(\beta) \subseteq V(\alpha_1 \wedge \alpha_2) \cap V(\beta)$, temos também que $V(\gamma) \subseteq V(\alpha_1 \wedge \alpha_2) \cap V(\beta)$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\wedge_{L2}$:**

$$\dfrac{\begin{array}{c}D'\\ \alpha_2 \Rightarrow \beta\end{array}}{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \beta}\wedge_{L2}$$

Assumimos $P(D')$ como hipótese de indução.
De $P(D')$, existem $\gamma \in \mathcal{F}^{LL}$, $D_1', D_2 \in LL\text{-}cut$, tais que $\underset{\alpha_2\Rightarrow\gamma}{D_1'}$, $\underset{\gamma\Rightarrow\beta}{D_2}$ e $V(\gamma) \subseteq V(\alpha_2) \cap V(\beta)$.
Consideremos então a seguinte derivação $D_1 \in LL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{array}{c}D_1'\\ \alpha_2 \Rightarrow \gamma\end{array}}{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \gamma}\wedge_{L2}$$

Temos que $\underset{\alpha_1\wedge\alpha_2\Rightarrow\gamma}{D_1}$, $\underset{\gamma\Rightarrow\beta}{D_2}$, e mais ainda, como $V(\gamma) \subseteq V(\alpha_2) \cap V(\beta)$ e $V(\alpha_2) \subseteq V(\alpha_1 \wedge \alpha_2)$, ou seja, $V(\alpha_2) \cap V(\beta) \subseteq V(\alpha_1 \wedge \alpha_2) \cap V(\beta)$, temos também que $V(\gamma) \subseteq V(\alpha_1 \wedge \alpha_2) \cap V(\beta)$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\wedge_R$:**

$$\dfrac{\begin{array}{c}D'\\ \alpha \Rightarrow \beta_1\end{array} \qquad \begin{array}{c}D''\\ \alpha \Rightarrow \beta_2\end{array}}{\alpha \Rightarrow \beta_1 \wedge \beta_2}\wedge_R$$

Assumimos $P(D')$ e $P(D'')$ como hipóteses de indução.
De $P(D')$, existem $\gamma_1 \in \mathcal{F}^{LL}$, $D_1', D_2' \in LL\text{-}cut$, tais que $\underset{\alpha\Rightarrow\gamma_1}{D_1'}$, $\underset{\gamma_1\Rightarrow\beta_1}{D_2'}$ e $V(\gamma_1) \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta_1)$.
De $P(D'')$, existem $\gamma_2 \in \mathcal{F}^{LL}$, $D_1'', D_2'' \in LL\text{-}cut$, tais que $\underset{\alpha\Rightarrow\gamma_2}{D_1''}$, $\underset{\gamma_2\Rightarrow\beta_2}{D_2''}$ e $V(\gamma_2) \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta_2)$.
Consideremos então as seguintes derivações $D_1, D_2 \in LL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{array}{c}D_1'\\ \alpha \Rightarrow \gamma_1\end{array} \qquad \begin{array}{c}D_1''\\ \alpha \Rightarrow \gamma_2\end{array}}{\alpha \Rightarrow \gamma_1 \wedge \gamma_2}\wedge_R \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}D_2'\\ \gamma_1 \Rightarrow \beta_1\end{array}}{\gamma_1 \wedge \gamma_2 \Rightarrow \beta_1}\wedge_{L1} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}D_2''\\ \gamma_2 \Rightarrow \beta_2\end{array}}{\gamma_1 \wedge \gamma_2 \Rightarrow \beta_2}\wedge_{L2}}{\gamma_1 \wedge \gamma_2 \Rightarrow \beta_1 \wedge \beta_2}\wedge_R$$

Temos que $\underset{\alpha\Rightarrow\gamma_1\wedge\gamma_2}{D_1}$, $\underset{\gamma_1\wedge\gamma_2\Rightarrow\beta_1\wedge\beta_2}{D_2}$. Mais ainda, como $V(\gamma_1) \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta_1)$ e $V(\gamma_2) \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta_2)$, temos que $V(\gamma_1) \cup V(\gamma_2) \subseteq (V(\alpha) \cap V(\beta_1)) \cup (V(\alpha) \cap V(\beta_2))$, ou seja, $V(\gamma_1) \cup V(\gamma_2) \subseteq V(\alpha) \cap (V(\beta_1) \cup V(\beta_2))$, logo, $V(\gamma_1 \wedge \gamma_2) \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta_1 \wedge \beta_2)$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\vee_L$:**

$$\dfrac{\begin{array}{c}D'\\ \alpha_1 \Rightarrow \beta\end{array} \qquad \begin{array}{c}D''\\ \alpha_2 \Rightarrow \beta\end{array}}{\alpha_1 \vee \alpha_2 \Rightarrow \beta}\vee_L$$

Assumimos $P(D')$ e $P(D'')$ como hipóteses de indução.

De $P(D')$, existem $\gamma_1 \in \mathcal{F}^{LL}$, $D'_1, D'_2 \in LL\text{-}cut$, tais que $\underset{\alpha_1 \Rightarrow \gamma_1}{D'_1}$ , $\underset{\gamma_1 \Rightarrow \beta}{D'_2}$ e $V(\gamma_1) \subseteq V(\alpha_1) \cap V(\beta)$.

De $P(D'')$, existem $\gamma_2 \in \mathcal{F}^{LL}$, $D''_1, D''_2 \in LL\text{-}cut$, tais que $\underset{\alpha_2 \Rightarrow \gamma_2}{D''_1}$ , $\underset{\gamma_2 \Rightarrow \beta}{D''_2}$ e $V(\gamma_2) \subseteq V(\alpha_2) \cap V(\beta)$.

Consideremos então as seguintes derivações $D_1, D_2 \in LL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}D'_1\\ \alpha_1 \Rightarrow \gamma_1\end{array}}{\alpha_1 \Rightarrow \gamma_1 \vee \gamma_2}\vee_{R1} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}D''_1\\ \alpha_2 \Rightarrow \gamma_2\end{array}}{\alpha_2 \Rightarrow \gamma_1 \vee \gamma_2}\vee_{R2}}{\alpha_1 \vee \alpha_2 \Rightarrow \gamma_1 \vee \gamma_2}\vee_L \qquad\qquad \dfrac{\begin{array}{c}D'_2\\ \gamma_1 \Rightarrow \beta\end{array} \qquad \begin{array}{c}D''_2\\ \gamma_2 \Rightarrow \beta\end{array}}{\gamma_1 \vee \gamma_2 \Rightarrow \beta}\vee_L$$

Temos que $\underset{\alpha_1 \vee \alpha_2 \Rightarrow \gamma_1 \vee \gamma_2}{D_1}$ , $\underset{\gamma_1 \vee \gamma_2 \Rightarrow \beta}{D_2}$ . Mais ainda, como $V(\gamma_1) \subseteq V(\alpha_1) \cap V(\beta)$ e $V(\gamma_2) \subseteq V(\alpha_2) \cap V(\beta)$, temos que $V(\gamma_1) \cup V(\gamma_2) \subseteq (V(\alpha_1) \cap V(\beta)) \cup (V(\alpha_2) \cap V(\beta))$, ou seja, $V(\gamma_1) \cup V(\gamma_2) \subseteq (V(\alpha_1) \cup V(\alpha_2)) \cap V(\beta)$, logo, $V(\gamma_1 \vee \gamma_2) \subseteq V(\alpha_1 \vee \alpha_2) \cap V(\beta)$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\vee_{R1}$:**

$$\dfrac{\begin{array}{c}D'\\ \alpha \Rightarrow \beta_1\end{array}}{\alpha \Rightarrow \beta_1 \vee \beta_2}\vee_{R1}$$

Assumimos $P(D')$ como hipótese de indução.

De $P(D')$, existem $\gamma \in \mathcal{F}^{LL}$, $D_1, D'_2 \in LL\text{-}cut$, tais que $\underset{\alpha \Rightarrow \gamma}{D_1}$ , $\underset{\gamma \Rightarrow \beta_1}{D'_2}$ e $V(\gamma) \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta_1)$.

Consideremos então a seguinte derivação $D_2 \in LL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{array}{c}D'_2\\ \gamma \Rightarrow \beta_1\end{array}}{\gamma \Rightarrow \beta_1 \vee \beta_2}\vee_{R1}$$

Temos que $\underset{\alpha \Rightarrow \gamma}{D_1}$ , $\underset{\gamma \Rightarrow \beta_1 \vee \beta_2}{D_2}$ , e mais ainda, como $V(\gamma) \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta_1)$ e $V(\beta_1) \subseteq V(\beta_1 \vee \beta_2)$, ou seja, $V(\alpha) \cap V(\beta_1) \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta_1 \vee \beta_2)$, temos também que $V(\gamma) \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta_1 \vee \beta_2)$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\vee_{R2}$:**

$$\dfrac{\begin{array}{c}D'\\ \alpha \Rightarrow \beta_2\end{array}}{\alpha \Rightarrow \beta_1 \vee \beta_2}\vee_{R2}$$

Assumimos $P(D')$ como hipótese de indução.

De $P(D')$, existem $\gamma \in \mathcal{F}^{LL}$, $D_1, D'_2 \in LL\text{-}cut$, tais que $\underset{\alpha \Rightarrow \gamma}{D_1}$ , $\underset{\gamma \Rightarrow \beta_2}{D'_2}$ e $V(\gamma) \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta_2)$.

Consideremos então a seguinte derivação $D_2 \in LL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{array}{c}D'_2\\ \gamma \Rightarrow \beta_2\end{array}}{\gamma \Rightarrow \beta_1 \vee \beta_2}\vee_{R2}$$

Temos que $\underset{\alpha \Rightarrow \gamma}{D_1}$ , $\underset{\gamma \Rightarrow \beta_1 \vee \beta_2}{D_2}$ , e mais ainda, como $V(\gamma) \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta_2)$ e $V(\beta_2) \subseteq V(\beta_1 \vee \beta_2)$, ou seja, $V(\alpha) \cap V(\beta_2) \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta_1 \vee \beta_2)$, temos também que $V(\gamma) \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta_1 \vee \beta_2)$, e obtemos $P(D)$. $\square$

## 2.4 Teorema da Completude

**Teorema 22 (Completude em $LL$)**
Para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{LL}$, se $LL \models \alpha \Rightarrow \beta$, então $LL \vdash \alpha \Rightarrow \beta$.

*Demonstração.*
Comecemos por definir a seguinte relação de congruência $\approx$, em $\mathcal{F}^{LL}$, tal que para todo todo $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{LL}$:

$$\alpha \approx \beta \quad \text{sse} \quad LL \vdash \alpha \Rightarrow \beta \quad \text{e} \quad LL \vdash \beta \Rightarrow \alpha.$$

<u>Reflexividade</u>
Seja $\alpha \in \mathcal{F}^{LL}$. Pela Proposiçao 20, temos que o mono-sequente $\alpha \Rightarrow \alpha$ é derivável em $LL$, segue que: $LL \vdash \alpha \Rightarrow \alpha$ e $LL \vdash \alpha \Rightarrow \alpha$, logo, $\alpha \approx \alpha$.

<u>Simetria</u>
Sejam $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{LL}$ tais que $\alpha \approx \beta$. Então temos que $LL \vdash \alpha \Rightarrow \beta$ e $LL \vdash \beta \Rightarrow \alpha$, ou seja, $LL \vdash \beta \Rightarrow \alpha$ e $LL \vdash \alpha \Rightarrow \beta$. Concluímos então $\beta \approx \alpha$.

<u>Transitividade</u>
Sejam $\alpha, \gamma, \beta \in \mathcal{F}^{LL}$ tais que $\alpha \approx \gamma$ e $\gamma \approx \beta$.
De $\alpha \approx \gamma$, temos que $LL \vdash \alpha \Longrightarrow \gamma$ e $LL \vdash \gamma \Longrightarrow \alpha$, ou seja, existem $D_1, D_2 \in LL$ tais que $\underset{\alpha \Longrightarrow \gamma}{D_1}$ e $\underset{\gamma \Longrightarrow \alpha}{D_2}$.
De $\gamma \approx \beta$, temos que $LL \vdash \gamma \Longrightarrow \beta$ e $LL \vdash \beta \Longrightarrow \gamma$, ou seja, existem $D_3, D_4 \in LL$ tais que $\underset{\gamma \Longrightarrow \beta}{D_3}$ e $\underset{\beta \Longrightarrow \gamma}{D_4}$.
Consideremos então as seguintes derivações em $LL$:

$$\dfrac{\overset{D_1}{\alpha \Rightarrow \gamma} \qquad \overset{D_3}{\gamma \Rightarrow \beta}}{\alpha \Rightarrow \beta}\,cut \qquad\qquad \dfrac{\overset{D_4}{\beta \Rightarrow \gamma} \qquad \overset{D_2}{\gamma \Rightarrow \alpha}}{\beta \Rightarrow \alpha}\,cut$$

Temos então que $LL \vdash \alpha \Rightarrow \beta$ e $LL \vdash \beta \Rightarrow \alpha$, logo, $\alpha \approx \beta$.

<u>Compatibilidade com $\wedge$ e $\vee$</u>
Sejam $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathcal{F}^{LL}$ tais que $\alpha \approx \gamma$ e $\beta \approx \delta$.
De $\alpha \approx \gamma$, temos que $LL \vdash \alpha \Rightarrow \gamma$ e $LL \vdash \gamma \Rightarrow \alpha$, ou seja, existem $D_1, D_2 \in LL$ tais que $\underset{\alpha \Longrightarrow \gamma}{D_1}$ e $\underset{\gamma \Longrightarrow \alpha}{D_2}$.
De $\beta \approx \delta$, temos que $LL \vdash \beta \Rightarrow \delta$ e $LL \vdash \delta \Rightarrow \beta$, ou seja, existem $D_3, D_4 \in LL$ tais que $\underset{\beta \Longrightarrow \delta}{D_3}$ e $\underset{\delta \Longrightarrow \beta}{D_4}$.
Consideremos então as seguintes derivações em $LL$:

$$\dfrac{\dfrac{\overset{D_1}{\alpha \Rightarrow \gamma}}{\alpha \wedge \beta \Rightarrow \gamma}\wedge_{L1} \qquad \dfrac{\overset{D_3}{\beta \Rightarrow \delta}}{\alpha \wedge \beta \Rightarrow \delta}\wedge_{L2}}{\alpha \wedge \beta \Rightarrow \gamma \wedge \delta}\wedge_R \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{\overset{D_2}{\gamma \Rightarrow \alpha}}{\gamma \wedge \delta \Rightarrow \alpha}\wedge_{L1} \qquad \dfrac{\overset{D_4}{\delta \Rightarrow \beta}}{\gamma \wedge \delta \Rightarrow \beta}\wedge_{L2}}{\gamma \wedge \delta \Rightarrow \alpha \wedge \beta}\wedge_R$$

Temos então que $LL \vdash \alpha \wedge \beta \Rightarrow \gamma \wedge \delta$ e $LL \vdash \gamma \wedge \delta \Rightarrow \alpha \wedge \beta$, logo, $\alpha \wedge \beta \approx \gamma \wedge \delta$.

$$\dfrac{\dfrac{\alpha \Rightarrow \gamma}{\alpha \Rightarrow \gamma \vee \delta}\vee_{R1} \qquad \dfrac{\beta \Rightarrow \delta}{\beta \Rightarrow \gamma \vee \delta}\vee_{R2}}{\alpha \vee \beta \Rightarrow \gamma \vee \delta}\vee_L \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{\gamma \Rightarrow \alpha}{\gamma \Rightarrow \alpha \vee \beta}\vee_{R1} \qquad \dfrac{\delta \Rightarrow \beta}{\delta \Rightarrow \alpha \vee \beta}\vee_{R2}}{\gamma \vee \delta \Rightarrow \alpha \vee \beta}\vee_L$$

Temos então que $LL \vdash \alpha \vee \beta \Rightarrow \gamma \vee \delta$ e $LL \vdash \gamma \vee \delta \Rightarrow \alpha \vee \beta$, logo, $\alpha \vee \beta \approx \gamma \vee \delta$.

Visto então que $\approx$ é uma relação de congruência em $\mathcal{F}^{LL}$, definimos a classe de congruência de qualquer $\alpha \in \mathcal{F}^{LL}$ da seguinte forma:

$$[\alpha] = \{\beta \in \mathcal{F}^{LL} \mid \alpha \approx \beta\}$$

De seguida, definimos o conjunto das classes de congruência:

$$\mathcal{F}^{LL}/\approx\, = \{[\alpha] \mid \alpha \in \mathcal{F}^{LL}\}$$

Definimos agora as seguintes operações, $\sqcup, \sqcap$, em $\mathcal{F}^{LL}/\approx$, tais que para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{LL}$:

- $[\alpha] \sqcup [\beta] = [\alpha \vee \beta]$
- $[\alpha] \sqcap [\beta] = [\alpha \wedge \beta]$

Agora, será provado que $\mathcal{F}^{\approx} = (\mathcal{F}^{LL}/\approx, \sqcup, \sqcap)$ é um reticulado.

<u>Comutatividade</u>
Sejam $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{LL}$. Pela Proposição 20, existem $D_1, D_2 \in LL$ tais que $\underset{\alpha\Rightarrow\alpha}{D_1}$ e $\underset{\beta\Rightarrow\beta}{D_2}$.
Consideremos então as seguintes derivações em $LL$:

$$\dfrac{\dfrac{\overset{D_1}{\alpha\Rightarrow\alpha}}{\beta\wedge\alpha\Rightarrow\alpha}\wedge_{L2} \qquad \dfrac{\overset{D_2}{\beta\Rightarrow\beta}}{\beta\wedge\alpha\Rightarrow\beta}\wedge_{L1}}{\beta\wedge\alpha\Rightarrow\alpha\wedge\beta}\wedge_R \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{\overset{D_2}{\beta\Rightarrow\beta}}{\alpha\wedge\beta\Rightarrow\beta}\wedge_{L2} \qquad \dfrac{\overset{D_1}{\alpha\Rightarrow\alpha}}{\alpha\wedge\beta\Rightarrow\alpha}\wedge_{L1}}{\alpha\wedge\beta\Rightarrow\beta\wedge\alpha}\wedge_R$$

Temos então $LL \vdash \beta\wedge\alpha \Rightarrow \alpha\wedge\beta$ e $LL \vdash \alpha\wedge\beta \Rightarrow \beta\wedge\alpha$, logo, $\beta\wedge\alpha \approx \alpha\wedge\beta$, ou seja, $[\beta\wedge\alpha] = [\alpha\wedge\beta]$, e concluímos $[\beta] \sqcap [\alpha] = [\alpha] \sqcap [\beta]$.

Consideremos ainda as seguintes derivações em $LL$:

$$\dfrac{\dfrac{\overset{D_1}{\alpha\Rightarrow\alpha}}{\alpha\Rightarrow\beta\vee\alpha}\vee_{R2} \qquad \dfrac{\overset{D_2}{\beta\Rightarrow\beta}}{\beta\Rightarrow\beta\vee\alpha}\vee_{R1}}{\alpha\vee\beta\Rightarrow\beta\vee\alpha}\vee_L \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{\overset{D_2}{\beta\Rightarrow\beta}}{\beta\Rightarrow\alpha\vee\beta}\vee_{R2} \qquad \dfrac{\overset{D_1}{\alpha\Rightarrow\alpha}}{\alpha\Rightarrow\alpha\vee\beta}\vee_{R1}}{\beta\vee\alpha\Rightarrow\alpha\vee\beta}\vee_L$$

Temos então $LL \vdash \alpha\vee\beta \Rightarrow \beta\vee\alpha$ e $LL \vdash \beta\vee\alpha \Rightarrow \alpha\vee\beta$, logo, $\alpha\vee\beta \approx \beta\vee\alpha$, ou seja, $[\alpha\vee\beta] = [\beta\vee\alpha]$, e concluímos $[\alpha] \sqcup [\beta] = [\beta] \sqcup [\alpha]$.

<u>Associatividade</u>
Sejam $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{F}^{LL}$. Pela Proposição 20, existem $D_1, D_2, D_3 \in LL$ tais que $\underset{\alpha\Rightarrow\alpha}{D_1}$, $\underset{\beta\Rightarrow\beta}{D_2}$ e $\underset{\gamma\Rightarrow\gamma}{D_3}$.
Consideremos as seguintes derivações em $LL$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{D_1}{\alpha\Rightarrow\alpha}}{\alpha\wedge\beta\Rightarrow\alpha}\wedge_{L1}}{(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma\Rightarrow\alpha}\wedge_{L1} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{D_2}{\beta\Rightarrow\beta}}{\alpha\wedge\beta\Rightarrow\beta}\wedge_{L2}}{(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma\Rightarrow\beta}\wedge_{L1} \qquad \dfrac{\overset{D_3}{\gamma\Rightarrow\gamma}}{(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma\Rightarrow\gamma}\wedge_{L2}}{(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma\Rightarrow\beta\wedge\gamma}\wedge_R}{(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma\Rightarrow\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma)}\wedge_R$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{D_1}{\alpha \Rightarrow \alpha}}{\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \Rightarrow \alpha}\wedge_{L1} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{D_2}{\beta \Rightarrow \beta}}{\beta \wedge \gamma \Rightarrow \beta}\wedge_{L1}}{\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \Rightarrow \beta}\wedge_{L2}}{\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \Rightarrow \alpha \wedge \beta}\wedge_{R} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{D_3}{\gamma \Rightarrow \gamma}}{\beta \wedge \gamma \Rightarrow \gamma}\wedge_{L2}}{\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \Rightarrow \gamma}\wedge_{L2}}{\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \Rightarrow (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma}\wedge_{R}$$

Temos então $LL \vdash (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \Rightarrow \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$ e $LL \vdash \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \Rightarrow (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$.

Logo, $(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma \approx \alpha\wedge(\beta\wedge\gamma)$, ou seja, $[(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma] = [\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma)]$, mais ainda, $[(\alpha\wedge\beta)]\sqcap[\gamma] = [\alpha]\sqcap[(\beta\wedge\gamma)]$, e concluímos $([\alpha] \sqcap [\beta]) \sqcap [\gamma] = [\alpha] \sqcap ([\beta] \sqcap [\gamma])$.

Consideremos ainda as seguintes derivações em $LL$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{D_1}{\alpha \Rightarrow \alpha}}{\alpha \Rightarrow \alpha \vee (\beta \vee \gamma)}\vee_{R1} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{D_2}{\beta \Rightarrow \beta}}{\beta \Rightarrow \beta \vee \gamma}\vee_{R1}}{\beta \Rightarrow \alpha \vee (\beta \vee \gamma)}\vee_{R2}}{\alpha \vee \beta \Rightarrow \alpha \vee (\beta \vee \gamma)}\vee_{L} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{D_3}{\gamma \Rightarrow \gamma}}{\gamma \Rightarrow (\beta \vee \gamma)}\vee_{R2}}{\gamma \Rightarrow \alpha \vee (\beta \vee \gamma)}\vee_{R2}}{(\alpha \vee \beta) \vee \gamma \Rightarrow \alpha \vee (\beta \vee \gamma)}\vee_{L}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{D_1}{\alpha \Rightarrow \alpha}}{\alpha \Rightarrow \alpha \vee \beta}\vee_{R1}}{\alpha \Rightarrow (\alpha \vee \beta) \vee \gamma}\vee_{R1} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{D_2}{\beta \Rightarrow \beta}}{\beta \Rightarrow \alpha \vee \beta}\vee_{R2}}{\beta \Rightarrow (\alpha \vee \beta) \vee \gamma}\vee_{R1} \qquad \dfrac{\overset{D_3}{\gamma \Rightarrow \gamma}}{\gamma \Rightarrow (\alpha \vee \beta) \vee \gamma}\vee_{R2}}{\beta \vee \gamma \Rightarrow (\alpha \vee \beta) \vee \gamma}\vee_{L}}{\alpha \vee (\beta \vee \gamma) \Rightarrow (\alpha \vee \beta) \vee \gamma}\vee_{L}$$

Temos então $LL \vdash (\alpha \vee \beta) \vee \gamma \Rightarrow \alpha \vee (\beta \vee \gamma)$ e $LL \vdash \alpha \vee (\beta \vee \gamma) \Rightarrow (\alpha \vee \beta) \vee \gamma$.

Logo, $(\alpha\vee\beta)\vee\gamma \approx \alpha\vee(\beta\vee\gamma)$, ou seja, $[(\alpha\vee\beta)\vee\gamma] = [\alpha\vee(\beta\vee\gamma)]$, mais ainda, $[(\alpha\vee\beta)]\sqcup[\gamma] = [\alpha]\sqcup[(\beta\vee\gamma)]$, e concluímos $([\alpha] \sqcup [\beta]) \sqcup [\gamma] = [\alpha] \sqcup ([\beta] \sqcup [\gamma])$.

<u>Idempotência</u>

Seja $\alpha \in \mathcal{F}^{LL}$. Pela Proposição 20, existe $D_1 \in LL$ tal que $\underset{\alpha\Rightarrow\alpha}{D_1}$.

Consideremos então as seguintes derivações em $LL$:

$$\dfrac{\overset{D_1}{\alpha \Rightarrow \alpha} \qquad \overset{D_1}{\alpha \Rightarrow \alpha}}{\alpha \Rightarrow \alpha \wedge \alpha}\wedge_{R} \qquad\qquad \dfrac{\overset{D_1}{\alpha \Rightarrow \alpha}}{\alpha \wedge \alpha \Rightarrow \alpha}\wedge_{L1}$$

Temos então $LL \vdash \alpha \Rightarrow \alpha \wedge \alpha$ e $LL \vdash \alpha \wedge \alpha \Rightarrow \alpha$, logo, $\alpha \approx \alpha \wedge \alpha$, ou seja, $[\alpha] = [\alpha \wedge \alpha]$, e concluímos $[\alpha] = [\alpha] \sqcap [\alpha]$.

Consideremos ainda as seguintes derivações em $LL$:

$$\dfrac{\overset{D_1}{\alpha \Rightarrow \alpha}}{\alpha \Rightarrow \alpha \vee \alpha}\vee_{R1} \qquad\qquad \dfrac{\overset{D_1}{\alpha \Rightarrow \alpha} \qquad \overset{D_1}{\alpha \Rightarrow \alpha}}{\alpha \vee \alpha \Rightarrow \alpha}\vee_{L}$$

Temos então $LL \vdash \alpha \Rightarrow \alpha \vee \alpha$ e $LL \vdash \alpha \vee \alpha \Rightarrow \alpha$, logo, $\alpha \approx \alpha \vee \alpha$, ou seja, $\equiv [\alpha] = [\alpha \vee \alpha]$, e concluímos $[\alpha] = [\alpha] \sqcup [\alpha]$.

<u>Absorção</u>

Sejam $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{LL}$. Pela Proposição 20, existem $D_1, D_2 \in LL$ tais que $\underset{\alpha \Rightarrow \alpha}{D_1}$ e $\underset{\beta \Rightarrow \beta}{D_2}$.

Consideremos então as seguintes derivações em $LL$:

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1 \\ \alpha \Rightarrow \alpha \end{matrix} \qquad \dfrac{\begin{matrix} D_1 \\ \alpha \Rightarrow \alpha \end{matrix}}{\alpha \Rightarrow \alpha \vee \beta} \vee_{R1}}{\alpha \Rightarrow \alpha \wedge (\alpha \vee \beta)} \wedge_R \qquad\qquad \dfrac{\begin{matrix} D_1 \\ \alpha \Rightarrow \alpha \end{matrix}}{\alpha \wedge (\alpha \vee \beta) \Rightarrow \alpha} \wedge_{L1}$$

Temos então $LL \vdash \alpha \Rightarrow \alpha \wedge (\alpha \vee \beta)$ e $LL \vdash \alpha \wedge (\alpha \vee \beta) \Rightarrow \alpha$, logo, $\alpha \approx \alpha \wedge (\alpha \vee \beta)$, ou seja, $[\alpha] = [\alpha \wedge (\alpha \vee \beta)]$, mais ainda, $[\alpha] = [\alpha] \sqcap [(\alpha \vee \beta)]$, e concluímos $[\alpha] = [\alpha] \sqcap ([\alpha] \sqcup [\beta])$.

Consideremos ainda as seguintes derivações em $LL$:

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1 \\ \alpha \Rightarrow \alpha \end{matrix}}{\alpha \Rightarrow \alpha \vee (\alpha \wedge \beta)} \vee_{R1} \qquad\qquad \dfrac{\begin{matrix} D_1 \\ \alpha \Rightarrow \alpha \end{matrix} \qquad \dfrac{\begin{matrix} D_1 \\ \alpha \Rightarrow \alpha \end{matrix}}{\alpha \wedge \beta \Rightarrow \alpha} \wedge_{L1}}{\alpha \vee (\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \alpha} \vee_L$$

Temos então $LL \vdash \alpha \Rightarrow \alpha \vee (\alpha \wedge \beta)$ e $LL \vdash \alpha \vee (\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \alpha$, logo, $\alpha \approx \alpha \vee (\alpha \wedge \beta)$, ou seja, $[\alpha] = [\alpha \vee (\alpha \wedge \beta)]$, mais ainda, $[\alpha] = [\alpha] \sqcup [(\alpha \wedge \beta)]$, e concluímos $[\alpha] = [\alpha] \sqcup ([\alpha] \sqcap [\beta])$.

Visto então que $\mathcal{F}^{\approx} = (\mathcal{F}^{LL}/\approx, \sqcup, \sqcap)$ é um reticulado, a relação de ordem parcial $\sqsubseteq_{\approx}$ em $\mathcal{F}^{LL}/\approx$ define-se da seguinte forma:

$$[\alpha] \sqsubseteq_{\approx} [\beta] \quad \text{sse} \quad [\alpha] = [\alpha] \sqcap [\beta] \quad \text{sse} \quad [\beta] = [\alpha] \sqcup [\beta]$$

Consideremos a seguinte aplicação $v$ de $\mathcal{F}^{LL}$ em $\mathcal{F}^{LL}/\approx$, tal que para qualquer $\alpha \in \mathcal{F}^{LL}$, $v(\alpha) = [\alpha]$.
Sejam $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{LL}$, temos que:

- $v(\alpha \wedge \beta) = [\alpha \wedge \beta] = [\alpha] \sqcap [\beta] = v(\alpha) \sqcap v(\beta)$
- $v(\alpha \vee \beta) = [\alpha \vee \beta] = [\alpha] \sqcup [\beta] = v(\alpha) \sqcup v(\beta)$

Concluímos então, que $v$ é uma valoração em $\mathcal{F}^{\approx}$.

Sejam $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{LL}$ tais que $LL \nvdash \alpha \Rightarrow \beta$.
Supomos agora que $LL \models \alpha \Rightarrow \beta$, ou seja, para todo o reticulado $\mathcal{L}$, para toda a valoração $v'$ em $\mathcal{L}$, $v'(\alpha) \sqsubseteq_{\mathcal{L}} v'(\beta)$. Então em particular, considerando o reticulado $\mathcal{F}^{\approx} = (\mathcal{F}^{LL}/\approx, \sqcup, \sqcap)$, e a valoração $v$, temos que $v(\alpha) \sqsubseteq_{\approx} v(\beta)$. Temos então $v(\alpha) \sqsubseteq_{\approx} v(\beta)$, logo, $v(\alpha) = v(\alpha) \sqcap v(\beta)$, ou seja, $[\alpha] = [\alpha] \sqcap [\beta]$, mais ainda, $[\alpha] = [\alpha \wedge \beta]$, e então $\alpha \approx \alpha \wedge \beta$. Segue então que $LL \vdash \alpha \Rightarrow \alpha \wedge \beta$ e $LL \vdash \alpha \wedge \beta \Rightarrow \alpha$. Logo, existe $D_1 \in LL$, tal que $\underset{\alpha \Rightarrow \alpha \wedge \beta}{D_1}$. Pela Proposição 20, temos também que existe $D_2 \in LL$, tal que $\underset{\beta \Rightarrow \beta}{D_2}$.
Consideremos então a seguinte derivação em $LL$:

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1 \\ \alpha \Rightarrow \alpha \wedge \beta \end{matrix} \qquad \dfrac{\begin{matrix} D_2 \\ \beta \Rightarrow \beta \end{matrix}}{\alpha \wedge \beta \Rightarrow \beta} \wedge_{L2}}{\alpha \Rightarrow \beta} \, cut$$

Temos então $LL \vdash \alpha \Rightarrow \beta$, mas no entanto, sabemos que $LL \nvdash \alpha \Rightarrow \beta$, e chegamos a um absurdo, logo, por redução ao absurdo concluímos que $LL \not\models \alpha \Rightarrow \beta$.
Ora concluímos então que se $LL \nvdash \alpha \Rightarrow \beta$, então $LL \not\models \alpha \Rightarrow \beta$. De forma equivalente, concluímos que se $LL \models \alpha \Rightarrow \beta$, então $LL \vdash \alpha \Rightarrow \beta$. □

## 2.5 Teorema da Correção

**Teorema 23 (Correção em $LL$)**
Para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{LL}$, se $LL \vdash \alpha \Rightarrow \beta$, então $LL \models \alpha \Rightarrow \beta$.

*Demonstração.* Por indução em derivações de $LL$.
Para todo $D \in LL$, $P(D)$ : se $\underset{\alpha\Rightarrow\beta}{D}$, com $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{LL}$, então, para todo o reticulado $\mathcal{L}$ e para toda a valoração $v$ em $\mathcal{L}$, temos que $v(\alpha) \sqsubseteq_{\mathcal{L}} v(\beta)$.

**Caso $A$:**

$$\frac{}{p \Rightarrow p}\ A$$

Sejam então $\mathcal{L} = (L, \sqcup, \sqcap)$ um reticulado, e $v$ uma valoração em $\mathcal{L}$.
Temos que $v(p) = v(p) \wedge v(p)$, logo, $v(p) \sqsubseteq_{\mathcal{L}} v(p)$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\wedge_{L1}$:**

$$\frac{\begin{array}{c} D_1 \\ \alpha_1 \Rightarrow \beta \end{array}}{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \beta}\ \wedge_{L1}$$

Sejam então $\mathcal{L} = (L, \sqcup, \sqcap)$ um reticulado, e $v$ uma valoração em $\mathcal{L}$.
Assumimos $P(D_1)$ como hipótese de indução. De $P(D_1)$ temos que:
$v(\alpha_1) \sqsubseteq_{\mathcal{L}} v(\beta) \equiv v(\alpha_1) = v(\alpha_1) \sqcap v(\beta) \Longrightarrow v(\alpha_1) \sqcap v(\alpha_2) = (v(\alpha_1) \sqcap v(\beta)) \sqcap v(\alpha_2)$
$\equiv v(\alpha_1) \sqcap v(\alpha_2) = v(\alpha_1) \sqcap (v(\beta) \sqcap v(\alpha_2)) \equiv v(\alpha_1) \sqcap v(\alpha_2) = v(\alpha_1) \sqcap (v(\alpha_2) \sqcap v(\beta))$
$\equiv v(\alpha_1) \sqcap v(\alpha_2) = (v(\alpha_1) \sqcap v(\alpha_2)) \sqcap v(\beta) \equiv v(\alpha_1 \wedge \alpha_2) = v(\alpha_1 \wedge \alpha_2) \sqcap v(\beta)$
$\equiv v(\alpha_1 \wedge \alpha_2) \sqsubseteq_{\mathcal{L}} v(\beta)$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\wedge_{L2}$:**

$$\frac{\begin{array}{c} D_1 \\ \alpha_2 \Rightarrow \beta \end{array}}{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \beta}\ \wedge_{L2}$$

Sejam então $\mathcal{L} = (L, \sqcup, \sqcap)$ um reticulado, e $v$ uma valoração em $\mathcal{L}$.
Assumimos $P(D_1)$ como hipótese de indução. De $P(D_1)$ temos que:
$v(\alpha_2) \sqsubseteq_{\mathcal{L}} v(\beta) \equiv v(\alpha_2) = v(\alpha_2) \sqcap v(\beta) \Longrightarrow v(\alpha_1) \sqcap v(\alpha_2) = v(\alpha_1) \sqcap (v(\alpha_2) \sqcap v(\beta))$
$\equiv v(\alpha_1) \sqcap v(\alpha_2) = (v(\alpha_1) \sqcap v(\alpha_2)) \sqcap v(\beta) \equiv v(\alpha_1 \wedge \alpha_2) = v(\alpha_1 \wedge \alpha_2) \sqcap v(\beta)$
$\equiv v(\alpha_1 \wedge \alpha_2) \sqsubseteq_{\mathcal{L}} v(\beta)$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\wedge_R$:**

$$\frac{\begin{array}{c} D_1 \\ \alpha \Rightarrow \beta_1 \end{array} \qquad \begin{array}{c} D_2 \\ \alpha \Rightarrow \beta_2 \end{array}}{\alpha \Rightarrow \beta_1 \wedge \beta_2}\ \wedge_R$$

Sejam então $\mathcal{L} = (L, \sqcup, \sqcap)$ um reticulado, e $v$ uma valoração em $\mathcal{L}$.
Assumimos $P(D_1)$ e $P(D_2)$ como hipóteses de indução. De $P(D_1)$ e $P(D_2)$ temos que:
$v(\alpha) \sqsubseteq_{\mathcal{L}} v(\beta_1)$ e $v(\alpha) \sqsubseteq_{\mathcal{L}} v(\beta_2) \equiv v(\alpha) = v(\alpha) \sqcap v(\beta_1)$ e $v(\alpha) = v(\alpha) \sqcap v(\beta_2)$
$\equiv v(\alpha) = (v(\alpha) \sqcap v(\beta_2)) \sqcap v(\beta_1) \equiv v(\alpha) = v(\alpha) \sqcap (v(\beta_2) \sqcap v(\beta_1)) \equiv v(\alpha) = v(\alpha) \sqcap (v(\beta_1) \sqcap v(\beta_2))$
$\equiv v(\alpha) = v(\alpha) \sqcap v(\beta_2 \wedge \beta_1) \equiv v(\alpha) \sqsubseteq_{\mathcal{L}} v(\beta_1 \wedge \beta_2)$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\vee_L$:**

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1 & & D_2 \\ \alpha_1 \Rightarrow \beta & & \alpha_2 \Rightarrow \beta \end{matrix}}{\alpha_1 \vee \alpha_2 \Rightarrow \beta} \vee_L$$

Sejam então $\mathcal{L} = (L, \sqcup, \sqcap)$ um reticulado, e $v$ uma valoração em $\mathcal{L}$.
Assumimos $P(D_1)$ e $P(D_2)$ como hipóteses de indução. De $P(D_1)$ e $P(D_2)$ temos que:
$v(\alpha_1) \sqsubseteq_{\mathcal{L}} v(\beta)$ e $v(\alpha_2) \sqsubseteq_{\mathcal{L}} v(\beta) \equiv v(\beta) = v(\alpha_1) \sqcup v(\beta)$ e $v(\beta) = v(\alpha_2) \sqcup v(\beta)$
$\equiv v(\beta) = v(\alpha_1) \sqcup (v(\alpha_2) \sqcup v(\beta)) \equiv v(\beta) = (v(\alpha_1) \sqcup v(\alpha_2)) \sqcup v(\beta) \equiv v(\beta) = v(\alpha_1 \vee \alpha_2) \sqcup v(\beta)$
$\equiv v(\alpha_1 \vee \alpha_2) \sqsubseteq_{\mathcal{L}} v(\beta)$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\vee_{R1}$:**

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1 \\ \alpha \Rightarrow \beta_1 \end{matrix}}{\alpha \Rightarrow \beta_1 \vee \beta_2} \vee_{R1}$$

Sejam então $\mathcal{L} = (L, \sqcup, \sqcap)$ um reticulado, e $v$ uma valoração em $\mathcal{L}$.
Assumimos $P(D_1)$ como hipótese de indução. De $P(D_1)$ temos que:
$v(\alpha) \sqsubseteq_{\mathcal{L}} v(\beta_1) \equiv v(\beta_1) = v(\beta_1) \sqcup v(\alpha) \Longrightarrow v(\beta_2) \sqcup v(\beta_1) = v(\beta_2) \sqcup (v(\beta_1) \sqcup v(\alpha))$
$\equiv v(\beta_1) \sqcup v(\beta_2) = (v(\beta_2) \sqcup v(\beta_1)) \sqcup v(\alpha) \equiv v(\beta_1) \sqcup v(\beta_2) = (v(\beta_1) \sqcup v(\beta_2)) \sqcup v(\alpha)$
$\equiv v(\beta_1 \vee \beta_2) = v(\beta_1 \vee \beta_2) \sqcup v(\alpha) \equiv v(\alpha) \sqsubseteq_{\mathcal{L}} v(\beta_1 \vee \beta_2)$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\vee_{R2}$:**

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1 \\ \alpha \Rightarrow \beta_2 \end{matrix}}{\alpha \Rightarrow \beta_1 \vee \beta_2} \vee_{R2}$$

Sejam então $\mathcal{L} = (L, \sqcup, \sqcap)$ um reticulado, e $v$ uma valoração em $\mathcal{L}$.
Assumimos $P(D_1)$ como hipótese de indução. De $P(D_1)$ temos que:
$v(\alpha) \sqsubseteq_{\mathcal{L}} v(\beta_2) \equiv v(\beta_2) = v(\beta_2) \sqcup v(\alpha) \Longrightarrow v(\beta_1) \sqcup v(\beta_2) = v(\beta_1) \sqcup (v(\beta_2) \sqcup v(\alpha))$
$\equiv v(\beta_1) \sqcup v(\beta_2) = (v(\beta_1) \sqcup v(\beta_2)) \sqcup v(\alpha) \equiv v(\beta_1 \vee \beta_2) = v(\beta_1 \vee \beta_2) \sqcup v(\alpha) \equiv v(\alpha) \sqsubseteq_{\mathcal{L}} v(\beta_1 \vee \beta_2)$,
e obtemos $P(D)$.

**Caso *cut*:**

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1 & & D_2 \\ \alpha \Rightarrow \gamma & & \gamma \Rightarrow \beta \end{matrix}}{\alpha \Rightarrow \beta} \mathit{cut}$$

Sejam então $\mathcal{L} = (L, \sqcup, \sqcap)$ um reticulado, e $v$ uma valoração em $\mathcal{L}$.
Assumimos $P(D_1)$ e $P(D_2)$ como hipótese de indução. De $P(D_1)$ e $P(D_2)$ temos que:
$v(\alpha) \sqsubseteq_{\mathcal{L}} v(\gamma)$ e $v(\gamma) \sqsubseteq_{\mathcal{L}} v(\beta) \equiv v(\alpha) \sqsubseteq_{\mathcal{L}} v(\beta)$, e obtemos $P(D)$. $\square$

## 2.6 Eliminação e Admissibilidade do Corte Decidibilidade

**Definição 24 (Tamanho de uma derivação)**
A função $|\cdot|: LL\text{-}cut \longrightarrow \mathbb{N}$, que associa a cada derivação o seu tamanho, é definida indutivamente por:

$$\left|\frac{}{p \Rightarrow p}\,A\right| = 1$$

$$\left|\dfrac{\begin{matrix} D_1 \\ \alpha_1 \Rightarrow \beta \end{matrix}}{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \beta}\,\wedge_{L1}\right| = 1 + |D_1| \qquad \left|\dfrac{\begin{matrix} D_1 \\ \alpha_2 \Rightarrow \beta \end{matrix}}{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \beta}\,\wedge_{L2}\right| = 1 + |D_1|$$

$$\left|\dfrac{\begin{matrix} D_1 \\ \alpha \Rightarrow \beta_1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} D_2 \\ \alpha \Rightarrow \beta_2 \end{matrix}}{\alpha \Rightarrow \beta_1 \wedge \beta_2}\,\wedge_{R}\right| = 1 + \max\{|D_1|, |D_2|\} \qquad \left|\dfrac{\begin{matrix} D_1 \\ \alpha_1 \Rightarrow \beta \end{matrix} \qquad \begin{matrix} D_2 \\ \alpha_1 \Rightarrow \beta \end{matrix}}{\alpha_1 \vee \alpha_2 \Rightarrow \beta_2}\,\vee_{L}\right| = 1 + \max\{|D_1|, |D_2|\}$$

$$\left|\dfrac{\begin{matrix} D_1 \\ \alpha \Rightarrow \beta_1 \end{matrix}}{\alpha \Rightarrow \beta_1 \vee \beta_2}\,\vee_{R1}\right| = 1 + |D_1| \qquad \left|\dfrac{\begin{matrix} D_1 \\ \alpha \Rightarrow \beta_2 \end{matrix}}{\alpha \Rightarrow \beta_1 \vee \beta_2}\,\vee_{R2}\right| = 1 + |D_1|$$

**Proposição 25**
Para quaisquer $D_1, D_2 \in LL\text{-}cut$, $|D_1| + |D_2| \geq 2$.

**Teorema 26 (Admissibilidade do Corte em $LL$-*cut*)**
Para quaisquer $\alpha, \gamma, \beta \in \mathcal{F}^{LL}$, se $LL\text{-}cut \vdash \alpha \Rightarrow \gamma$ e $LL\text{-}cut \vdash \gamma \Rightarrow \beta$, então $LL\text{-}cut \vdash \alpha \Rightarrow \beta$.

*Demonstração.* Por indução em $\mathbb{N}$.
Para todo $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, $P(n)$ : para quaisquer $D_1, D_2 \in LL\text{-}cut$, tais que $\underset{\alpha\Rightarrow\gamma}{D_1}$, $\underset{\gamma\Rightarrow\beta}{D_2}$ e $|D_1| + |D_2| \leq n$, com $\alpha, \gamma, \beta \in \mathcal{F}^{LL}$, então existe $D \in LL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha\Rightarrow\beta}{D}$.

Para quaisquer par de derivações $D_1, D_2 \in LL\text{-}cut$ temos os seguintes casos possíveis:

- Ambas as derivações são obtidas a partir da inferência axiomática $A$.
- Apenas uma das derivações é obtida a partir da inferência axiomática $A$.
- A última inferência em $D_1$ altera a fórmula direita do sequente, e a última inferência em $D_2$ altera a fórmula esquerda do sequente.
- A última inferência em $D_1$ altera a fórmula esquerda do sequente, ou a última inferência em $D_2$ altera a fórmula direita do sequente.

**Caso $n = 2$:**

$$\frac{}{p \Rightarrow p}\,A \qquad\qquad \frac{}{p \Rightarrow p}\,A$$

Seja $D$=$D_1$. Temos então, $\underset{p\Rightarrow p}{D}$, e obtemos $P(n)$.

**Caso** $n > 2$**:**

**Subcaso:**

$$\dfrac{}{p \Rightarrow p}\,A \qquad\qquad \begin{array}{c} D_2 \\ \gamma \Rightarrow \beta \end{array}$$

Seja $D = D_2$. Temos então, $\underset{p\Rightarrow\beta}{D}$, e obtemos $P(n)$.

**Subcaso:**

$$\begin{array}{c} D_1 \\ \alpha \Rightarrow \gamma \end{array} \qquad\qquad \dfrac{}{p \Rightarrow p}\,A$$

Seja $D = D_1$. Temos então, $\underset{\alpha\Rightarrow p}{D}$, e obtemos $P(n)$.

**Subcaso:**

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_1' \\ \alpha \Rightarrow \gamma_1 \end{array} \qquad \begin{array}{c} D_1'' \\ \alpha \Rightarrow \gamma_2 \end{array}}{\alpha \Rightarrow \gamma_1 \wedge \gamma_2}\,\wedge_R \qquad\qquad \dfrac{\begin{array}{c} D_2' \\ \gamma_1 \Rightarrow \beta \end{array}}{\gamma_1 \wedge \gamma_2 \Rightarrow \beta}\,\wedge_{L1}$$

Assumimos $P(n-1)$ como hipótese de indução.
De $P(n-1)$, como $\underset{\alpha\Rightarrow\gamma_1}{D_1'}$ , $\underset{\gamma_1\Rightarrow\beta}{D_2'}$ e $|D_1'| + |D_2'| < n$, ou seja, $|D_1'| + |D_2'| \leq n-1$, existe $D \in LL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha\Rightarrow\beta}{D}$, e obtemos $P(n)$.

**Subcaso:**

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_1' \\ \alpha \Rightarrow \gamma_1 \end{array} \qquad \begin{array}{c} D_1'' \\ \alpha \Rightarrow \gamma_2 \end{array}}{\alpha \Rightarrow \gamma_1 \wedge \gamma_2}\,\wedge_R \qquad\qquad \dfrac{\begin{array}{c} D_2' \\ \gamma_2 \Rightarrow \beta \end{array}}{\gamma_1 \wedge \gamma_2 \Rightarrow \beta}\,\wedge_{L2}$$

Assumimos $P(n-1)$ como hipótese de indução.
De $P(n-1)$, como $\underset{\alpha\Rightarrow\gamma_2}{D_1''}$ , $\underset{\gamma_2\Rightarrow\beta}{D_2'}$ e $|D_1''| + |D_2'| < n$, ou seja, $|D_1''| + |D_2'| \leq n-1$, existe $D \in LL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha\Rightarrow\beta}{D}$, e obtemos $P(n)$.

**Subcaso:**

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_1' \\ \alpha \Rightarrow \gamma_1 \end{array}}{\alpha \Rightarrow \gamma_1 \vee \gamma_2}\,\vee_{R1} \qquad\qquad \dfrac{\begin{array}{c} D_2' \\ \gamma_1 \Rightarrow \beta \end{array} \qquad \begin{array}{c} D_2'' \\ \gamma_2 \Rightarrow \beta \end{array}}{\gamma_1 \vee \gamma_2 \Rightarrow \beta}\,\vee_L$$

Assumimos $P(n-1)$ como hipótese de indução.
De $P(n-1)$, como $\underset{\alpha\Rightarrow\gamma_1}{D_1'}$ , $\underset{\gamma_1\Rightarrow\beta}{D_2'}$ e $|D_1'| + |D_2'| < n$, ou seja, $|D_1'| + |D_2'| \leq n-1$, existe $D \in LL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha\Rightarrow\beta}{D}$, e obtemos $P(n)$.

**Subcaso:**

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_1' \\ \alpha \Rightarrow \gamma_2 \end{array}}{\alpha \Rightarrow \gamma_1 \vee \gamma_2}\,\vee_{R2} \qquad\qquad \dfrac{\begin{array}{c} D_2' \\ \gamma_1 \Rightarrow \beta \end{array} \qquad \begin{array}{c} D_2'' \\ \gamma_2 \Rightarrow \beta \end{array}}{\gamma_1 \vee \gamma_2 \Rightarrow \beta}\,\vee_L$$

Assumimos $P(n-1)$ como hipótese de indução.
De $P(n-1)$, como $\underset{\alpha\Rightarrow\gamma_2}{D_1'}$ , $\underset{\gamma_2\Rightarrow\beta}{D_2''}$ e $|D_1'| + |D_2''| < n$, ou seja, $|D_1'| + |D_2''| \leq n-1$, existe $D \in LL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha\Rightarrow\beta}{D}$, e obtemos $P(n)$.

**Subcaso:**

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1' \\ \alpha_1 \Rightarrow \gamma \end{matrix}}{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \gamma} \wedge_{L1} \qquad \begin{matrix} D_2 \\ \gamma \Rightarrow \beta \end{matrix}$$

Assumimos $P(n-1)$ como hipótese de indução.

De $P(n-1)$, como $\underset{\alpha_1 \Rightarrow \gamma}{D_1'}$, $\underset{\gamma \Rightarrow \beta}{D_2}$ e $|D_1'| + |D_2| < n$, ou seja, $|D_1'| + |D_2| \leq n-1$, existe $D_3 \in LL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha_1 \Rightarrow \beta}{D_3}$.

Consideremos então a seguinte derivação $D \in LL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{matrix} D_3 \\ \alpha_1 \Rightarrow \beta \end{matrix}}{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \beta} \wedge_{L1}$$

Temos que $\underset{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \beta}{D}$, e obtemos $P(n)$.

**Subcaso:**

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1' \\ \alpha_2 \Rightarrow \gamma \end{matrix}}{\alpha_2 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \gamma} \wedge_{L2} \qquad \begin{matrix} D_2 \\ \gamma \Rightarrow \beta \end{matrix}$$

Assumimos $P(n-1)$ como hipótese de indução.

De $P(n-1)$, como $\underset{\alpha_2 \Rightarrow \gamma}{D_1'}$, $\underset{\gamma \Rightarrow \beta}{D_2}$ e $|D_1'| + |D_2| < n$, ou seja, $|D_1'| + |D_2| \leq n-1$, existe $D_3 \in LL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha_2 \Rightarrow \beta}{D_3}$.

Consideremos então a seguinte derivação $D \in LL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{matrix} D_3 \\ \alpha_2 \Rightarrow \beta \end{matrix}}{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \beta} \wedge_{L2}$$

Temos que $\underset{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \beta}{D}$, e obtemos $P(n)$.

**Subcaso:**

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1' \\ \alpha_1 \Rightarrow \gamma \end{matrix} \qquad \begin{matrix} D_1'' \\ \alpha_2 \Rightarrow \gamma \end{matrix}}{\alpha_2 \vee \alpha_2 \Rightarrow \gamma} \vee_{L} \qquad \begin{matrix} D_2 \\ \gamma \Rightarrow \beta \end{matrix}$$

Assumimos $P(n-1)$ como hipótese de indução.

De $P(n-1)$, como $\underset{\alpha_1 \Rightarrow \gamma}{D_1'}$, $\underset{\gamma \Rightarrow \beta}{D_2}$ e $|D_1'| + |D_2| < n$, ou seja, $|D_1'| + |D_2| \leq n-1$, existe $D_3 \in LL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha_1 \Rightarrow \beta}{D_3}$.

De $P(n-1)$, como $\underset{\alpha_2 \Rightarrow \gamma}{D_1''}$, $\underset{\gamma \Rightarrow \beta}{D_2}$ e $|D_1''| + |D_2| < n$, ou seja, $|D_1''| + |D_2| \leq n-1$, existe $D_4 \in LL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha_2 \Rightarrow \beta}{D_4}$.

Consideremos então a seguinte derivação $D \in LL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{matrix} D_3 \\ \alpha_1 \Rightarrow \beta \end{matrix} \qquad \begin{matrix} D_4 \\ \alpha_2 \Rightarrow \beta \end{matrix}}{\alpha_1 \vee \alpha_2 \Rightarrow \beta} \vee_{L}$$

Temos que $\underset{\alpha_1 \vee \alpha_2 \Rightarrow \beta}{D}$, e obtemos $P(n)$.

**Subcaso:**

$$\begin{array}{c} D_1 \\ \alpha \Rightarrow \gamma \end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c} D_2' \\ \gamma \Rightarrow \beta_1 \end{array} \quad \begin{array}{c} D_2'' \\ \gamma \Rightarrow \beta_2 \end{array}}{\gamma \Rightarrow \beta_1 \wedge \beta_2} \wedge_R$$

Assumimos $P(n-1)$ como hipótese de indução.

De $P(n-1)$, como $\underset{\alpha\Rightarrow\gamma}{D_1}$, $\underset{\gamma\Rightarrow\beta_1}{D_2'}$ e $|D_1|+|D_2'|<n$, ou seja, $|D_1|+|D_2'|\leq n-1$, existe $D_3 \in LL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha\Rightarrow\beta_1}{D_3}$.

De $P(n-1)$, como $\underset{\alpha\Rightarrow\gamma}{D_1}$, $\underset{\gamma\Rightarrow\beta_2}{D_2''}$ e $|D_1|+|D_2''|<n$, ou seja, $|D_1|+|D_2''|\leq n-1$, existe $D_4 \in LL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha\Rightarrow\beta_2}{D_4}$.

Consideremos então a seguinte derivação $D \in LL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_3 \\ \alpha \Rightarrow \beta_1 \end{array} \quad \begin{array}{c} D_4 \\ \alpha \Rightarrow \beta_2 \end{array}}{\alpha \Rightarrow \beta_1 \wedge \beta_2} \wedge_R$$

Temos que $\underset{\alpha\Rightarrow\beta_1\wedge\beta_2}{D}$, e obtemos $P(n)$.

**Subcaso:**

$$\begin{array}{c} D_1 \\ \alpha \Rightarrow \gamma \end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c} D_2' \\ \gamma \Rightarrow \beta_1 \end{array}}{\gamma \Rightarrow \beta_1 \vee \beta_2} \vee_{R1}$$

Assumimos $P(n-1)$ como hipótese de indução.

De $P(n-1)$, como $\underset{\alpha\Rightarrow\gamma}{D_1}$, $\underset{\gamma\Rightarrow\beta_1}{D_2'}$ e $|D_1|+|D_2'|<n$, ou seja, $|D_1|+|D_2'|\leq n-1$, existe $D_3 \in LL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha\Rightarrow\beta_1}{D_3}$.

Consideremos então a seguinte derivação $D \in LL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_3 \\ \alpha \Rightarrow \beta_1 \end{array}}{\alpha \Rightarrow \beta_1 \vee \beta_2} \vee_{R1}$$

Temos que $\underset{\alpha\Rightarrow\beta_1\vee\beta_2}{D}$, e obtemos $P(n)$.

**Subcaso:**

$$\begin{array}{c} D_1 \\ \alpha \Rightarrow \gamma \end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c} D_2' \\ \gamma \Rightarrow \beta_2 \end{array}}{\gamma \Rightarrow \beta_1 \vee \beta_2} \vee_{R2}$$

Assumimos $P(n-1)$ como hipótese de indução.

De $P(n-1)$, como $\underset{\alpha\Rightarrow\gamma}{D_1}$, $\underset{\gamma\Rightarrow\beta_2}{D_2'}$ e $|D_1|+|D_2'|<n$, ou seja, $|D_1|+|D_2'|\leq n-1$, existe $D_3 \in LL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha\Rightarrow\beta_2}{D_3}$.

Consideremos então a seguinte derivação $D \in LL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_3 \\ \alpha \Rightarrow \beta_2 \end{array}}{\alpha \Rightarrow \beta_1 \vee \beta_2} \vee_{R2}$$

Temos que $\underset{\alpha\Rightarrow\beta_1\vee\beta_2}{D}$, e obtemos $P(n)$. $\square$

**Teorema 27 (Eliminação do Corte em $LL$)**
Para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{LL}$, se $LL \vdash \alpha \Rightarrow \beta$, então $LL\text{-}cut \vdash \alpha \Rightarrow \beta$.

*Demonstração.* Por indução em derivações de $LL$.
Para todo $D \in LL$, $P(D)$ : para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{LL}$ tais que $\underset{\alpha\Rightarrow\beta}{D}$, existe $D' \in LL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha\Rightarrow\beta}{D'}$.

**Caso $A$:**

$$\frac{}{p \Rightarrow p}\,A$$

Consideremos a seguinte derivação $D' \in LL\text{-}cut$:

$$\frac{}{p \Rightarrow p}\,A$$

Temos que $\underset{p\Rightarrow p}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\wedge_{L1}$:**

$$\frac{\begin{matrix} D_1 \\ \alpha_1 \Rightarrow \beta \end{matrix}}{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \beta}\,\wedge_{L1}$$

Assumimos $P(D_1)$ como hipótese de indução.
De $P(D_1)$, existe $D'_1 \in LL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha_1\Rightarrow\beta}{D'_1}$.
Consideremos a seguinte derivação $D' \in LL\text{-}cut$:

$$\frac{\begin{matrix} D'_1 \\ \alpha_1 \Rightarrow \beta \end{matrix}}{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \beta}\,\wedge_{L1}$$

Temos que $\underset{\alpha_1\wedge\alpha_2\Rightarrow\beta}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\wedge_{L2}$:**

$$\frac{\begin{matrix} D_1 \\ \alpha_2 \Rightarrow \beta \end{matrix}}{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \beta}\,\wedge_{L2}$$

Assumimos $P(D_1)$ como hipótese de indução.
De $P(D_1)$, existe $D'_1 \in LL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha_2\Rightarrow\beta}{D'_1}$.
Consideremos então a seguinte derivação $D' \in LL\text{-}cut$:

$$\frac{\begin{matrix} D'_1 \\ \alpha_2 \Rightarrow \beta \end{matrix}}{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \beta}\,\wedge_{L2}$$

Temos que $\underset{\alpha_1\wedge\alpha_2\Rightarrow\beta}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\wedge_R$:**

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1 \\ \alpha \Rightarrow \beta_1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} D_2 \\ \alpha \Rightarrow \beta_2 \end{matrix}}{\alpha \Rightarrow \beta_1 \wedge \beta_2} \wedge_R$$

Assumimos $P(D_1)$ e $P(D_2)$ como hipóteses de indução.
De $P(D_1)$, existe $D'_1 \in LL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha\Rightarrow\beta_1}{D'_1}$. De $P(D_2)$, existe $D'_2 \in LL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha\Rightarrow\beta_2}{D'_2}$.
Consideremos então a seguinte derivação $D' \in LL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{matrix} D'_1 \\ \alpha \Rightarrow \beta_1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} D'_2 \\ \alpha \Rightarrow \beta_2 \end{matrix}}{\alpha \Rightarrow \beta_1 \wedge \beta_2} \wedge_R$$

Temos que $\underset{\alpha\Rightarrow\beta_1\wedge\beta_2}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\vee_L$:**

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1 \\ \alpha_1 \Rightarrow \beta \end{matrix} \qquad \begin{matrix} D_2 \\ \alpha_2 \Rightarrow \beta \end{matrix}}{\alpha_1 \vee \alpha_2 \Rightarrow \beta} \vee_L$$

Assumimos $P(D_1)$ e $P(D_2)$ como hipóteses de indução.
De $P(D_1)$, existe $D'_1 \in LL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha_1\Rightarrow\beta}{D'_1}$. De $P(D_2)$, existe $D'_2 \in LL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha_2\Rightarrow\beta}{D'_2}$.
Consideremos então a seguinte derivação $D' \in LL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{matrix} D'_1 \\ \alpha_1 \Rightarrow \beta \end{matrix} \qquad \begin{matrix} D_2\text{'} \\ \alpha_2 \Rightarrow \beta \end{matrix}}{\alpha_1 \vee \alpha_2 \Rightarrow \beta} \vee_L$$

Temos que $\underset{\alpha_1\vee\alpha_2\Rightarrow\beta}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\vee_{R1}$:**

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1 \\ \alpha \Rightarrow \beta_1 \end{matrix}}{\alpha \Rightarrow \beta_1 \vee \beta_2} \vee_{R1}$$

Assumimos $P(D_1)$ como hipótese de indução.
De $P(D_1)$, existe $D'_1 \in LL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha\Rightarrow\beta_1}{D'_1}$.
Consideremos então a seguinte derivação $D' \in LL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{matrix} D'_1 \\ \alpha \Rightarrow \beta_1 \end{matrix}}{\alpha \Rightarrow \beta_1 \vee \beta_2} \vee_{R1}$$

Temos que $\underset{\alpha\Rightarrow\beta_1\vee\beta_2}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\vee_{R2}$:**

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1 \\ \alpha \Rightarrow \beta_2 \end{matrix}}{\alpha \Rightarrow \beta_1 \vee \beta_2} \vee_{R2}$$

Assumimos $P(D_1)$ como hipótese de indução.
De $P(D_1)$, existe $D_1' \in LL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha \Rightarrow \beta_2}{D_1'}$.
Consideremos então a seguinte derivação $D' \in LL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1' \\ \alpha \Rightarrow \beta_2 \end{matrix}}{\alpha \Rightarrow \beta_1 \vee \beta_2} \vee_{R2}$$

Temos que $\underset{\alpha \Rightarrow \beta_1 \vee \beta_2}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso *cut*:**

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1 \\ \alpha \Rightarrow \gamma \end{matrix} \qquad \begin{matrix} D_2 \\ \gamma \Rightarrow \beta \end{matrix}}{\alpha \Rightarrow \beta} cut$$

Assumimos $P(D_1)$ e $P(D_2)$ como hipóteses de indução.
De $P(D_1)$, existe $D_1' \in LL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha \Rightarrow \gamma}{D_1'}$. De $P(D_2)$, existe $D_2' \in LL\text{-}cut$ tal que $\underset{\gamma \Rightarrow \beta}{D_2'}$.
Pelo Teorema 26 (Admissibilidade do Corte em $LL$-*cut*), como $\underset{\alpha \Rightarrow \gamma}{D_1'}$ e $\underset{\gamma \Rightarrow \beta}{D_2'}$, então existe $D' \in LL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha \Rightarrow \beta}{D'}$, e obtemos $P(D)$. □

**Teorema 28 (Decidibilidade de $LL$)**
O sistema de cálculo de mono-sequentes para a lógica dos reticulados $LL$ é decidível.

*Demonstração.*
Dados $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{LL}$, é possível implementar um algoritmo que determina se o mono-sequente $\alpha \Rightarrow \beta$ é derivável em $LL$.

Com efeito, pelo Teorema 27 (Eliminação do Corte em $LL$), podemos restringir a questão da decidibilidade ao sistema dedutivo sem cortes, $LL$-*cut*. Assim, dado o mono-sequente em questão, observamos que qualquer regra que possa ser aplicada para o inferir origina-se de mono-sequentes estruturalmente mais simples, isto é, de menor complexidade. As regras apenas eliminam fórmulas e conectivos de baixo para cima, e mais ainda, o conjunto de pares de regras e conjuntos de fórmulas capazes de inferir $\alpha \Rightarrow \beta$ é finito.

É, portanto, possível conceber um algoritmo que, dado um mono-sequente $S$, calcule todos os pares possíveis de regras e premissas necessárias que, pela aplicação da respetiva regra, permitiriam inferir $S$. Cada par (regra, premissas) corresponde a um nó numa árvore de derivação. Este processo é então repetido recursivamente para cada conjunto de premissas em cada nó, até se atingirem fórmulas atómicas, i.e., variáveis, nos topos dos ramos da árvore. Nesse ponto, basta verificar se a regra axiomática $A$ pode ser aplicada.

Para decidir a validade do sequente original $\alpha \Rightarrow \beta$, executa-se uma procura em profundidade na árvore construída. Se existir um ramo a partir da raiz tal que, em todas as folhas, a regra axiomática $A$ é aplicada com sucesso, então o sequente é derivável em $LL$. Caso contrário, o mono-sequente não é derivável em $LL$. □

# 3 Lógica Quântica Paraconsistente

A *lógica quântica paraconsistente* ($PQL$) constitui uma variante enfraquecida da lógica quântica tradicional, concebida para acomodar contradições sem incorrer no princípio da explosão. Tal abordagem revela-se particularmente apropriada no contexto da teoria quântica, onde inconsistências podem surgir sem que, por isso, o sistema se torne trivial.

No âmbito da *sobreposição quântica*, reconhece-se que um sistema quântico pode encontrar-se simultaneamente em múltiplos estados até ao momento da medição. Este fenómeno é incompatível com os pressupostos da lógica clássica, que assume uma determinação completa do estado futuro a partir das condições iniciais.

Adicionalmente, o *entrelaçamento quântico* permite que o estado de uma partícula influencie instantaneamente o estado de outra, independentemente da distância que as separa. Resultados experimentais variáveis nestes contextos sugerem a necessidade de um formalismo lógico mais flexível, que não dependa estritamente dos princípios clássicos.

## 3.1 Sintaxe

**Definição 29** ($\mathcal{A}^{PQL}$)
O alfabeto da lógica quântica paraconsistente é dado por: $\mathcal{A}^{PQL} = \mathcal{V}_1 \cup \{\wedge, \vee, \sim, (, )\}$.

**Definição 30** ($\mathcal{F}^{PQL}$)
O conjunto das fórmulas da lógica quântica paraconsistente $\mathcal{F}^{PQL}$, é uma linguagem sobre $\mathcal{A}^{PQL}$, definido indutivamente por:

- $q \in \mathcal{F}^{PQL}$, para todo $q \in \mathcal{V}_1$.
- $(\alpha \wedge \beta) \in \mathcal{F}^{PQL}$, para todo $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{PQL}$.
- $(\alpha \vee \beta) \in \mathcal{F}^{PQL}$, para todo $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{PQL}$.
- $(\sim \alpha) \in \mathcal{F}^{PQL}$, para todo $\alpha \in \mathcal{F}^{PQL}$.

**Definição 31** ($V : \mathcal{F}^{PQL} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{V}_1)$)
A função $V : \mathcal{F}^{QPL} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{V}_1)$, que a cada fórmula associa o conjunto das variáveis que nela ocorrem, é definida indutivamente por:

- $V(q) = \{q\}$, para todo $q \in \mathcal{V}_1$.
- $V(\alpha \wedge \beta) = V(\alpha) \cup V(\beta)$, para todo $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{PQL}$.
- $V(\alpha \vee \beta) = V(\alpha) \cup V(\beta)$, para todo $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{PQL}$.
- $V(\sim \alpha) = V(\alpha)$, para todo $\alpha \in \mathcal{F}^{PQL}$.

**Definição 32 (Mono-Sequentes em $\mathcal{F}^{PQL}$)**
Um mono-sequente da Lógica Quântica Paraconsistente é uma expressão da forma $\alpha \Rightarrow \beta$, em que $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{PQL}$.

## 3.2 Semântica

**Definição 33 (Valoração Paraconsistente)**
Seja $\mathcal{L} = (L, \sqcup, \sqcap)$ um reticulado. Uma função $v' : \mathcal{F}^{PQL} \longrightarrow L$ diz-se uma valoração paraconsistente em $\mathcal{L}$, quando para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{PQL}$:

- $v'(\alpha \wedge \beta) = v'(\alpha) \sqcap v'(\beta)$
- $v'(\alpha \vee \beta) = v'(\alpha) \sqcup v'(\beta)$
- $v'(\sim (\alpha \wedge \beta)) = v'(\sim \alpha) \sqcup v'(\sim \beta)$
- $v'(\sim (\alpha \vee \beta)) = v'(\sim \alpha) \sqcap v'(\sim \beta)$
- $v'(\sim\sim \alpha) = v'(\alpha)$

**Definição 34 ($PQL \models^{v'} \alpha \Rightarrow \beta$)**
Sejam $\mathcal{L}$ um reticulado, $v'$ uma valoração paraconsistente em $\mathcal{L}$. $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{PQL}$. $\alpha \Rightarrow \beta$ é verdadeiro sobre $v'$ sse $v'(\alpha) \sqsubseteq_{\mathcal{L}} v'(\beta)$, denotado por $PQL \models^{v'} \alpha \Rightarrow \beta$.

**Definição 35 ($PQL \models \alpha \Rightarrow \beta$)**
Sejam $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{PQL}$. $\alpha \Rightarrow \beta$ é $PQL-$válido sse para todo reticulado $\mathcal{L}$ e valoração paraconsistente $v'$ em $\mathcal{L}$, $\alpha \Rightarrow \beta$ é verdadeiro sobre $v'$, denotado por $PQL \models \alpha \Rightarrow \beta$.

## 3.3 Sistema Dedutivo para a Lógica Quântica Paraconsistente Interpolação de Craig

**Definição 36 ($PQL$)**
O sistema dedutivo $PQL$ é um cálculo de mono-sequentes com as seguintes regras de inferência:

$$\frac{}{q \Rightarrow q}\,A \qquad \frac{}{\sim q \Rightarrow \sim q}\,\sim A$$

$$\frac{\alpha_1 \Rightarrow \beta}{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \beta}\,\wedge_{L1} \qquad \frac{\alpha_1 \Rightarrow \beta}{\alpha \wedge \alpha_1 \Rightarrow \beta}\,\wedge_{L2} \qquad \frac{\alpha \Rightarrow \beta_1 \qquad \alpha \Rightarrow \beta_2}{\alpha \Rightarrow \beta_1 \wedge \beta_2}\,\wedge_R$$

$$\frac{\alpha_1 \Rightarrow \beta \qquad \alpha_2 \Rightarrow \beta}{\alpha_1 \vee \alpha_2 \Rightarrow \beta}\,\vee_L \qquad \frac{\alpha \Rightarrow \beta_1}{\alpha \Rightarrow \beta_1 \vee \beta_2}\,\vee_{R1} \qquad \frac{\alpha \Rightarrow \beta_2}{\alpha \Rightarrow \beta_1 \vee \beta_2}\,\vee_{R2}$$

$$\frac{\alpha \Rightarrow \beta}{\sim\sim \alpha \Rightarrow \beta}\,\sim\sim_L \qquad \frac{\alpha \Rightarrow \beta}{\alpha \Rightarrow \sim\sim \beta}\,\sim\sim_R$$

$$\frac{\sim \alpha_1 \Rightarrow \beta \qquad \sim \alpha_2 \Rightarrow \beta}{\sim (\alpha_1 \wedge \alpha_2) \Rightarrow \beta}\,\sim \wedge_L \qquad \frac{\alpha \Rightarrow \sim \beta_1}{\alpha \Rightarrow \sim (\beta_1 \wedge \beta_2)}\,\sim \wedge_{R1} \qquad \frac{\alpha \Rightarrow \sim \beta_2}{\alpha \Rightarrow \sim (\beta_1 \wedge \beta_2)}\,\sim \wedge_{R2}$$

$$\frac{\sim \alpha_1 \Rightarrow \beta}{\sim (\alpha_1 \vee \alpha_2) \Rightarrow \beta}\,\sim \vee_{L1} \qquad \frac{\sim \alpha_2 \Rightarrow \beta}{\sim (\alpha_1 \vee \alpha_2) \Rightarrow \beta}\,\sim \vee_{L2} \qquad \frac{\alpha \Rightarrow \sim \beta_1 \qquad \alpha \Rightarrow \sim \beta_2}{\alpha \Rightarrow \sim (\beta_1 \vee \beta_2)}\,\sim \vee_R$$

$$\frac{\alpha \Rightarrow \gamma \qquad \gamma \Rightarrow \beta}{\alpha \Rightarrow \beta}\,cut$$

**Definição 37 (Derivação de $PQL$)**

Uma derivação $D$ em $PQL$ de um mono-sequente $\alpha \Rightarrow \beta$ é uma árvore que pode ser definida indutivamente da seguinte maneira:

- A regra aplicada a todo o sequente que seja uma folha da árvore é necessariamente uma das regras $A, \sim A$, que não tem premissas.
- Cada nó interno da árvore é obtido pela aplicação de uma regra de inferência do sistema $PQL$, a partir de um ou dois mono-sequentes já presentes nos nós filhos.
- O sequente $\alpha \Rightarrow \beta$ é a raíz da árvore.

**Notação 38 ($\underset{\alpha\Rightarrow\beta}{D}$ em $PQL$)**

Denotamos $\underset{\alpha\Rightarrow\beta}{D}$ quando $D$ é uma derivação em $PQL$ cuja conclusão é mono-sequente $\alpha \Rightarrow \beta$, com $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{PQL}$. Neste caso dizemos que $D$ deriva $\alpha \Rightarrow \beta$.

**Definição 39 (Derivabilidade em $PQL$)**

Um mono-sequente $\alpha \Rightarrow \beta$, com $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{PQL}$, diz-se derivável em $PQL$ se e só se existe $D \in PQL$ tal que, $\underset{\alpha\Rightarrow\beta}{D}$, e denotamos por $PQL \vdash \alpha \Rightarrow \beta$.

**Definição 40 ($PQL$-*cut*)**

O sistema dedutivo $PQL$-*cut* é o sistema obtido a partir de $PQL$ pela remoção da regra *cut*.

**Definição 41 (Derivação de $PQL$-*cut*)**

Uma derivação $D$ em $PQL$-*cut* de um mono-sequente $\alpha \Rightarrow \beta$ é uma árvore que pode ser definida indutivamente da seguinte maneira:

- A regra aplicada a todo o sequente que seja uma folha da árvore é necessariamente umas das regras $A, \sim A$, que não tem premissas.
- Cada nó interno da árvore é obtido pela aplicação de uma regra de inferência do sistema $PQL$-*cut*, a partir de um ou dois mono-sequentes já presentes nos nós filhos.
- O sequente $\alpha \Rightarrow \beta$ é a raíz da árvore.

**Notação 42 ($\underset{\alpha\Rightarrow\beta}{D}$ em $PQL$-*cut*)**

Denotamos $\underset{\alpha\Rightarrow\beta}{D}$ quando $D$ é uma derivação em $PQL$-*cut* cuja conclusão é mono-sequente $\alpha \Rightarrow \beta$, com $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{PQL}$. Neste caso dizemos que $D$ deriva $\alpha \Rightarrow \beta$.

**Definição 43 (Derivabilidade em $PQL$-*cut*)**

Um mono-sequente $\alpha \Rightarrow \beta$, com $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{PQL}$, diz-se derivável em $PQL$-*cut* se e só se existe $D \in PQL$-*cut* tal que, $\underset{\alpha\Rightarrow\beta}{D}$, e denotamos por $PQL$-*cut* $\vdash \alpha \Rightarrow \beta$.

**Teorema 44 (Interpolação de Craig em $PQL$-*cut*)**

Para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{PQL}$, se $PQL$-*cut* $\vdash \alpha \Rightarrow \beta$, então existe $\gamma \in \mathcal{F}^{PQL}$ tal que $PQL$-*cut* $\vdash \alpha \Rightarrow \gamma$, $PQL$-*cut* $\vdash \gamma \Rightarrow \beta$ e $V(\gamma) \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta)$.

*Demonstração.* Por indução em derivações de $PQL$-*cut*

Para todo $D \in PQL$-*cut*, $P(D)$ : se $\underset{\alpha\Rightarrow\beta}{D}$, com $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{PQL}$, então existem $\gamma \in \mathcal{F}^{PQL}$, $D_1, D_2 \in PQL$-*cut* tais que $\underset{\alpha\Rightarrow\gamma}{D_1}$, $\underset{\gamma\Rightarrow\beta}{D_2}$ e $V(\gamma) \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta)$.

**Caso $A$:**

$$\frac{}{q \Rightarrow q}\ A$$

Sejam $D_1 = D_2 = D \in PQL\text{-}cut$. Temos que $\underset{q\Rightarrow q}{D_1}, \underset{q\Rightarrow q}{D_2}$, e mais ainda, $V(q) = \{q\} \subseteq V(q) \cap V(q)$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\sim A$:**

$$\frac{}{\sim q \Rightarrow \sim q}\ \sim A$$

Sejam $D_1 = D_2 = D \in PQL\text{-}cut$. Temos que $\underset{\sim q\Rightarrow \sim q}{D_1}, \underset{\sim q\Rightarrow \sim q}{D_2}$, e mais ainda, $V(\sim q) = \{q\} \subseteq V(\sim q) \cap V(\sim q)$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\wedge_{L1}$:**

$$\frac{\begin{array}{c} D' \\ \alpha_1 \Rightarrow \beta \end{array}}{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \beta}\ \wedge_{L1}$$

Assumimos $P(D')$ como hipótese de indução.
De $P(D')$, existem $\gamma \in \mathcal{F}^{PQL}$, $D_1', D_2 \in PQL\text{-}cut$, tais que $\underset{\alpha_1\Rightarrow\gamma}{D_1'}, \underset{\gamma\Rightarrow\beta}{D_2}$ e $V(\gamma) \subseteq V(\alpha_1) \cap V(\beta)$.
Consideremos então a seguinte derivação $D_1 \in PQL\text{-}cut$:

$$\frac{\begin{array}{c} D_1' \\ \alpha_1 \Rightarrow \gamma \end{array}}{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \gamma}\ \wedge_{L1}$$

Temos que $\underset{\alpha_1\wedge\alpha_2\Rightarrow\gamma}{D_1}, \underset{\gamma\Rightarrow\beta}{D_2}$, e mais ainda, como $V(\gamma) \subseteq V(\alpha_1) \cap V(\beta)$ e $V(\alpha_1) \subseteq V(\alpha_1 \wedge \alpha_2)$, ou seja, $V(\alpha_1) \cap V(\beta) \subseteq V(\alpha_1 \wedge \alpha_2) \cap V(\beta)$, temos também que $V(\gamma) \subseteq V(\alpha_1 \wedge \alpha_2) \cap V(\beta)$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\wedge_{L2}$:**

$$\frac{\begin{array}{c} D' \\ \alpha_2 \Rightarrow \beta \end{array}}{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \beta}\ \wedge_{L2}$$

Assumimos $P(D')$ como hipótese de indução.
De $P(D')$, existem $\gamma \in \mathcal{F}^{PQL}$, $D_1', D_2 \in PQL\text{-}cut$, tais que $\underset{\alpha_2\Rightarrow\gamma}{D_1'}, \underset{\gamma\Rightarrow\beta}{D_2}$ e $V(\gamma) \subseteq V(\alpha_2) \cap V(\beta)$.
Consideremos então a seguinte derivação $D_1 \in PQL\text{-}cut$:

$$\frac{\begin{array}{c} D_1' \\ \alpha_2 \Rightarrow \gamma \end{array}}{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \gamma}\ \wedge_{L2}$$

Temos que $\underset{\alpha_1\wedge\alpha_2\Rightarrow\gamma}{D_1}, \underset{\gamma\Rightarrow\beta}{D_2}$, e mais ainda, como $V(\gamma) \subseteq V(\alpha_2) \cap V(\beta)$ e $V(\alpha_2) \subseteq V(\alpha_1 \wedge \alpha_2)$, ou seja, $V(\alpha_2) \cap V(\beta) \subseteq V(\alpha_1 \wedge \alpha_2) \cap V(\beta)$, temos também que $V(\gamma) \subseteq V(\alpha_1 \wedge \alpha_2) \cap V(\beta)$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\wedge_R$:**

$$\dfrac{\begin{array}{c}D'\\ \alpha \Rightarrow \beta_1\end{array} \qquad \begin{array}{c}D''\\ \alpha \Rightarrow \beta_2\end{array}}{\alpha \Rightarrow \beta_1 \wedge \beta_2}\,\wedge_R$$

Assumimos $P(D')$ e $P(D'')$ como hipóteses de indução.
De $P(D')$, existem $\gamma_1 \in \mathcal{F}^{PQL}$, $D'_1, D'_2 \in PQL\text{-}cut$, tais que $\underset{\alpha\Rightarrow\gamma_1}{D'_1}$, $\underset{\gamma_1\Rightarrow\beta_1}{D'_2}$ e $V(\gamma_1) \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta_1)$.
De $P(D'')$, existem $\gamma_2 \in \mathcal{F}^{PQL}$, $D''_1, D''_2 \in PQL\text{-}cut$, tais que $\underset{\alpha\Rightarrow\gamma_2}{D''_1}$, $\underset{\gamma_2\Rightarrow\beta_2}{D''_2}$ e $V(\gamma_2) \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta_2)$.
Consideremos então as seguintes derivações $D_1, D_2 \in PQL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{array}{c}D'_1\\ \alpha \Rightarrow \gamma_1\end{array} \qquad \begin{array}{c}D''_1\\ \alpha \Rightarrow \gamma_2\end{array}}{\alpha \Rightarrow \gamma_1 \wedge \gamma_2}\,\wedge_R \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}D'_2\\ \gamma_1 \Rightarrow \beta_1\end{array}}{\gamma_1 \wedge \gamma_2 \Rightarrow \beta_1}\,\wedge_{L1} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}D''_2\\ \gamma_2 \Rightarrow \beta_2\end{array}}{\gamma_1 \wedge \gamma_2 \Rightarrow \beta_2}\,\wedge_{L2}}{\gamma_1 \wedge \gamma_2 \Rightarrow \beta_1 \wedge \beta_2}\,\wedge_R$$

Temos que $\underset{\alpha\Rightarrow\gamma_1\wedge\gamma_2}{D_1}$, $\underset{\gamma_1\wedge\gamma_2\Rightarrow\beta_1\wedge\beta_2}{D_2}$. Mais ainda, como $V(\gamma_1) \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta_1)$ e $V(\gamma_2) \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta_2)$, temos que $V(\gamma_1) \cup V(\gamma_2) \subseteq (V(\alpha) \cap V(\beta_1)) \cup (V(\alpha) \cap V(\beta_2))$, ou seja, $V(\gamma_1) \cup V(\gamma_2) \subseteq V(\alpha) \cap (V(\beta_1) \cup V(\beta_2))$, logo, $V(\gamma_1 \wedge \gamma_2) \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta_1 \wedge \beta_2)$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\vee_L$:**

$$\dfrac{\begin{array}{c}D'\\ \alpha_1 \Rightarrow \beta\end{array} \qquad \begin{array}{c}D''\\ \alpha_2 \Rightarrow \beta\end{array}}{\alpha_1 \vee \alpha_2 \Rightarrow \beta}\,\vee_L$$

Assumimos $P(D')$ e $P(D'')$ como hipóteses de indução.
De $P(D')$, existem $\gamma_1 \in \mathcal{F}^{PQL}$, $D'_1, D'_2 \in PQL\text{-}cut$, tais que $\underset{\alpha_1\Rightarrow\gamma_1}{D'_1}$, $\underset{\gamma_1\Rightarrow\beta}{D'_2}$ e $V(\gamma_1) \subseteq V(\alpha_1) \cap V(\beta)$.
De $P(D'')$, existem $\gamma_2 \in \mathcal{F}^{PQL}$, $D''_1, D''_2 \in PQL\text{-}cut$, tais que $\underset{\alpha_2\Rightarrow\gamma_2}{D''_1}$, $\underset{\gamma_2\Rightarrow\beta}{D''_2}$ e $V(\gamma_2) \subseteq V(\alpha_2) \cap V(\beta)$.
Consideremos então as seguintes derivações $D_1, D_2 \in PQL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}D'_1\\ \alpha_1 \Rightarrow \gamma_1\end{array}}{\alpha_1 \Rightarrow \gamma_1 \vee \gamma_2}\,\vee_{R1} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}D''_1\\ \alpha_2 \Rightarrow \gamma_2\end{array}}{\alpha_2 \Rightarrow \gamma_1 \vee \gamma_2}\,\vee_{R2}}{\alpha_1 \vee \alpha_2 \Rightarrow \gamma_1 \vee \gamma_2}\,\vee_L \qquad\qquad \dfrac{\begin{array}{c}D'_2\\ \gamma_1 \Rightarrow \beta\end{array} \qquad \begin{array}{c}D''_2\\ \gamma_2 \Rightarrow \beta\end{array}}{\gamma_1 \vee \gamma_2 \Rightarrow \beta}\,\vee_L$$

Temos que $\underset{\alpha_1\vee\alpha_2\Rightarrow\gamma_1\vee\gamma_2}{D_1}$, $\underset{\gamma_1\vee\gamma_2\Rightarrow\beta}{D_2}$. Mais ainda, como $V(\gamma_1) \subseteq V(\alpha_1) \cap V(\beta)$ e $V(\gamma_2) \subseteq V(\alpha_2) \cap V(\beta)$, temos que $V(\gamma_1) \cup V(\gamma_2) \subseteq (V(\alpha_1) \cap V(\beta)) \cup (V(\alpha_2) \cap V(\beta))$, ou seja, $V(\gamma_1) \cup V(\gamma_2) \subseteq (V(\alpha_1) \cup V(\alpha_2)) \cap V(\beta)$, logo, $V(\gamma_1 \vee \gamma_2) \subseteq V(\alpha_1 \vee \alpha_2) \cap V(\beta)$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\vee_{R1}$:**

$$\dfrac{\begin{array}{c}D'\\ \alpha \Rightarrow \beta_1\end{array}}{\alpha \Rightarrow \beta_1 \vee \beta_2}\,\vee_{R1}$$

Assumimos $P(D')$ como hipótese de indução.
De $P(D')$, existem $\gamma \in \mathcal{F}^{PQL}$, $D_1, D'_2 \in PQL\text{-}cut$, tais que $\underset{\alpha\Rightarrow\gamma}{D_1}$, $\underset{\gamma\Rightarrow\beta_1}{D'_2}$ e $V(\gamma) \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta_1)$.
Consideremos então a seguinte derivação $D_2 \in PQL\text{-}cut$:

$$\cfrac{\begin{matrix} D_2' \\ \gamma \Rightarrow \beta_1 \end{matrix}}{\gamma \Rightarrow \beta_1 \vee \beta_2}\ \vee_{R1}$$

Temos que $\underset{\alpha\Rightarrow\gamma}{D_1}$, $\underset{\gamma\Rightarrow\beta_1\vee\beta_2}{D_2}$, e mais ainda, como $V(\gamma) \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta_1)$ e $V(\beta_1) \subseteq V(\beta_1 \vee \beta_2)$, ou seja, $V(\alpha) \cap V(\beta_1) \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta_1 \vee \beta_2)$, temos também que $V(\gamma) \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta_1 \vee \beta_2)$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\vee_{R2}$:**

$$\cfrac{\begin{matrix} D' \\ \alpha \Rightarrow \beta_2 \end{matrix}}{\alpha \Rightarrow \beta_1 \vee \beta_2}\ \vee_{R2}$$

Assumimos $P(D')$ como hipótese de indução.
De $P(D')$, existem $\gamma \in \mathcal{F}^{PQL}$, $D_1, D_2' \in PQL\text{-}cut$, tais que $\underset{\alpha\Rightarrow\gamma}{D_1}$, $\underset{\gamma\Rightarrow\beta_2}{D_2'}$ e $V(\gamma) \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta_2)$.
Consideremos então a seguinte derivação $D_2 \in PQL\text{-}cut$:

$$\cfrac{\begin{matrix} D_2' \\ \gamma \Rightarrow \beta_2 \end{matrix}}{\gamma \Rightarrow \beta_1 \vee \beta_2}\ \vee_{R2}$$

Temos que $\underset{\alpha\Rightarrow\gamma}{D_1}$, $\underset{\gamma\Rightarrow\beta_1\vee\beta_2}{D_2}$, e mais ainda, como $V(\gamma) \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta_2)$ e $V(\beta_2) \subseteq V(\beta_1 \vee \beta_2)$, ou seja, $V(\alpha) \cap V(\beta_2) \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta_1 \vee \beta_2)$, temos também que $V(\gamma) \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta_1 \vee \beta_2)$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\sim \wedge_L$:**

$$\cfrac{\begin{matrix} D' \\ \sim \alpha_1 \Rightarrow \beta \end{matrix} \qquad \begin{matrix} D'' \\ \sim \alpha_2 \Rightarrow \beta \end{matrix}}{\sim (\alpha_1 \wedge \alpha_2) \Rightarrow \beta}\ \sim \wedge_L$$

Assumimos $P(D')$ e $P(D'')$ como hipóteses de indução.
De $P(D')$, existem $\gamma_1 \in \mathcal{F}^{PQL}$, $D_1', D_2' \in PQL\text{-}cut$, tais que $\underset{\sim\alpha_1\Rightarrow\gamma_1}{D_1'}$, $\underset{\gamma_1\Rightarrow\beta}{D_2'}$ e $V(\gamma_1) \subseteq V(\sim \alpha_1) \cap V(\beta)$.
De $P(D'')$, existem $\gamma_2 \in \mathcal{F}^{PQL}$, $D_1'', D_2'' \in PQL\text{-}cut$, tais que $\underset{\sim\alpha_2\Rightarrow\gamma_2}{D_1''}$, $\underset{\gamma_2\Rightarrow\beta}{D_2''}$ e $V(\gamma_2) \subseteq V(\sim \alpha_2) \cap V(\beta)$.
Consideremos então as seguintes derivações $D_1, D_2 \in PQL\text{-}cut$:

$$\cfrac{\cfrac{\begin{matrix} D_1' \\ \sim \alpha_1 \Rightarrow \gamma_1 \end{matrix}}{\sim \alpha_1 \Rightarrow \gamma_1 \vee \gamma_2}\ \vee_{R1} \qquad \cfrac{\begin{matrix} D_1'' \\ \sim \alpha_2 \Rightarrow \gamma_2 \end{matrix}}{\sim \alpha_2 \Rightarrow \gamma_1 \vee \gamma_2}\ \vee_{R2}}{\sim (\alpha_1 \wedge \alpha_2) \Rightarrow \gamma_1 \vee \gamma_2}\ \sim \wedge_L \qquad\qquad \cfrac{\begin{matrix} D_2' \\ \gamma_1 \Rightarrow \beta \end{matrix} \qquad \begin{matrix} D_2'' \\ \gamma_2 \Rightarrow \beta \end{matrix}}{\gamma_1 \vee \gamma_2 \Rightarrow \beta}\ \vee_L$$

Temos que $\underset{\sim(\alpha_1\wedge\alpha_2)\Rightarrow\gamma_1\vee\gamma_2}{D_1}$, $\underset{\gamma_1\vee\gamma_2\Rightarrow\beta}{D_2}$. Mais ainda, como $V(\gamma_1) \subseteq V(\sim \alpha_1) \cap V(\beta)$ e

$V(\gamma_2) \subseteq V(\sim \alpha_2) \cap V(\beta)$, temos que $V(\gamma_1) \cup V(\gamma_2) \subseteq (V(\sim \alpha_1) \cap V(\beta)) \cup (V(\sim \alpha_2) \cap V(\beta))$, ou seja, $V(\gamma_1) \cup V(\gamma_2) \subseteq (V(\sim \alpha_1) \cup V(\sim \alpha_2)) \cap V(\beta)$, e como $V(\sim \alpha_1) = V(\alpha_1)$ e $V(\sim \alpha_2) = V(\alpha_2)$, temos também que $V(\gamma_1) \cup V(\gamma_2) \subseteq (V(\alpha_1) \cup V(\alpha_2)) \cap V(\beta)$, logo, $V(\gamma_1 \vee \gamma_2) \subseteq V(\alpha_1 \wedge \alpha_2) \cap V(\beta)$, e segue que $V(\gamma_1 \vee \gamma_2) \subseteq V(\sim (\alpha_1 \wedge \alpha_2)) \cap V(\beta)$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\sim \wedge_{R1}$:**

$$\dfrac{\begin{array}{c} D' \\ \alpha \Rightarrow \sim \beta_1 \end{array}}{\alpha \Rightarrow \sim (\beta_1 \vee \beta_2)} \sim \wedge_{R1}$$

Assumimos $P(D')$ como hipótese de indução.

De $P(D')$, existem $\gamma \in \mathcal{F}^{PQL}$, $D_1, D_2' \in PQL\text{-}cut$, tais que $\underset{\alpha \Rightarrow \gamma}{D_1}$, $\underset{\gamma \Rightarrow \sim \beta_1}{D_2'}$ e $V(\gamma) \subseteq V(\alpha) \cap V(\sim \beta_1)$.

Consideremos então a seguinte derivação $D_2 \in PQL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_2' \\ \gamma \Rightarrow \sim \beta_1 \end{array}}{\gamma \Rightarrow \sim (\beta_1 \wedge \beta_2)} \sim \wedge_{R1}$$

Temos que $\underset{\alpha \Rightarrow \gamma}{D_1}$, $\underset{\gamma \Rightarrow \sim (\beta_1 \wedge \beta_2)}{D_2}$, e mais ainda, como $V(\gamma) \subseteq V(\alpha) \cap V(\sim \beta_1)$ e $V(\sim \beta_1) = V(\beta_1) \subseteq V(\beta_1 \wedge \beta_2) = V(\sim (\beta_1 \wedge \beta_2))$, ou seja, $V(\alpha) \cap V(\sim \beta_1) \subseteq V(\alpha) \cap V(\sim (\beta_1 \wedge \beta_2))$, temos também que $V(\gamma) \subseteq V(\alpha) \cap V(\sim (\beta_1 \wedge \beta_2))$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\sim \wedge_{R2}$:**

$$\dfrac{\begin{array}{c} D' \\ \alpha \Rightarrow \sim \beta_2 \end{array}}{\alpha \Rightarrow \sim (\beta_1 \vee \beta_2)} \sim \wedge_{R2}$$

Assumimos $P(D')$ como hipótese de indução.

De $P(D')$, existem $\gamma \in \mathcal{F}^{PQL}$, $D_1, D_2' \in PQL\text{-}cut$, tais que $\underset{\alpha \Rightarrow \gamma}{D_1}$, $\underset{\gamma \Rightarrow \sim \beta_2}{D_2'}$ e $V(\gamma) \subseteq V(\alpha) \cap V(\sim \beta_2)$.

Consideremos então a seguinte derivação $D_2 \in PQL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_2' \\ \gamma \Rightarrow \sim \beta_2 \end{array}}{\gamma \Rightarrow \sim (\beta_1 \wedge \beta_2)} \sim \wedge_{R2}$$

Temos que $\underset{\alpha \Rightarrow \gamma}{D_1}$, $\underset{\gamma \Rightarrow \sim (\beta_1 \wedge \beta_2)}{D_2}$, e mais ainda, como $V(\gamma) \subseteq V(\alpha) \cap V(\sim \beta_2)$ e $V(\sim \beta_2) = V(\beta_2) \subseteq V(\beta_1 \wedge \beta_2) = V(\sim (\beta_1 \wedge \beta_2))$, ou seja, $V(\alpha) \cap V(\sim \beta_2) \subseteq V(\alpha) \cap V(\sim (\beta_1 \wedge \beta_2))$, temos também que $V(\gamma) \subseteq V(\alpha) \cap V(\sim (\beta_1 \wedge \beta_2))$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\sim \vee_{L1}$:**

$$\dfrac{\begin{array}{c} D' \\ \sim \alpha_1 \Rightarrow \beta \end{array}}{\sim (\alpha_1 \vee \alpha_2) \Rightarrow \beta} \sim \vee_{L1}$$

Assumimos $P(D')$ como hipótese de indução.

De $P(D')$, existem $\gamma \in \mathcal{F}^{PQL}$, $D_1', D_2 \in PQL\text{-}cut$, tais que $\underset{\sim \alpha_1 \Rightarrow \gamma}{D_1'}$, $\underset{\gamma \Rightarrow \beta}{D_2}$ e $V(\gamma) \subseteq V(\sim \alpha_1) \cap V(\beta)$.

Consideremos então a seguinte derivação $D_1 \in PQL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_1' \\ \sim \alpha_1 \Rightarrow \gamma \end{array}}{\sim (\alpha_1 \vee \alpha_2) \Rightarrow \gamma} \sim \vee_{L1}$$

Temos que $\underset{\sim(\alpha_1 \wedge \alpha_2) \Rightarrow \gamma}{D_1}$, $\underset{\gamma \Rightarrow \beta}{D_2}$, e mais ainda, como $V(\gamma) \subseteq V(\sim \alpha_1) \cap V(\beta)$ e

$V(\sim \alpha_1) = V(\alpha_1) \subseteq V(\alpha_1 \vee \alpha_2) = V(\sim (\alpha_1 \vee \alpha_2))$, ou seja, $V(\alpha_1) \cap V(\beta) \subseteq V(\sim (\alpha_1 \vee \alpha_2)) \cap V(\beta)$, temos também que $V(\gamma) \subseteq V(\sim (\alpha_1 \vee \alpha_2)) \cap V(\beta)$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\sim \vee_{L2}$:**

$$\dfrac{\begin{array}{c} D' \\ \sim \alpha_2 \Rightarrow \beta \end{array}}{\sim (\alpha_1 \vee \alpha_2) \Rightarrow \beta} \sim \vee_{L2}$$

Assumimos $P(D')$ como hipótese de indução.

De $P(D')$, existem $\gamma \in \mathcal{F}^{PQL}$, $D'_1, D_2 \in PQL\text{-}cut$, tais que $\underset{\sim \alpha_2 \Rightarrow \gamma}{D'_1}$, $\underset{\gamma \Rightarrow \beta}{D_2}$ e $V(\gamma) \subseteq V(\sim \alpha_2) \cap V(\beta)$.

Consideremos então a seguinte derivação $D_1 \in PQL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{array}{c} D'_1 \\ \sim \alpha_2 \Rightarrow \gamma \end{array}}{\sim (\alpha_1 \vee \alpha_2) \Rightarrow \gamma} \sim \vee_{L2}$$

Temos que $\underset{\sim(\alpha_1 \wedge \alpha_2) \Rightarrow \gamma}{D_1}$, $\underset{\gamma \Rightarrow \beta}{D_2}$, e mais ainda, como $V(\gamma) \subseteq V(\sim \alpha_2) \cap V(\beta)$ e

$V(\sim \alpha_2) = V(\alpha_2) \subseteq V(\alpha_1 \vee \alpha_2) = V(\sim (\alpha_1 \vee \alpha_2))$, ou seja, $V(\alpha_2) \cap V(\beta) \subseteq V(\sim (\alpha_1 \vee \alpha_2)) \cap V(\beta)$, temos também que $V(\gamma) \subseteq V(\sim (\alpha_1 \vee \alpha_2)) \cap V(\beta)$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\sim \vee_R$:**

$$\dfrac{\begin{array}{c} D' \\ \alpha \Rightarrow \sim \beta_1 \end{array} \qquad \begin{array}{c} D'' \\ \alpha \Rightarrow \sim \beta_2 \end{array}}{\alpha \Rightarrow \sim (\beta_1 \wedge \beta_2)} \wedge_R$$

Assumimos $P(D')$ e $P(D'')$ como hipóteses de indução.

De $P(D')$, existem $\gamma_1 \in \mathcal{F}^{PQL}$, $D'_1, D'_2 \in PQL\text{-}cut$, tais que $\underset{\alpha \Rightarrow \gamma_1}{D'_1}$, $\underset{\gamma_1 \Rightarrow \sim \beta_1}{D'_2}$ e $V(\gamma_1) \subseteq V(\alpha) \cap V(\sim \beta_1)$.

De $P(D'')$, existem $\gamma_2 \in \mathcal{F}^{PQL}$, $D''_1, D''_2 \in PQL\text{-}cut$, tais que $\underset{\alpha \Rightarrow \gamma_2}{D''_1}$, $\underset{\gamma_2 \Rightarrow \sim \beta_2}{D''_2}$ e $V(\gamma_2) \subseteq V(\alpha) \cap V(\sim \beta_2)$.

Consideremos então as seguintes derivações $D_1, D_2 \in PQL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{array}{c} D'_1 \\ \alpha \Rightarrow \gamma_1 \end{array} \qquad \begin{array}{c} D''_1 \\ \alpha \Rightarrow \gamma_2 \end{array}}{\alpha \Rightarrow \gamma_1 \wedge \gamma_2} \wedge_R \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c} D'_2 \\ \gamma_1 \Rightarrow \sim \beta_1 \end{array}}{\gamma_1 \wedge \gamma_2 \Rightarrow \sim \beta_1} \wedge_{L1} \qquad \dfrac{\begin{array}{c} D''_2 \\ \gamma_2 \Rightarrow \sim \beta_2 \end{array}}{\gamma_1 \wedge \gamma_2 \Rightarrow \sim \beta_2} \wedge_{L2}}{\gamma_1 \wedge \gamma_2 \Rightarrow \sim (\beta_1 \vee \beta_2)} \sim \vee_R$$

Temos que $\underset{\alpha \Rightarrow \gamma_1 \wedge \gamma_2}{D_1}$, $\underset{\gamma_1 \wedge \gamma_2 \Rightarrow \sim (\beta_1 \vee \beta_2)}{D_2}$. Mais ainda, como $V(\gamma_1) \subseteq V(\alpha) \cap V(\sim \beta_1)$ e

$V(\gamma_2) \subseteq V(\alpha) \cap V(\sim \beta_2)$, temos que $V(\gamma_1) \cup V(\gamma_2) \subseteq (V(\alpha) \cap V(\sim \beta_1)) \cup (V(\alpha) \cap V(\sim \beta_2))$, ou seja, $V(\gamma_1) \cup V(\gamma_2) \subseteq V(\alpha) \cap (V(\sim \beta_1) \cup V(\sim \beta_2))$, e como $V(\sim \beta_1) = V(\beta_1)$ e $V(\sim \beta_2) = V(\beta_2)$, temos também que $V(\gamma_1) \cup V(\gamma_2) \subseteq V(\alpha) \cap (V(\beta_1) \cup V(\beta_2))$, logo, $V(\gamma_1 \wedge \gamma_2) \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta_1 \vee \beta_2)$, segue que $V(\gamma_1 \wedge \gamma_2) \subseteq V(\alpha) \cap V(\sim (\beta_1 \vee \beta_2))$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\sim\sim_L$:**

$$\dfrac{\begin{array}{c} D' \\ \alpha \Rightarrow \beta \end{array}}{\sim\sim \alpha \Rightarrow \beta} \sim\sim_L$$

Assumimos $P(D')$ como hipótese de indução. De $P(D')$, existem $\gamma \in \mathcal{F}^{PQL}$, $D_1', D_2 \in PQL\text{-}cut$, tais que $\underset{\alpha\Rightarrow\gamma}{D_1'}$, $\underset{\gamma\Rightarrow\beta}{D_2}$ e $V(\gamma) \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta)$.

Consideremos então a seguinte derivação $D_1 \in PQL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_1' \\ \alpha \Rightarrow \gamma \end{array}}{\sim\sim \alpha \Rightarrow \gamma} \sim\sim_L$$

Temos que $\underset{\sim\sim\alpha\Rightarrow\gamma}{D_1}$, $\underset{\gamma\Rightarrow\beta}{D_2}$, e mais ainda, $V(\gamma) \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta)$, e como $V(\sim\sim \alpha) = V(\alpha)$, temos também que $V(\gamma) \subseteq V(\sim\sim \alpha) \cap V(\beta)$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\sim\sim_R$:**

$$\dfrac{\begin{array}{c} D' \\ \alpha \Rightarrow \beta \end{array}}{\alpha \Rightarrow \sim\sim \beta} \sim\sim_R$$

Assumimos $P(D')$ como hipótese de indução. De $P(D')$, existem $\gamma \in \mathcal{F}^{PQL}$, $D_1, D_2' \in PQL\text{-}cut$, tais que $\underset{\alpha\Rightarrow\gamma}{D_1}$, $\underset{\gamma\Rightarrow\beta}{D_2'}$ e $V(\gamma) \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta)$.

Consideremos então a seguinte derivação $D_2 \in PQL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_2' \\ \gamma \Rightarrow \beta \end{array}}{\gamma \Rightarrow \sim\sim \beta} \sim\sim_R$$

Temos que $\underset{\alpha\Rightarrow\gamma}{D_1}$, $\underset{\gamma\Rightarrow\sim\sim\beta}{D_2}$, e mais ainda, $V(\gamma) \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta)$, e como $V(\sim\sim \beta) = V(\beta)$, temos também que $V(\gamma) \subseteq V(\alpha) \cap V(\sim\sim \beta)$, e obtemos $P(D)$. $\square$

## 3.4 Mergulho Sintático de $PQL$ em $LL$ Eliminação e Admissibilidade do Corte e Decidibilidade

**Definição 45** ($f : \mathcal{F}^{PQL} \longrightarrow \mathcal{F}^{LL}$)

A função $f : \mathcal{F}^{PQL} \longrightarrow \mathcal{F}^{LL}$ é definida indutivamente por:

- $f(q) = q$, para todo $q \in \mathcal{V}_1$.
- $f(\sim q) = q'$, para todo $q \in \mathcal{V}_1$ (com $q' \in \mathcal{V}_2$).
- $f(\alpha \wedge \beta) = f(\alpha) \wedge f(\beta)$, para todo $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{PQL}$.
- $f(\alpha \vee \beta) = f(\alpha) \vee f(\beta)$, para todo $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{PQL}$.
- $f(\sim (\alpha \wedge \beta)) = f(\sim \alpha) \vee f(\sim \beta)$, para todo $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{PQL}$.
- $f(\sim (\alpha \vee \beta)) = f(\sim \alpha) \wedge f(\sim \beta)$, para todo $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{PQL}$.
- $f(\sim\sim \alpha) = f(\alpha)$, para todo $\alpha \in \mathcal{F}^{PQL}$.

**Teorema 46 ($1^\circ$ Mergulho Sintático Fraco de $PQL$ em $LL$)**
Para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{PQL}$, se $PQL \vdash \alpha \Rightarrow \beta$, então $LL \vdash f(\alpha) \Rightarrow f(\beta)$.

*Demonstração.* Por indução em derivações de $PQL$.
Para qualquer $D \in PQL$, $P(D)$ : para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{PQL}$ tais que $\underset{\alpha\Rightarrow\beta}{D}$, então existe $D' \in LL$ tal que $\underset{f(\alpha)\Rightarrow f(\beta)}{D'}$.

**Caso $A$:**

$$\dfrac{}{q \Rightarrow q}\ A$$

Temos que $f(q) = q$.
Consideremos então a seguinte derivação $D' \in LL$:

$$\dfrac{}{q \Rightarrow q}\ A$$

Temos que $\underset{q\Rightarrow q}{D'}$, logo, $\underset{f(q)\Rightarrow f(q)}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\sim A$:**

$$\dfrac{}{\sim q \Rightarrow \sim q}\ \sim A$$

Temos que $f(\sim q) = q'$, $q' \in \mathcal{V}_1$.
Consideremos então a seguinte derivação $D' \in LL$:

$$\dfrac{}{q' \Rightarrow q'}\ A$$

Temos que $\underset{q'\Rightarrow q'}{D'}$, logo, $\underset{f(\sim q)\Rightarrow f(\sim q)}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\wedge_{L1}$:**

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1 \\ \alpha_1 \Rightarrow \beta \end{matrix}}{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \beta}\ \wedge_{L1}$$

Temos que $f(\alpha_1 \wedge \alpha_2) = f(\alpha_1) \wedge f(\alpha_2)$.
Assumimos $P(D_1)$ como hipótese de indução. De $P(D_1)$, existe $D'_1 \in LL$ tal que $\underset{f(\alpha_1)\Rightarrow f(\beta)}{D'_1}$.
Consideremos então a seguinte derivação $D' \in LL$:

$$\dfrac{\begin{matrix} D'_1 \\ f(\alpha_1) \Rightarrow f(\beta) \end{matrix}}{f(\alpha_1) \wedge f(\alpha_2) \Rightarrow f(\beta)}\ \wedge_{L1}$$

Temos que $\underset{f(\alpha_1)\wedge f(\alpha_2)\Rightarrow f(\beta)}{D'}$, logo, $\underset{f(\alpha_1\wedge\alpha_2)\Rightarrow f(\beta)}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\wedge_{L2}$:**

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_1 \\ \alpha_2 \Rightarrow \beta \end{array}}{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \beta}\ \wedge_{L2}$$

Temos que $f(\alpha_1 \wedge \alpha_2) = f(\alpha_1) \wedge f(\alpha_2)$.
Assumimos $P(D_1)$ como hipótese de indução. De $P(D_1)$, existe $D'_1 \in LL$ tal que $\underset{f(\alpha_2)\Rightarrow f(\beta)}{D'_1}$.
Consideremos então a seguinte derivação $D' \in LL$:

$$\dfrac{\begin{array}{c} D'_1 \\ f(\alpha_2) \Rightarrow f(\beta) \end{array}}{f(\alpha_1) \wedge f(\alpha_2) \Rightarrow f(\beta)}\ \wedge_{L2}$$

Temos que $\underset{f(\alpha_1)\wedge f(\alpha_2)\Rightarrow f(\beta)}{D'}$, logo, $\underset{f(\alpha_1\wedge\alpha_2)\Rightarrow f(\beta)}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\wedge_R$:**

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_1 \\ \alpha \Rightarrow \beta_1 \end{array} \qquad \begin{array}{c} D_2 \\ \alpha \Rightarrow \beta_2 \end{array}}{\alpha \Rightarrow \beta_1 \wedge \beta_2}\ \wedge_R$$

Temos que $f(\beta_1 \wedge \beta_2) = f(\beta_1) \wedge f(\beta_2)$.
Assumimos $P(D_1)$ e $P(D_2)$ como hipóteses de indução. De $P(D_1)$, existe $D'_1 \in LL$ tal que $\underset{f(\alpha)\Rightarrow f(\beta_1)}{D'_1}$.
De $P(D_2)$, existe $D'_2 \in LL$ tal que $\underset{f(\alpha)\Rightarrow f(\beta_2)}{D'_2}$.
Consideremos então a seguinte derivação $D' \in LL$:

$$\dfrac{\begin{array}{c} D'_1 \\ f(\alpha) \Rightarrow f(\beta_1) \end{array} \qquad \begin{array}{c} D'_2 \\ f(\alpha) \Rightarrow f(\beta_2) \end{array}}{f(\alpha) \Rightarrow f(\beta_1) \wedge f(\beta_2)}\ \wedge_R$$

Temos que $\underset{f(\alpha)\Rightarrow f(\beta_1)\wedge f(\beta_2)}{D'}$, logo, $\underset{f(\alpha)\Rightarrow f(\beta_1\wedge\beta_2)}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\vee_L$:**

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_1 \\ \alpha_1 \Rightarrow \beta \end{array} \qquad \begin{array}{c} D_2 \\ \alpha_2 \Rightarrow \beta \end{array}}{\alpha_1 \vee \alpha_2 \Rightarrow \beta}\ \vee_L$$

Temos que $f(\alpha_1 \vee \alpha_2) = f(\alpha_1) \vee f(\alpha_2)$.
Assumimos $P(D_1)$ e $P(D_2)$ como hipóteses de indução. De $P(D_1)$, existe $D'_1 \in LL$ tal que $\underset{f(\alpha_1)\Rightarrow f(\beta)}{D'_1}$.
De $P(D_2)$, existe $D'_2 \in LL$ tal que $\underset{f(\alpha_2)\Rightarrow f(\beta)}{D'_2}$.
Consideremos então a seguinte derivação $D' \in LL$:

$$\dfrac{\begin{array}{c} D'_1 \\ f(\alpha_1) \Rightarrow f(\beta) \end{array} \qquad \begin{array}{c} D'_2 \\ f(\alpha_2) \Rightarrow f(\beta) \end{array}}{f(\alpha_1) \vee f(\alpha_2) \Rightarrow f(\beta)}\ \vee_L$$

Temos que $\underset{f(\alpha_1)\vee f(\alpha_2)\Rightarrow f(\beta)}{D'}$, logo, $\underset{f(\alpha_1\vee\alpha_2)\Rightarrow f(\beta)}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\vee_{R1}$:**

$$\dfrac{\begin{array}{c}D_1\\ \alpha \Rightarrow \beta_1\end{array}}{\alpha \Rightarrow \beta_1 \vee \beta_2}\ \vee_{R1}$$

Temos que $f(\beta_1 \vee \beta_2) = f(\beta_1) \vee f(\beta_2)$.
Assumimos $P(D_1)$ como hípótese de indução. De $P(D_1)$, existe $D_1' \in LL$ tal que $\underset{f(\alpha)\Rightarrow f(\beta_1)}{D_1'}$.
Consideremos então a seguinte derivação $D' \in LL$:

$$\dfrac{\begin{array}{c}D_1'\\ f(\alpha) \Rightarrow f(\beta_1)\end{array}}{f(\alpha) \Rightarrow f(\beta_1) \vee f(\beta_2)}\ \vee_{R1}$$

Temos que $\underset{f(\alpha)\Rightarrow f(\beta_1)\vee f(\beta_2)}{D'}$, logo, $\underset{f(\alpha)\Rightarrow f(\beta_1\vee\beta_2)}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\vee_{R2}$:**

$$\dfrac{\begin{array}{c}D_1\\ \alpha \Rightarrow \beta_2\end{array}}{\alpha \Rightarrow \beta_1 \vee \beta_2}\ \vee_{R2}$$

Temos que $f(\beta_1 \vee \beta_2) = f(\beta_1) \vee f(\beta_2)$.
Assumimos $P(D_1)$ como hípótese de indução. De $P(D_1)$, existe $D_1' \in LL$ tal que $\underset{f(\alpha)\Rightarrow f(\beta_2)}{D_1'}$.
Consideremos então a seguinte derivação $D' \in LL$:

$$\dfrac{\begin{array}{c}D_1'\\ f(\alpha) \Rightarrow f(\beta_2)\end{array}}{f(\alpha) \Rightarrow f(\beta_1) \vee f(\beta_2)}\ \vee_{R2}$$

Temos que $\underset{f(\alpha)\Rightarrow f(\beta_1)\vee f(\beta_2)}{D'}$, logo, $\underset{f(\alpha)\Rightarrow f(\beta_1\vee\beta_2)}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\sim\sim_L$:**

$$\dfrac{\begin{array}{c}D_1\\ \alpha \Rightarrow \beta\end{array}}{\sim\sim \alpha \Rightarrow \beta}\ \sim\sim_L$$

Temos que $f(\sim\sim \alpha) = f(\alpha)$.
Assumimos $P(D_1)$ como hípótese de indução. De $P(D_1)$, existe $D' \in LL$ tal que $\underset{f(\alpha)\Rightarrow f(\beta)}{D'}$, ou seja, $\underset{f(\sim\sim\alpha)\Rightarrow f(\beta)}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\sim\sim_R$:**

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_1 \\ \alpha \Rightarrow \beta \end{array}}{\alpha \Rightarrow \sim\sim \beta} \sim\sim_R$$

Temos que $f(\sim\sim \beta) = f(\beta)$.

Assumimos $P(D_1)$ como hipótese de indução. De $P(D_1)$, existe $D' \in LL$ tal que $\underset{f(\alpha)\Rightarrow f(\beta)}{D'}$, logo, $\underset{f(\alpha)\Rightarrow f(\sim\sim\beta)}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\sim \wedge_L$:**

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_1 \\ \sim \alpha_1 \Rightarrow \beta \end{array} \qquad \begin{array}{c} D_2 \\ \sim \alpha_2 \Rightarrow \beta \end{array}}{\sim (\alpha_1 \wedge \alpha_2) \Rightarrow \beta} \sim \wedge_L$$

Temos que $f(\sim (\alpha_1 \wedge \alpha_2)) = f(\sim \alpha_1) \vee f(\sim \alpha_2)$.

Assumimos $P(D_1)$ e $P(D_2)$ como hipóteses de indução. De $P(D_1)$, existe $D'_1 \in LL$ tal que $\underset{f(\sim\alpha_1)\Rightarrow f(\beta)}{D'_1}$. De $P(D_2)$, existe $D'_2 \in LL$ tal que $\underset{f(\sim\alpha_2)\Rightarrow f(\beta)}{D'_2}$.

Consideremos então a seguinte derivação $D' \in LL$:

$$\dfrac{\begin{array}{c} D'_1 \\ f(\sim \alpha_1) \Rightarrow f(\beta) \end{array} \qquad \begin{array}{c} D'_2 \\ f(\sim \alpha_2) \Rightarrow f(\beta) \end{array}}{f(\sim \alpha_1) \vee f(\sim \alpha_2) \Rightarrow f(\beta)} \vee_L$$

Temos que $\underset{f(\sim\alpha_1)\vee f(\sim\alpha_2))\Rightarrow f(\beta)}{D'}$, logo, $\underset{f(\sim(\alpha_1\wedge\alpha_2))\Rightarrow f(\beta)}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\sim \wedge_{R1}$:**

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_1 \\ \alpha \Rightarrow \sim \beta_1 \end{array}}{\alpha \Rightarrow \sim (\beta_1 \wedge \beta_2)} \sim \wedge_{R1}$$

Temos que $f(\sim (\beta_1 \wedge \beta_2)) = f(\sim \beta_1) \vee f(\sim \beta_2)$.

Assumimos $P(D_1)$ como hipótese de indução. De $P(D_1)$, existe $D'_1 \in LL$ tal que $\underset{f(\alpha)\Rightarrow f(\sim\beta_1)}{D'_1}$.

Consideremos então a seguinte derivação $D' \in LL$:

$$\dfrac{\begin{array}{c} D'_1 \\ f(\alpha) \Rightarrow f(\sim \beta_1) \end{array}}{f(\alpha) \Rightarrow f(\sim \beta_1) \vee f(\sim \beta_2)} \vee_{R1}$$

Temos que $\underset{f(\alpha)\Rightarrow f(\sim\beta_1)\vee f(\sim\beta_2)}{D'}$, logo, $\underset{f(\alpha)\Rightarrow f(\sim(\beta_1\wedge\beta_2))}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\sim \wedge_{R2}$:**

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_1 \\ \alpha \Rightarrow \sim \beta_2 \end{array}}{\alpha \Rightarrow \sim (\beta_1 \wedge \beta_2)} \sim \wedge_{R2}$$

Temos que $f(\sim (\beta_1 \wedge \beta_2)) = f(\sim \beta_1) \vee f(\sim \beta_2)$.
Assumimos $P(D_1)$ como hipótese de indução. De $P(D_1)$, existe $D_1' \in LL$ tal que $\underset{f(\alpha) \Rightarrow f(\sim \beta_2)}{D_1'}$.
Consideremos então a seguinte derivação $D' \in LL$:

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_1' \\ f(\alpha) \Rightarrow f(\sim \beta_2) \end{array}}{f(\alpha) \Rightarrow f(\sim \beta_1) \vee f(\sim \beta_2)} \vee_{R2}$$

Temos que $\underset{f(\alpha) \Rightarrow f(\sim \beta_1) \vee f(\sim \beta_2)}{D'}$, logo, $\underset{f(\alpha) \Rightarrow f(\sim (\beta_1 \wedge \beta_2))}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\sim \vee_{L1}$:**

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_1 \\ \sim \alpha_1 \Rightarrow \beta \end{array}}{\sim (\alpha_1 \vee \alpha_2) \Rightarrow \beta} \sim \vee_{L1}$$

Temos que $f(\sim (\alpha_1 \vee \alpha_2)) = f(\sim \alpha_1) \wedge f(\sim \alpha_2)$.
Assumimos $P(D_1)$ como hipótese de indução. De $P(D_1)$, existe $D_1' \in LL$ tal que $\underset{f(\sim \alpha_1) \Rightarrow f(\beta)}{D_1'}$.
Consideremos então a seguinte derivação $D' \in LL$:

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_1' \\ f(\sim \alpha_1) \Rightarrow f(\beta) \end{array}}{f(\sim \alpha_1) \wedge f(\sim \alpha_2) \Rightarrow f(\beta)} \wedge_{L1}$$

Temos que $\underset{f(\sim \alpha_1) \wedge f(\sim \alpha_2) \Rightarrow f(\beta)}{D'}$, logo, $\underset{f(\sim (\alpha_1 \vee \alpha_2)) \Rightarrow f(\beta)}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\sim \vee_{L2}$:**

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_1 \\ \sim \alpha_2 \Rightarrow \beta \end{array}}{\sim (\alpha_1 \vee \alpha_2) \Rightarrow \beta} \sim \vee_{L2}$$

Temos que $f(\sim (\alpha_1 \vee \alpha_2)) = f(\sim \alpha_1) \wedge f(\sim \alpha_2)$.
Assumimos $P(D_1)$ como hipótese de indução. De $P(D_1)$, existe $D_1' \in LL$ tal que $\underset{f(\sim \alpha_2) \Rightarrow f(\beta)}{D_1'}$.
Consideremos então a seguinte derivação $D' \in LL$:

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_1' \\ f(\sim \alpha_2) \Rightarrow f(\beta) \end{array}}{f(\sim \alpha_1) \wedge f(\sim \alpha_2) \Rightarrow f(\beta)} \wedge_{L2}$$

Temos que $\underset{f(\sim \alpha_1) \wedge f(\sim \alpha_2) \Rightarrow f(\beta)}{D'}$, logo, $\underset{f(\sim (\alpha_1 \vee \alpha_2)) \Rightarrow f(\beta)}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\sim \vee_R$:**

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1 \\ \alpha \Rightarrow \sim \beta_1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} D_2 \\ \alpha \Rightarrow \sim \beta_2 \end{matrix}}{\alpha \Rightarrow \sim (\beta_1 \vee \beta_2)} \sim \vee_R$$

Temos que $f(\sim (\beta_1 \vee \beta_2)) = f(\sim \beta_1) \wedge f(\sim \beta_2)$.

Assumimos $P(D_1)$ e $P(D_2)$ como hípótese de indução. De $P(D_1)$, existe $D'_1 \in LL$ tal que $\underset{f(\alpha)\Rightarrow f(\sim\beta_1)}{D'_1}$. De $P(D_2)$, existe $D'_2 \in LL$ tal que $\underset{f(\alpha)\Rightarrow f(\sim\beta_2)}{D'_2}$.

Consideremos então a seguinte derivação $D' \in LL$:

$$\dfrac{\begin{matrix} D'_1 \\ f(\alpha) \Rightarrow f(\sim \beta_1) \end{matrix} \qquad \begin{matrix} D'_2 \\ f(\alpha) \Rightarrow f(\sim \beta_2) \end{matrix}}{f(\alpha) \Rightarrow f(\sim \beta_1) \wedge f(\sim \beta_2)} \wedge_R$$

Temos que $\underset{f(\alpha)\Rightarrow f(\sim\beta_1)\wedge f(\sim\beta_2)}{D'}$, logo, $\underset{f(\alpha)\Rightarrow f(\sim(\beta_1\vee\beta_2))}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso *cut*:**

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1 \\ \alpha \Rightarrow \gamma \end{matrix} \qquad \begin{matrix} D_2 \\ \gamma \Rightarrow \beta \end{matrix}}{\alpha \Rightarrow \beta} \, cut$$

Assumimos $P(D_1)$ e $P(D_2)$ como hípóteses de indução. De $P(D_1)$, existe $D'_1 \in LL$ tal que $\underset{f(\alpha)\Rightarrow f(\gamma)}{D'_1}$. De $P(D_2)$, existe $D'_2 \in LL$ tal que $\underset{f(\gamma)\Rightarrow f(\beta)}{D'_2}$.

Consideremos então a seguinte derivação $D' \in LL$:

$$\dfrac{\begin{matrix} D'_1 \\ f(\alpha) \Rightarrow f(\gamma) \end{matrix} \qquad \begin{matrix} D'_2 \\ f(\gamma) \Rightarrow f(\beta) \end{matrix}}{f(\alpha) \Rightarrow f(\beta)} \, cut$$

Temos que $\underset{f(\alpha)\Rightarrow f(\beta)}{D'}$, e obtemos $P(D)$. $\square$

**Teorema 47 ($2^\circ$ Mergulho Sintático Fraco de $PQL$ em $LL$)**
Para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{PQL}$, se $LL$-$cut \vdash f(\alpha) \Rightarrow f(\beta)$, então $PQL$-$cut \vdash \alpha \Rightarrow \beta$.

*Demonstração.* Por indução em Derivações de $LL$-$cut$

Para qualquer $D \in LL$-$cut$, $P(D)$ : para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{PQL}$ tais que $\underset{f(\alpha)\Rightarrow f(\beta)}{D}$, então existe $D' \in PQL$-$cut$ tal que $\underset{\alpha\Rightarrow\beta}{D'}$.

**Caso $A$:**

**Subcaso:**

$$\dfrac{}{f(q) \Rightarrow f(q)}\ A$$

Pois $f(q) = q$, e $q \in \mathcal{V}_1$.

Consideremos então a seguinte derivação $D' \in PQL\text{-}cut$:

$$\dfrac{}{q \Rightarrow q}\ A$$

Temos que $\underset{q \Rightarrow q}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Subcaso:**

$$\dfrac{}{f(\sim q) \Rightarrow f(\sim q)}\ A$$

Pois $f(\sim q) = q', \in \mathcal{V}_2$.

Consideremos então a seguinte derivação $D' \in PQL\text{-}cut$:

$$\dfrac{}{\sim q \Rightarrow \sim q}\ \sim A$$

Temos que $\underset{\sim q \Rightarrow \sim q}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\wedge_{L1}$:**

**Subcaso:**

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_1 \\ f(\alpha_1) \Rightarrow f(\beta) \end{array}}{f(\alpha_1 \wedge \alpha_2) \Rightarrow f(\beta)}\ \wedge_{L1}$$

Pois $f(\alpha_1 \wedge \alpha_2) = f(\alpha_1) \wedge f(\alpha_2)$.

Assumimos $P(D_1)$ como hipótese de indução. De $P(D_1)$, existe $D'_1 \in PQL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha_1 \Rightarrow \beta}{D'}$.

Consideremos então a seguinte derivação $D' \in PQL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{array}{c} D'_1 \\ \alpha_1 \Rightarrow \beta \end{array}}{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \beta}\ \wedge_{L1}$$

Temos que $\underset{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \beta}{D'}$, obtemos $P(D)$.

**Subcaso:**

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_1 \\ f(\sim \alpha_1) \Rightarrow f(\beta) \end{array}}{f(\sim (\alpha_1 \vee \alpha_2)) \Rightarrow f(\beta)}\ \wedge_{L1}$$

Pois $f(\sim (\alpha_1 \vee \alpha_2)) = f(\sim \alpha_1) \wedge f(\sim \alpha_2)$. Assum

$P(D_1)$ como hipótese de indução. De $P(D_1)$, existe $D'_1 \in PQL\text{-}cut$ tal que $\underset{\sim \alpha_1 \Rightarrow \beta}{D'_1}$.

Consideremos então a seguinte derivação $D' \in PQL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{array}{c} D'_1 \\ \sim \alpha_1 \Rightarrow \beta \end{array}}{\sim (\alpha_1 \vee \alpha_2) \Rightarrow \beta}\ \sim \vee_{L1}$$

Temos que $\underset{\sim(\alpha_1 \vee \alpha_2) \Rightarrow \beta}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\wedge_{L2}$:**

**Subcaso:**

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1 \\ f(\alpha_2) \Rightarrow f(\beta) \end{matrix}}{f(\alpha_1 \wedge \alpha_2) \Rightarrow f(\beta)} \wedge_{L2} \qquad \text{Pois } f(\alpha_1 \wedge \alpha_2) = f(\alpha_1) \wedge f(\alpha_2).$$

Assumimos $P(D_1)$ como hipótese de indução. De $P(D_1)$, existe $D'_1 \in PQL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha_2 \Rightarrow \beta}{D'_1}$.

Consideremos então a seguinte derivação $D' \in PQL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{matrix} D'_1 \\ \alpha_2 \Rightarrow \beta \end{matrix}}{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \beta} \wedge_{L2}$$

Temos que $\underset{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \beta}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Subcaso:**

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1 \\ f(\sim \alpha_2) \Rightarrow f(\beta) \end{matrix}}{f(\sim (\alpha_1 \vee \alpha_2)) \Rightarrow f(\beta)} \wedge_{L2} \qquad \text{Pois } f(\sim (\alpha_1 \vee \alpha_2)) = f(\sim \alpha_1) \wedge f(\sim \alpha_2).$$

Assumimos $P(D_1)$ como hipótese de indução. De $P(D_1)$, existe $D'_1 \in PQL\text{-}cut$ tal que $\underset{\sim \alpha_2 \Rightarrow \beta}{D'_1}$.

Consideremos então a seguinte derivação $D' \in PQL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{matrix} D'_1 \\ \sim \alpha_2 \Rightarrow \beta \end{matrix}}{\sim (\alpha_1 \vee \alpha_2) \Rightarrow \beta} \sim \vee_{L2}$$

Temos que $\underset{\sim(\alpha_1 \vee \alpha_2) \Rightarrow \beta}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\wedge_R$:**

**Subcaso:**

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1 \\ f(\alpha) \Rightarrow f(\beta_1) \end{matrix} \qquad \begin{matrix} D_2 \\ f(\alpha) \Rightarrow f(\beta_2) \end{matrix}}{f(\alpha) \Rightarrow f(\beta_1 \wedge \beta_2)} \wedge_R \qquad \text{Pois } f(\beta_1 \wedge \beta_2) = f(\beta_1) \wedge f(\beta_2).$$

Assumimos $P(D_1)$ e $P(D_2)$ como hipóteses de indução. De $P(D_1)$, existe $D'_1 \in PQL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha \Rightarrow \beta_1}{D'_1}$.
De $P(D_2)$, existe $D'_2 \in PQL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha \Rightarrow \beta_2}{D'_2}$.

Consideremos então a seguinte derivação $D' \in PQL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{matrix} D'_1 \\ \alpha \Rightarrow \beta_1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} D'_2 \\ \alpha \Rightarrow \beta_2 \end{matrix}}{\alpha \Rightarrow \beta_1 \wedge \beta_2} \wedge_R$$

Temos que $\underset{\alpha \Rightarrow \beta_1 \wedge \beta_2}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Subcaso:**

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1 \\ f(\alpha) \Rightarrow f(\sim \beta_1) \end{matrix} \qquad \begin{matrix} D_2 \\ f(\alpha) \Rightarrow f(\sim \beta_2) \end{matrix}}{f(\alpha) \Rightarrow f(\sim (\beta_1 \vee \beta_2))} \wedge_R \qquad \text{Pois } f(\sim (\beta_1 \vee \beta_2)) = f(\sim \beta_1) \wedge f(\sim \beta_2).$$

Assumimos $P(D_1)$ e $P(D_2)$ como hipóteses de indução. De $P(D_1)$, existe $D'_1 \in PQL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha\Rightarrow\sim\beta_1}{D'_1}$. De $P(D_2)$, existe $D'_2 \in PQL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha\Rightarrow\sim\beta_2}{D'_2}$.

Consideremos então a seguinte derivação $D' \in PQL\text{-}cut$:

$$\frac{\begin{array}{c} D'_1 \\ \alpha \Rightarrow \sim \beta_1 \end{array} \qquad \begin{array}{c} D'_2 \\ \alpha \Rightarrow \sim \beta_2 \end{array}}{\alpha \Rightarrow \sim (\beta_1 \vee \beta_2)} \sim \vee_R$$

Temos que $\underset{\alpha\Rightarrow\sim(\beta_1\vee\beta_2)}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\vee_L$:**

**Subcaso:**

$$\frac{\begin{array}{c} D_1 \\ f(\alpha_1) \Rightarrow f(\beta) \end{array} \qquad \begin{array}{c} D_2 \\ f(\alpha_2) \Rightarrow f(\beta) \end{array}}{f(\alpha_1 \vee \alpha_2) \Rightarrow f(\beta)} \vee_L$$

Pois $f(\alpha_1 \vee \alpha_2) = f(\alpha_1) \vee f(\alpha_2)$.

Assumimos $P(D_1)$ e $P(D_2)$ como hipóteses de indução. De $P(D_1)$, existe $D'_1 \in PQL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha_1\Rightarrow\beta}{D'_1}$. De $P(D_2)$, existe $D'_2 \in PQL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha_2\Rightarrow\beta}{D'_2}$.

Consideremos então a seguinte derivação $D' \in PQL\text{-}cut$:

$$\frac{\begin{array}{c} D'_1 \\ \alpha_1 \Rightarrow \beta \end{array} \qquad \begin{array}{c} D'_2 \\ \alpha_2 \Rightarrow \beta \end{array}}{\alpha_1 \vee \alpha_2 \Rightarrow \beta} \vee_L$$

Temos que $\underset{\alpha_1\vee\alpha_2\Rightarrow\beta}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Subcaso:**

$$\frac{\begin{array}{c} D_1 \\ f(\sim \alpha_1) \Rightarrow f(\beta) \end{array} \qquad \begin{array}{c} D_2 \\ f(\sim \alpha_2) \Rightarrow f(\beta) \end{array}}{f(\sim (\alpha_1 \wedge \alpha_2)) \Rightarrow f(\beta)} \vee_L$$

Pois $f(\sim (\alpha_1 \wedge \alpha_2)) = f(\sim \alpha_1) \vee f(\sim \alpha_2)$. Assum

$P(D_1)$ e $P(D_2)$ como hipóteses de indução. De $P(D_1)$ existe $D'_1 \in PQL\text{-}cut$ tal que $\underset{\sim\alpha_1\Rightarrow\beta}{D'_1}$. De $P(D_2)$ existe $D'_2 \in PQL\text{-}cut$ tal que $\underset{\sim\alpha_2\Rightarrow\beta}{D'_2}$.

Consideremos então a seguinte derivação $D' \in PQL\text{-}cut$:

$$\frac{\begin{array}{c} D'_1 \\ \sim \alpha_1 \Rightarrow \beta \end{array} \qquad \begin{array}{c} D'_2 \\ \sim \alpha_2 \Rightarrow \beta \end{array}}{\sim (\alpha_1 \wedge \alpha_2) \Rightarrow \beta} \sim \wedge_L$$

Temos que $\underset{\sim(\alpha_1\wedge\alpha_2)\Rightarrow\beta}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso** $\vee_{R1}$**:**

**Subcaso:**

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_1 \\ f(\alpha) \Rightarrow f(\beta_1) \end{array}}{f(\alpha) \Rightarrow f(\beta_1 \vee \beta_2)} \vee_{R1}$$

Pois $f(\beta_1 \vee \beta_2) = f(\beta_1) \vee f(\beta_2)$.

Assumimos $P(D_1)$ como hipóteses de indução. De $P(D_1)$, existe $D'_1 \in PQL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha \Rightarrow \beta_1}{D'_1}$.

Consideremos então a seguinte derivação $D' \in PQL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{array}{c} D'_1 \\ \alpha \Rightarrow \beta_1 \end{array}}{\alpha \Rightarrow \beta_1 \vee \beta_2} \vee_{R1}$$

Temos que $\underset{\alpha \Rightarrow \beta_1 \vee \beta_2}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Subcaso:**

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_1 \\ f(\alpha) \Rightarrow f(\sim \beta_1) \end{array}}{f(\alpha) \Rightarrow f(\sim (\beta_1 \wedge \beta_2))} \vee_{R1}$$

Pois $f(\sim (\beta_1 \wedge \beta_2)) = f(\sim \beta_1) \vee f(\sim \beta_2)$.

Assumimos $P(D_1)$ como hipóteses de indução. De $P(D_1)$, existe $D'_1 \in PQL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha \Rightarrow \sim \beta_1}{D'_1}$.

Consideremos então a seguinte derivação $D' \in PQL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{array}{c} D'_1 \\ \alpha \Rightarrow \sim \beta_1 \end{array}}{\alpha \Rightarrow \sim (\beta_1 \wedge \beta_2)} \sim \wedge_{R1}$$

Temos que $\underset{\alpha \Rightarrow \sim (\beta_1 \wedge \beta_2)}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso** $\vee_{R2}$**:**

**Subcaso:**

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_1 \\ f(\alpha) \Rightarrow f(\beta_2) \end{array}}{f(\alpha) \Rightarrow f(\beta_1 \vee \beta_2)} \vee_{R2}$$

Pois $f(\beta_1 \vee \beta_2) = f(\beta_1) \vee f(\beta_2)$. Assumimos

$P(D_1)$ como hipóteses de indução. De $P(D_1)$, existe $D'_1 \in PQL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha \Rightarrow \beta_2}{D'_1}$.

Consideremos então a seguinte derivação $D' \in PQL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{array}{c} D'_1 \\ \alpha \Rightarrow \beta_2 \end{array}}{\alpha \Rightarrow \beta_1 \vee \beta_2} \vee_{R2}$$

Temos que $\underset{\alpha \Rightarrow \beta_1 \vee \beta_2}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Subcaso:**

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_1 \\ f(\alpha) \Rightarrow f(\sim \beta_2) \end{array}}{f(\alpha) \Rightarrow f(\sim (\beta_1 \wedge \beta_2))} \vee_{R2}$$

Pois $f(\sim (\beta_1 \wedge \beta_2)) = f(\sim \beta_1) \vee f(\sim \beta_2)$.

Assumimos $P(D_1)$ como hipóteses de indução. De $P(D_1)$, existe $D_1' \in PQL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha \Rightarrow \sim \beta_2}{D_1'}$.

Consideremos então a seguinte derivação $D' \in PQL\text{-}cut$:

$$\cfrac{\begin{array}{c} D_1' \\ \alpha \Rightarrow \sim \beta_2 \end{array}}{\alpha \Rightarrow \sim (\beta_1 \wedge \beta_2)} \sim \wedge_{R2}$$

Temos que $\underset{\alpha \Rightarrow \sim (\beta_1 \wedge \beta_2)}{D'}$, e obtemos $P(D)$. □

**Teorema 48 (1° Mergulho Sintático de $PQL$ em $LL$)**
Para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{PQL}$, $PQL \vdash \alpha \Rightarrow \beta$ sse $LL \vdash f(\alpha) \Rightarrow f(\beta)$.

*Demonstração.*
$\rightarrow$
Supomos $PQL \vdash \alpha \Rightarrow \beta$, pelo Teorema 46 temos $LL \vdash f(\alpha) \Rightarrow f(\beta)$.
$\leftarrow$
Supomos $LL \vdash f(\alpha) \Rightarrow f(\beta)$, pelo Teorema 27 $LL\text{-}cut \vdash f(\alpha) \Rightarrow f(\beta)$, pelo Teorema 47 temos $PQL\text{-}cut \vdash \alpha \Rightarrow \beta$, e segue que $PQL \vdash \alpha \Rightarrow \beta$. □

**Teorema 49 (2° Mergulho Sintático de $PQL$ em $LL$)**
Para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{PQL}$, $PQL\text{-}cut \vdash \alpha \Rightarrow \beta$ sse $LL\text{-}cut \vdash f(\alpha) \Rightarrow f(\beta)$.

*Demonstração.*
$\rightarrow$
Supomos $PQL\text{-}cut \vdash \alpha \Rightarrow \beta$, segue que $PQL \vdash \alpha \Rightarrow \beta$, pelo Teorema 48 temos $LL \vdash f(\alpha) \Rightarrow f(\beta)$, pelo Teorema 27 $LL\text{-}cut \vdash f(\alpha) \Rightarrow f(\beta)$.
$\leftarrow$
Supomos $LL\text{-}cut \vdash f(\alpha) \Rightarrow f(\beta)$, pelo Teorema 47 $PQL\text{-}cut \vdash \alpha \Rightarrow \beta$. □

**Teorema 50 (Eliminação do corte em $PQL$)**
Para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{PQL}$, se $PQL \vdash \alpha \Rightarrow \beta$, então $PQL\text{-}cut \vdash \alpha \Rightarrow \beta$.

*Demonstração.*
Supomos $PQL \vdash \alpha \Rightarrow \beta$, pelo Teorema 48 $LL \vdash f(\alpha) \Rightarrow f(\beta)$, pelo Teorema 27 $LL\text{-}cut \vdash f(\alpha) \Rightarrow f(\beta)$, pelo Teorema 49 $PQL\text{-}cut \vdash \alpha \Rightarrow \beta$. □

**Teorema 51 (Admissibilidade do corte em $PQL$-*cut*)**
Para quaisquer $\alpha, \gamma, \beta \in \mathcal{F}^{PQL}$:
Se $PQL\text{-}cut \vdash \alpha \Rightarrow \gamma$ e $PQL\text{-}cut \vdash \gamma \Rightarrow \beta$, então $PQL\text{-}cut \vdash \alpha \Rightarrow \beta$.

*Demonstração.*
Supomos $PQL\text{-}cut \vdash \alpha \Rightarrow \gamma$ e $PQL\text{-}cut \vdash \gamma \Rightarrow \beta$, pelo Teorema 49 $LL\text{-}cut \vdash f(\alpha) \Rightarrow f(\gamma)$ e $LL\text{-}cut \vdash f(\gamma) \Rightarrow f(\beta)$, pelo Teorema 26 $LL\text{-}cut \vdash f(\alpha) \Rightarrow f(\beta)$, pelo Teorema 49 $PQL\text{-}cut \vdash \alpha \Rightarrow \beta$. □

**Teorema 52 (Decidibilidade de $PQL$)**
O sistema de cálculo de mono-sequentes para a lógica quântica paraconsistente $PQL$ é decidível.

*Demonstração.*

Dados $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{PQL}$, é possível implementar um algoritmo que calcula se o mono-sequente $\alpha \Rightarrow \beta$ é $PQL$-válido.

Observamos que pelo Teorema 48 (1° Mergulho Sintático de $PQL$ em $LL$), o mono-sequente referido é derivável em $PQL$ sse a tradução do mesmo a partir da função $f$ é derivável em $LL$. Mais ainda, pelo Teorema 28 (Decidibilidade de $LL$), conseguimos decidir se a tradução do sequente original é derivável em $LL$. Caso a tradução seja derivável em $LL$, então o mono-sequente $\alpha \Rightarrow \beta$ é derivável em $PQL$. Caso contrário, $\alpha \Rightarrow \beta$ não é derivável em $PQL$. □

## 3.5 Mergulho Semântico de $PQL$ em $LL$ Completude e Correção

**Definição 53** ($rank : \mathcal{F}^{PQL} \longrightarrow \mathbb{N}$)

A função $rank : \mathcal{F}^{PQL} \longrightarrow \mathbb{N}$, que atribui a cada fórmula a sua complexidade, é definida indutivamente por:

- $rank(q) = 1$, para todo $q \in \mathcal{V}_1$.
- $rank(\alpha \wedge \beta) = rank(\alpha) + rank(\beta) + 1$, para todo $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{PQL}$.
- $rank(\alpha \vee \beta) = rank(\alpha) + rank(\beta) + 1$, para todo $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{PQL}$.
- $rank(\sim \alpha) = rank(\alpha) + 1$, para todo $\alpha \in \mathcal{F}^{PQL}$.

**Lema 54**

Seja $\mathcal{L}$ um reticulado. Temos que para qualquer valoração paraconsistente $v'$ em $\mathcal{L}$, existe uma valoração $v$ em $\mathcal{L}$, tal que para todo $\alpha \in \mathcal{F}^{PQL}$, $v'(\alpha) = v(f(\alpha))$.

*Demonstração.* Por indução em $\mathbb{N}$.

Para todo $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, $P(n)$ : para qualquer $\alpha \in \mathcal{F}^{PQL}$ tal que $rank(\alpha) \leq n$, para quaisquer $\mathcal{L}$ reticulado, $v'$ valoração paraconsistente em $\mathcal{L}$:

Seja $v$ a valoração em $\mathcal{L}$, tal que:

- para todo $q \in \mathcal{V}_1$, $v(q) = v'(q)$.
- para todo $q' \in \mathcal{V}_2$, $v(q') = v'(\sim q)$.

Temos que $v'(\alpha) = v(f(\alpha))$.

**Caso $n = 1$:**

$v'(q) = v(q) = v(f(q))$

**Caso $n \geq 2$:**

**Subcaso $\alpha = \sim q$:**

$v'(\sim q) = v(q') = v(f(\sim q))$

**Subcaso $\alpha = \alpha_1 \wedge \alpha_2$:**

Assumimos $P(n-1)$ como hipótese de indução.

De $P(n-1)$, como $rank(\alpha_1) < rank(\alpha_1 \wedge \alpha_2) \leq n$, ou seja, $rank(\alpha_1) \leq n-1$, temos que $v'(\alpha_1) = v(f(\alpha_1))$.
De $P(n-1)$, como $rank(\alpha_2) < rank(\alpha_1 \wedge \alpha_2) \leq n$, ou seja, $rank(\alpha_2) \leq n-1$, temos que $v'(\alpha_2) = v(f(\alpha_2))$.
Então temos: $v'(\alpha_1 \wedge \alpha_2) = v'(\alpha_1) \sqcap v'(\alpha_2) = v(f(\alpha_1) \sqcap v(f(\alpha_2)) = v(f(\alpha_1)) \wedge f(\alpha_2)) = v(f(\alpha_1 \wedge \alpha_2))$.

**Subcaso** $\alpha = \alpha_1 \vee \alpha_2$**:**
Assumimos $P(n-1)$ como hipótese de indução.
De $P(n-1)$, como $rank(\alpha_1) < rank(\alpha_1 \vee \alpha_2) \leq n$, ou seja, $rank(\alpha_1) \leq n-1$, temos que $v'(\alpha_1) = v(f(\alpha_1))$.
De $P(n-1)$, como $rank(\alpha_2) < rank(\alpha_1 \vee \alpha_2) \leq n$, ou seja, $rank(\alpha_2) \leq n-1$, temos que $v'(\alpha_2) = v(f(\alpha_2))$.
Então temos: $v'(\alpha_1 \vee \alpha_2) = v'(\alpha_1) \sqcup v'(\alpha_2) = v(f(\alpha_1) \sqcup v(f(\alpha_2)) = v(f(\alpha_1)) \vee f(\alpha_2)) = v(f(\alpha_1 \vee \alpha_2))$.

**Subcaso** $\alpha = \sim (\alpha_1 \wedge \alpha_2)$**:**
Assumimos $P(n-1)$ como hipótese de indução.
De $P(n-1)$, como $rank(\sim \alpha_1) < rank(\sim (\alpha_1 \wedge \alpha_2)) \leq n$, ou seja, $rank(\sim \alpha_1) \leq n-1$, temos que $v'(\sim \alpha_1) = v(f(\sim \alpha_1))$.
De $P(n-1)$, como $rank(\sim \alpha_2) < rank(\sim (\alpha_1 \wedge \alpha_2)) \leq n$, ou seja, $rank(\sim \alpha_2) \leq n-1$, temos que $v'(\sim \alpha_2) = v(f(\sim \alpha_2))$.
Então temos: $v'(\sim (\alpha_1 \wedge \alpha_2)) = v'(\sim \alpha_1) \sqcup v'(\sim \alpha_2) = v(f(\sim \alpha_1)) \sqcup v'(f(\sim \alpha_2)) = v(f(\sim \alpha_1) \vee f(\sim \alpha_2)) = v(f(\sim (\alpha_1 \wedge \alpha_2)))$.

**Subcaso** $\alpha = \sim (\alpha_1 \vee \alpha_2)$**:**
Assumimos $P(n-1)$ como hipótese de indução.
De $P(n-1)$, como $rank(\sim \alpha_1) < rank(\sim (\alpha_1 \vee \alpha_2)) \leq n$, ou seja, $rank(\sim \alpha_1) \leq n-1$, temos que $v'(\sim \alpha_1) = v(f(\sim \alpha_1))$.
De $P(n-1)$, como $rank(\sim \alpha_2) < rank(\sim (\alpha_1 \vee \alpha_2)) \leq n$, ou seja, $rank(\sim \alpha_2) \leq n-1$, temos que $v'(\sim \alpha_2) = v(f(\sim \alpha_2))$.
Então temos: $v'(\sim (\alpha_1 \vee \alpha_2)) = v'(\sim \alpha_1) \sqcap v'(\sim \alpha_2) = v(f(\sim \alpha_1)) \sqcap v'(f(\sim \alpha_2)) = v(f(\sim \alpha_1) \wedge f(\sim \alpha_2)) = v(f(\sim (\alpha_1 \vee \alpha_2)))$.

**Subcaso** $\alpha = \sim\sim \alpha_1$**:**
Assumimos $P(n-1)$ como hipótese de indução.
De $P(n-1)$, como $rank(\alpha_1) < rank(\sim\sim \alpha_1) \leq n$, ou seja, $rank(\alpha_1) \leq n-1$, temos que $v'(\alpha_1) = v(f(\alpha_1))$.
Então temos: $v'(\sim\sim \alpha_1) = v'(\alpha_1) = v(f(\alpha_1)) = v(f(\sim\sim \alpha_1))$. □

**Lema 55**
Seja $\mathcal{L}$ um reticulado. Temos que para toda a valoração $v$ em $\mathcal{L}$, existe uma valoração paraconsistente $v'$ em $\mathcal{L}$, tal que para todo $\alpha \in \mathcal{F}^{PQL}$. $v'(\alpha) = v(f(\alpha))$.

*Demonstração.* Por indução em $\mathbb{N}$.
Para todo $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, $P(n)$ : para qualquer $\alpha \in \mathcal{F}^{PQL}$ tal que $rank(\alpha) \leq n$, para quaisquer $\mathcal{L}$ reticulado, $v$ valoração em $\mathcal{L}$:
Seja $v'$ a valoração paraconsistente em $\mathcal{L}$, tal que:

- para todo $q \in \mathcal{V}_1$, $v'(q) = v(q)$.
- para todo $q \in \mathcal{V}_1$, $v'(\sim q) = v(q')$.

Temos que $v'(\alpha) = v(f(\alpha))$.

**Caso** $n = 1$**:**
$v'(q) = v(q) = v(f(q))$

**Caso $n \geq 2$:**

**Subcaso $\alpha = \sim q$:**

$v'(\sim q) = v(q') = v(f(\sim q))$

**Subcaso $\alpha = \alpha_1 \wedge \alpha_2$:**

Assumimos $P(n-1)$ como hipótese de indução.

De $P(n-1)$, como $rank(\alpha_1) < rank(\alpha_1 \wedge \alpha_2) \leq n$, ou seja, $rank(\alpha_1) \leq n-1$, temos que $v'(\alpha_1) = v(f(\alpha_1))$.

De $P(n-1)$, como $rank(\alpha_2) < rank(\alpha_1 \wedge \alpha_2) \leq n$, ou seja, $rank(\alpha_2) \leq n-1$, temos que $v'(\alpha_2) = v(f(\alpha_2))$.

Então temos: $v'(\alpha_1 \wedge \alpha_2) = v'(\alpha_1) \sqcap v'(\alpha_2) = v(f(\alpha_1) \sqcap v(f(\alpha_2)) = v(f(\alpha_1)) \wedge f(\alpha_2)) = v(f(\alpha_1 \wedge \alpha_2))$.

**Subcaso $\alpha = \alpha_1 \vee \alpha_2$:**

Assumimos $P(n-1)$ como hipótese de indução.

De $P(n-1)$, como $rank(\alpha_1) < rank(\alpha_1 \vee \alpha_2) \leq n$, ou seja, $rank(\alpha_1) \leq n-1$, temos que $v'(\alpha_1) = v(f(\alpha_1))$.

De $P(n-1)$, como $rank(\alpha_2) < rank(\alpha_1 \vee \alpha_2) \leq n$, ou seja, $rank(\alpha_2) \leq n-1$, temos que $v'(\alpha_2) = v(f(\alpha_2))$.

Então temos: $v'(\alpha_1 \vee \alpha_2) = v'(\alpha_1) \sqcup v'(\alpha_2) = v(f(\alpha_1) \sqcup v(f(\alpha_2)) = v(f(\alpha_1)) \vee f(\alpha_2)) = v(f(\alpha_1 \vee \alpha_2))$.

**Subcaso $\alpha = \sim (\alpha_1 \wedge \alpha_2)$:**

Assumimos $P(n-1)$ como hipótese de indução.

De $P(n-1)$, como $rank(\sim \alpha_1) < rank(\sim (\alpha_1 \wedge \alpha_2)) \leq n$, ou seja, $rank(\sim \alpha_1) \leq n-1$, temos que $v'(\sim \alpha_1) = v(f(\sim \alpha_1))$.

De $P(n-1)$, como $rank(\sim \alpha_2) < rank(\sim (\alpha_2 \wedge \alpha_2)) \leq n$, ou seja, $rank(\sim \alpha_2) \leq n-1$, temos que $v'(\sim \alpha_2) = v(f(\sim \alpha_2))$.

Então temos: $v'(\sim (\alpha_1 \wedge \alpha_2)) = v'(\sim \alpha_1) \sqcup v'(\sim \alpha_2) = v(f(\sim \alpha_1)) \sqcup v'(f(\sim \alpha_2)) = v(f(\sim \alpha_1) \vee f(\sim \alpha_2)) = v(f(\sim (\alpha_1 \wedge \alpha_2)))$.

**Subcaso $\alpha = \sim (\alpha_1 \vee \alpha_2)$:**

Assumimos $P(n-1)$ como hipótese de indução.

De $P(n-1)$, como $rank(\sim \alpha_1) < rank(\sim (\alpha_1 \vee \alpha_2)) \leq n$, ou seja, $rank(\sim \alpha_1) \leq n-1$, temos que $v'(\sim \alpha_1) = v(f(\sim \alpha_1))$.

De $P(n-1)$, como $rank(\sim \alpha_2) < rank(\sim (\alpha_2 \vee \alpha_2)) \leq n$, ou seja, $rank(\sim \alpha_2) \leq n-1$, temos que $v'(\sim \alpha_2) = v(f(\sim \alpha_2))$.

Então temos: $v'(\sim (\alpha_1 \vee \alpha_2)) = v'(\sim \alpha_1) \sqcap v'(\sim \alpha_2) = v(f(\sim \alpha_1)) \sqcap v'(f(\sim \alpha_2)) = v(f(\sim \alpha_1) \wedge f(\sim \alpha_2)) = v(f(\sim (\alpha_1 \vee \alpha_2)))$.

**Subcaso $\alpha = \sim\sim \alpha_1$:**

Assumimos $P(n-1)$ como hipótese de indução.

De $P(n-1)$, como $rank(\alpha_1) < rank(\sim\sim \alpha_1) \leq n$, ou seja, $rank(\alpha_1) \leq n-1$, temos que $v'(\alpha_1) = v(f(\alpha_1))$.

Então temos: $v'(\sim\sim \alpha_1) = v'(\alpha_1) = v(f(\alpha_1)) = v(f(\sim\sim \alpha_1))$. □

**Teorema 56 (Mergulho Semântico de $PQL$ em $LL$)**

Para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{PQL}$, $PQL \models \alpha \Rightarrow \beta$ sse $LL \models f(\alpha) \Rightarrow f(\beta)$.

*Demonstração.*

$\rightarrow$

Assumimos $PQL \models \alpha \Rightarrow \beta$.

Supomos agora que $LL \not\models f(\alpha) \Rightarrow f(\beta)$, ou seja, existe um reticulado $\mathcal{L}$, e uma valoração $v$ em $\mathcal{L}$ tal que $v(f(\alpha)) \not\sqsubseteq_{\mathcal{L}} v(f(\beta))$.

Pelo Lema 55, existe uma valoração paraconsistente $v'$ em $\mathcal{L}$, tal que $v'(\gamma) = v(f(\gamma))$, para todo $\gamma \in \mathcal{F}^{PQL}$, em particular, $v'(\alpha) = v(f(\alpha))$ e $v'(\beta) = v(f(\beta))$, logo $v'(\alpha) \not\sqsubseteq_{\mathcal{L}} v'(\beta)$, e concluímos então que $PQL \not\models \alpha \Rightarrow \beta$.

Obtemos uma contradição, então por redução ao absurdo concluímos $LL \models f(\alpha) \Rightarrow f(\beta)$.

$\leftarrow$

Assumimos $LL \models f(\alpha) \Rightarrow f(\beta)$.

Supomos agora que $PQL \not\models \alpha \Rightarrow \beta$, ou seja, existe um reticulado $\mathcal{L}$, e uma valoração paraconsistente $v'$ em $\mathcal{L}$ tal que $v'(\alpha) \not\sqsubseteq_{\mathcal{L}} v'(\beta)$.

Pelo Lema 54, existe uma valoração $v$ em $\mathcal{L}$, tal que $v'(\gamma) = v(f(\gamma))$, para todo $\gamma \in \mathcal{F}^{PQL}$, em particular, $v'(\alpha) = v(f(\alpha))$ e $v'(\beta) = v(f(\beta))$, logo $v(f(\alpha)) \not\sqsubseteq_{\mathcal{L}} v(f(\beta))$, e concluímos então que $LL \not\models f(\alpha) \Rightarrow f(\beta)$.

Obtemos uma contradição, então por redução ao absurdo concluímos $PQL \models \alpha \Rightarrow \beta$. $\square$

**Teorema 57 (Completude e Correção em $PQL$)**

Para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{PQL}$, $PQL \models \alpha \Rightarrow \beta$ sse $PQL \vdash \alpha \Rightarrow \beta$.

*Demonstração.*

$PQL \models \alpha \Rightarrow \beta$ sse (pelo Teorema 56) $LL \models f(\alpha) \Rightarrow f(\beta)$ sse (pelo Teorema 22 e Teorema 23) $LL \vdash f(\alpha) \Rightarrow f(\beta)$ sse (pelo Teorema 48) $PQL \vdash \alpha \Rightarrow \beta$. $\square$

# 4 Lógica Nelsoniana

A *lógica nelsoniana* ($NL$) é introduzida como base para o *mergulho* da *lógica quântica paraconsistente nelsoniana*, sendo então o fragmento positivo dessa lógica. Esta abordagem é realizada por Kamide [4], onde apenas um mergulho sintático é estudado. Neste relatório, iremos analisar as restantes propriedades, bem como um mergulho semântico entre estas duas lógicas.

Definimos então uma nova estrutura algébrica — os *reticulados-NL*, isto é, reticulados limitados equipados com duas operações adicionais: *implicação* e *coimplicação*. Esta estrutura é utilizada para estabelecer as propriedades de *correção* e *completude* da lógica.

## 4.1 Sintaxe

**Definição 58** ($\mathcal{A}^{NL}$)
O alfabeto da lógica nelsoniana é dado por: $\mathcal{A}^{NL} = \mathcal{V} \cup \{\bot, \top, \wedge, \vee, \supset, \subset, (, )\}$.

**Definição 59** ($\mathcal{F}^{NL}$)
O conjunto das fórmulas da lógica nelsoniana $\mathcal{F}^{NL}$, é uma linguagem sobre $\mathcal{A}^{NL}$, definido indutivamente por:

- $\bot \in \mathcal{F}^{NL}$.
- $\top \in \mathcal{F}^{NL}$.
- $p \in \mathcal{F}^{NL}$, para todo $p \in \mathcal{V}$.
- $(\alpha \wedge \beta) \in \mathcal{F}^{NL}$, para todo $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{NL}$.
- $(\alpha \vee \beta) \in \mathcal{F}^{NL}$, para todo $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{NL}$.
- $(\alpha \supset \beta) \in \mathcal{F}^{NL}$, para todo $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{NL}$.
- $(\alpha \subset \beta) \in \mathcal{F}^{NL}$, para todo $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{NL}$.

**Definição 60** ($V : \mathcal{F}^{NL} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{V})$)
A função $V : \mathcal{F}^{NL} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{V})$, que a cada fórmula associa o conjunto das variáveis que nela ocorrem, é definida indutivamente por:

- $V(\bot) = \emptyset$.
- $V(\top) = \emptyset$.
- $V(p) = \{p\}$, para todo $p \in \mathcal{V}$.

- $V(\alpha \wedge \beta) = V(\alpha) \cup V(\beta)$, para todo $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{NL}$.
- $V(\alpha \vee \beta) = V(\alpha) \cup V(\beta)$, para todo $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{NL}$.
- $V(\alpha \supset \beta) = V(\alpha) \cup V(\beta)$, para todo $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{NL}$.
- $V(\alpha \subset \beta) = V(\alpha) \cup V(\beta)$, para todo $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{NL}$.

**Definição 61 (Mono-Sequentes em $\mathcal{F}^{NL}$)**
Um mono-sequente da lógica nelsoniana é uma expressão da forma $\alpha \Rightarrow \beta$, em que $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{NL}$.

## 4.2 Semântica

**Definição 62 (Reticulado Limitado)**
Um Reticulado Limitado é um tuplo $\mathcal{L} = (L, \sqcup, \sqcap, 0, 1)$ tal que:

- $(L, \sqcup, \sqcap)$ é um Reticulado.
- $0, 1 \in L$, tais que para qualquer $\alpha \in L$:
  - $\alpha \sqsubseteq_{\mathcal{L}} 1$
  - $0 \sqsubseteq_{\mathcal{L}} \alpha$

**Definição 63 (Reticulado-NL)**
Um Reticulado-NL é um tuplo $\mathcal{L} = (L, \sqcup, \sqcap, \sqsupset, \sqsubset, 0, 1)$ tal que:

- $(L, \sqcup, \sqcap, 0, 1)$ é um Reticulado Limitado.
- $\sqsupset$,$\sqsubset$ são operações binárias em $L$ tais que para quaisquer $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in L$:
  - se $\beta \sqsubseteq_{\mathcal{L}} \delta$, então $1 \sqsupset \beta \sqsubseteq_{\mathcal{L}} \delta$.
  - se $\alpha \sqsubseteq_{\mathcal{L}} \beta$, então $\alpha \sqsupset \beta = 1$.
  - se $\alpha \sqsubseteq_{\mathcal{L}} \beta$ e $\gamma \sqsubseteq_{\mathcal{L}} \delta$, então $\beta \sqsupset \gamma \sqsubseteq_{\mathcal{L}} \alpha \sqsupset \delta$.
  - se $\beta \sqsubseteq_{\mathcal{L}} \delta$, então $\beta \sqsubseteq_{\mathcal{L}} \delta \sqsubset 0$.
  - se $\alpha \sqsubseteq_{\mathcal{L}} \beta$, então $\alpha \sqsubset \beta = 0$.
  - se $\alpha \sqsubseteq_{\mathcal{L}} \beta$ e $\gamma \sqsubseteq_{\mathcal{L}} \delta$, então $\alpha \sqsubset \delta \sqsubseteq_{\mathcal{L}} \beta \sqsubset \gamma$.

**Definição 64 (Valoração)**
Seja $\mathcal{L} = (L, \sqcup, \sqcap, \sqsupset, 0, 1)$ um reticulado-NL. Uma função $v : \mathcal{F}^{NL} \longrightarrow L$ diz-se uma valoração em $\mathcal{L}$, quando:

- $v(\bot) = 0$
- $v(\top) = 1$
- para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{NL}$:
  - $v(\alpha \wedge \beta) = v(\alpha) \sqcap v(\beta)$

– $v(\alpha \vee \beta) = v(\alpha) \sqcup v(\beta)$
– $v(\alpha \supset \beta) = v(\alpha) \sqsupset v(\beta)$
– $v(\alpha \subset \beta) = v(\alpha) \sqsubset v(\beta)$

**Definição 65** ($NL \models^v \alpha \Rightarrow \beta$)
Sejam $\mathcal{L}$ um reticulado-NL, $v$ uma valoração em $\mathcal{L}$, $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{NL}$. $\alpha \Rightarrow \beta$ é verdadeiro sobre $v$ sse $v(\alpha) \sqsubseteq_{\mathcal{L}} v(\beta)$, denotado por $NL \models^v \alpha \Rightarrow \beta$.

**Definição 66** ($NL \models \alpha \Rightarrow \beta$)
Sejam $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{NL}$. $\alpha \Rightarrow \beta$ é $NL-$válido sse para todo reticulado-NL $\mathcal{L}$ e valoração $v$ em $\mathcal{L}$, $\alpha \Rightarrow \beta$ é verdadeiro sobre $v$, denotado por $NL \models \alpha \Rightarrow \beta$.

## 4.3 Sistema Dedutivo para a Lógica Nelsoniana Interpolação de Craig

**Definição 67** ($NL$)
O sistema dedutivo $NL$ é um cálculo de mono-sequentes com as seguintes regras de inferência:

$$\frac{}{p \Rightarrow p}\,A \qquad \frac{}{\bot \Rightarrow \alpha}\,\bot \qquad \frac{}{\alpha \Rightarrow \top}\,\top$$

$$\frac{\top \Rightarrow \beta}{\alpha \Rightarrow \beta}\,we_L \qquad \frac{\alpha \Rightarrow \bot}{\alpha \Rightarrow \beta}\,we_R$$

$$\frac{\alpha_1 \Rightarrow \beta}{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \beta}\,\wedge_{L1} \qquad \frac{\alpha_2 \Rightarrow \beta}{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \beta}\,\wedge_{L2} \qquad \frac{\alpha \Rightarrow \beta_1 \qquad \alpha \Rightarrow \beta_2}{\alpha \Rightarrow \beta_1 \wedge \beta_2}\,\wedge_R$$

$$\frac{\alpha_1 \Rightarrow \beta \qquad \alpha_2 \Rightarrow \beta}{\alpha_1 \vee \alpha_2 \Rightarrow \beta}\,\vee_L \qquad \frac{\alpha \Rightarrow \beta_1}{\alpha \Rightarrow \beta_1 \vee \beta_2}\,\vee_{R1} \qquad \frac{\alpha \Rightarrow \beta_2}{\alpha \Rightarrow \beta_1 \vee \beta_2}\,\vee_{R2}$$

$$\frac{\top \Rightarrow \alpha \qquad \beta \Rightarrow \delta}{\alpha \supset \beta \Rightarrow \delta}\,\supset_L \qquad \frac{\alpha \Rightarrow \beta}{\top \Rightarrow \alpha \supset \beta}\,\supset_R \qquad \frac{\alpha \Rightarrow \beta \qquad \gamma \Rightarrow \delta}{\beta \supset \gamma \Rightarrow \alpha \supset \delta}\,\supset_{order}$$

$$\frac{\alpha \Rightarrow \beta}{\alpha \subset \beta \Rightarrow \bot}\,\subset_L \qquad \frac{\delta \Rightarrow \alpha \qquad \beta \Rightarrow \bot}{\delta \Rightarrow \alpha \subset \beta}\,\subset_R \qquad \frac{\delta \Rightarrow \gamma \qquad \beta \Rightarrow \alpha}{\delta \subset \alpha \Rightarrow \gamma \subset \beta}\,\subset_{order}$$

$$\frac{\alpha \Rightarrow \gamma \qquad \gamma \Rightarrow \beta}{\alpha \Rightarrow \beta}\,cut$$

**Definição 68 (Derivação de $NL$)**
Uma derivação $D$ em $NL$ de um mono-sequente $\alpha \Rightarrow \beta$ é uma árvore que pode ser definida indutivamente da seguinte maneira:

- A regra aplicada a todo o sequente que seja uma folha da árvore é necessariamente uma das regras $A, \bot, \top$, que não tem premissas.
- Cada nó interno da árvore é obtido pela aplicação de uma regra de inferência do sistema $NL$, a partir de um ou dois mono-sequentes já presentes nos nós filhos.

- O sequente $\alpha \Rightarrow \beta$ é a raíz da árvore.

**Notação 69 ($\underset{\alpha\Rightarrow\beta}{D}$ em $NL$)**
Denotamos $\underset{\alpha\Rightarrow\beta}{D}$ quando $D$ é uma derivação em $NL$ cuja conclusão é o mono-sequente $\alpha \Rightarrow \beta$, com $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{NL}$. Neste caso dizemos que $D$ deriva $\alpha \Rightarrow \beta$.

**Definição 70 (Derivabilidade em $NL$)**
Um mono-sequente $\alpha \Rightarrow \beta$, com $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{NL}$, diz-se derivável em $NL$ se e só se existe $D \in NL$ tal que, $\underset{\alpha\Rightarrow\beta}{D}$, e denotamos por $NL \vdash \alpha \Rightarrow \beta$.

**Definição 71 ($NL$-*cut*)**
O sistema dedutivo $NL$-*cut* é o sistema obtido a partir de $NL$ pela remoção da regra de corte.

**Definição 72 (Derivação de $NL$-*cut*)**
Uma derivação $D$ em $NL$-*cut* de um mono-sequente $\alpha \Rightarrow \beta$ é uma árvore que pode ser definida indutivamente da seguinte maneira:

- A regra aplicada a todo o sequente que seja uma folha da árvore é necessariamente uma das regras $A, \bot, \top$, que não tem premissas.
- Cada nó interno da árvore é obtido pela aplicação de uma regra de inferência do sistema $NL$-*cut*, a partir de um ou dois mono-sequentes já presentes nos nós filhos.
- O sequente $\alpha \Rightarrow \beta$ é a raíz da árvore.

**Notação 73 ($\underset{\alpha\Rightarrow\beta}{D}$ em $NL$-*cut*)**
Denotamos $\underset{\alpha\Rightarrow\beta}{D}$ quando $D$ é uma derivação em $NL$-*cut* cuja conclusão é o mono-sequente $\alpha \Rightarrow \beta$, com $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{NL}$. Neste caso dizemos que $D$ deriva $\alpha \Rightarrow \beta$.

**Definição 74 (Derivabilidade em $NL$-*cut*)**
Um mono-sequente $\alpha \Rightarrow \beta$, com $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{NL}$, diz-se derivável em $NL$-*cut* se e só se existe $D \in NL$-*cut* tal que, $\underset{\alpha\Rightarrow\beta}{D}$, e denotamos por $NL$-*cut* $\vdash \alpha \Rightarrow \beta$.

**Proposição 75 (Derivabilidade de $\alpha \Rightarrow \alpha$)**
Para todo $\alpha \in \mathcal{F}^{NL}$, o mono-sequente $\alpha \Rightarrow \alpha$ é derivável em $NL$.

*Demonstração.* Por indução em $\alpha$.
Para qualquer $\alpha \in \mathcal{F}^{NL}$, $P(\alpha)$ : Existe $D \in NL$ tal que $\underset{\alpha\Rightarrow\alpha}{D}$.

**Caso $\alpha = p$:**
Consideremos a seguinte derivação $D \in NL$:

$$\dfrac{}{p \Rightarrow p}\ A$$

Temos que $\underset{p\Rightarrow p}{D}$, e obtemos $P(p)$.

**Caso $\alpha = \bot$:**

Consideremos a seguinte derivação $D \in NL$:

$$\dfrac{}{\bot \Rightarrow \bot}\ \bot$$

Temos que $\underset{\bot\Rightarrow\bot}{D}$, e obtemos $P(\bot)$.

**Caso $\alpha = \top$:**

Consideremos a seguinte derivação $D \in NL$:

$$\dfrac{}{\top \Rightarrow \top}\ \top$$

Temos que $\underset{\top\Rightarrow\top}{D}$, e obtemos $P(\top)$.

**Caso $\alpha = \alpha_1 \wedge \alpha_2$:**

Assumimos $P(\alpha_1), P(\alpha_2)$ como hipóteses de indução. De $P(\alpha_1)$, existe $D_1 \in NL$ tal que $\underset{\alpha_1\Rightarrow\alpha_1}{D_1}$. De $P(\alpha_2)$, existe $D_2 \in NL$ tal que $\underset{\alpha_2\Rightarrow\alpha_2}{D_2}$.

Consideremos a seguinte derivação $D \in NL$:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix} D_1 \\ \alpha_1 \Rightarrow \alpha_1 \end{matrix}}{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \alpha_1}\ \wedge_{L1} \qquad \dfrac{\begin{matrix} D_2 \\ \alpha_2 \Rightarrow \alpha_2 \end{matrix}}{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \alpha_2}\ \wedge_{L2}}{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \alpha_1 \wedge \alpha_2}\ \wedge_R$$

Temos que $\underset{\alpha_1\wedge\alpha_2\Rightarrow\alpha_1\wedge\alpha_2}{D}$, e obtemos $P(\alpha_1 \wedge \alpha_2)$.

**Caso $\alpha = \alpha_1 \vee \alpha_2$:**

Assumimos $P(\alpha_1), P(\alpha_2)$ como hipóteses de indução. De $P(\alpha_1)$, existe $D_1 \in NL$ tal que $\underset{\alpha_1\Rightarrow\alpha_1}{D_1}$. De $P(\alpha_2)$, existe $D_2 \in NL$ tal que $\underset{\alpha_2\Rightarrow\alpha_2}{D_2}$.

Consideremos a seguinte derivação $D \in NL$:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix} D_1 \\ \alpha_1 \Rightarrow \alpha_1 \end{matrix}}{\alpha_1 \Rightarrow \alpha_1 \vee \alpha_2}\ \vee_{R1} \qquad \dfrac{\begin{matrix} D_2 \\ \alpha_2 \Rightarrow \alpha_2 \end{matrix}}{\alpha_2 \Rightarrow \alpha_1 \vee \alpha_2}\ \vee_{R2}}{\alpha_1 \vee \alpha_2 \Rightarrow \alpha_1 \vee \alpha_2}\ \vee_L$$

Temos que $\underset{\alpha_1\vee\alpha_2\Rightarrow\alpha_1\vee\alpha_2}{D}$, e obtemos $P(\alpha_1 \vee \alpha_2)$.

**Caso $\alpha = \alpha_1 \supset \alpha_2$:**

Assumimos $P(\alpha_1), P(\alpha_2)$ como hipóteses de indução. De $P(\alpha_1)$, existe $D_1 \in NL$ tal que $\underset{\alpha_1\Rightarrow\alpha_1}{D_1}$. De $P(\alpha_2)$, existe $D_2 \in NL$ tal que $\underset{\alpha_2\Rightarrow\alpha_2}{D_2}$.

Consideremos a seguinte derivação $D \in NL$:

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1 \\ \alpha_1 \Rightarrow \alpha_1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} D_2 \\ \alpha_2 \Rightarrow \alpha_2 \end{matrix}}{\alpha_1 \supset \alpha_2 \Rightarrow \alpha_1 \supset \alpha_2}\ \supset_{order}$$

Temos que $\underset{\alpha_1 \supset \alpha_2 \Rightarrow \alpha_1 \supset \alpha_2}{D}$, e obtemos $P(\alpha_1 \supset \alpha_2)$.

**Caso $\alpha = \alpha_1 \subset \alpha_2$:**

Assumimos $P(\alpha_1), P(\alpha_2)$ como hipóteses de indução. De $P(\alpha_1)$, existe $D_1 \in NL$ tal que $\underset{\alpha_1 \Rightarrow \alpha_1}{D_1}$. De $P(\alpha_2)$, existe $D_2 \in NL$ tal que $\underset{\alpha_2 \Rightarrow \alpha_2}{D_2}$.

Consideremos a seguinte derivação $D \in NL$:

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1 \\ \alpha_1 \Rightarrow \alpha_1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} D_2 \\ \alpha_2 \Rightarrow \alpha_2 \end{matrix}}{\alpha_1 \subset \alpha_2 \Rightarrow \alpha_1 \subset \alpha_2} \subset_{order}$$

Temos que $\underset{\alpha_1 \subset \alpha_2 \Rightarrow \alpha_1 \subset \alpha_2}{D}$, e obtemos $P(\alpha_1 \subset \alpha_2)$. □

**Proposição 76**

Para todo $\alpha, \gamma, \delta \in \mathcal{F}^{NL}$, se $NL \vdash \alpha \Rightarrow \gamma \wedge \delta$, então $NL \vdash \alpha \Rightarrow \gamma$ e $NL \vdash \alpha \Rightarrow \delta$.

*Demonstração.* Por indução em derivações de $NL$.

Para qualquer $D \in NL$, $P(D)$ : se $\underset{\alpha \Rightarrow \gamma \wedge \delta}{D}$, com $\alpha, \gamma, \delta \in \mathcal{F}^{NL}$, então existem $D_1, D_2 \in NL$ tais que $\underset{\alpha \Rightarrow \gamma}{D_1}$ e $\underset{\alpha \Rightarrow \delta}{D_2}$.

**Caso $\perp$:**

$$\dfrac{}{\perp \Rightarrow \gamma \wedge \delta} \perp$$

Consideremos então as seguintes derivações $D_1, D_2 \in NL$:

$$\dfrac{}{\perp \Rightarrow \gamma} \perp \qquad\qquad \dfrac{}{\perp \Rightarrow \delta} \perp$$

Temos que $\underset{\perp \Rightarrow \gamma}{D_1}$ e $\underset{\perp \Rightarrow \delta}{D_2}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $we_R$:**

$$\dfrac{\begin{matrix} D' \\ \alpha \Rightarrow \perp \end{matrix}}{\alpha \Rightarrow \gamma \wedge \delta} we_R$$

Consideremos então as seguintes derivações $D_1, D_2 \in NL$:

$$\dfrac{\begin{matrix} D' \\ \alpha \Rightarrow \perp \end{matrix}}{\alpha \Rightarrow \gamma} we_R \qquad\qquad \dfrac{\begin{matrix} D' \\ \alpha \Rightarrow \perp \end{matrix}}{\alpha \Rightarrow \delta} we_R$$

Temos que $\underset{\alpha \Rightarrow \gamma}{D_1}$ e $\underset{\alpha \Rightarrow \delta}{D_2}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $we_L$:**

$$\dfrac{\begin{matrix} D' \\ \top \Rightarrow \gamma \wedge \delta \end{matrix}}{\alpha \Rightarrow \gamma \wedge \delta} we_L$$

Assumimos $P(D')$ como hipótese de indução.
De $P(D')$, existem $D'_1, D'_2 \in NL$, tais que $\underset{\top \Rightarrow \gamma}{D'_1}$ e $\underset{\top \Rightarrow \delta}{D'_2}$.
Consideremos então as seguintes derivações $D_1, D_2 \in NL$:

$$\dfrac{\begin{array}{c} D'_1 \\ \top \Rightarrow \gamma \end{array}}{\alpha \Rightarrow \gamma}\ we_L \qquad\qquad \dfrac{\begin{array}{c} D'_2 \\ \top \Rightarrow \delta \end{array}}{\alpha \Rightarrow \delta}\ we_L$$

Temos que $\underset{\alpha \Rightarrow \gamma}{D_1}$ e $\underset{\alpha \Rightarrow \delta}{D_2}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\wedge_{L1}$:**

$$\dfrac{\begin{array}{c} D' \\ \alpha_1 \Rightarrow \gamma \wedge \delta \end{array}}{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \gamma \wedge \delta}\ \wedge_{L1}$$

Assumimos $P(D')$ como hipótese de indução.
De $P(D')$, existem $D'_1, D'_2 \in NL$, tais que $\underset{\alpha_1 \Rightarrow \gamma}{D'_1}$ e $\underset{\alpha_1 \Rightarrow \delta}{D'_2}$.
Consideremos então as seguintes derivações $D_1, D_2 \in NL$:

$$\dfrac{\begin{array}{c} D'_1 \\ \alpha_1 \Rightarrow \gamma \end{array}}{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \gamma}\ \wedge_{L1} \qquad\qquad \dfrac{\begin{array}{c} D'_2 \\ \alpha_1 \Rightarrow \delta \end{array}}{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \delta}\ \wedge_{L1}$$

Temos que $\underset{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \gamma}{D_1}$ e $\underset{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \delta}{D_2}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\wedge_{L2}$:**

$$\dfrac{\begin{array}{c} D' \\ \alpha_2 \Rightarrow \gamma \wedge \delta \end{array}}{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \gamma \wedge \delta}\ \wedge_{L2}$$

Assumimos $P(D')$ como hipótese de indução. De $P(D')$, existem $D'_1, D'_2 \in NL$, tais que $\underset{\alpha_2 \Rightarrow \gamma}{D'_1}$ e $\underset{\alpha_2 \Rightarrow \delta}{D'_2}$.
Consideremos então as seguintes derivações $D_1, D_2 \in NL$:

$$\dfrac{\begin{array}{c} D'_1 \\ \alpha_2 \Rightarrow \gamma \end{array}}{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \gamma}\ \wedge_{L2} \qquad\qquad \dfrac{\begin{array}{c} D'_2 \\ \alpha_2 \Rightarrow \delta \end{array}}{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \delta}\ \wedge_{L2}$$

Temos que $\underset{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \gamma}{D_1}$ e $\underset{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \delta}{D_2}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\wedge_R$:**

$$\dfrac{\begin{array}{c} D' \\ \alpha \Rightarrow \gamma \end{array} \qquad \begin{array}{c} D'' \\ \alpha \Rightarrow \delta \end{array}}{\alpha \Rightarrow \gamma \wedge \delta}\ \wedge_R$$

Sejam $D_1 = D'$ e $D_2 = D''$, temos então que $\underset{\alpha \Rightarrow \gamma}{D_1}$ e $\underset{\alpha \Rightarrow \delta}{D_2}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\vee_L$:**

$$\dfrac{\overset{D'}{\alpha_1 \Rightarrow \gamma \wedge \delta} \qquad \overset{D''}{\alpha_2 \Rightarrow \gamma \wedge \delta}}{\alpha_1 \vee \alpha_2 \Rightarrow \gamma \wedge \delta}\ \vee_L$$

Assumimos $P(D')$ e $P(D'')$ como hipóteses de indução. De $P(D')$, existem $D_1', D_2' \in NL$, tais que $\underset{\alpha_1 \Rightarrow \gamma}{D_1'}$ e $\underset{\alpha_1 \Rightarrow \delta}{D_2'}$. De $P(D'')$, existem $D_1'', D_2'' \in NL$, tais que $\underset{\alpha_2 \Rightarrow \gamma}{D_1''}$ e $\underset{\alpha_2 \Rightarrow \delta}{D_2''}$.

Consideremos então as seguintes derivações $D_1, D_2 \in NL$:

$$\dfrac{\overset{D_1'}{\alpha_1 \Rightarrow \gamma} \qquad \overset{D_1''}{\alpha_2 \Rightarrow \gamma}}{\alpha_1 \vee \alpha_2 \Rightarrow \gamma}\ \vee_L \qquad\qquad \dfrac{\overset{D_2'}{\alpha_1 \Rightarrow \delta} \qquad \overset{D_2''}{\alpha_2 \Rightarrow \delta}}{\alpha_1 \vee \alpha_2 \Rightarrow \delta}\ \vee_L$$

Temos que $\underset{\alpha_1 \vee \alpha_2 \Rightarrow \gamma}{D_1}$ e $\underset{\alpha_1 \vee \alpha_2 \Rightarrow \delta}{D_2}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\supset_L$:**

$$\dfrac{\overset{D'}{\top \Rightarrow \alpha_1} \qquad \overset{D''}{\alpha_2 \Rightarrow \gamma \wedge \delta}}{\alpha_1 \supset \alpha_2 \Rightarrow \gamma \wedge \delta}\ \supset_L$$

Assumimos $P(D'')$ como hipótese de indução. De $P(D'')$, existem $D_1'', D_2'' \in NL$, tais que $\underset{\alpha_2 \Rightarrow \gamma}{D_1''}$ e $\underset{\alpha_2 \Rightarrow \delta}{D_2''}$.

Consideremos então as seguintes derivações $D_1, D_2 \in NL$:

$$\dfrac{\overset{D'}{\top \Rightarrow \alpha_1} \qquad \overset{D_1''}{\alpha_2 \Rightarrow \gamma}}{\alpha_1 \supset \alpha_2 \Rightarrow \gamma}\ \supset_L \qquad\qquad \dfrac{\overset{D'}{\top \Rightarrow \alpha_1} \qquad \overset{D_2''}{\alpha_2 \Rightarrow \delta}}{\alpha_1 \supset \alpha_2 \Rightarrow \delta}\ \supset_L$$

Temos que $\underset{\alpha_1 \supset \alpha_2 \Rightarrow \gamma}{D_1}$ e $\underset{\alpha_1 \supset \alpha_2 \Rightarrow \delta}{D_2}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso *cut*:**

$$\dfrac{\overset{D'}{\alpha \Rightarrow \beta} \qquad \overset{D''}{\beta \Rightarrow \gamma \wedge \delta}}{\alpha \Rightarrow \gamma \wedge \delta}\ cut$$

Assumimos $P(D'')$ como hipótese de indução. De $P(D'')$, existem $D_1'', D_2'' \in NL$, tais que $\underset{\beta \Rightarrow \gamma}{D_1''}$ e $\underset{\beta \Rightarrow \delta}{D_2''}$.

Consideremos então as seguintes derivações $D_1, D_2 \in NL$:

$$\dfrac{\overset{D'}{\alpha \Rightarrow \beta} \qquad \overset{D_1''}{\beta \Rightarrow \gamma}}{\alpha \Rightarrow \gamma}\ cut \qquad\qquad \dfrac{\overset{D'}{\alpha \Rightarrow \beta} \qquad \overset{D_2''}{\beta \Rightarrow \delta}}{\alpha \Rightarrow \delta}\ cut$$

Temos que $\underset{\alpha \Rightarrow \gamma}{D_1}$ e $\underset{\alpha \Rightarrow \delta}{D_2}$, e obtemos $P(D)$. □

**Teorema 77 (Interpolação de Craig em $NL$-*cut*)**

Para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{NL}$, se $NL$-*cut* $\vdash \alpha \Rightarrow \beta$, então existe $\gamma \in \mathcal{F}^{NL}$ tal que $NL$-*cut* $\vdash \alpha \Rightarrow \gamma$, $NL$-*cut* $\vdash \gamma \Rightarrow \beta$ e $V(\gamma) \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta)$.

*Demonstração.* Por indução em derivações de $NL$-*cut*.

Para todo $D \in NL$-*cut*, $P(D)$ : se $\underset{\alpha \Rightarrow \beta}{D}$, com $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{NL}$, então existem $\gamma \in \mathcal{F}^{NL}$, $D_1, D_2 \in NL$-*cut* tais que $\underset{\alpha \Rightarrow \gamma}{D_1}$, $\underset{\gamma \Rightarrow \beta}{D_2}$ e $V(\gamma) \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta)$.

**Caso $A$:**

$$\frac{}{p \Rightarrow p}\,A$$

Sejam $D_1 = D_2 = D \in NL\text{-}cut$. Temos que $\underset{p\Rightarrow p}{D_1}, \underset{p\Rightarrow p}{D_2}$, e mais ainda, $V(p) = \{p\} \subseteq V(p) \cap V(p)$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\bot$:**

$$\frac{}{\bot \Rightarrow \beta}\,\bot$$

Consideremos então as seguintes derivações $D_1, D_2 \in NL\text{-}cut$:

$$\frac{}{\bot \Rightarrow \bot}\,\bot \qquad\qquad \frac{}{\bot \Rightarrow \beta}\,\bot$$

Temos que $\underset{\bot\Rightarrow\bot}{D_1}, \underset{\bot\Rightarrow\beta}{D_2}$, e mais ainda, $V(\bot) = \emptyset \subseteq V(\bot) \cap V(\beta)$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\top$:**

$$\frac{}{\alpha \Rightarrow \top}\,\top$$

Consideremos então as seguintes derivações $D_1, D_2 \in NL\text{-}cut$:

$$\frac{}{\alpha \Rightarrow \top}\,\top \qquad\qquad \frac{}{\top \Rightarrow \top}\,\top$$

Temos que $\underset{\alpha\Rightarrow\top}{D_1}, \underset{\top\Rightarrow\top}{D_2}$, e mais ainda, $V(\top) = \emptyset \subseteq V(\alpha) \cap V(\top)$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $we_L$:**

$$\frac{\begin{array}{c} D' \\ \top \Rightarrow \beta \end{array}}{\alpha \Rightarrow \beta}\,we_L$$

Seja $D_2 = D'$. Consideremos então a seguinte derivação $D_1 \in NL\text{-}cut$:

$$\frac{}{\alpha \Rightarrow \top}\,\top$$

Temos que $\underset{\alpha\Rightarrow\top}{D_1}, \underset{\top\Rightarrow\beta}{D_2}$, e mais ainda, $V(\top) = \emptyset \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta)$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $we_R$:**

$$\frac{\begin{array}{c} D' \\ \alpha \Rightarrow \bot \end{array}}{\alpha \Rightarrow \beta}\,we_R$$

Seja $D_1 = D'$. Consideremos então a seguinte derivação $D_2 \in NL\text{-}cut$:

$$\frac{}{\bot \Rightarrow \beta}\,\bot$$

Temos que $\underset{\alpha\Rightarrow\bot}{D_1}, \underset{\bot\Rightarrow\beta}{D_2}$, e mais ainda, $V(\bot) = \emptyset \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta)$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\wedge_{L1}$:**

$$\begin{array}{c} D' \\ \dfrac{\alpha_1 \Rightarrow \beta}{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \beta}\wedge_{L1} \end{array}$$

Assumimos $P(D')$ como hipótese de indução.
De $P(D')$, existem $\gamma \in \mathcal{F}^{NL}$, $D_1', D_2 \in NL\text{-}cut$, tais que $\underset{\alpha_1\Rightarrow\gamma}{D_1'}$ , $\underset{\gamma\Rightarrow\beta}{D_2}$ e $V(\gamma) \subseteq V(\alpha_1) \cap V(\beta)$.
Consideremos então a seguinte derivação $D_1 \in NL\text{-}cut$:

$$\begin{array}{c} D_1' \\ \dfrac{\alpha_1 \Rightarrow \gamma}{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \gamma}\wedge_{L1} \end{array}$$

Temos que $\underset{\alpha_1\wedge\alpha_2\Rightarrow\gamma}{D_1}$ , $\underset{\gamma\Rightarrow\beta}{D_2}$, e mais ainda, como $V(\gamma) \subseteq V(\alpha_1) \cap V(\beta)$ e $V(\alpha_1) \subseteq V(\alpha_1 \wedge \alpha_2)$, ou seja, $V(\alpha_1) \cap V(\beta) \subseteq V(\alpha_1 \wedge \alpha_2) \cap V(\beta)$, temos também que $V(\gamma) \subseteq V(\alpha_1 \wedge \alpha_2) \cap V(\beta)$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\wedge_{L2}$:**

$$\begin{array}{c} D' \\ \dfrac{\alpha_2 \Rightarrow \beta}{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \beta}\wedge_{L2} \end{array}$$

Assumimos $P(D')$ como hipótese de indução.
De $P(D')$, existem $\gamma \in \mathcal{F}^{NL}$, $D_1', D_2 \in NL\text{-}cut$, tais que $\underset{\alpha_2\Rightarrow\gamma}{D_1'}$ , $\underset{\gamma\Rightarrow\beta}{D_2}$ e $V(\gamma) \subseteq V(\alpha_2) \cap V(\beta)$.
Consideremos então a seguinte derivação $D_1 \in NL\text{-}cut$:

$$\begin{array}{c} D_1' \\ \dfrac{\alpha_2 \Rightarrow \gamma}{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \gamma}\wedge_{L2} \end{array}$$

Temos que $\underset{\alpha_1\wedge\alpha_2\Rightarrow\gamma}{D_1}$ , $\underset{\gamma\Rightarrow\beta}{D_2}$, e mais ainda, como $V(\gamma) \subseteq V(\alpha_2) \cap V(\beta)$ e $V(\alpha_2) \subseteq V(\alpha_1 \wedge \alpha_2)$, ou seja, $V(\alpha_2) \cap V(\beta) \subseteq V(\alpha_1 \wedge \alpha_2) \cap V(\beta)$, temos também que $V(\gamma) \subseteq V(\alpha_1 \wedge \alpha_2) \cap V(\beta)$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\wedge_R$:**

$$\dfrac{\begin{array}{c} D' \\ \alpha \Rightarrow \beta_1 \end{array} \qquad \begin{array}{c} D'' \\ \alpha \Rightarrow \beta_2 \end{array}}{\alpha \Rightarrow \beta_1 \wedge \beta_2}\wedge_R$$

Assumimos $P(D')$ e $P(D'')$ como hipóteses de indução.
De $P(D')$, existem $\gamma_1 \in \mathcal{F}^{NL}$, $D_1', D_2' \in NL\text{-}cut$, tais que $\underset{\alpha\Rightarrow\gamma_1}{D_1'}$ , $\underset{\gamma_1\Rightarrow\beta_1}{D_2'}$ e $V(\gamma_1) \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta_1)$.
De $P(D'')$, existem $\gamma_2 \in \mathcal{F}^{NL}$, $D_1'', D_2'' \in NL\text{-}cut$, tais que $\underset{\alpha\Rightarrow\gamma_2}{D_1''}$ , $\underset{\gamma_2\Rightarrow\beta_2}{D_2''}$ e $V(\gamma_2) \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta_2)$.
Consideremos então as seguintes derivações $D_1, D_2 \in NL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_1' \\ \alpha \Rightarrow \gamma_1 \end{array} \qquad \begin{array}{c} D_1'' \\ \alpha \Rightarrow \gamma_2 \end{array}}{\alpha \Rightarrow \gamma_1 \wedge \gamma_2}\wedge_R \qquad\qquad \dfrac{\begin{array}{c} D_2' \\ \dfrac{\gamma_1 \Rightarrow \beta_1}{\gamma_1 \wedge \gamma_2 \Rightarrow \beta_1}\wedge_{L1} \end{array} \qquad \begin{array}{c} D_2'' \\ \dfrac{\gamma_2 \Rightarrow \beta_2}{\gamma_1 \wedge \gamma_2 \Rightarrow \beta_2}\wedge_{L2} \end{array}}{\gamma_1 \wedge \gamma_2 \Rightarrow \beta_1 \wedge \beta_2}\wedge_R$$

Temos que $\underset{\alpha\Rightarrow\gamma_1\wedge\gamma_2}{D_1}$, $\underset{\gamma_1\wedge\gamma_2\Rightarrow\beta_1\wedge\beta_2}{D_2}$. Mais ainda, como $V(\gamma_1) \subseteq V(\alpha)\cap V(\beta_1)$ e $V(\gamma_2) \subseteq V(\alpha)\cap V(\beta_2)$, temos que $V(\gamma_1) \cup V(\gamma_2) \subseteq (V(\alpha) \cap V(\beta_1)) \cup (V(\alpha) \cap V(\beta_2))$, ou seja, $V(\gamma_1) \cup V(\gamma_2) \subseteq V(\alpha) \cap (V(\beta_1) \cup V(\beta_2))$, logo, $V(\gamma_1 \wedge \gamma_2) \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta_1 \wedge \beta_2)$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\vee_L$:**

$$\dfrac{\overset{D'}{\alpha_1 \Rightarrow \beta} \qquad \overset{D''}{\alpha_2 \Rightarrow \beta}}{\alpha_1 \vee \alpha_2 \Rightarrow \beta}\vee_L$$

Assumimos $P(D')$ e $P(D'')$ como hipóteses de indução.
De $P(D')$, existem $\gamma_1 \in \mathcal{F}^{NL}$, $D_1', D_2' \in NL\text{-}cut$, tais que $\underset{\alpha_1\Rightarrow\gamma_1}{D_1'}$, $\underset{\gamma_1\Rightarrow\beta}{D_2'}$ e $V(\gamma_1) \subseteq V(\alpha_1) \cap V(\beta)$.
De $P(D'')$, existem $\gamma_2 \in \mathcal{F}^{NL}$, $D_1'', D_2'' \in NL\text{-}cut$, tais que $\underset{\alpha_2\Rightarrow\gamma_2}{D_1''}$, $\underset{\gamma_2\Rightarrow\beta}{D_2''}$ e $V(\gamma_2) \subseteq V(\alpha_2) \cap V(\beta)$.
Consideremos então as seguintes derivações $D_1, D_2 \in NL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\dfrac{\overset{D_1'}{\alpha_1 \Rightarrow \gamma_1}}{\alpha_1 \Rightarrow \gamma_1 \vee \gamma_2}\vee_{R1} \qquad \dfrac{\overset{D_1''}{\alpha_2 \Rightarrow \gamma_2}}{\alpha_2 \Rightarrow \gamma_1 \vee \gamma_2}\vee_{R2}}{\alpha_1 \vee \alpha_2 \Rightarrow \gamma_1 \vee \gamma_2}\vee_L \qquad\qquad \dfrac{\overset{D_2'}{\gamma_1 \Rightarrow \beta} \qquad \overset{D_2''}{\gamma_2 \Rightarrow \beta}}{\gamma_1 \vee \gamma_2 \Rightarrow \beta}\vee_L$$

Temos que $\underset{\alpha_1\vee\alpha_2\Rightarrow\gamma_1\vee\gamma_2}{D_1}$, $\underset{\gamma_1\vee\gamma_2\Rightarrow\beta}{D_2}$. Mais ainda, como $V(\gamma_1) \subseteq V(\alpha_1)\cap V(\beta)$ e $V(\gamma_2) \subseteq V(\alpha_2)\cap V(\beta)$, temos que $V(\gamma_1) \cup V(\gamma_2) \subseteq (V(\alpha_1) \cap V(\beta)) \cup (V(\alpha_2) \cap V(\beta))$, ou seja, $V(\gamma_1) \cup V(\gamma_2) \subseteq (V(\alpha_1) \cup V(\alpha_2)) \cap V(\beta)$, logo, $V(\gamma_1 \vee \gamma_2) \subseteq V(\alpha_1 \vee \alpha_2) \cap V(\beta)$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\vee_{R1}$:**

$$\dfrac{\overset{D'}{\alpha \Rightarrow \beta_1}}{\alpha \Rightarrow \beta_1 \vee \beta_2}\vee_{R1}$$

Assumimos $P(D')$ como hipótese de indução.
De $P(D')$, existem $\gamma \in \mathcal{F}^{NL}$, $D_1, D_2' \in NL\text{-}cut$, tais que $\underset{\alpha\Rightarrow\gamma}{D_1}$, $\underset{\gamma\Rightarrow\beta_1}{D_2'}$ e $V(\gamma) \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta_1)$.
Consideremos então a seguinte derivação $D_2 \in NL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\overset{D_2'}{\gamma \Rightarrow \beta_1}}{\gamma \Rightarrow \beta_1 \vee \beta_2}\vee_{R1}$$

Temos que $\underset{\alpha\Rightarrow\gamma}{D_1}$, $\underset{\gamma\Rightarrow\beta_1\vee\beta_2}{D_2}$, e mais ainda, como $V(\gamma) \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta_1)$ e $V(\beta_1) \subseteq V(\beta_1 \vee \beta_2)$, ou seja, $V(\alpha) \cap V(\beta_1) \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta_1 \vee \beta_2)$, temos também que $V(\gamma) \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta_1 \vee \beta_2)$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\vee_{R2}$:**

$$\dfrac{\overset{D'}{\alpha \Rightarrow \beta_2}}{\alpha \Rightarrow \beta_1 \vee \beta_2}\vee_{R2}$$

Assumimos $P(D')$ como hipótese de indução.
De $P(D')$, existem $\gamma \in \mathcal{F}^{NL}$, $D_1, D_2' \in NL\text{-}cut$, tais que $\underset{\alpha\Rightarrow\gamma}{D_1}$, $\underset{\gamma\Rightarrow\beta_2}{D_2'}$ e $V(\gamma) \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta_2)$.
Consideremos então a seguinte derivação $D_2 \in NL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_2' \\ \gamma \Rightarrow \beta_2 \end{array}}{\gamma \Rightarrow \beta_1 \vee \beta_2} \vee_{R2}$$

Temos que $\underset{\alpha\Rightarrow\gamma}{D_1}$, $\underset{\gamma\Rightarrow\beta_1\vee\beta_2}{D_2}$, e mais ainda, como $V(\gamma) \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta_2)$ e $V(\beta_2) \subseteq V(\beta_1 \vee \beta_2)$, ou seja, $V(\alpha) \cap V(\beta_2) \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta_1 \vee \beta_2)$, temos também que $V(\gamma) \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta_1 \vee \beta_2)$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\supset_L$:**

$$\dfrac{\begin{array}{c} D' \\ \top \Rightarrow \alpha_1 \end{array} \qquad \begin{array}{c} D'' \\ \alpha_2 \Rightarrow \beta \end{array}}{\alpha_1 \supset \alpha_2 \Rightarrow \beta} \supset_L$$

Assumimos $P(D'')$ como hipótese de indução.
De $P(D'')$, existem $\gamma \in \mathcal{F}^{NL}$, $D_1'', D_2 \in NL\text{-}cut$, tais que $\underset{\alpha_2\Rightarrow\gamma}{D_1''}$, $\underset{\gamma\Rightarrow\beta}{D_2}$ e $V(\gamma) \subseteq V(\alpha_2) \cap V(\beta)$.
Consideremos então a seguinte derivação $D_1 \in NL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{array}{c} D' \\ \top \Rightarrow \alpha_1 \end{array} \qquad \begin{array}{c} D_1'' \\ \alpha_2 \Rightarrow \gamma \end{array}}{\alpha_1 \supset \alpha_2 \Rightarrow \gamma} \supset_L$$

Temos que $\underset{\alpha_1\supset\alpha_2\Rightarrow\gamma}{D_1}$, $\underset{\gamma\Rightarrow\beta}{D_2}$, e mais ainda, como $V(\gamma) \subseteq V(\alpha_2) \cap V(\beta)$ e $V(\alpha_2) \subseteq V(\alpha_1 \supset \alpha_2)$, ou seja, $V(\alpha_2) \cap V(\beta) \subseteq V(\alpha_1 \supset \alpha_2) \cap V(\beta)$, temos também que $V(\gamma) \subseteq V(\alpha_1 \supset \alpha_2) \cap V(\beta)$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\supset_R$:**

$$\dfrac{\begin{array}{c} D' \\ \beta_1 \Rightarrow \beta_2 \end{array}}{\top \Rightarrow \beta_1 \supset \beta_2} \supset_R$$

Seja $D_2 = D \in NL\text{-}cut$. Consideremos então a seguinte derivação $D_1 \in NL\text{-}cut$:

$$\dfrac{}{\top \Rightarrow \top} \top$$

Temos que $\underset{\top\Rightarrow\top}{D_1}$, $\underset{\top\Rightarrow\beta_1\supset\beta_2}{D_2}$, e mais ainda, $V(\top) = \emptyset \subseteq V(\top) \cap V(\beta_1 \supset \beta_2)$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\supset_{order}$:**

$$\dfrac{\begin{array}{c} D' \\ \beta_1 \Rightarrow \alpha_1 \end{array} \qquad \begin{array}{c} D'' \\ \alpha_2 \Rightarrow \beta_2 \end{array}}{\alpha_1 \supset \alpha_2 \Rightarrow \beta_1 \supset \beta_2} \supset_{order}$$

Assumimos $P(D')$ e $P(D'')$ como hipóteses de indução.
De $P(D')$, existem $\gamma_1 \in \mathcal{F}^{NL}$, $D_1', D_2' \in NL\text{-}cut$, tais que $\underset{\beta_1\Rightarrow\gamma_1}{D_1'}$, $\underset{\gamma_1\Rightarrow\alpha_1}{D_2'}$ e $V(\gamma_1) \subseteq V(\beta_1) \cap V(\alpha_1)$.
De $P(D'')$, existem $\gamma_2 \in \mathcal{F}^{NL}$, $D_1'', D_2'' \in NL\text{-}cut$, tais que $\underset{\alpha_2\Rightarrow\gamma_2}{D_1''}$, $\underset{\gamma_2\Rightarrow\beta_2}{D_2''}$ e $V(\gamma_2) \subseteq V(\alpha_2) \cap V(\beta_2)$.
Consideremos então as seguintes derivações $D_1, D_2 \in NL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_2' \\ \gamma_1 \Rightarrow \alpha_1 \end{array} \qquad \begin{array}{c} D_1'' \\ \alpha_2 \Rightarrow \gamma_2 \end{array}}{\alpha_1 \supset \alpha_2 \Rightarrow \gamma_1 \supset \gamma_2} \supset_{order} \qquad \dfrac{\begin{array}{c} D_1' \\ \beta_1 \Rightarrow \gamma_1 \end{array} \qquad \begin{array}{c} D_2'' \\ \gamma_2 \Rightarrow \beta_2 \end{array}}{\gamma_1 \supset \gamma_2 \Rightarrow \beta_1 \supset \beta_2} \supset_{order}$$

Temos que $\underset{\alpha_1 \supset \alpha_2 \Rightarrow \gamma_1 \supset \gamma_2}{D_1}$, $\underset{\gamma_1 \supset \gamma_2 \Rightarrow \beta_1 \supset \beta_2}{D_2}$. Mais ainda, como $V(\gamma_1) \subseteq V(\beta_1) \cap V(\alpha_1)$ e $V(\gamma_2) \subseteq V(\alpha_2) \cap V(\beta_2)$, temos então que $V(\gamma_1) \subseteq V(\alpha_1) \cap V(\beta_1)$ e $V(\gamma_2) \subseteq V(\alpha_2) \cap V(\beta_2)$, logo,

$V(\gamma_1) \cup V(\gamma_2) \subseteq (V(\alpha_1) \cap V(\beta_1)) \cup (V(\alpha_2) \cap V(\beta_2))$.

Ora como $V(\alpha_1) \cap V(\beta_1) \subseteq V(\alpha_1) \subseteq V(\alpha_1) \cup V(\alpha_2)$ e $V(\alpha_1) \cap V(\beta_1) \subseteq V(\beta_1) \subseteq V(\beta_1) \cup V(\beta_2)$, temos então que $V(\alpha_1) \cap V(\beta_1) \subseteq (V(\alpha_1) \cup V(\alpha_2)) \cap (V(\beta_1) \cup V(\beta_2))$.

Ora como $V(\alpha_2) \cap V(\beta_2) \subseteq V(\alpha_2) \subseteq V(\alpha_1) \cup V(\alpha_2)$ e $V(\alpha_2) \cap V(\beta_2) \subseteq V(\beta_2) \subseteq V(\beta_1) \cup V(\beta_2)$, temos então que $V(\alpha_2) \cap V(\beta_2) \subseteq (V(\alpha_1) \cup V(\alpha_2)) \cap (V(\beta_1) \cup V(\beta_2))$.

Logo, concluímos que $(V(\alpha_1) \cap V(\beta_1)) \cup (V(\alpha_2) \cap V(\beta_2)) \subseteq (V(\alpha_1) \cup V(\alpha_2)) \cap (V(\beta_1) \cup V(\beta_2))$, e segue que, $V(\gamma_1) \cup V(\gamma_2) \subseteq (V(\alpha_1) \cup V(\alpha_2)) \cap (V(\beta_1) \cup V(\beta_2))$, ou seja, $V(\gamma_1 \supset \gamma_2) \subseteq V(\alpha_1 \supset \alpha_2) \cap V(\beta_1 \supset \beta_2)$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\subset_L$:**

$$\dfrac{\begin{array}{c} D' \\ \alpha_1 \Rightarrow \alpha_2 \end{array}}{\alpha_1 \supset \alpha_2 \Rightarrow \bot} \subset_L$$

Seja $D_1 = D \in NL\text{-}cut$. Consideremos então a seguinte derivação $D_2 \in NL\text{-}cut$:

$$\dfrac{}{\bot \Rightarrow \bot} \bot$$

Temos que $\underset{\alpha_1 \supset \alpha_2 \Rightarrow \bot}{D_1}$, $\underset{\bot \Rightarrow \bot}{D_2}$, e mais ainda, $V(\bot) = \emptyset \subseteq V(\alpha_1 \subset \alpha_2) \cap V(\bot)$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\subset_R$:**

$$\dfrac{\begin{array}{c} D' \\ \alpha \Rightarrow \beta_1 \end{array} \quad \begin{array}{c} D'' \\ \beta_2 \Rightarrow \bot \end{array}}{\alpha \Rightarrow \beta_1 \subset \beta_2} \subset_R$$

Assumimos $P(D')$ como hipótese de indução.

De $P(D')$, existem $\gamma \in \mathcal{F}^{NL}$, $D_1, D_2' \in NL\text{-}cut$, tais que $\underset{\alpha \Rightarrow \gamma}{D_1}$, $\underset{\gamma \Rightarrow \beta_1}{D_2'}$ e $V(\gamma) \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta_1)$.

Consideremos então a seguinte derivação $D_1 \in NL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_2' \\ \gamma \Rightarrow \beta_1 \end{array} \quad \begin{array}{c} D'' \\ \beta_2 \Rightarrow \bot \end{array}}{\gamma \Rightarrow \beta_1 \subset \beta_2} \subset_R$$

Temos que $\underset{\alpha \Rightarrow \gamma}{D_1}$, $\underset{\gamma \Rightarrow \beta_1 \subset \beta_2}{D_2}$, e mais ainda, como $V(\gamma) \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta_1)$ e $V(\beta_1) \subseteq V(\beta_1 \subset \beta_2)$, ou seja, $V(\alpha) \cap V(\beta_1) \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta_1 \subset \beta_2)$, temos também que $V(\gamma) \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta_1 \subset \beta_2)$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\subset_{order}$:**

$$\dfrac{\begin{array}{c} D' \\ \alpha_1 \Rightarrow \beta_1 \end{array} \quad \begin{array}{c} D'' \\ \beta_2 \Rightarrow \alpha_2 \end{array}}{\alpha_1 \subset \alpha_2 \Rightarrow \beta_1 \subset \beta_2} \subset_{order}$$

Assumimos $P(D')$ e $P(D'')$ como hipóteses de indução.

De $P(D')$, existem $\gamma_1 \in \mathcal{F}^{NL}$, $D'_1, D'_2 \in NL\text{-}cut$, tais que $\underset{\alpha_1 \Rightarrow \gamma_1}{D'_1}$ , $\underset{\gamma_1 \Rightarrow \beta_1}{D'_2}$ e $V(\gamma_1) \subseteq V(\alpha_1) \cap V(\beta_1)$.

De $P(D'')$, existem $\gamma_2 \in \mathcal{F}^{NL}$, $D''_1, D''_2 \in NL\text{-}cut$, tais que $\underset{\beta_2 \Rightarrow \gamma_2}{D''_1}$ , $\underset{\gamma_2 \Rightarrow \alpha_2}{D''_2}$ e $V(\gamma_2) \subseteq V(\beta_2) \cap V(\alpha_2)$.

Consideremos então as seguintes derivações $D_1, D_2 \in NL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\overset{D'_1}{\alpha_1 \Rightarrow \gamma_1} \qquad \overset{D''_2}{\gamma_2 \Rightarrow \alpha_2}}{\alpha_1 \subset \alpha_2 \Rightarrow \gamma_1 \subset \gamma_2} \subset_{order} \qquad\qquad \dfrac{\overset{D'_2}{\gamma_1 \Rightarrow \beta_1} \qquad \overset{D''_1}{\beta_2 \Rightarrow \gamma_2}}{\gamma_1 \subset \gamma_2 \Rightarrow \beta_1 \subset \beta_2} \subset_{order}$$

Temos que $\underset{\alpha_1 \subset \alpha_2 \Rightarrow \gamma_1 \subset \gamma_2}{D_1}$ , $\underset{\gamma_1 \subset \gamma_2 \Rightarrow \beta_1 \subset \beta_2}{D_2}$ . Mais ainda, como $V(\gamma_1) \subseteq V(\alpha_1) \cap V(\beta_1)$ e $V(\gamma_2) \subseteq V(\beta_2) \cap V(\alpha_2)$, temos então que $V(\gamma_1) \subseteq V(\alpha_1) \cap V(\beta_1)$ e $V(\gamma_2) \subseteq V(\alpha_2) \cap V(\beta_2)$, logo,

$V(\gamma_1) \cup V(\gamma_2) \subseteq (V(\alpha_1) \cap V(\beta_1)) \cup (V(\alpha_2) \cap V(\beta_2))$.

Ora como $V(\alpha_1) \cap V(\beta_1) \subseteq V(\alpha_1) \subseteq V(\alpha_1) \cup V(\alpha_2)$ e $V(\alpha_1) \cap V(\beta_1) \subseteq V(\beta_1) \subseteq V(\beta_1) \cup V(\beta_2)$,

temos então que $V(\alpha_1) \cap V(\beta_1) \subseteq (V(\alpha_1) \cup V(\alpha_2)) \cap (V(\beta_1) \cup V(\beta_2))$.

Ora como $V(\alpha_2) \cap V(\beta_2) \subseteq V(\alpha_2) \subseteq V(\alpha_1) \cup V(\alpha_2)$ e $V(\alpha_2) \cap V(\beta_2) \subseteq V(\beta_2) \subseteq V(\beta_1) \cup V(\beta_2)$,

temos então que $V(\alpha_2) \cap V(\beta_2) \subseteq (V(\alpha_1) \cup V(\alpha_2)) \cap (V(\beta_1) \cup V(\beta_2))$.

Logo, concluímos que $(V(\alpha_1) \cap V(\beta_1)) \cup (V(\alpha_2) \cap V(\beta_2)) \subseteq (V(\alpha_1) \cup V(\alpha_2)) \cap (V(\beta_1) \cup V(\beta_2))$, e segue que, $V(\gamma_1) \cup V(\gamma_2) \subseteq (V(\alpha_1) \cup V(\alpha_2)) \cap (V(\beta_1) \cup V(\beta_2))$, ou seja, $V(\gamma_1 \subset \gamma_2) \subseteq V(\alpha_1 \subset \alpha_2) \cap V(\beta_1 \subset \beta_2)$, e obtemos $P(D)$. □

## 4.4 Teorema da Completude

**Teorema 78 (Completude em $NL$)**

Para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{NL}$, se $NL \models \alpha \Rightarrow \beta$, então $NL \vdash \alpha \Rightarrow \beta$.

*Demonstração.*

Comecemos por definir a seguinte relação de congruência, $\approx$, em $\mathcal{F}^{NL}$, tal que para todo todo $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{NL}$:

$$\alpha \approx \beta \quad \text{sse} \quad NL \vdash \alpha \Rightarrow \beta \quad \text{e} \quad NL \vdash \beta \Rightarrow \alpha.$$

<u>Reflexividade</u>

Seja $\alpha \in \mathcal{F}^{NL}$. Pela Proposição 75, temos que o sequente $\alpha \Rightarrow \alpha$, é derivável em $NL$. Então temos que $NL \vdash \alpha \Rightarrow \alpha$ e $NL \vdash \alpha \Rightarrow \alpha$, logo, $\alpha \approx \alpha$.

<u>Simetria</u>

Sejam $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{NL}$ tais que $\alpha \approx \beta$. Então temos que $NL \vdash \alpha \Rightarrow \beta$ e $NL \vdash \beta \Rightarrow \alpha$, ou seja, $NL \vdash \beta \Rightarrow \alpha$ e $NL \vdash \alpha \Rightarrow \beta$. Concluímos então $\beta \approx \alpha$.

<u>Transitividade</u>

Sejam $\alpha, \gamma, \beta \in \mathcal{F}^{NL}$ tais que $\alpha \approx \gamma$ e $\gamma \approx \beta$.

De $\alpha \approx \gamma$ temos que $NL \vdash \alpha \Longrightarrow \gamma$, $NL \vdash \gamma \Longrightarrow \alpha$, ou seja, existem $D_1, D_2 \in NL$ tais que $\underset{\alpha \Longrightarrow \gamma}{D_1}$ , $\underset{\gamma \Longrightarrow \alpha}{D_2}$ .

De $\gamma \approx \beta$ temos que $NL \vdash \gamma \Longrightarrow \beta$, $NL \vdash \beta \Longrightarrow \gamma$, ou seja, existem $D_3, D_4 \in NL$ tais que: $\underset{\gamma \Longrightarrow \beta}{D_3}$ , $\underset{\beta \Longrightarrow \gamma}{D_4}$ .

Consideremos então as seguintes derivações em $NL$:

$$\dfrac{\begin{array}{cc} D_1 & D_3 \\ \alpha \Rightarrow \gamma & \gamma \Rightarrow \beta \end{array}}{\alpha \Rightarrow \beta}\, cut \qquad \dfrac{\begin{array}{cc} D_4 & D_2 \\ \beta \Rightarrow \gamma & \gamma \Rightarrow \alpha \end{array}}{\beta \Rightarrow \alpha}\, cut$$

Temos então que $NL \vdash \alpha \Rightarrow \beta$ e $NL \vdash \beta \Rightarrow \alpha$, logo, $\alpha \approx \beta$.

Compatibilidade com $\wedge$, $\vee$, $\supset$ e $\subset$

Sejam $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathcal{F}^{NL}$ tais que $\alpha \approx \gamma$ e $\beta \approx \delta$.

De $\alpha \approx \gamma$ temos que $NL \vdash \alpha \Rightarrow \gamma$ e $NL \vdash \gamma \Rightarrow \alpha$, ou seja, existem $D_1, D_2 \in NL$ tais que $\underset{\alpha \Longrightarrow \gamma}{D_1}$ , $\underset{\gamma \Longrightarrow \alpha}{D_2}$ .

De $\beta \approx \delta$ temos que $NL \vdash \beta \Rightarrow \delta$ e $NL \vdash \delta \Rightarrow \beta$, ou seja, existem $D_3, D_4 \in NL$ tais que $\underset{\beta \Longrightarrow \delta}{D_3}$ , $\underset{\delta \Longrightarrow \beta}{D_4}$ .

Consideremos então as seguintes derivações em $NL$:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c} D_1 \\ \alpha \Rightarrow \gamma \end{array}}{\alpha \wedge \beta \Rightarrow \gamma}\wedge_{L1} \quad \dfrac{\begin{array}{c} D_3 \\ \beta \Rightarrow \delta \end{array}}{\alpha \wedge \beta \Rightarrow \delta}\wedge_{L2}}{\alpha \wedge \beta \Rightarrow \gamma \wedge \delta}\wedge_R \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c} D_2 \\ \gamma \Rightarrow \alpha \end{array}}{\gamma \wedge \delta \Rightarrow \alpha}\wedge_{L1} \quad \dfrac{\begin{array}{c} D_4 \\ \delta \Rightarrow \beta \end{array}}{\gamma \wedge \delta \Rightarrow \beta}\wedge_{L2}}{\gamma \wedge \delta \Rightarrow \alpha \wedge \beta}\wedge_R$$

Temos então que $NL \vdash \alpha \wedge \beta \Rightarrow \gamma \wedge \delta$ e $NL \vdash \gamma \wedge \delta \Rightarrow \alpha \wedge \beta$, logo, $\alpha \wedge \beta \approx \gamma \wedge \delta$.

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c} D_1 \\ \alpha \Rightarrow \gamma \end{array}}{\alpha \Rightarrow \gamma \vee \delta}\vee_{R1} \quad \dfrac{\begin{array}{c} D_3 \\ \beta \Rightarrow \delta \end{array}}{\beta \Rightarrow \gamma \vee \delta}\vee_{R2}}{\alpha \vee \beta \Rightarrow \gamma \vee \delta}\vee_L \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c} D_2 \\ \gamma \Rightarrow \alpha \end{array}}{\gamma \Rightarrow \alpha \vee \beta}\vee_{R1} \quad \dfrac{\begin{array}{c} D_4 \\ \delta \Rightarrow \beta \end{array}}{\delta \Rightarrow \alpha \vee \beta}\vee_{R2}}{\gamma \vee \delta \Rightarrow \alpha \vee \beta}\vee_L$$

Temos então que $NL \vdash \alpha \vee \beta \Rightarrow \gamma \vee \delta$ e $NL \vdash \gamma \vee \delta \Rightarrow \alpha \vee \beta$, logo, $\alpha \vee \beta \approx \gamma \vee \delta$.

$$\dfrac{\begin{array}{cc} D_2 & D_3 \\ \gamma \Rightarrow \alpha & \beta \Rightarrow \delta \end{array}}{\alpha \supset \beta \Rightarrow \gamma \supset \delta}\supset_{order} \qquad \dfrac{\begin{array}{cc} D_1 & D_4 \\ \alpha \Rightarrow \gamma & \delta \Rightarrow \beta \end{array}}{\gamma \supset \delta \Rightarrow \alpha \supset \beta}\supset_{order}$$

Temos então que $NL \vdash \alpha \supset \beta \Rightarrow \gamma \supset \delta$ e $NL \vdash \gamma \supset \delta \Rightarrow \alpha \supset \beta$, logo, $\alpha \supset \beta \approx \gamma \supset \delta$.

$$\dfrac{\begin{array}{cc} D_1 & D_4 \\ \alpha \Rightarrow \gamma & \delta \Rightarrow \beta \end{array}}{\alpha \subset \beta \Rightarrow \gamma \subset \delta}\subset_{order} \qquad \dfrac{\begin{array}{cc} D_2 & D_3 \\ \gamma \Rightarrow \alpha & \beta \Rightarrow \delta \end{array}}{\gamma \subset \delta \Rightarrow \alpha \subset \beta}\subset_{order}$$

Temos então que $NL \vdash \alpha \subset \beta \Rightarrow \gamma \subset \delta$ e $NL \vdash \gamma \subset \delta \Rightarrow \alpha \subset \beta$, logo, $\alpha \subset \beta \approx \gamma \subset \delta$.

Visto então que $\approx$ é uma relação de congruência em $\mathcal{F}^{NL}$, definimos a classe de congruência de qualquer $\alpha \in \mathcal{F}^{NL}$ da seguinte forma:

$$[\alpha] = \{\beta \in \mathcal{F}^{NL} \mid \alpha \approx \beta\}$$

De seguida, definimos o conjunto das classes de congruência:

$$\mathcal{F}^{NL}/\approx = \{[\alpha] \mid \alpha \in \mathcal{F}^{NL}\}$$

Definimos agora as seguintes operações $\sqcup, \sqcap, \sqsupset, \sqsubset$, em $\mathcal{F}^{NL}/\approx$, tais que para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{NL}$:

- $[\alpha] \sqcup [\beta] = [\alpha \vee \beta]$
- $[\alpha] \sqcap [\beta] = [\alpha \wedge \beta]$

- $[\alpha] \sqsupset [\beta] = [\alpha \supset \beta]$
- $[\alpha] \sqsubset [\beta] = [\alpha \subset \beta]$

Agora, será provado que $\mathcal{F}^{\approx} = (\mathcal{F}^{NL}/\approx, \sqcup, \sqcap, \sqsupset, \sqsubset [\bot], [\top])$ é um reticulado-NL.

<u>Comutatividade</u>
Sejam $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{NL}$. Pela Proposição 75, existem $D_1, D_2 \in NL$ tais que $\underset{\alpha\Rightarrow\alpha}{D_1}$ e $\underset{\beta\Rightarrow\beta}{D_2}$.
Consideremos então as seguintes derivações em $NL$:

$$\dfrac{\dfrac{\overset{D_1}{\alpha\Rightarrow\alpha}}{\beta\wedge\alpha\Rightarrow\alpha}\wedge_{L2} \quad \dfrac{\overset{D_2}{\beta\Rightarrow\beta}}{\beta\wedge\alpha\Rightarrow\beta}\wedge_{L1}}{\beta\wedge\alpha\Rightarrow\alpha\wedge\beta}\wedge_R \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{D_2}{\beta\Rightarrow\beta}}{\alpha\wedge\beta\Rightarrow\beta}\wedge_{L2} \quad \dfrac{\overset{D_1}{\alpha\Rightarrow\alpha}}{\alpha\wedge\beta\Rightarrow\alpha}\wedge_{L1}}{\alpha\wedge\beta\Rightarrow\beta\wedge\alpha}\wedge_R$$

Temos então $NL \vdash \beta\wedge\alpha \Rightarrow \alpha\wedge\beta$ e $NL \vdash \alpha\wedge\beta \Rightarrow \beta\wedge\alpha$, logo, $\beta\wedge\alpha \approx \alpha\wedge\beta$,
ou seja, $[\beta\wedge\alpha] = [\alpha\wedge\beta]$, e concluímos $[\beta]\sqcap[\alpha] = [\alpha]\sqcap[\beta]$.

Consideremos ainda as seguintes derivações em $NL$:

$$\dfrac{\dfrac{\overset{D_1}{\alpha\Rightarrow\alpha}}{\alpha\Rightarrow\beta\vee\alpha}\vee_{R2} \quad \dfrac{\overset{D_2}{\beta\Rightarrow\beta}}{\beta\Rightarrow\beta\vee\alpha}\vee_{R1}}{\alpha\vee\beta\Rightarrow\beta\vee\alpha}\vee_L \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{D_2}{\beta\Rightarrow\beta}}{\beta\Rightarrow\alpha\vee\beta}\vee_{R2} \quad \dfrac{\overset{D_1}{\alpha\Rightarrow\alpha}}{\alpha\Rightarrow\alpha\vee\beta}\vee_{R1}}{\beta\vee\alpha\Rightarrow\alpha\vee\beta}\vee_L$$

Temos então $NL \vdash \alpha\vee\beta \Rightarrow \beta\vee\alpha$ e $NL \vdash \beta\vee\alpha \Rightarrow \alpha\vee\beta$, logo, $\alpha\vee\beta \approx \beta\vee\alpha$, ou seja $[\alpha\vee\beta] = [\beta\vee\alpha]$, e concluímos$[\alpha]\sqcup[\beta] = [\beta]\sqcup[\alpha]$.

<u>Associatividade</u>
Sejam $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{F}^{NL}$. Pela Proposição 75, existem $D_1, D_2, D_3 \in NL$ tais que $\underset{\alpha\Rightarrow\alpha}{D_1}$, $\underset{\beta\Rightarrow\beta}{D_2}$ e $\underset{\gamma\Rightarrow\gamma}{D_3}$.
Consideremos então as seguintes derivações em $NL$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{D_1}{\alpha\Rightarrow\alpha}}{\alpha\wedge\beta\Rightarrow\alpha}\wedge_{L1}}{(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma\Rightarrow\alpha}\wedge_{L1} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{D_2}{\beta\Rightarrow\beta}}{\alpha\wedge\beta\Rightarrow\beta}\wedge_{L2}}{(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma\Rightarrow\beta}\wedge_{L1} \quad \dfrac{\overset{D_3}{\gamma\Rightarrow\gamma}}{(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma\Rightarrow\gamma}\wedge_{L2}}{(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma\Rightarrow\beta\wedge\gamma}\wedge_R}{(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma\Rightarrow\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma)}\wedge_R$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{D_1}{\alpha\Rightarrow\alpha}}{\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma)\Rightarrow\alpha}\wedge_{L1} \quad \dfrac{\dfrac{\overset{D_2}{\beta\Rightarrow\beta}}{\beta\wedge\gamma\Rightarrow\beta}\wedge_{L1}}{\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma)\Rightarrow\beta}\wedge_{L2}}{\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma)\Rightarrow\alpha\wedge\beta}\wedge_R \quad \dfrac{\dfrac{\overset{D_3}{\gamma\Rightarrow\gamma}}{\beta\wedge\gamma\Rightarrow\gamma}\wedge_{L2}}{\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma)\Rightarrow\gamma}\wedge_{L2}}{\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma)\Rightarrow(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma}\wedge_R$$

Temos então $NL \vdash (\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma \Rightarrow \alpha\wedge(\beta\wedge\gamma)$ e $NL \vdash \alpha\wedge(\beta\wedge\gamma) \Rightarrow (\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma$, logo, $(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma \approx \alpha\wedge(\beta\wedge\gamma)$, ou seja, $[(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma] = [\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma)]$, mais ainda, $[(\alpha\wedge\beta)]\sqcap[\gamma] = [\alpha]\sqcap[(\beta\wedge\gamma)]$, e concluímos $([\alpha]\sqcap[\beta])\sqcap[\gamma] = [\alpha]\sqcap([\beta]\sqcap[\gamma])$.

Consideremos ainda as seguintes derivações em $NL$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{D_1}{\alpha\Rightarrow\alpha}}{\alpha\Rightarrow\alpha\vee(\beta\vee\gamma)}\vee_{R1} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{D_2}{\beta\Rightarrow\beta}}{\beta\Rightarrow\beta\vee\gamma}\vee_{R1}}{\beta\Rightarrow\alpha\vee(\beta\vee\gamma)}\vee_{R2}}{\alpha\vee\beta\Rightarrow\alpha\vee(\beta\vee\gamma)}\vee_L \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{D_3}{\gamma\Rightarrow\gamma}}{\gamma\Rightarrow(\beta\vee\gamma)}\vee_{R2}}{\gamma\Rightarrow\alpha\vee(\beta\vee\gamma)}\vee_{R2}}{(\alpha\vee\beta)\vee\gamma\Rightarrow\alpha\vee(\beta\vee\gamma)}\vee_L$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{D_1}{\alpha\Rightarrow\alpha}}{\alpha\Rightarrow\alpha\vee\beta}\vee_{R1}}{\alpha\Rightarrow(\alpha\vee\beta)\vee\gamma}\vee_{R1} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{D_2}{\beta\Rightarrow\beta}}{\beta\Rightarrow\alpha\vee\beta}\vee_{R2}}{\beta\Rightarrow(\alpha\vee\beta)\vee\gamma}\vee_{R1} \qquad \dfrac{\overset{D_3}{\gamma\Rightarrow\gamma}}{\gamma\Rightarrow(\alpha\vee\beta)\vee\gamma}\vee_{R2}}{\beta\vee\gamma\Rightarrow(\alpha\vee\beta)\vee\gamma}\vee_L}{\alpha\vee(\beta\vee\gamma)\Rightarrow(\alpha\vee\beta)\vee\gamma}\vee_L$$

Temos então: $NL \vdash (\alpha\vee\beta)\vee\gamma \Rightarrow \alpha\vee(\beta\vee\gamma)$ e $NL \vdash \alpha\vee(\beta\vee\gamma) \Rightarrow (\alpha\vee\beta)\vee\gamma$, logo, $(\alpha\vee\beta)\vee\gamma \approx \alpha\vee(\beta\vee\gamma)$, ou seja, $[(\alpha\vee\beta)\vee\gamma] = [\alpha\vee(\beta\vee\gamma)]$, mais ainda, $[(\alpha\vee\beta)]\sqcup[\gamma] = [\alpha]\sqcup[(\beta\vee\gamma)]$, e concluímos $([\alpha]\sqcup[\beta])\sqcup[\gamma] = [\alpha]\sqcup([\beta]\sqcup[\gamma])$.

Idempotência

Seja $\alpha \in \mathcal{F}^{NL}$. Pela Proposição 75, existe $D_1 \in NL$ tal que $\underset{\alpha\Rightarrow\alpha}{D_1}$.

Consideremos então as seguintes derivações em $NL$:

$$\dfrac{\overset{D_1}{\alpha\Rightarrow\alpha} \qquad \overset{D_1}{\alpha\Rightarrow\alpha}}{\alpha\Rightarrow\alpha\wedge\alpha}\wedge_R \qquad\qquad \dfrac{\overset{D_1}{\alpha\Rightarrow\alpha}}{\alpha\wedge\alpha\Rightarrow\alpha}\wedge_{L1}$$

Temos então $NL \vdash \alpha \Rightarrow \alpha\wedge\alpha$ e $NL \vdash \alpha\wedge\alpha \Rightarrow \alpha$, logo, $\alpha \approx \alpha\wedge\alpha$, ou seja,$[\alpha] = [\alpha\wedge\alpha]$, e concluímos $[\alpha] = [\alpha]\sqcap[\alpha]$.

Consideremos ainda as seguintes derivações em $NL$:

$$\dfrac{\overset{D_1}{\alpha\Rightarrow\alpha}}{\alpha\Rightarrow\alpha\vee\alpha}\vee_{R1} \qquad\qquad \dfrac{\overset{D_1}{\alpha\Rightarrow\alpha} \qquad \overset{D_1}{\alpha\Rightarrow\alpha}}{\alpha\vee\alpha\Rightarrow\alpha}\vee_L$$

Temos então $NL \vdash \alpha \Rightarrow \alpha\vee\alpha$ e $NL \vdash \alpha\vee\alpha \Rightarrow \alpha$, logo, $\alpha \approx \alpha\vee\alpha$, ou seja, $[\alpha] = [\alpha\vee\alpha]$, e concluímos $[\alpha] = [\alpha]\sqcup[\alpha]$.

Absorção

Sejam $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{NL}$. Pela Proposição 75, existem $D_1, D_2 \in NL$ tais que $\underset{\alpha\Rightarrow\alpha}{D_1}$ e $\underset{\beta\Rightarrow\beta}{D_2}$.

Consideremos então as seguintes derivações em $NL$:

$$\dfrac{\overset{D_1}{\alpha\Rightarrow\alpha} \qquad \dfrac{\overset{D_1}{\alpha\Rightarrow\alpha}}{\alpha\Rightarrow\alpha\vee\beta}\vee_{R1}}{\alpha\Rightarrow\alpha\wedge(\alpha\vee\beta)}\wedge_R \qquad\qquad \dfrac{\overset{D_1}{\alpha\Rightarrow\alpha}}{\alpha\wedge(\alpha\vee\beta)\Rightarrow\alpha}\wedge_{L1}$$

Temos então $NL \vdash \alpha \Rightarrow \alpha\wedge(\alpha\vee\beta)$ e $NL \vdash \alpha\wedge(\alpha\vee\beta) \Rightarrow \alpha$, logo, $\alpha \approx \alpha\wedge(\alpha\vee\beta)$, ou seja, $[\alpha] = [\alpha\wedge(\alpha\vee\beta)]$, mais ainda, $[\alpha] = [\alpha]\sqcap[(\alpha\vee\beta)]$, e concluímos $[\alpha] = [\alpha]\sqcap([\alpha]\sqcup[\beta])$.

Consideremos ainda as seguintes derivações em $NL$:

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1 \\ \alpha \Rightarrow \alpha \end{matrix}}{\alpha \Rightarrow \alpha \vee (\alpha \wedge \beta)}\ \vee_{R1} \qquad\qquad \dfrac{\begin{matrix} D_1 \\ \alpha \Rightarrow \alpha \end{matrix} \quad \dfrac{\begin{matrix} D_1 \\ \alpha \Rightarrow \alpha \end{matrix}}{\alpha \wedge \beta \Rightarrow \alpha}\ \wedge_{L1}}{\alpha \vee (\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \alpha}\ \vee_L$$

Temos então $NL \vdash \alpha \Rightarrow \alpha\vee(\alpha\wedge\beta)$ e $NL \vdash \alpha\vee(\alpha\wedge\beta) \Rightarrow \alpha$, logo, $\alpha \approx \alpha\vee(\alpha\wedge\beta)$, ou seja, $[\alpha] = [\alpha\vee(\alpha\wedge\beta)]$, mais ainda, $[\alpha] = [\alpha] \sqcup [(\alpha \wedge \beta)]$, e concluímos $[\alpha] = [\alpha] \sqcup ([\alpha] \sqcap [\beta])$.

Visto então que $(\mathcal{F}^{NL}/\approx, \sqcup, \sqcap)$ é um Reticulado, a relação de ordem parcial $\sqsubseteq_\approx$ em $\mathcal{F}^{NL}/\approx$ define-se da seguinte forma:

$$[\alpha] \sqsubseteq_\approx [\beta] \quad \text{sse} \quad [\alpha] = [\alpha] \sqcap [\beta] \quad \text{sse} \quad [\beta] = [\alpha] \sqcup [\beta]$$

<u>$[\perp]$ e $[\top]$</u>

Seja $\alpha \in \mathcal{F}^{NL}$. Pela Proposição 75, existe $D_1 \in NL$ tal que $\underset{\alpha\Rightarrow\alpha}{D_1}$.

Consideremos então as seguintes derivações em $NL$:

$$\dfrac{}{\perp \Rightarrow \perp \wedge \alpha}\ \perp \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{}{\perp \Rightarrow \perp}\ \perp}{\perp \wedge \alpha \Rightarrow \perp}\ \wedge_{L1}$$

Temos então $NL \vdash \perp \Rightarrow \perp \wedge \alpha$ e $NL \vdash \perp \wedge \alpha \Rightarrow \perp$, logo, $\perp \approx \perp \wedge \perp$, ou seja, $[\perp] = [\perp \wedge \alpha]$, mais ainda, $[\perp] = [\perp] \sqcap [\alpha]$, e concluímos $[\perp] \sqsubseteq_\approx [\alpha]$.

Consideremos ainda as seguintes derivações em $NL$:

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1 \\ \alpha \Rightarrow \alpha \end{matrix} \quad \dfrac{}{\alpha \Rightarrow \top}\ \top}{\alpha \Rightarrow \alpha \wedge \top}\ \wedge_R \qquad\qquad \dfrac{\begin{matrix} D_1 \\ \alpha \Rightarrow \alpha \end{matrix}}{\alpha \wedge \top \Rightarrow \alpha}\ \wedge_{L1}$$

Temos então $NL \vdash \alpha \Rightarrow \alpha \wedge \top$ e $NL \vdash \alpha \wedge \top \Rightarrow \alpha$, logo, $\alpha \approx \alpha \wedge \top$, ou seja, $[\alpha] = [\alpha \wedge \top]$, mais ainda, $[\alpha] = [\alpha] \sqcap [\top]$, e concluímos $[\alpha] \sqsubseteq_\approx [\top]$.

Conluímos então que $(\mathcal{F}^{NL}/\approx, \sqcup, \sqcap, [\perp], [\top])$ é um Reticulado Limitado.

<u>Propriedades de $\sqsupset, \sqsubset$</u>

Sejam $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathcal{F}^{NL}$ tais que $[\alpha] \sqsubseteq_\approx [\beta]$ e $[\gamma]. \sqsubseteq_\approx [\delta]$.

Temos então que $[\alpha] = [\alpha] \sqcap [\beta]$, logo, $[\alpha] = [\alpha \wedge \beta]$, ou seja, $\alpha \approx \alpha \wedge \beta$. Mais ainda, $[\gamma] = [\gamma] \sqcap [\delta]$, logo $[\gamma] = [\gamma \wedge \delta]$, ou seja, $\gamma \approx \gamma \wedge \delta$. Segue que $NL \vdash \alpha \Rightarrow \alpha \wedge \beta$, $NL \vdash \alpha \wedge \beta \Rightarrow \alpha$, $NL \vdash \gamma \Rightarrow \gamma \wedge \delta$ e $NL \vdash \gamma \wedge \delta \Rightarrow \gamma$. Logo, existem $D_1, D_2, D_3, D_4 \in NL$ tais que $\underset{\alpha\Rightarrow\alpha\wedge\beta}{D_1}$, $\underset{\alpha\wedge\beta\Rightarrow\alpha}{D_2}$, $\underset{\gamma\Rightarrow\gamma\wedge\delta}{D_3}$ e $\underset{\gamma\wedge\delta\Rightarrow\gamma}{D_4}$.

Pela Proposição 76, como $\underset{\alpha\Rightarrow\alpha\wedge\beta}{D_1}$ e $\underset{\gamma\Rightarrow\gamma\wedge\delta}{D_3}$, existem $D_6, D_8 \in NL$ tais que $\underset{\alpha\Rightarrow\beta}{D_6}$ e $\underset{\gamma\Rightarrow\delta}{D_8}$.

Pela Proposição 75, temos ainda que existem $D_5, D_7, D_9, D_{10} \in NL$ tal que $\underset{\top\supset\alpha\Rightarrow\top\supset\alpha}{D_5}$, $\underset{\beta\supset\gamma\Rightarrow\beta\supset\gamma}{D_7}$, $\underset{\alpha\Rightarrow\alpha}{D_9}$ e $\underset{\alpha\subset\delta\Rightarrow\alpha\subset\delta}{D_{10}}$.

<u>Propriedade (1)</u>

Consideremos então as seguintes derivações em $NL$:

$$\dfrac{\begin{matrix} D_5 \\ \top \supset \alpha \Rightarrow \top \supset \alpha \end{matrix} \quad \dfrac{\dfrac{}{\top \Rightarrow \top}\ \top \quad \begin{matrix} D_6 \\ \alpha \Rightarrow \beta \end{matrix}}{\top \supset \alpha \Rightarrow \beta}\ \supset_L}{\top \supset \alpha \Rightarrow (\top \supset \alpha) \wedge \beta}\ \wedge_R \qquad\qquad \dfrac{\begin{matrix} D_5 \\ \top \supset \alpha \Rightarrow \top \supset \alpha \end{matrix}}{(\top \supset \alpha) \wedge \beta \Rightarrow \top \supset \alpha}\ \wedge_{L1}$$

Temos então $NL \vdash \top \supset \alpha \Rightarrow (\top \supset \alpha)\wedge\beta$ e $NL \vdash (\top \supset \alpha)\wedge\beta \Rightarrow (\top \supset \alpha)$, logo, $\top \supset \alpha \approx (\top \supset \alpha)\wedge\beta$, ou seja, $[\top \supset \alpha] = [(\top \supset \alpha) \wedge \beta]$, mais ainda, $[\top] \sqsupset [\alpha] = [\top \supset \alpha] \sqcap [\alpha]$, segue que $[\top] \sqsupset [\alpha] = ([\top] \sqsupset [\alpha]) \sqcap [\alpha]$, e concluímos $[\top] \sqsupset [\alpha] \sqsubseteq_\approx [\beta]$.

Concluíndo, se $[\alpha] \sqsubseteq_{\approx} [\beta]$, então $[\top] \sqsupset [\alpha] \sqsubseteq_{\approx} [\beta]$.

Propriedade (2)
Consideremos ainda as seguintes derivações em $NL$:

$$\dfrac{}{\alpha \supset \beta \Rightarrow \top}\ \top \qquad\qquad \dfrac{\begin{matrix} D_6 \\ \alpha \Rightarrow \beta \end{matrix}}{\top \Rightarrow \alpha \supset \beta}\ \supset_R$$

Temos então $NL \vdash \alpha \supset \beta \Rightarrow \top$ e $NL \vdash \top \Rightarrow \alpha \supset \beta$, logo, $\alpha \supset \beta \approx \top$, ou seja, $[\alpha \supset \beta] = [\top]$, e concluímos $[\alpha] \sqsupset [\beta] = [\top]$.
Concluíndo, se $[\alpha] \sqsubseteq_{\approx} [\beta]$, então $[\alpha] \sqsupset [\beta] = [\top]$.

Propriedade (3)
Consideremos ainda as seguintes derivações em $NL$:

$$\dfrac{\begin{matrix} D_7 \\ \beta \supset \gamma \Rightarrow \beta \supset \gamma \end{matrix} \qquad \dfrac{\begin{matrix} D_6 \\ \alpha \Rightarrow \beta \end{matrix} \qquad \begin{matrix} D_8 \\ \gamma \Rightarrow \delta \end{matrix}}{\beta \supset \gamma \Rightarrow \alpha \supset \delta}\ \supset_{order}}{\beta \supset \gamma \Rightarrow (\beta \supset \gamma) \wedge (\alpha \supset \delta)}\ \wedge_R \qquad\qquad \dfrac{\begin{matrix} D_7 \\ \beta \supset \gamma \Rightarrow \beta \supset \gamma \end{matrix}}{(\beta \supset \gamma) \wedge (\alpha \supset \delta) \Rightarrow \beta \supset \gamma}\ \wedge_{L1}$$

Temos então $NL \vdash \beta \supset \gamma \Rightarrow (\beta \supset \gamma) \wedge (\alpha \supset \delta)$ e $NL \vdash (\beta \supset \gamma) \wedge (\alpha \supset \delta) \Rightarrow \beta \supset \gamma$, logo, $\beta \supset \gamma \approx (\beta \supset \gamma) \wedge (\alpha \supset \delta)$, ou seja, $[\beta \supset \gamma] = [(\beta \supset \gamma) \wedge (\alpha \supset \delta)]$, mais ainda, $[\beta] \sqsupset [\gamma] = [\beta \supset \gamma] \sqcap [\alpha \supset \delta]$, segue que, $[\beta] \sqsupset [\gamma] = ([\beta] \sqsupset [\gamma]) \sqcap ([\alpha] \sqsupset [\delta])$, e concluímos $[\beta] \sqsupset [\gamma] \sqsubseteq_{\approx} [\alpha] \sqsupset [\delta]$.
Concluíndo, se $[\alpha] \sqsubseteq_{\approx} [\beta]$ e $[\gamma] \sqsubseteq_{\approx} [\delta]$ então $[\beta] \sqsupset [\gamma] \sqsubseteq_{\approx} [\alpha] \sqsupset [\delta]$.

Propriedade (4)
Consideremos então as seguintes derivações em $NL$:

$$\dfrac{\begin{matrix} D_9 \\ \alpha \Rightarrow \alpha \end{matrix} \qquad \dfrac{\begin{matrix} D_6 \\ \alpha \Rightarrow \beta \end{matrix} \qquad \dfrac{}{\bot \Rightarrow \bot}\ \bot}{\alpha \Rightarrow \beta \subset \bot}\ \subset_R}{\alpha \Rightarrow \alpha \wedge (\beta \subset \bot)}\ \wedge_R \qquad\qquad \dfrac{\begin{matrix} D_9 \\ \alpha \Rightarrow \alpha \end{matrix}}{\alpha \wedge (\beta \subset \bot) \Rightarrow \alpha}\ \wedge_{L1}$$

Temos então $NL \vdash \alpha \Rightarrow \alpha \wedge (\beta \subset \bot)$ e $NL \vdash \alpha \wedge (\beta \subset \bot) \Rightarrow \alpha$, logo, $\alpha \approx \alpha \wedge (\beta \subset \bot)$, ou seja, $[\alpha] = [\alpha \wedge (\beta \subset \bot)]$, mais ainda, $[\alpha] = [\alpha] \sqcap [\beta \subset \bot]$, segue que $[\alpha] = [\alpha] \sqcap ([\beta] \sqsubset [\bot])$, e concluímos $[\alpha] \sqsubseteq_{\approx} [\beta] \sqsubset [\bot]$.
Concluíndo, se $[\alpha] \sqsubseteq_{\approx} [\beta]$, então $[\alpha] \sqsubseteq_{\approx} [\beta] \sqsubset [\bot]$.

Propriedade (5)
Consideremos ainda as seguintes derivações em $NL$:

$$\dfrac{\begin{matrix} D_6 \\ \alpha \Rightarrow \beta \end{matrix}}{\alpha \subset \beta \Rightarrow \bot}\ \subset_L \qquad\qquad \dfrac{}{\bot \Rightarrow \alpha \subset \beta}\ \bot$$

Temos então $NL \vdash \alpha \subset \beta \Rightarrow \bot$ e $NL \vdash \bot \Rightarrow \alpha \supset \beta$, logo, $\alpha \subset \beta \approx \bot$, ou seja, $[\alpha \subset \beta] = [\bot]$, e concluímos $[\alpha] \sqsubset [\beta] = [\bot]$.
Concluíndo, se $[\alpha] \sqsubseteq_{\approx} [\beta]$, então $[\alpha] \sqsubset [\beta] = [\bot]$.

Propriedade (6)
Consideremos ainda as seguintes derivações em $NL$:

$$\dfrac{\begin{matrix} D_{10} \\ \alpha \subset \delta \Rightarrow \alpha \subset \delta \end{matrix} \qquad \dfrac{\begin{matrix} D_6 \\ \alpha \Rightarrow \beta \end{matrix} \qquad \begin{matrix} D_8 \\ \gamma \Rightarrow \delta \end{matrix}}{\alpha \subset \delta \Rightarrow \beta \supset \gamma}\ \subset_{order}}{\alpha \subset \delta \Rightarrow (\alpha \subset \delta) \wedge (\beta \subset \gamma)}\ \wedge_R \qquad\qquad \dfrac{\begin{matrix} D_{10} \\ \alpha \subset \delta \Rightarrow \alpha \subset \delta \end{matrix}}{(\alpha \subset \delta) \wedge (\beta \subset \gamma) \Rightarrow \alpha \subset \delta}\ \wedge_{L1}$$

Temos então $NL\alpha \subset \delta \Rightarrow (\alpha \subset \delta) \wedge (\beta \subset \gamma)$ e $NL \vdash (\alpha \subset \delta) \wedge (\beta \subset \gamma) \Rightarrow \alpha \subset \delta$, logo, $\alpha \subset \delta \approx (\alpha \subset \delta) \wedge (\beta \subset \gamma)$, ou seja, $[\alpha \subset \delta] = [(\alpha \subset \delta) \wedge (\beta \subset \gamma)]$, mais ainda, $[\alpha] \sqsubset [\delta] = [\alpha \subset \delta] \sqcap [\beta \subset \gamma]$, segue que, $[\alpha] \sqsubset [\delta] = ([\alpha] \sqsubset [\delta]) \sqcap ([\beta] \sqsubset [\gamma])$, e concluímos $[\alpha] \sqsubset [\delta] \sqsubseteq_{\approx} [\beta] \sqsubset [\gamma]$.

Concluíndo, se $[\alpha] \sqsubseteq_{\approx} [\beta]$ e $[\gamma] \sqsubseteq_{\approx} [\delta]$ então $[\alpha] \sqsubset [\delta] \sqsubseteq_{\approx} [\beta] \sqsubset [\gamma]$.

Temos então que $\mathcal{F}^{\approx} = (\mathcal{F}^{NL}/\approx, \sqcup, \sqcap, \sqsupset, \sqsubset, [\bot], [\top])$ é um reticulado-NL.

Consideremos a seguinte aplicação $v$ de $\mathcal{F}^{NL}$ em $\mathcal{F}^{NL}/\approx$, tal que para qualquer $\alpha \in \mathcal{F}^{NL}$, $v(\alpha) = [\alpha]$.
Sejam $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{NL}$, temos que:

- $v(\bot) = [\bot]$
- $v(\top) = [\top]$
- $v(\alpha \wedge \beta) = [\alpha \wedge \beta] = [\alpha] \sqcap [\beta] = v(\alpha) \sqcap v(\beta)$
- $v(\alpha \vee \beta) = [\alpha \vee \beta] = [\alpha] \sqcup [\beta] = v(\alpha) \sqcup v(\beta)$
- $v(\alpha \supset \beta) = [\alpha \supset \beta] = [\alpha] \sqsupset [\beta] = v(\alpha) \sqsupset v(\beta)$
- $v(\alpha \subset \beta) = [\alpha \subset \beta] = [\alpha] \sqsubset [\beta] = v(\alpha) \sqsubset v(\beta)$

Concluímos então, que $v$ é uma valoração em $\mathcal{F}^{\approx}$.

Sejam $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{NL}$ tais que $NL \nvdash \alpha \Rightarrow \beta$.
Supomos agora que $NL \models \alpha \Rightarrow \beta$, ou seja, para todo o reticulado-NL $\mathcal{L}$, para toda a valoração $v'$ em $\mathcal{L}$, $v(\alpha) \sqsubseteq_{\mathcal{L}} v(\beta)$. Então em particular, considerando o reticulado-NL $\mathcal{F}^{\approx}$, e a valoração $v$, temos que $v(\alpha) \sqsubseteq_{\approx} v(\beta)$. Temos então $v(\alpha) \sqsubseteq_{\approx} v(\beta)$, logo $v(\alpha) = v(\alpha) \sqcap v(\beta)$, ou seja, $[\alpha] = [\alpha] \sqcap [\beta]$, mais ainda, $[\alpha] = [\alpha \wedge \beta]$, e então $\alpha \approx \alpha \wedge \beta$. Segue então que $NL \vdash \alpha \Rightarrow \alpha \wedge \beta$ e $NL \vdash \alpha \wedge \beta \Rightarrow \alpha$. Logo, existe $D_1 \in NL$, tal que $\underset{\alpha \Rightarrow \alpha \wedge \beta}{D_1}$. Pela Proposição 75, temos também que existe $D_2 \in NL$, tal que $\underset{\beta \Rightarrow \beta}{D_2}$.
Consideremos então a seguinte derivação em $NL$:

$$\dfrac{\dfrac{D_1}{\alpha \Rightarrow \alpha \wedge \beta} \qquad \dfrac{\dfrac{D_2}{\beta \Rightarrow \beta}}{\alpha \wedge \beta \Rightarrow \beta}\,\wedge_{L2}}{\alpha \Rightarrow \beta}\,cut$$

Temos então que $NL \vdash \alpha \Rightarrow \beta$, mas no entanto sabemos que $NL \nvdash \alpha \Rightarrow \beta$, e chegamos a um absurdo, logo, por redução ao absurdo concluímos que $NL \not\models \alpha \Rightarrow \beta$.
Ora concluímos então que se $NL \nvdash \alpha \Rightarrow \beta$, então $NL \not\models \alpha \Rightarrow \beta$. De forma equivalente, concluímos que se $NL \models \alpha \Rightarrow \beta$, então $NL \vdash \alpha \Rightarrow \beta$. □

## 4.5 Teorema da Correção

**Teorema 79 (Correção em $NL$)**
Para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{NL}$, se $NL \vdash \alpha \Rightarrow \beta$, então $NL \models \alpha \Rightarrow \beta$.

*Demonstração.* Por indução em derivações de $NL$
Para todo $D \in NL$, $P(D)$ : se $\underset{\alpha \Rightarrow \beta}{D}$, com $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{NL}$, então, para todo o reticulado-NL $\mathcal{L}$, para toda a valoração $v$ em $\mathcal{L}$, temos que $v(\alpha) \sqsubseteq_{\mathcal{L}} v(\beta)$.

**Caso $A$:**

$$\frac{}{p \Rightarrow p}\ A$$

Sejam então $\mathcal{L} = (L, \sqcup, \sqcap, \sqsupset, \sqsubset, 0, 1)$ um reticulado-NL, e $v$ uma valoração em $\mathcal{L}$.
Temos que $v(p) = v(p) \wedge v(p)$, logo, $v(p) \sqsubseteq_{\mathcal{L}} v(p)$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\perp$:**

$$\frac{}{\perp \Rightarrow \beta}\ \perp$$

Sejam então $\mathcal{L} = (L, \sqcup, \sqcap, \sqsupset, \sqsubset, 0, 1)$ um reticulado-NL, e $v$ uma valoração em $\mathcal{L}$.
Temos que $v(\perp) = 0$ e $0 \sqsubseteq_{\mathcal{L}} v(\beta)$, logo, $v(\perp) \sqsubseteq_{\mathcal{L}} v(\beta)$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\top$:**

$$\frac{}{\alpha \Rightarrow \top}\ \top$$

Sejam então $\mathcal{L} = (L, \sqcup, \sqcap, \sqsupset, \sqsubset, 0, 1)$ um reticulado-NL, e $v$ uma valoração em $\mathcal{L}$.
Temos que $v(\top) = 1$ e $v(\alpha) \sqsubseteq_{\mathcal{L}} 1$, logo, $v(\alpha) \sqsubseteq_{\mathcal{L}} v(\top)$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $we_L$:**

$$\frac{\begin{matrix} D_1 \\ \top \Rightarrow \beta \end{matrix}}{\alpha \Rightarrow \beta}\ we_L$$

Sejam então $\mathcal{L} = (L, \sqcup, \sqcap, \sqsupset, \sqsubset, 0, 1)$ um reticulado-NL, e $v$ uma valoração em $\mathcal{L}$.
Assumimos $P(D_1)$ como hipótese de indução.
De $P(D_1)$ temos que $v(\top) \sqsubseteq_{\mathcal{L}} (\beta)$, e como $v(\top) = 1$, temos então que $1 \sqsubseteq_{\mathcal{L}} v(\beta)$, mas também sabemos que $v(\beta) \sqsubseteq_{\mathcal{L}} 1$, então, $v(\beta) = 1$. Mais ainda, $v(\alpha) \sqsubseteq_{\mathcal{L}} 1$, logo $v(\alpha) \sqsubseteq_{\mathcal{L}} v(\beta)$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $we_R$:**

$$\frac{\begin{matrix} D_1 \\ \alpha \Rightarrow \perp \end{matrix}}{\alpha \Rightarrow \beta}\ we_R$$

Sejam então $\mathcal{L} = (L, \sqcup, \sqcap, \sqsupset, \sqsubset, 0, 1)$ um reticulado-NL, e $v$ uma valoração em $\mathcal{L}$.
Assumimos $P(D_1)$ como hipótese de indução.
De $P(D_1)$ temos que $v(\alpha) \sqsubseteq_{\mathcal{L}} (\perp)$, e como $v(\perp) = 0$, temos então que $v(\alpha) \sqsubseteq_{\mathcal{L}} 0$, mas também sabemos que $0 \sqsubseteq_{\mathcal{L}} v(\alpha)$, então, $v(\alpha) = 0$. Mais ainda, $0 \sqsubseteq_{\mathcal{L}} v(\beta)$, logo $v(\alpha) \sqsubseteq_{\mathcal{L}} v(\beta)$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\wedge_{L1}$:**

$$\frac{\begin{matrix} D_1 \\ \alpha_1 \Rightarrow \beta \end{matrix}}{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \beta}\ \wedge_{L1}$$

Sejam então $\mathcal{L} = (L, \sqcup, \sqcap, \sqsupset, \sqsubset, 0, 1)$ um reticulado-NL, e $v$ uma valoração em $\mathcal{L}$.
Assumimos $P(D_1)$ como hipótese de indução.
De $P(D_1)$ temos que:
$v(\alpha_1) \sqsubseteq_{\mathcal{L}} v(\beta) \equiv v(\alpha_1) = v(\alpha_1) \sqcap v(\beta) \Longrightarrow v(\alpha_1) \sqcap v(\alpha_2) = (v(\alpha_1) \sqcap v(\beta)) \sqcap v(\alpha_2)$
$\equiv v(\alpha_1) \sqcap v(\alpha_2) = v(\alpha_1) \sqcap (v(\beta) \sqcap v(\alpha_2)) \equiv v(\alpha_1) \sqcap v(\alpha_2) = v(\alpha_1) \sqcap (v(\alpha_2) \sqcap v(\beta))$
$\equiv v(\alpha_1) \sqcap v(\alpha_2) = (v(\alpha_1) \sqcap v(\alpha_2)) \sqcap v(\beta) \equiv v(\alpha_1 \wedge \alpha_2) = (v(\alpha_1 \wedge \alpha_2)) \sqcap v(\beta)$
$\equiv v(\alpha_1 \wedge \alpha_2) \sqsubseteq_{\mathcal{L}} v(\beta)$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\wedge_{L2}$:**

$$\cfrac{\begin{array}{c} D_1 \\ \alpha_2 \Rightarrow \beta \end{array}}{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \beta} \wedge_{L2}$$

Sejam então $\mathcal{L} = (L, \sqcup, \sqcap, \sqsupset, \sqsubset, 0, 1)$ um reticulado-NL, e $v$ uma valoração em $\mathcal{L}$.
Assumimos $P(D_1)$ como hipótese de indução.
De $P(D_1)$ temos que:
$v(\alpha_2) \sqsubseteq_{\mathcal{L}} v(\beta) \equiv v(\alpha_2) = v(\alpha_2) \sqcap v(\beta) \Longrightarrow v(\alpha_1) \sqcap v(\alpha_2) = v(\alpha_1) \sqcap (v(\alpha_2) \sqcap v(\beta))$
$\equiv v(\alpha_1) \sqcap v(\alpha_2) = (v(\alpha_1) \sqcap v(\alpha_2)) \sqcap v(\beta) \equiv v(\alpha_1 \wedge \alpha_2) = v(\alpha_1 \wedge \alpha_2) \sqcap v(\beta)$
$\equiv v(\alpha_1 \wedge \alpha_2) \sqsubseteq_{\mathcal{L}} v(\beta)$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\wedge_R$:**

$$\cfrac{\begin{array}{cc} D_1 & D_2 \\ \alpha \Rightarrow \beta_1 & \alpha \Rightarrow \beta_2 \end{array}}{\alpha \Rightarrow \beta_1 \wedge \beta_2} \wedge_R$$

Sejam então $\mathcal{L} = (L, \sqcup, \sqcap, \sqsupset, \sqsubset, 0, 1)$ um reticulado-NL, e $v$ uma valoração em $\mathcal{L}$.
Assumimos $P(D_1)$ e $P(D_2)$ como hipóteses de indução.
De $P(D_1)$ e $P(D_2)$ temos que:
$v(\alpha) \sqsubseteq_{\mathcal{L}} v(\beta_1)$ e $v(\alpha) \sqsubseteq_{\mathcal{L}} v(\beta_2) \equiv v(\alpha) = v(\alpha) \sqcap v(\beta_1)$ e $v(\alpha) = v(\alpha) \sqcap v(\beta_2)$
$\equiv v(\alpha) = (v(\alpha) \sqcap v(\beta_2)) \sqcap v(\beta_1) \equiv v(\alpha) = v(\alpha) \sqcap (v(\beta_2) \sqcap v(\beta_1)) \equiv v(\alpha) = v(\alpha) \sqcap (v(\beta_1) \sqcap v(\beta_2))$
$\equiv v(\alpha) = v(\alpha) \sqcap v(\beta_2 \wedge \beta_1) \equiv v(\alpha) \sqsubseteq_{\mathcal{L}} v(\beta_1 \wedge \beta_2)$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\vee_L$:**

$$\cfrac{\begin{array}{cc} D_1 & D_2 \\ \alpha_1 \Rightarrow \beta & \alpha_2 \Rightarrow \beta \end{array}}{\alpha_1 \vee \alpha_2 \Rightarrow \beta} \vee_L$$

Sejam então $\mathcal{L} = (L, \sqcup, \sqcap, \sqsupset, \sqsubset, 0, 1)$ um reticulado-NL, e $v$ uma valoração em $\mathcal{L}$.
Assumimos $P(D_1)$ e $P(D_2)$ como hipóteses de indução.
De $P(D_1)$ e $P(D_2)$ temos que:
$v(\alpha_1) \sqsubseteq_{\mathcal{L}} v(\beta)$ e $v(\alpha_2) \sqsubseteq_{\mathcal{L}} v(\beta) \equiv v(\beta) = v(\alpha_1) \sqcup v(\beta)$ e $v(\beta) = v(\alpha_2) \sqcup v(\beta)$
$\equiv v(\beta) = v(\alpha_1) \sqcup (v(\alpha_2) \sqcup v(\beta)) \equiv v(\beta) = (v(\alpha_1) \sqcup v(\alpha_2)) \sqcup v(\beta) \equiv v(\beta) = v(\alpha_1 \vee \alpha_2) \sqcup v(\beta)$
$\equiv v(\alpha_1 \vee \alpha_2) \sqsubseteq_{\mathcal{L}} v(\beta)$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\vee_{R1}$:**

$$\frac{\begin{array}{c} D_1 \\ \alpha \Rightarrow \beta_1 \end{array}}{\alpha \Rightarrow \beta_1 \vee \beta_2} \vee_{R1}$$

Sejam então $\mathcal{L} = (L, \sqcup, \sqcap, \sqsupset, \sqsubset, 0, 1)$ um reticulado-NL, e $v$ uma valoração em $\mathcal{L}$.
Assumimos $P(D_1)$ como hipótese de indução.
De $P(D_1)$ temos que:
$v(\alpha) \sqsubseteq_{\mathcal{L}} v(\beta_1) \equiv v(\beta_1) = v(\beta_1) \sqcup v(\alpha) \Longrightarrow v(\beta_2) \sqcup v(\beta_1) = v(\beta_2) \sqcup (v(\beta_1) \sqcup v(\alpha))$
$\equiv v(\beta_1) \sqcup v(\beta_2) = (v(\beta_2) \sqcup v(\beta_1)) \sqcup v(\alpha) \equiv v(\beta_1) \sqcup v(\beta_2) = (v(\beta_1) \sqcup v(\beta_2)) \sqcup v(\alpha)$
$\equiv v(\beta_1 \vee \beta_2) = v(\beta_1 \vee \beta_2) \sqcup v(\alpha) \equiv v(\alpha) \sqsubseteq_{\mathcal{L}} v(\beta_1 \vee \beta_2)$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\vee_{R2}$:**

$$\frac{\begin{array}{c} D_1 \\ \alpha \Rightarrow \beta_2 \end{array}}{\alpha \Rightarrow \beta_1 \vee \beta_2} \vee_{R2}$$

Sejam então $\mathcal{L} = (L, \sqcup, \sqcap, \sqsupset, \sqsubset, 0, 1)$ um reticulado-NL, e $v$ uma valoração em $\mathcal{L}$.
Assumimos $P(D_1)$ como hipótese de indução.
De $P(D_1)$ temos que:
$v(\alpha) \sqsubseteq_{\mathcal{L}} v(\beta_2) \equiv v(\beta_2) = v(\beta_2) \sqcup v(\alpha) \Longrightarrow v(\beta_1) \sqcup v(\beta_2) = v(\beta_1) \sqcup (v(\beta_2) \sqcup v(\alpha))$
$\equiv v(\beta_1) \sqcup v(\beta_2) = (v(\beta_1) \sqcup v(\beta_2)) \sqcup v(\alpha) \equiv v(\beta_1 \vee \beta_2) = v(\beta_1 \vee \beta_2) \sqcup v(\alpha) \equiv v(\alpha) \sqsubseteq_{\mathcal{L}} v(\beta_1 \vee \beta_2)$,
e obtemos $P(D)$.

**Caso $\supset_L$:**

$$\frac{\begin{array}{c} D_1 \\ \top \Rightarrow \alpha_1 \end{array} \qquad \begin{array}{c} D_2 \\ \alpha_2 \Rightarrow \beta \end{array}}{\alpha_1 \supset \alpha_2 \Rightarrow \beta} \supset_L$$

Sejam então $\mathcal{L} = (L, \sqcup, \sqcap, \sqsupset, \sqsubset, 0, 1)$ um reticulado-NL, e $v$ uma valoração em $\mathcal{L}$.
Assumimos $P(D_1)$ e $P(D_2)$ como hipóteses de indução.
De $P(D_1)$ temos que:
$v(\top) \sqsubseteq_{\mathcal{L}} v(\alpha_1)$, e como $v(\top) = 1$, temos então que $1 \sqsubseteq_{\mathcal{L}} v(\alpha_1)$, mas também sabemos que $v(\alpha_1) \sqsubseteq_{\mathcal{L}} 1$, então $v(\alpha_1) = 1$.
De $P(D_2)$ temos que $v(\alpha_2) \sqsubseteq_{\mathcal{L}} v(\beta)$.
Finalmente, temos que como $v(\alpha_2) \sqsubseteq_{\mathcal{L}} v(\beta)$, então $1 \sqsupset v(\alpha_2) \sqsubseteq_{\mathcal{L}} v(\beta)$, ou seja, $v(\alpha_1) \sqsupset v(\alpha_2) \sqsubseteq_{\mathcal{L}} v(\beta)$.
Concluíndo, $v(\alpha_1 \supset \alpha_2) \sqsubseteq_{\mathcal{L}} v(\beta)$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\supset_R$:**

$$\frac{\begin{array}{c} D_1 \\ \beta_1 \Rightarrow \beta_2 \end{array}}{\top \Rightarrow \beta_1 \supset \beta_2} \supset_R$$

Sejam então $\mathcal{L} = (L, \sqcup, \sqcap, \sqsupset, \sqsubset, 0, 1)$ um reticulado-NL, e $v$ uma valoração em $\mathcal{L}$.
Assumimos $P(D_1)$ como hipótese de indução.
De $P(D_1)$ temos que $v(\beta_1) \sqsubseteq_{\mathcal{L}} v(\beta_2)$, logo, $1 = v(\beta_1) \sqsupset v(\beta_2)$.
Temos ainda que $1 = 1 \sqcap 1$, então $1 = 1 \sqcap (v(\beta_1) \sqsupset v(\beta_2))$, e como $v(\top) = 1$, temos então que

$v(\top) = v(\top) \sqcap (v(\beta_1) \sqsupset v(\beta_2))$, ou seja $v(\top) \sqsubseteq_{\mathcal{L}} v(\beta_1) \sqsupset v(\beta_2)$.
Concluíndo, $v(\top) \sqsubseteq_{\mathcal{L}} v(\beta_1 \supset \beta_2)$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\supset_{order}$:**

$$\frac{\begin{matrix} D_1 & & D_2 \\ \alpha \Rightarrow \beta & & \gamma \Rightarrow \delta \end{matrix}}{\beta \supset \gamma \Rightarrow \alpha \supset \delta} \supset_{order}$$

Sejam então $\mathcal{L} = (L, \sqcup, \sqcap, \sqsupset, \sqsubset, 0, 1)$ um reticulado-NL, e $v$ uma valoração em $\mathcal{L}$.
Assumimos $P(D_1)$ e $P(D_2)$ como hipóteses de indução.
De $P(D_1)$ e $P(D_2)$ temos que $v(\alpha) \sqsubseteq_{\mathcal{L}} v(\beta)$ e $v(\gamma) \sqsubseteq_{\mathcal{L}} v(\delta)$, logo, $v(\beta) \sqsupset v(\gamma) \sqsubseteq_{\mathcal{L}} v(\alpha) \sqsupset v(\delta)$.
Concluíndo, $v(\beta \supset \gamma) \sqsubseteq_{\mathcal{L}} v(\alpha \supset \delta)$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\subset_L$:**

$$\frac{\begin{matrix} D_1 \\ \alpha_1 \Rightarrow \alpha_2 \end{matrix}}{\alpha_1 \subset \alpha_2 \Rightarrow \bot} \subset_L$$

Sejam então $\mathcal{L} = (L, \sqcup, \sqcap, \sqsupset, \sqsubset, 0, 1)$ um reticulado-NL, e $v$ uma valoração em $\mathcal{L}$.
Assumimos $P(D_1)$ como hipótese de indução.
De $P(D_1)$ temos que $v(\alpha_1) \sqsubseteq_{\mathcal{L}} v(\alpha_2)$, logo, $0 = v(\alpha_1) \sqsubset v(\alpha_2)$.
Temos ainda que $0 = 0 \sqcap 0$, então $0 = 0 \sqcap (v(\alpha_1) \sqsubset v(\alpha_2))$, e como $v(\bot) = 0$, temos então que $v(\bot) = v(\bot) \sqcap (v(\alpha_1) \sqsubset v(\alpha_2))$, ou seja $v(\bot) \sqsubseteq_{\mathcal{L}} v(\alpha_1) \sqsubset v(\alpha_2)$.
Concluíndo, $v(\bot) \sqsubseteq_{\mathcal{L}} v(\alpha_1 \subset \alpha_2)$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\subset_R$:**

$$\frac{\begin{matrix} D_1 & & D_2 \\ \alpha \Rightarrow \beta_1 & & \beta_2 \Rightarrow \bot \end{matrix}}{\alpha \Rightarrow \beta_1 \subset \beta_2} \subset_R$$

Sejam então $\mathcal{L} = (L, \sqcup, \sqcap, \sqsupset, \sqsubset, 0, 1)$ um reticulado-NL, e $v$ uma valoração em $\mathcal{L}$.
Assumimos $P(D_1)$ e $P(D_2)$ como hipóteses de indução.
De $P(D_1)$ temos que $v(\alpha) \sqsubseteq_{\mathcal{L}} v(\beta_1)$.
De $P(D_2)$ temos que:
$v(\beta_2) \sqsubseteq_{\mathcal{L}} v(\bot)$, e como $v(\bot) = 0$, temos então que $v(\beta_2) \sqsubseteq_{\mathcal{L}} 0$, mas também sabemos que $0 \sqsubseteq_{\mathcal{L}} v(\beta_2)$, então $v(\beta_2) = 0$.
Finalmente, temos que como $v(\alpha) \sqsubseteq_{\mathcal{L}} v(\beta_1)$, então $v(\alpha) \sqsubseteq_{\mathcal{L}} v(\beta_1) \sqsubset 0$, ou seja, $v(\alpha) \sqsubseteq_{\mathcal{L}} v(\beta_1) \sqsubset v(\beta_2)$.
Concluíndo, $v(\alpha) \sqsubseteq_{\mathcal{L}} v(\beta_1 \subset \beta_2)$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\subset_{order}$:**

$$\frac{\begin{matrix} D_1 & & D_2 \\ \alpha \Rightarrow \beta & & \gamma \Rightarrow \delta \end{matrix}}{\alpha \subset \delta \Rightarrow \beta \subset \gamma} \subset_{order}$$

Sejam então $\mathcal{L} = (L, \sqcup, \sqcap, \sqsupset, \sqsubset, 0, 1)$ um reticulado-NL, e $v$ uma valoração em $\mathcal{L}$.
Assumimos $P(D_1)$ e $P(D_2)$ como hipóteses de indução.
De $P(D_1)$ e $P(D_2)$ temos que $v(\alpha) \sqsubseteq_{\mathcal{L}} v(\beta)$ e $v(\gamma) \sqsubseteq_{\mathcal{L}} v(\delta)$, logo, $v(\alpha) \sqsubset v(\delta) \sqsubseteq_{\mathcal{L}} v(\beta) \sqsupset v(\gamma)$.
Concluíndo, $v(\alpha \subset \delta) \sqsubseteq_{\mathcal{L}} v(\beta \supset \gamma)$, e obtemos $P(D)$.

**Caso** *cut***:**

$$\dfrac{\overset{D_1}{\alpha \Rightarrow \gamma} \qquad \overset{D_2}{\gamma \Rightarrow \beta}}{\alpha \Rightarrow \beta}\, cut$$

Sejam então $\mathcal{L} = (L, \sqcup, \sqcap, \sqsupset, \sqsubset, 0, 1)$ um reticulado-NL, e $v$ uma valoração em $\mathcal{L}$.
Assumimos $P(D_1)$ e $P(D_2)$ como hipótese de indução.
De $P(D_1)$ e $P(D_2)$ temos que $v(\alpha) \sqsubseteq_{\mathcal{L}} v(\gamma)$ e $v(\gamma) \sqsubseteq_{\mathcal{L}} v(\beta)$, logo, $v(\alpha) \sqsubseteq_{\mathcal{L}} v(\beta)$, e obtemos $P(D)$. □

## 4.6 Eliminação e Admissibilidade do Corte Decidibilidade

**Definição 80 (Tamanho de uma derivação)**
A função $|\cdot| : NL\text{-}cut \longrightarrow \mathbb{N}$, que associa a cada derivação o seu tamanho, é definida indutivamente por:

$$\left|\dfrac{}{p \Rightarrow p}\, A\right| = 1 \qquad \left|\dfrac{}{\bot \Rightarrow \beta}\, \bot\right| = 1 \qquad \left|\dfrac{}{\alpha \Rightarrow \top}\, \top\right| = 1$$

$$\left|\dfrac{\overset{D_1}{\top \Rightarrow \beta}}{\alpha \Rightarrow \beta}\, we_L\right| = 1 + |D_1| \qquad \left|\dfrac{\overset{D_1}{\alpha \Rightarrow \bot}}{\alpha \Rightarrow \beta}\, we_R\right| = 1 + |D_1|$$

$$\left|\dfrac{\overset{D_1}{\alpha_1 \Rightarrow \beta}}{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \beta}\, \wedge_{L1}\right| = 1 + |D_1| \qquad \left|\dfrac{\overset{D_1}{\alpha_2 \Rightarrow \beta}}{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \beta}\, \wedge_{L2}\right| = 1 + |D_1|$$

$$\left|\dfrac{\overset{D_1}{\alpha \Rightarrow \beta_1} \qquad \overset{D_2}{\alpha \Rightarrow \beta_2}}{\alpha \Rightarrow \beta_1 \wedge \beta_2}\, \wedge_R\right| = 1 + \max\{|D_1|, |D_2|\} \qquad \left|\dfrac{\overset{D_1}{\alpha_1 \Rightarrow \beta} \qquad \overset{D_2}{\alpha_1 \Rightarrow \beta}}{\alpha_1 \vee \alpha_2 \Rightarrow \beta_2}\, \vee_L\right| = 1 + \max\{|D_1|, |D_2|\}$$

$$\left|\dfrac{\overset{D_1}{\alpha \Rightarrow \beta_1}}{\alpha \Rightarrow \beta_1 \vee \beta_2}\, \vee_{R1}\right| = 1 + |D_1| \qquad \left|\dfrac{\overset{D_1}{\alpha \Rightarrow \beta_2}}{\alpha \Rightarrow \beta_1 \vee \beta_2}\, \vee_{R2}\right| = 1 + |D_1|$$

$$\left|\dfrac{\overset{D_1}{\top \Rightarrow \alpha_1} \qquad \overset{D_2}{\alpha_2 \Rightarrow \beta}}{\alpha_1 \supset \alpha_2 \Rightarrow \beta}\, \supset_L\right| = 1 + \max\{|D_1|, |D_2|\} \qquad \left|\dfrac{\overset{D_1}{\beta_1 \Rightarrow \beta_2}}{\top \Rightarrow \beta_1 \supset \beta_2}\, \supset_R\right| = 1 + |D_1|$$

$$\left|\dfrac{\overset{D_1}{\alpha \Rightarrow \beta_1} \qquad \overset{D_2}{\beta_2 \Rightarrow \bot}}{\alpha \Rightarrow \beta_1 \subset \beta_2}\, \subset_R\right| = 1 + \max\{|D_1|, |D_2|\} \qquad \left|\dfrac{\overset{D_1}{\alpha_1 \Rightarrow \alpha_2}}{\alpha_1 \subset \alpha_2 \Rightarrow \bot}\, \subset_L\right| = 1 + |D_1|$$

$$\left|\dfrac{\overset{D_1}{\beta_1 \Rightarrow \alpha_1} \qquad \overset{D_2}{\alpha_2 \Rightarrow \beta_2}}{\alpha_1 \supset \alpha_2 \Rightarrow \beta_1 \supset \beta_2}\, \supset_{order}\right| = 1 + \max\{|D_1|, |D_2|\}$$

$$\left|\dfrac{\overset{D_1}{\alpha_1 \Rightarrow \beta_1} \qquad \overset{D_2}{\beta_2 \Rightarrow \alpha_2}}{\alpha_1 \subset \alpha_2 \Rightarrow \beta_1 \subset \beta_2}\, \subset_{order}\right| = 1 + \max\{|D_1|, |D_2|\}$$

**Proposição 81**
Para quaisquer $D_1, D_2 \in NL\text{-}cut$, $|D_1| + |D_2| \geq 2$.

**Definição 82 ($rank : \mathcal{F}^{NL} \longrightarrow \mathbb{N}$)**
A função $rank : \mathcal{F}^{NL} \longrightarrow \mathbb{N}$, que atribui a cada fórmula a sua complexidade, é definida indutivamente por:

- $rank(\bot) = 1$.
- $rank(\top) = 1$.
- $rank(p) = 1$, para todo $p \in \mathcal{V}$.
- $rank(\alpha \wedge \beta) = rank(\alpha) + rank(\beta) + 1$, para todo $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{NL}$.
- $rank(\alpha \vee \beta) = rank(\alpha) + rank(\beta) + 1$, para todo $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{NL}$.
- $rank(\alpha \supset \beta) = rank(\alpha) + rank(\beta) + 1$, para todo $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{NL}$.
- $rank(\alpha \subset \beta) = rank(\alpha) + rank(\beta) + 1$, para todo $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{NL}$.

**Definição 83 (Relação de Ordem em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$)**
Definimos a seguinte relação de ordem lexicográfica $\leq$ sobre o conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ da seguinte forma, tal que para quaisquer $n_1, n_2, h_1, h_2 \in \mathbb{N}$:
$(n_1, h_1) \leq (n_2, h_2)$ sse $(n_1 < n_2)$ ou $(n_1 = n_2$ e $h_1 \leq h_2)$.

**Teorema 84 (Admissibilidade do Corte em $NL$-*cut*)**
Para quaisquer $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{F}^{NL}$, se $NL\text{-}cut \vdash \alpha \Rightarrow \gamma$ e $NL\text{-}cut \vdash \gamma \Rightarrow \beta$, então $NL\text{-}cut \vdash \alpha \Rightarrow \beta$.

*Demonstração.* Por indução em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
Para quaisquer $n, h \in \mathbb{N}, n \geq 1, h \geq 2$, $P(n, h)$ : para quaisquer $D_1, D_2 \in NL\text{-}cut$, tais que $\underset{\alpha \Rightarrow \gamma}{D_1}$, $\underset{\gamma \Rightarrow \beta}{D_2}$, e $(rank(\gamma), |D_1| + |D_2|) \leq (n, h)$, com $\alpha, \gamma, \beta \in \mathcal{F}^{NL}$, existe $D \in NL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha \Rightarrow \beta}{D}$.

**Caso $n = 1, h = 2$:** Iremos analisar os seguintes subcasos:

- Ambas as derivações são obtidas a partir de $A$.
- Ambas as derivações são obtidas a partir de $\bot$.
- Ambas as derivações são obtidas a partir de $\top$.
- Uma derivação é obtida a partir de $A$ e a outra a partir de $\bot$.
- Uma derivação é obtida a partir de $A$ e a outra a partir de $\top$.
- Uma derivação é obtida a partir de $\bot$ e a outra a partir de $\top$.

**Subcaso:**

$$\dfrac{}{p \Rightarrow p}\,A \qquad\qquad \dfrac{}{p \Rightarrow p}\,A$$

Seja $D$=$D_1$. Temos que $\underset{p\Rightarrow p}{D}$, e obtemos $P(n,h)$.

**Subcaso:**

$$\dfrac{}{\bot \Rightarrow \bot}\,\bot \qquad\qquad \dfrac{}{\bot \Rightarrow \beta}\,\bot$$

Seja $D$=$D_2$. Temos que $\underset{\bot\Rightarrow \beta}{D}$, e obtemos $P(n,h)$.

**Subcaso:**

$$\dfrac{}{\alpha \Rightarrow \top}\,\top \qquad\qquad \dfrac{}{\top \Rightarrow \top}\,\top$$

Seja $D$=$D_1$. Temos que $\underset{\alpha\Rightarrow \top}{D}$, e obtemos $P(n,h)$.

**Subcaso:**

$$\dfrac{}{p \Rightarrow p}\,A \qquad\qquad \dfrac{}{p \Rightarrow \top}\,\top$$

Seja $D$=$D_2$. Temos que $\underset{p\Rightarrow \top}{D}$, e obtemos $P(n,h)$.

**Subcaso:**

$$\dfrac{}{\bot \Rightarrow p}\,\bot \qquad\qquad \dfrac{}{p \Rightarrow p}\,A$$

Seja $D$=$D_1$. Temos que $\underset{\bot\Rightarrow p}{D}$, e obtemos $P(n,h)$.

**Subcaso:**

$$\dfrac{}{\bot \Rightarrow \gamma}\,\bot \qquad\qquad \dfrac{}{\gamma \Rightarrow \top}\,\top$$

Consideremos então a seguinte derivação $D \in NL\text{-}cut$:

$$\dfrac{}{\bot \Rightarrow \top}\,\bot$$

Temos que $\underset{\bot\Rightarrow \top}{D}$, e obtemos $P(n,h)$.

**Caso $n = 1, h > 2$:** Iremos analisar os seguintes subcasos:

- A última inferência em $D_1$ altera apenas fórmula esquerda do sequente.
- A última inferência em $D_2$ altera apenas fórmula direita do sequente.
- A ultima inferência em $D_1$ é $we_R$.
- A última inferência em $D_2$ é $we_L$.

**Subcaso:**

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1' \\ \alpha_1 \Rightarrow \gamma \end{matrix}}{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \gamma}\,\wedge_{L1} \qquad\qquad \begin{matrix} D_2 \\ \gamma \Rightarrow \beta \end{matrix}$$

Assumimos $P(n, h-1)$ como hipótese de indução.

De $P(n, h-1)$, $\underset{\alpha_1\Rightarrow\gamma}{D_1'}$ , $\underset{\gamma\Rightarrow\beta}{D_2}$ , $(rank(\gamma), |D_1'| + |D_2|) \leq (n, h-1)$, visto que $rank(\gamma) = n$ e $|D_1'| + |D_2| < h$, existe $D_3 \in NL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha_1\Rightarrow\beta}{D_3}$ .

Consideremos então a seguinte derivação $D \in NL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{matrix} D_3 \\ \alpha_1 \Rightarrow \beta \end{matrix}}{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \beta}\,\wedge_{L1}$$

Temos que $\underset{\alpha_1\wedge\alpha_2\Rightarrow\beta}{D}$, e obtemos $P(n,h)$.

**Subcaso:**

$$\dfrac{\begin{matrix}D_1'\\ \alpha_2\Rightarrow\gamma\end{matrix}}{\alpha_1\wedge\alpha_2\Rightarrow\gamma}\wedge_{L2} \qquad \begin{matrix}D_2\\ \gamma\Rightarrow\beta\end{matrix}$$

Assumimos $P(n,h-1)$ como hipótese de indução.

De $P(n,h-1)$, $\underset{\alpha_2\Rightarrow\gamma}{D_1'}, \underset{\gamma\Rightarrow\beta}{D_2}$, $(rank(\gamma),|D_1'|+|D_2|)\leq(n,h-1)$, visto que $rank(\gamma)=n$ e $|D_1'|+|D_2|<h$, existe $D_3\in NL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha_2\Rightarrow\beta}{D_3}$.

Consideremos então a seguinte derivação $D\in NL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{matrix}D_3\\ \alpha_2\Rightarrow\beta\end{matrix}}{\alpha_1\wedge\alpha_2\Rightarrow\beta}\wedge_{L2}$$

Temos que $\underset{\alpha_1\wedge\alpha_2\Rightarrow\beta}{D}$, e obtemos $P(n,h)$.

**Subcaso:**

$$\dfrac{\begin{matrix}D_1'\\ \alpha_1\Rightarrow\gamma\end{matrix}\quad\begin{matrix}D_1''\\ \alpha_2\Rightarrow\gamma\end{matrix}}{\alpha_1\vee\alpha_2\Rightarrow\gamma}\vee_{L} \qquad \begin{matrix}D_2\\ \gamma\Rightarrow\beta\end{matrix}$$

Assumimos $P(n,h-1)$ como hipótese de indução.

De $P(n,h-1)$, $\underset{\alpha_1\Rightarrow\gamma}{D_1'}, \underset{\gamma\Rightarrow\beta}{D_2}$, $(rank(\gamma),|D_1'|+|D_2|)\leq(n,h-1)$, visto que $rank(\gamma)=n$ e $|D_1'|+|D_2|<h$, existe $D_3\in NL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha_1\Rightarrow\beta}{D_3}$.

De $P(n,h-1)$, $\underset{\alpha_2\Rightarrow\gamma}{D_1''}, \underset{\gamma\Rightarrow\beta}{D_2}$, $(rank(\gamma),|D_1''|+|D_2|)\leq(n,h-1)$, visto que $rank(\gamma)=n$ e $|D_1''|+|D_2|<h$, existe $D_4\in NL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha_2\Rightarrow\beta}{D_4}$.

Consideremos então a seguinte derivação $D\in NL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{matrix}D_3\\ \alpha_1\Rightarrow\beta\end{matrix}\quad\begin{matrix}D_4\\ \alpha_2\Rightarrow\beta\end{matrix}}{\alpha_1\vee\alpha_2\Rightarrow\beta}\vee_{L}$$

Temos que $\underset{\alpha_1\vee\alpha_2\Rightarrow\beta}{D}$, e obtemos $P(n,h)$.

**Subcaso:**

$$\dfrac{\begin{matrix}D_1'\\ \top\Rightarrow\alpha_1\end{matrix}\quad\begin{matrix}D_1''\\ \alpha_2\Rightarrow\gamma\end{matrix}}{\alpha_1\supset\alpha_2\Rightarrow\gamma}\supset_{L} \qquad \begin{matrix}D_2\\ \gamma\Rightarrow\beta\end{matrix}$$

Assumimos $P(n,h-1)$ como hipótese de indução.

De $P(n,h-1)$, $\underset{\alpha_2\Rightarrow\gamma}{D_1''}, \underset{\gamma\Rightarrow\beta}{D_2}$, $(rank(\gamma),|D_1''|+|D_2|)\leq(n,h-1)$, visto que $rank(\gamma)=n$ e $|D_1''|+|D_2|<h$, existe $D_3\in NL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha_2\Rightarrow\beta}{D_3}$.

Consideremos então a seguinte derivação $D\in NL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{matrix}D_1'\\ \top\Rightarrow\alpha_1\end{matrix}\quad\begin{matrix}D_3\\ \alpha_2\Rightarrow\beta\end{matrix}}{\alpha_1\supset\alpha_2\Rightarrow\beta}\supset_{L}$$

Temos que $\underset{\alpha_1 \supset \alpha_2 \Rightarrow \beta}{D}$, e obtemos $P(n,h)$.

**Subcaso:**

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_1' \\ \alpha_1 \Rightarrow \alpha_2 \end{array}}{\alpha_1 \subset \alpha_2 \Rightarrow \bot} \subset_L \qquad\qquad \begin{array}{c} D_2 \\ \gamma \Rightarrow \beta \end{array}$$

Consideremos então a seguinte derivação $D \in NL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_1 \\ \alpha_1 \subset \alpha_2 \Rightarrow \bot \end{array}}{\alpha_1 \subset \alpha_2 \Rightarrow \beta} we_R$$

Temos que $\underset{\alpha_1 \subset \alpha_2 \Rightarrow \beta}{D}$, e obtemos $P(n,h)$.

**Subcaso:**

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_1' \\ \top \Rightarrow \gamma \end{array}}{\alpha \Rightarrow \gamma} we_L \qquad\qquad \begin{array}{c} D_2 \\ \gamma \Rightarrow \beta \end{array}$$

Assumimos $P(n,h-1)$ como hipótese de indução.

De $P(n,h-1)$, $\underset{\top \Rightarrow \gamma}{D_1'}$, $\underset{\gamma \Rightarrow \beta}{D_2}$, $(rank(\gamma), |D_1'| + |D_2|) \leq (n, h-1)$, visto que $rank(\gamma) = n$ e $|D_1'| + |D_2| < h$, existe $D_3 \in NL\text{-}cut$ tal que $\underset{\top \Rightarrow \beta}{D_3}$.

Consideremos então a seguinte derivação $D \in NL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_3 \\ \top \Rightarrow \beta \end{array}}{\alpha \Rightarrow \beta} we_L$$

Temos que $\underset{\alpha \Rightarrow \beta}{D}$, e obtemos $P(n,h)$.

**Subcaso:**

$$\begin{array}{c} D_1 \\ \alpha \Rightarrow \gamma \end{array} \qquad\qquad \dfrac{\begin{array}{c} D_2' \\ \gamma \Rightarrow \beta_1 \end{array}}{\gamma \Rightarrow \beta_1 \vee \beta_2} \vee_{R1}$$

Assumimos $P(n,h-1)$ como hipótese de indução.

De $P(n,h-1)$, $\underset{\alpha \Rightarrow \gamma}{D_1}$, $\underset{\gamma \Rightarrow \beta_1}{D_2'}$, $(rank(\gamma), |D_1| + |D_2'|) \leq (n, h-1)$, visto que $rank(\gamma) = n$ e $|D_1| + |D_2'| < h$, existe $D_3 \in NL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha \Rightarrow \beta_1}{D_3}$.

Consideremos então a seguinte derivação $D \in NL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_3 \\ \alpha \Rightarrow \beta_1 \end{array}}{\alpha \Rightarrow \beta_1 \vee \beta_2} \vee_{R1}$$

Temos que $\underset{\alpha \Rightarrow \beta_1 \vee \beta_2}{D}$, e obtemos $P(n,h)$.

**Subcaso:**

$$\begin{array}{c} D_1 \\ \alpha \Rightarrow \gamma \end{array} \qquad\qquad \dfrac{\begin{array}{c} D_2' \\ \gamma \Rightarrow \beta_2 \end{array}}{\gamma \Rightarrow \beta_1 \vee \beta_2} \vee_{R2}$$

Assumimos $P(n,h-1)$ como hipótese de indução.

De $P(n,h-1)$, $\underset{\alpha\Rightarrow\gamma}{D_1}$, $\underset{\gamma\Rightarrow\beta_2}{D_2'}$, $(rank(\gamma), |D_1|+|D_2'|) \leq (n, h-1)$, visto que $rank(\gamma)=n$ e $|D_1|+|D_2'|<h$, existe $D_3 \in NL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha\Rightarrow\beta_2}{D_3}$.

Consideremos então a seguinte derivação $D \in NL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{matrix} D_3 \\ \alpha \Rightarrow \beta_2 \end{matrix}}{\alpha \Rightarrow \beta_1 \vee \beta_2} \vee_{R2}$$

Temos que $\underset{\alpha\Rightarrow\beta_1\vee\beta_2}{D}$, e obtemos $P(n,h)$.

**Subcaso:**

$$\begin{matrix} D_1 \\ \alpha \Rightarrow \gamma \end{matrix} \qquad \dfrac{\begin{matrix} D_2' \\ \gamma \Rightarrow \beta_1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} D_2'' \\ \gamma \Rightarrow \beta_2 \end{matrix}}{\gamma \Rightarrow \beta_1 \wedge \beta_2} \wedge_R$$

Assumimos $P(n,h-1)$ como hipótese de indução.

De $P(n,h-1)$, $\underset{\alpha\Rightarrow\gamma}{D_1}$, $\underset{\gamma\Rightarrow\beta_1}{D_2'}$, $(rank(\gamma), |D_1|+|D_2'|) \leq (n, h-1)$, visto que $rank(\gamma)=n$ e $|D_1|+|D_2'|<h$, existe $D_3 \in NL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha\Rightarrow\beta_1}{D_3}$.

De $P(n,h-1)$, $\underset{\alpha\Rightarrow\gamma}{D_1}$, $\underset{\gamma\Rightarrow\beta_2}{D_2''}$, $(rank(\gamma), |D_1|+|D_2''|) \leq (n, h-1)$, visto que $rank(\gamma)=n$ e $|D_1|+|D_2''|<h$, existe $D_4 \in NL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha\Rightarrow\beta_2}{D_4}$.

Consideremos então a seguinte derivação $D \in NL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{matrix} D_3 \\ \alpha \Rightarrow \beta_1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} D_4 \\ \alpha \Rightarrow \beta_2 \end{matrix}}{\alpha \Rightarrow \beta_1 \wedge \beta_2} \wedge_R$$

Temos que $\underset{\alpha\Rightarrow\beta_1\wedge\beta_2}{D}$, e obtemos $P(n,h)$.

**Subcaso:**

$$\begin{matrix} D_1 \\ \alpha \Rightarrow \gamma \end{matrix} \qquad \dfrac{\begin{matrix} D_2' \\ \beta_1 \Rightarrow \beta_2 \end{matrix}}{\top \Rightarrow \beta_1 \supset \beta_2} \supset_R$$

Consideremos então a seguinte derivação $D \in NL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{matrix} D_2 \\ \top \Rightarrow \beta_1 \supset \beta_2 \end{matrix}}{\alpha \Rightarrow \beta_1 \supset \beta_2} we_L$$

Temos que $\underset{\alpha\Rightarrow\beta_1\supset\beta_2}{D}$, e obtemos $P(n,h)$.

**Subcaso:**

$$\begin{matrix} D_1 \\ \alpha \Rightarrow \gamma \end{matrix} \qquad \dfrac{\begin{matrix} D_2' \\ \gamma \Rightarrow \beta_1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} D_2'' \\ \beta_2 \Rightarrow \bot \end{matrix}}{\gamma \Rightarrow \beta_1 \subset \beta_2} \subset_R$$

Assumimos $P(n,h-1)$ como hipótese de indução.

De $P(n,h-1)$, $\underset{\alpha\Rightarrow\gamma}{D_1}$, $\underset{\gamma\Rightarrow\beta_1}{D_2'}$, $(rank(\gamma), |D_1|+|D_2'|) \leq (n, h-1)$, visto que $rank(\gamma)=n$ e $|D_1|+|D_2'|<h$, existe $D_3 \in NL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha\Rightarrow\beta_1}{D_3}$.

Consideremos então a seguinte derivação $D \in NL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_3 \\ \alpha \Rightarrow \beta_1 \end{array} \quad \begin{array}{c} D_2'' \\ \beta_2 \Rightarrow \bot \end{array}}{\alpha \Rightarrow \beta_1 \subset \beta_2} \subset_R$$

Temos que $\underset{\alpha \Rightarrow \beta_1 \subset \beta_2}{D}$, e obtemos $P(n,h)$.

**Subcaso:**

$$\begin{array}{c} D_1 \\ \alpha \Rightarrow \gamma \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} D_2' \\ \dfrac{\gamma \Rightarrow \bot}{\gamma \Rightarrow \beta} we_R \end{array}$$

Assumimos $P(n, h-1)$ como hipótese de indução.

De $P(n, h-1)$, $\underset{\alpha \Rightarrow \gamma}{D_1}$, $\underset{\gamma \Rightarrow \bot}{D_2'}$, $(rank(\gamma), |D_1| + |D_2'|) \leq (n, h-1)$, visto que $rank(\gamma) = n$ e $|D_1| + |D_2'| < h$, existe $D_3 \in NL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha \Rightarrow \bot}{D_3}$.

Consideremos então a seguinte derivação $D \in NL\text{-}cut$:

$$\begin{array}{c} D_3 \\ \dfrac{\alpha \Rightarrow \bot}{\alpha \Rightarrow \beta} we_R \end{array}$$

Temos que $\underset{\alpha \Rightarrow \beta}{D}$, e obtemos $P(n,h)$.

**Subcaso:**

$$\begin{array}{c} D_1' \\ \dfrac{\alpha \Rightarrow \bot}{\alpha \Rightarrow \gamma} we_R \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} D_2 \\ \gamma \Rightarrow \beta \end{array}$$

Consideremos então a seguinte derivação $D \in NL\text{-}cut$:

$$\begin{array}{c} D_1' \\ \dfrac{\alpha \Rightarrow \bot}{\alpha \Rightarrow \beta} we_R \end{array}$$

Temos que $\underset{\alpha \Rightarrow \beta}{D}$, e obtemos $P(n,h)$.

**Subcaso:**

$$\begin{array}{c} D_1 \\ \alpha \Rightarrow \gamma \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} D_2' \\ \dfrac{\top \Rightarrow \beta}{\gamma \Rightarrow \beta} we_L \end{array}$$

Consideremos então a seguinte derivação $D \in NL\text{-}cut$:

$$\begin{array}{c} D_2' \\ \dfrac{\top \Rightarrow \beta}{\alpha \Rightarrow \beta} we_L \end{array}$$

Temos que $\underset{\alpha \Rightarrow \beta}{D}$, e obtemos $P(n,h)$.

**Caso $n > 1, h = 2$:** Iremos analisar o único caso possível, em que $D_1$ é obtida a partir de $\perp$ e $D_2$ é obtida a partir de $\top$.

$$\dfrac{}{\perp \Rightarrow \gamma}\perp \qquad\qquad \dfrac{}{\gamma \Rightarrow \top}\top$$

Consideremos então a seguinte derivação $D \in NL\text{-}cut$:

$$\dfrac{}{\perp \Rightarrow \top}\perp$$

Temos que $\underset{\perp\Rightarrow\top}{D}$, e obtemos $P(n,h)$.

**Caso $n > 1, h > 2$:** Iremos analisar os seguintes subcasos:

- A última inferência em $D_1$ altera apenas fórmula esquerda do sequente.
- A última inferência em $D_2$ altera apenas fórmula direita do sequente.
- A última inferência em $D_1$ altera a fórmula direita do sequente e a última inferência em $D_2$ altera a fórmula esquerda do sequente.
- A última inferência em $D_1$ é obtida a partir de $we_R$.
- A última inferência em $D_2$ é obtida a partir de $we_L$.

**Subcaso:**

$$\dfrac{\begin{matrix} D'_1 \\ \alpha_1 \Rightarrow \gamma \end{matrix}}{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \gamma}\wedge_{L1} \qquad\qquad \begin{matrix} D_2 \\ \gamma \Rightarrow \beta \end{matrix}$$

Assumimos $P(n, h-1)$ como hipótese de indução.

De $P(n, h-1)$, $\underset{\alpha_1\Rightarrow\gamma}{D'_1}, \underset{\gamma\Rightarrow\beta}{D_2}$, $(rank(\gamma), |D'_1| + |D_2|) \le (n, h-1)$, visto que $rank(\gamma) \le n$ e $|D'_1| + |D_2| < h$, existe $D_3 \in NL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha_1\Rightarrow\beta}{D_3}$.

Consideremos então a seguinte derivação $D \in NL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{matrix} D_3 \\ \alpha_1 \Rightarrow \beta \end{matrix}}{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \beta}\wedge_{L1}$$

Temos que $\underset{\alpha_1\wedge\alpha_2\Rightarrow\beta}{D}$, e obtemos $P(n,h)$.

**Subcaso:**

$$\dfrac{\begin{matrix} D'_1 \\ \alpha_2 \Rightarrow \gamma \end{matrix}}{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \gamma}\wedge_{L2} \qquad\qquad \begin{matrix} D_2 \\ \gamma \Rightarrow \beta \end{matrix}$$

Assumimos $P(n, h-1)$ como hipótese de indução.

De $P(n, h-1)$, $\underset{\alpha_2\Rightarrow\gamma}{D'_1}, \underset{\gamma\Rightarrow\beta}{D_2}$, $(rank(\gamma), |D'_1| + |D_2|) \le (n, h-1)$, visto que $rank(\gamma) \le n$ e $|D'_1| + |D_2| < h$, existe $D_3 \in NL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha_2\Rightarrow\beta}{D_3}$.

Consideremos então a seguinte derivação $D \in NL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{matrix} D_3 \\ \alpha_2 \Rightarrow \beta \end{matrix}}{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \beta}\wedge_{L2}$$

Temos que $\underset{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \beta}{D}$, e obtemos $P(n,h)$.

**Subcaso:**

$$\dfrac{\overset{D_1'}{\alpha_1 \Rightarrow \gamma} \qquad \overset{D_1''}{\alpha_2 \Rightarrow \gamma}}{\alpha_1 \vee \alpha_2 \Rightarrow \gamma} \vee_L \qquad\qquad \overset{D_2}{\gamma \Rightarrow \beta}$$

Assumimos $P(n,h-1)$ como hipótese de indução.

De $P(n,h-1)$, $\underset{\alpha_1 \Rightarrow \gamma}{D_1'}, \underset{\gamma \Rightarrow \beta}{D_2}$, $(rank(\gamma), |D_1'| + |D_2|) \leq (n, h-1)$, visto que $rank(\gamma) \leq n$ e $|D_1'| + |D_2| < h$, existe $D_3 \in NL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha_1 \Rightarrow \beta}{D_3}$.

De $P(n,h-1)$, $\underset{\alpha_2 \Rightarrow \gamma}{D_1''}, \underset{\gamma \Rightarrow \beta}{D_2}$, $(rank(\gamma), |D_1''| + |D_2|) \leq (n, h-1)$, visto que $rank(\gamma) \leq n$ e $|D_1''| + |D_2| < h$, existe $D_4 \in NL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha_2 \Rightarrow \beta}{D_4}$.

Consideremos então a seguinte derivação $D \in NL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\overset{D_3}{\alpha_1 \Rightarrow \beta} \qquad \overset{D_4}{\alpha_2 \Rightarrow \beta}}{\alpha_1 \vee \alpha_2 \Rightarrow \beta} \vee_L$$

Temos que $\underset{\alpha_1 \vee \alpha_2 \Rightarrow \beta}{D}$, e obtemos $P(n,h)$.

**Subcaso:**

$$\dfrac{\overset{D_1'}{\top \Rightarrow \alpha_1} \qquad \overset{D_1''}{\alpha_2 \Rightarrow \gamma}}{\alpha_1 \supset \alpha_2 \Rightarrow \gamma} \supset_L \qquad\qquad \overset{D_2}{\gamma \Rightarrow \beta}$$

Assumimos $P(n,h-1)$ como hipótese de indução.

De $P(n,h-1)$, $\underset{\alpha_2 \Rightarrow \gamma}{D_1''}, \underset{\gamma \Rightarrow \beta}{D_2}$, $(rank(\gamma), |D_1''| + |D_2|) \leq (n, h-1)$, visto que $rank(\gamma) \leq n$ e $|D_1''| + |D_2| < h$, existe $D_3 \in NL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha_2 \Rightarrow \beta}{D_3}$.

Consideremos então a seguinte derivação $D \in NL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\overset{D_1'}{\top \Rightarrow \alpha_1} \qquad \overset{D_3}{\alpha_2 \Rightarrow \beta}}{\alpha_1 \supset \alpha_2 \Rightarrow \beta} \supset_L$$

Temos que $\underset{\alpha_1 \supset \alpha_2 \Rightarrow \beta}{D}$, e obtemos $P(n,h)$.

**Subcaso:**

$$\dfrac{\overset{D_1'}{\alpha_1 \Rightarrow \alpha_2}}{\alpha_1 \subset \alpha_2 \Rightarrow \bot} \subset_L \qquad\qquad \overset{D_2}{\gamma \Rightarrow \beta}$$

Consideremos então a seguinte derivação $D \in NL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\overset{D_1}{\alpha_1 \subset \alpha_2 \Rightarrow \bot}}{\alpha_1 \subset \alpha_2 \Rightarrow \beta} we_R$$

Temos que $\underset{\alpha_1 \subset \alpha_2 \Rightarrow \beta}{D}$, e obtemos $P(n,h)$.

**Subcaso:**

$$\dfrac{\overset{D_1'}{\top \Rightarrow \gamma}}{\alpha \Rightarrow \gamma}\, we_L \qquad\qquad \overset{D_2}{\gamma \Rightarrow \beta}$$

Assumimos $P(n, h-1)$ como hipótese de indução.

De $P(n, h-1)$, $\underset{\top\Rightarrow\gamma}{D_1'}$, $\underset{\gamma\Rightarrow\beta}{D_2}$, $(rank(\gamma), |D_1'| + |D_2|) \leq (n, h-1)$, visto que $rank(\gamma) \leq n$ e $|D_1'| + |D_2| < h$, existe $D_3 \in NL\text{-}cut$ tal que $\underset{\top\Rightarrow\beta}{D_3}$.

Consideremos então a seguinte derivação $D \in NL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\overset{D_3}{\top \Rightarrow \beta}}{\alpha \Rightarrow \beta}\, we_L$$

Temos que $\underset{\alpha\Rightarrow\beta}{D}$, e obtemos $P(n, h)$.

**Subcaso:**

$$\overset{D_1}{\alpha \Rightarrow \gamma} \qquad\qquad \dfrac{\overset{D_2'}{\gamma \Rightarrow \beta_1}}{\gamma \Rightarrow \beta_1 \vee \beta_2}\, \vee_{R1}$$

Assumimos $P(n, h-1)$ como hipótese de indução.

De $P(n, h-1)$, $\underset{\alpha\Rightarrow\gamma}{D_1}$, $\underset{\gamma\Rightarrow\beta_1}{D_2'}$, $(rank(\gamma), |D_1| + |D_2'|) \leq (n, h-1)$, visto que $rank(\gamma) \leq n$ e $|D_1| + |D_2'| < h$, existe $D_3 \in NL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha\Rightarrow\beta_1}{D_3}$.

Consideremos então a seguinte derivação $D \in NL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\overset{D_3}{\alpha \Rightarrow \beta_1}}{\alpha \Rightarrow \beta_1 \vee \beta_2}\, \vee_{R1}$$

Temos que $\underset{\alpha\Rightarrow\beta_1\vee\beta_2}{D}$, e obtemos $P(n, h)$.

**Subcaso:**

$$\overset{D_1}{\alpha \Rightarrow \gamma} \qquad\qquad \dfrac{\overset{D_2'}{\gamma \Rightarrow \beta_2}}{\gamma \Rightarrow \beta_1 \vee \beta_2}\, \vee_{R2}$$

Assumimos $P(n, h-1)$ como hipótese de indução.

De $P(n, h-1)$, $\underset{\alpha\Rightarrow\gamma}{D_1}$, $\underset{\gamma\Rightarrow\beta_2}{D_2'}$, $(rank(\gamma), |D_1| + |D_2'|) \leq (n, h-1)$, visto que $rank(\gamma) \leq n$ e $|D_1| + |D_2'| < h$, existe $D_3 \in NL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha\Rightarrow\beta_2}{D_3}$.

Consideremos então a seguinte derivação $D \in NL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\overset{D_3}{\alpha \Rightarrow \beta_2}}{\alpha \Rightarrow \beta_1 \vee \beta_2}\, \vee_{R2}$$

Temos que $\underset{\alpha\Rightarrow\beta_1\vee\beta_2}{D}$, e obtemos $P(n, h)$.

**Subcaso:**

$$\begin{array}{c} D_1 \\ \alpha \Rightarrow \gamma \end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c} D_2' \\ \gamma \Rightarrow \beta_1 \end{array} \quad \begin{array}{c} D_2'' \\ \gamma \Rightarrow \beta_2 \end{array}}{\gamma \Rightarrow \beta_1 \wedge \beta_2} \wedge_R$$

Assumimos $P(n, h-1)$ como hipótese de indução.

De $P(n, h-1)$, $\underset{\alpha\Rightarrow\gamma}{D_1}$, $\underset{\gamma\Rightarrow\beta_1}{D_2'}$, $(rank(\gamma), |D_1| + |D_2'|) \leq (n, h-1)$, visto que $rank(\gamma) \leq n$ e $|D_1| + |D_2'| < h$, existe $D_3 \in NL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha\Rightarrow\beta_1}{D_3}$.

De $P(n, h-1)$, $\underset{\alpha\Rightarrow\gamma}{D_1}$, $\underset{\gamma\Rightarrow\beta_2}{D_2''}$, $(rank(\gamma), |D_1| + |D_2''|) \leq (n, h-1)$, visto que $rank(\gamma) \leq n$ e $|D_1| + |D_2''| < h$, existe $D_4 \in NL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha\Rightarrow\beta_2}{D_4}$.

Consideremos então a seguinte derivação $D \in NL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_3 \\ \alpha \Rightarrow \beta_1 \end{array} \quad \begin{array}{c} D_4 \\ \alpha \Rightarrow \beta_2 \end{array}}{\alpha \Rightarrow \beta_1 \wedge \beta_2} \wedge_R$$

Temos que $\underset{\alpha\Rightarrow\beta_1\wedge\beta_2}{D}$, e obtemos $P(n, h)$.

**Subcaso:**

$$\begin{array}{c} D_1 \\ \alpha \Rightarrow \gamma \end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c} D_2' \\ \beta_1 \Rightarrow \beta_2 \end{array}}{\top \Rightarrow \beta_1 \supset \beta_2} \supset_R$$

Consideremos então a seguinte derivação $D \in NL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_2 \\ \top \Rightarrow \beta_1 \supset \beta_2 \end{array}}{\alpha \Rightarrow \beta_1 \supset \beta_2} we_L$$

Temos que $\underset{\alpha\Rightarrow\beta_1\supset\beta_2}{D}$, e obtemos $P(n, h)$.

**Subcaso:**

$$\begin{array}{c} D_1 \\ \alpha \Rightarrow \gamma \end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c} D_2' \\ \gamma \Rightarrow \beta_1 \end{array} \quad \begin{array}{c} D_2'' \\ \beta_2 \Rightarrow \perp \end{array}}{\gamma \Rightarrow \beta_1 \subset \beta_2} \subset_R$$

Assumimos $P(n, h-1)$ como hipótese de indução.

De $P(n, h-1)$, $\underset{\alpha\Rightarrow\gamma}{D_1}$, $\underset{\gamma\Rightarrow\beta_1}{D_2'}$, $(rank(\gamma), |D_1| + |D_2'|) \leq (n, h-1)$, visto que $rank(\gamma) \leq n$ e $|D_1| + |D_2'| < h$, existe $D_3 \in NL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha\Rightarrow\beta_1}{D_3}$.

Consideremos então a seguinte derivação $D \in NL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_3 \\ \alpha \Rightarrow \beta_1 \end{array} \quad \begin{array}{c} D_2'' \\ \beta_2 \Rightarrow \perp \end{array}}{\alpha \Rightarrow \beta_1 \subset \beta_2} \subset_R$$

Temos que $\underset{\alpha\Rightarrow\beta_1\subset\beta_2}{D}$, e obtemos $P(n, h)$.

**Subcaso:**

$$\begin{array}{c} D_1 \\ \alpha \Rightarrow \gamma \end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c} D_2' \\ \gamma \Rightarrow \perp \end{array}}{\gamma \Rightarrow \beta} we_R$$

Assumimos $P(n, h-1)$ como hipótese de indução.

De $P(n, h-1)$, $\underset{\alpha\Rightarrow\gamma}{D_1}$, $\underset{\gamma\Rightarrow\bot}{D_2'}$, $(rank(\gamma), |D_1| + |D_2'|) \leq (n, h-1)$, visto que $rank(\gamma) \leq n$ e $|D_1| + |D_2'| < h$, existe $D_3 \in NL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha\Rightarrow\bot}{D_3}$.

Consideremos então a seguinte derivação $D \in NL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_3 \\ \alpha \Rightarrow \bot \end{array}}{\alpha \Rightarrow \beta}\, we_R$$

Temos que $\underset{\alpha\Rightarrow\beta}{D}$, e obtemos $P(n, h)$.

**Subcaso:**

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_1' \\ \alpha \Rightarrow \gamma_1 \end{array} \quad \begin{array}{c} D_1'' \\ \alpha \Rightarrow \gamma_2 \end{array}}{\alpha \Rightarrow \gamma_1 \wedge \gamma_2}\, \wedge_R \qquad \dfrac{\begin{array}{c} D_2' \\ \gamma_1 \Rightarrow \beta \end{array}}{\gamma_1 \wedge \gamma_2 \Rightarrow \beta}\, \wedge_{L1}$$

Assumimos $P(n, h-1)$ como hipótese de indução.

De $P(n, h-1)$, $\underset{\alpha\Rightarrow\gamma_1}{D_1'}$, $\underset{\gamma_1\Rightarrow\beta}{D_2'}$, $(rank(\gamma_1), |D_1'| + |D_2'|) \leq (n, h-1)$, visto que $rank(\gamma_1) < rank(\gamma_1 \wedge \gamma_2) \leq n$, existe $D \in NL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha\Rightarrow\beta}{D}$, e obtemos $P(n, h)$.

**Subcaso:**

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_1' \\ \alpha \Rightarrow \gamma_1 \end{array} \quad \begin{array}{c} D_1'' \\ \alpha \Rightarrow \gamma_2 \end{array}}{\alpha \Rightarrow \gamma_1 \wedge \gamma_2}\, \wedge_R \qquad \dfrac{\begin{array}{c} D_2' \\ \gamma_2 \Rightarrow \beta \end{array}}{\gamma_1 \wedge \gamma_2 \Rightarrow \beta}\, \wedge_{L2}$$

Assumimos $P(n, h-1)$ como hipótese de indução.

De $P(n, h-1)$, $\underset{\alpha\Rightarrow\gamma_2}{D_1''}$, $\underset{\gamma_2\Rightarrow\beta}{D_2'}$, $(rank(\gamma_2), |D_1''| + |D_2'|) \leq (n, h-1)$, visto que $rank(\gamma_2) < rank(\gamma_1 \wedge \gamma_2) \leq n$, existe $D \in NL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha\Rightarrow\beta}{D}$, e obtemos $P(n, h)$.

**Subcaso:**

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_1' \\ \alpha \Rightarrow \gamma_1 \end{array}}{\alpha \Rightarrow \gamma_1 \vee \gamma_2}\, \vee_{R1} \qquad \dfrac{\begin{array}{c} D_2' \\ \gamma_1 \Rightarrow \beta \end{array} \quad \begin{array}{c} D_2'' \\ \gamma_2 \Rightarrow \beta \end{array}}{\gamma_1 \vee \gamma_2 \Rightarrow \beta}\, \vee_L$$

Assumimos $P(n, h-1)$ como hipótese de indução.

De $P(n, h-1)$, $\underset{\alpha\Rightarrow\gamma_1}{D_1'}$, $\underset{\gamma_1\Rightarrow\beta}{D_2'}$, $(rank(\gamma_1), |D_1'| + |D_2'|) \leq (n, h-1)$, visto que $rank(\gamma_1) < rank(\gamma_1 \vee \gamma_2) \leq n$, existe $D \in NL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha\Rightarrow\beta}{D}$, e obtemos $P(n, h)$.

**Subcaso:**

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_1' \\ \alpha \Rightarrow \gamma_2 \end{array}}{\alpha \Rightarrow \gamma_1 \vee \gamma_2}\, \vee_{R2} \qquad \dfrac{\begin{array}{c} D_2' \\ \gamma_1 \Rightarrow \beta \end{array} \quad \begin{array}{c} D_2'' \\ \gamma_2 \Rightarrow \beta \end{array}}{\gamma_1 \vee \gamma_2 \Rightarrow \beta}\, \vee_L$$

Assumimos $P(n, h-1)$ como hipótese de indução.

De $P(n, h-1)$, $\underset{\alpha\Rightarrow\gamma_2}{D_1'}$, $\underset{\gamma_2\Rightarrow\beta}{D_2''}$, $(rank(\gamma_2), |D_1'| + |D_2''|) \leq (n, h-1)$, visto que $rank(\gamma_2) < rank(\gamma_1 \vee \gamma_2) \leq n$, existe $D \in NL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha\Rightarrow\beta}{D}$, e obtemos $P(n, h)$.

**Subcaso:**

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1' \\ \gamma_1 \Rightarrow \gamma_2 \end{matrix}}{\top \Rightarrow \gamma_1 \supset \gamma_2} \supset_R \qquad\qquad \dfrac{\begin{matrix} D_2' \\ \top \Rightarrow \gamma_1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} D_2'' \\ \gamma_2 \Rightarrow \beta \end{matrix}}{\gamma_1 \supset \gamma_2 \Rightarrow \beta} \supset_L$$

Assumimos $P(n, h-1)$ como hipótese de indução.

De $P(n, h-1)$, $\underset{\top\Rightarrow\gamma_1}{D_2'}$ , $\underset{\gamma_1\Rightarrow\gamma_2}{D_1'}$ , $(rank(\gamma_1), |D_2'|+|D_1'|) \leq (n, h-1)$, visto que $rank(\gamma_1) < rank(\gamma_1 \supset \gamma_2) \leq n$, existe $D_3 \in NL\text{-}cut$ tal que $\underset{\top\Rightarrow\gamma_2}{D_3}$ .

De $P(n, h-1)$, $\underset{\top\Rightarrow\gamma_2}{D_3}$ , $\underset{\gamma_2\Rightarrow\beta}{D_2''}$ , $(rank(\gamma_2), |D_3|+|D_2''|) \leq (n, h-1)$, visto que $rank(\gamma_2) < rank(\gamma_1 \supset \gamma_2) \leq n$, existe $D_4 \in NL\text{-}cut$ tal que $\underset{\top\Rightarrow\beta}{D_4}$, e obtemos $P(n, h)$.

**Subcaso:**

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1' \\ \gamma_1 \Rightarrow \gamma_2 \end{matrix}}{\top \Rightarrow \gamma_1 \supset \gamma_2} \supset_R \qquad\qquad \dfrac{\begin{matrix} D_2' \\ \beta_1 \Rightarrow \gamma_1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} D_2'' \\ \gamma_2 \Rightarrow \beta_2 \end{matrix}}{\gamma_1 \supset \gamma_2 \Rightarrow \beta_1 \supset \beta_2} \supset_{order}$$

Assumimos $P(n, h-1)$ como hipótese de indução.

De $P(n, h-1)$, $\underset{\beta_1\Rightarrow\gamma_1}{D_2'}$ , $\underset{\gamma_1\Rightarrow\gamma_2}{D_1'}$ , $(rank(\gamma_1), |D_2'|+|D_1'|) \leq (n, h-1)$, visto que $rank(\gamma_1) < rank(\gamma_1 \supset \gamma_2) \leq n$, existe $D_3 \in NL\text{-}cut$ tal que $\underset{\beta_1\Rightarrow\gamma_2}{D_3}$ .

De $P(n, h-1)$, $\underset{\beta_1\Rightarrow\gamma_2}{D_3}$ , $\underset{\gamma_2\Rightarrow\beta_2}{D_2''}$ , $(rank(\gamma_2), |D_3|+|D_2''|) \leq (n, h-1)$, visto que $rank(\gamma_2) < rank(\gamma_1 \supset \gamma_2) \leq n$, existe $D_4 \in NL\text{-}cut$ tal que $\underset{\beta_1\Rightarrow\beta_2}{D_4}$ .

Consideremos então a seguinte derivação $D \in NL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{matrix} D_4 \\ \beta_1 \Rightarrow \beta_2 \end{matrix}}{\top \Rightarrow \beta_1 \supset \beta_2} \supset_R$$

Temos que $\underset{\top\Rightarrow\beta_1\supset\beta_2}{D}$, e obtemos $P(n, h)$.

**Subcaso:**

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1' \\ \gamma_1 \Rightarrow \alpha_1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} D_1'' \\ \alpha_2 \Rightarrow \gamma_2 \end{matrix}}{\alpha_1 \supset \alpha_2 \Rightarrow \gamma_1 \supset \gamma_2} \supset_{order} \qquad\qquad \dfrac{\begin{matrix} D_2' \\ \top \Rightarrow \gamma_1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} D_2'' \\ \gamma_2 \Rightarrow \beta \end{matrix}}{\gamma_1 \supset \gamma_2 \Rightarrow \beta} \supset_L$$

Assumimos $P(n, h-1)$ como hipótese de indução.

De $P(n, h-1)$, $\underset{\top\Rightarrow\gamma_1}{D_2'}$ , $\underset{\gamma_1\Rightarrow\alpha_1}{D_1'}$ , $(rank(\gamma_1), |D_2'|+|D_1'|) \leq (n, h-1)$, visto que $rank(\gamma_1) < rank(\gamma_1 \supset \gamma_2) \leq n$, existe $D_3 \in NL\text{-}cut$ tal que $\underset{\top\Rightarrow\alpha_1}{D_3}$ .

De $P(n, h-1)$, $\underset{\alpha_2\Rightarrow\gamma_2}{D_1''}$ , $\underset{\gamma_2\Rightarrow\beta}{D_2''}$ , $(rank(\gamma_2), |D_1''|+|D_2''|) \leq (n, h-1)$, visto que $rank(\gamma_2) < rank(\gamma_1 \supset \gamma_2) \leq n$, existe $D_4 \in NL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha_2\Rightarrow\beta}{D_4}$ .

Consideremos então a seguinte derivação $D \in NL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{matrix} D_3 \\ \top \Rightarrow \alpha_1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} D_4 \\ \alpha_2 \Rightarrow \beta \end{matrix}}{\alpha_1 \supset \alpha_2 \Rightarrow \beta} \supset_L$$

Temos que $\underset{\alpha_1\supset\alpha_2\Rightarrow\beta}{D}$, e obtemos $P(n, h)$.

**Subcaso:**

$$\dfrac{\overset{D_1'}{\gamma_1 \Rightarrow \alpha_1} \qquad \overset{D_1''}{\alpha_2 \Rightarrow \gamma_2}}{\alpha_1 \supset \alpha_2 \Rightarrow \gamma_1 \supset \gamma_2} \supset_{order} \qquad\qquad \dfrac{\overset{D_2'}{\beta_1 \Rightarrow \gamma_1} \qquad \overset{D_2''}{\gamma_2 \Rightarrow \beta_2}}{\gamma_1 \supset \gamma_2 \Rightarrow \beta_1 \supset \beta_2} \supset_{order}$$

Assumimos $P(n, h-1)$ como hipótese de indução.

De $P(n, h-1)$, $\underset{\beta_1 \Rightarrow \gamma_1}{D_2'}$ , $\underset{\gamma_1 \Rightarrow \alpha_1}{D_1'}$ , $(rank(\gamma_1), |D_2'| + |D_1'|) \leq (n, h-1)$, visto que $rank(\gamma_1) < rank(\gamma_1 \supset \gamma_2) \leq n$, existe $D_3 \in NL\text{-}cut$ tal que $\underset{\beta_1 \Rightarrow \alpha_1}{D_3}$ .

De $P(n, h-1)$, $\underset{\alpha_2 \Rightarrow \gamma_2}{D_1''}$ , $\underset{\gamma_2 \Rightarrow \beta_2}{D_2''}$ , $(rank(\gamma_2), |D_1''| + |D_2''|) \leq (n, h-1)$, visto que $rank(\gamma_2) < rank(\gamma_1 \supset \gamma_2) \leq n$, existe $D_4 \in NL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha_2 \Rightarrow \beta_2}{D_4}$ .

Consideremos então a seguinte derivação $D \in NL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\overset{D_3}{\beta_1 \Rightarrow \alpha_1} \qquad \overset{D_4}{\alpha_2 \Rightarrow \beta_2}}{\alpha_1 \supset \alpha_2 \Rightarrow \beta_1 \supset \beta_2} \supset_{order}$$

Temos que $\underset{\alpha_1 \supset \alpha_2 \Rightarrow \beta_1 \supset \beta_2}{D}$, e obtemos $P(n, h)$.

**Subcaso:**

$$\dfrac{\overset{D_1'}{\alpha \Rightarrow \gamma_1} \qquad \overset{D_1''}{\gamma_2 \Rightarrow \perp}}{\alpha \Rightarrow \gamma_1 \subset \gamma_2} \subset_R \qquad\qquad \dfrac{\overset{D_2'}{\gamma_1 \Rightarrow \gamma_2}}{\gamma_1 \subset \gamma_2 \Rightarrow \perp} \subset_L$$

Assumimos $P(n, h-1)$ como hipótese de indução.

De $P(n, h-1)$, $\underset{\alpha \Rightarrow \gamma_1}{D_1'}$ , $\underset{\gamma_1 \Rightarrow \gamma_2}{D_2'}$ , $(rank(\gamma_1), |D_1'| + |D_2'|) \leq (n, h-1)$, visto que $rank(\gamma_1) < rank(\gamma_1 \subset \gamma_2) \leq n$, existe $D_3 \in NL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha \Rightarrow \gamma_2}{D_3}$ .

De $P(n, h-1)$, $\underset{\alpha \Rightarrow \gamma_2}{D_3}$ , $\underset{\gamma_2 \Rightarrow \perp}{D_1''}$ , $(rank(\gamma_2), |D_3| + |D_1''|) \leq (n, h-1)$, visto que $rank(\gamma_2) < rank(\gamma_1 \subset \gamma_2) \leq n$, existe $D \in NL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha \Rightarrow \perp}{D}$, e obtemos $P(n, h)$.

**Subcaso:**

$$\dfrac{\overset{D_1'}{\alpha \Rightarrow \gamma_1} \qquad \overset{D_1''}{\gamma_2 \Rightarrow \perp}}{\alpha \Rightarrow \gamma_1 \subset \gamma_2} \subset_R \qquad\qquad \dfrac{\overset{D_2'}{\gamma_1 \Rightarrow \beta_1} \qquad \overset{D_2''}{\beta_2 \Rightarrow \gamma_2}}{\gamma_1 \subset \gamma_2 \Rightarrow \beta_1 \subset \beta_2} \subset_{order}$$

Assumimos $P(n, h-1)$ como hipótese de indução.

De $P(n, h-1)$, $\underset{\alpha \Rightarrow \gamma_1}{D_1'}$ , $\underset{\gamma_1 \Rightarrow \beta_1}{D_2'}$ , $(rank(\gamma_1), |D_1'| + |D_2'|) \leq (n, h-1)$, visto que $rank(\gamma_1) < rank(\gamma_1 \subset \gamma_2) \leq n$, existe $D_3 \in NL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha \Rightarrow \beta_1}{D_3}$ .

De $P(n, h-1)$, $\underset{\beta_2 \Rightarrow \gamma_2}{D_2''}$ , $\underset{\gamma_2 \Rightarrow \perp}{D_1''}$ , $(rank(\gamma_2), |D_2''| + |D_1''|) \leq (n, h-1)$, visto que $rank(\gamma_2) < rank(\gamma_1 \subset \gamma_2) \leq n$, existe $D_4 \in NL\text{-}cut$ tal que $\underset{\beta_2 \Rightarrow \perp}{D_4}$ .

Consideremos então a seguinte derivação $D \in NL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\overset{D_3}{\alpha \Rightarrow \beta_1} \qquad \overset{D_4}{\beta_2 \Rightarrow \perp}}{\alpha \Rightarrow \beta_1 \subset \beta_2} \subset_R$$

Temos que $\underset{\alpha \Rightarrow \beta_1 \subset \beta_2}{D}$, e obtemos $P(n, h)$.

**Subcaso:**

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1' \\ \alpha_1 \Rightarrow \gamma_1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} D_1'' \\ \gamma_2 \Rightarrow \alpha_2 \end{matrix}}{\alpha_1 \subset \alpha_2 \Rightarrow \gamma_1 \subset \gamma_2} \subset_{order} \qquad \dfrac{\begin{matrix} D_2' \\ \gamma_1 \Rightarrow \gamma_2 \end{matrix}}{\gamma_1 \subset \gamma_2 \Rightarrow \perp} \subset_L$$

Assumimos $P(n, h-1)$ como hipótese de indução.

De $P(n, h-1)$, $\underset{\alpha_1 \Rightarrow \gamma_1}{D_1'}$ , $\underset{\gamma_1 \Rightarrow \gamma_2}{D_2'}$ , $(rank(\gamma_1), |D_1'|+|D_2'|) \leq (n, h-1)$, visto que $rank(\gamma_1) < rank(\gamma_1 \subset \gamma_2) \leq n$, existe $D_3 \in NL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha_1 \Rightarrow \gamma_2}{D_3}$ .

De $P(n, h-1)$, $\underset{\alpha_1 \Rightarrow \gamma_2}{D_3}$ , $\underset{\gamma_2 \Rightarrow \alpha_2}{D_1''}$ , $(rank(\gamma_2), |D_3|+|D_1''|) \leq (n, h-1)$, visto que $rank(\gamma_2) < rank(\gamma_1 \subset \gamma_2) \leq n$, existe $D_4 \in NL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha_1 \Rightarrow \alpha_2}{D_4}$ .

Consideremos então a seguinte derivação $D \in NL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{matrix} D_4 \\ \alpha_1 \Rightarrow \alpha_2 \end{matrix}}{\alpha_1 \subset \alpha_2 \Rightarrow \perp} \subset_L$$

Temos que $\underset{\alpha_1 \subset \alpha_2 \Rightarrow \perp}{D}$, e obtemos $P(n, h)$.

**Subcaso:**

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1' \\ \alpha_1 \Rightarrow \gamma_1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} D_1'' \\ \gamma_2 \Rightarrow \alpha_2 \end{matrix}}{\alpha_1 \subset \alpha_2 \Rightarrow \gamma_1 \subset \gamma_2} \subset_{order} \qquad \dfrac{\begin{matrix} D_2' \\ \gamma_1 \Rightarrow \beta_1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} D_2'' \\ \beta_2 \Rightarrow \gamma_2 \end{matrix}}{\gamma_1 \subset \gamma_2 \Rightarrow \beta_1 \subset \beta_2} \subset_{order}$$

Assumimos $P(n, h-1)$ como hipótese de indução.

De $P(n, h-1)$, $\underset{\alpha_1 \Rightarrow \gamma_1}{D_1'}$ , $\underset{\gamma_1 \Rightarrow \beta_1}{D_2'}$ , $(rank(\gamma_1), |D_1'|+|D_2'|) \leq (n, h-1)$, visto que $rank(\gamma_1) < rank(\gamma_1 \subset \gamma_2) \leq n$, existe $D_3 \in NL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha_1 \Rightarrow \beta_1}{D_3}$ .

De $P(n, h-1)$, $\underset{\beta_2 \Rightarrow \gamma_2}{D_2''}$ , $\underset{\gamma_2 \Rightarrow \alpha_2}{D_1''}$ , $(rank(\gamma_2), |D_2''|+|D_1''|) \leq (n, h-1)$, visto que $rank(\gamma_2) < rank(\gamma_1 \subset \gamma_2) \leq n$, existe $D_4 \in NL\text{-}cut$ tal que $\underset{\beta_2 \Rightarrow \alpha_2}{D_4}$ .

Consideremos então a seguinte derivação $D \in NL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{matrix} D_3 \\ \alpha_1 \Rightarrow \beta_1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} D_4 \\ \beta_2 \Rightarrow \alpha_2 \end{matrix}}{\alpha_1 \subset \alpha_2 \Rightarrow \beta_1 \subset \beta_2} \subset_{order}$$

Temos que $\underset{\alpha_1 \subset \alpha_2 \Rightarrow \beta_1 \subset \beta_2}{D}$, e obtemos $P(n, h)$.

**Subcaso:**

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1' \\ \alpha \Rightarrow \perp \end{matrix}}{\alpha \Rightarrow \gamma} we_R \qquad \begin{matrix} D_2 \\ \gamma \Rightarrow \beta \end{matrix}$$

Consideremos então a seguinte derivação $D \in NL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1' \\ \alpha \Rightarrow \perp \end{matrix}}{\alpha \Rightarrow \beta} we_R$$

Temos que $\underset{\alpha \Rightarrow \beta}{D}$, e obtemos $P(n, h)$.

**Subcaso:**

$$\dfrac{D_1}{\alpha \Rightarrow \gamma} \qquad \dfrac{\dfrac{D_2'}{\top \Rightarrow \beta}}{\gamma \Rightarrow \beta}\, we_L$$

Consideremos então a seguinte derivação $D \in NL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\dfrac{D_2'}{\top \Rightarrow \beta}}{\alpha \Rightarrow \beta}\, we_L$$

Temos que $\underset{\alpha\Rightarrow\beta}{D}$, e obtemos $P(n, h)$. □

**Teorema 85 (Eliminação do Corte em $NL$)**
Para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{NL}$, se $NL \vdash \alpha \Rightarrow \beta$, então $NL\text{-}cut \vdash \alpha \Rightarrow \beta$.

*Demonstração.* Por indução em derivações de $NL$.
Para qualquer $D \in NL$, $P(D)$ : para quaisquer $\alpha, \beta$ tais que $\underset{\alpha\Rightarrow\beta}{D}$, existe $D' \in NL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha\Rightarrow\beta}{D'}$.

**Caso $A$:**

$$\overline{p \Rightarrow p}\ A$$

Consideremos a seguinte derivação $D' \in NL\text{-}cut$:

$$\overline{p \Rightarrow p}\ A$$

Temos que $\underset{p\Rightarrow p}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\perp$:**

$$\overline{\perp \Rightarrow \beta}\ \perp$$

Consideremos a seguinte derivação $D' \in NL\text{-}cut$:

$$\overline{p \Rightarrow p}\ \perp$$

Temos que $\underset{\perp\Rightarrow\beta}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\top$:**

$$\overline{\alpha \Rightarrow \top}\ \top$$

Consideremos a seguinte derivação $D' \in NL\text{-}cut$:

$$\overline{\alpha \Rightarrow \top}\ \top$$

Temos que $\underset{\alpha\Rightarrow\top}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\wedge_{L1}$:**

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_1 \\ \alpha_1 \Rightarrow \beta \end{array}}{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \beta} \wedge_{L1}$$

Assumimos $P(D_1)$ como hipótese de indução. De $P(D_1)$, existe $D'_1 \in NL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha_1 \Rightarrow \beta}{D'_1}$.

Consideremos a seguinte derivação $D' \in NL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{array}{c} D'_1 \\ \alpha_1 \Rightarrow \beta \end{array}}{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \beta} \wedge_{L1}$$

Temos que $\underset{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \beta}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\wedge_{L2}$:**

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_1 \\ \alpha_2 \Rightarrow \beta \end{array}}{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \beta} \wedge_{L2}$$

Assumimos $P(D_1)$ como hipótese de indução. De $P(D_1)$ existe $D'_1 \in NL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha_2 \Rightarrow \beta}{D'_1}$.

Consideremos então a seguinte derivação $D' \in NL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{array}{c} D'_1 \\ \alpha_2 \Rightarrow \beta \end{array}}{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \beta} \wedge_{L2}$$

Temos que $\underset{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \beta}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\wedge_R$:**

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_1 \\ \alpha \Rightarrow \beta_1 \end{array} \quad \begin{array}{c} D_2 \\ \alpha \Rightarrow \beta_2 \end{array}}{\alpha \Rightarrow \beta_1 \wedge \beta_2} \wedge_R$$

Assumimos $P(D_1)$ e $P(D_2)$ como hipóteses de indução. De $P(D_1)$, existe $D'_1 \in NL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha \Rightarrow \beta_1}{D'_1}$.
De $P(D_2)$, existe $D'_2 \in NL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha \Rightarrow \beta_2}{D'_2}$.

Consideremos então a seguinte derivação $D' \in NL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{array}{c} D'_1 \\ \alpha \Rightarrow \beta_1 \end{array} \quad \begin{array}{c} D'_2 \\ \alpha \Rightarrow \beta_2 \end{array}}{\alpha \Rightarrow \beta_1 \wedge \beta_2} \wedge_R$$

Temos que $\underset{\alpha \Rightarrow \beta_1 \wedge \beta_2}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\vee_L$:**

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1 \\ \alpha_1 \Rightarrow \beta \end{matrix} \qquad \begin{matrix} D_2 \\ \alpha_2 \Rightarrow \beta \end{matrix}}{\alpha_1 \vee \alpha_2 \Rightarrow \beta} \vee_L$$

Assumimos $P(D_1)$ e $P(D_2)$ como hipóteses de indução. De $P(D_1)$, existe $D'_1 \in NL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha_1 \Rightarrow \beta}{D'_1}$. De $P(D_2)$, existe $D'_2 \in NL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha_2 \Rightarrow \beta}{D'_2}$.

Consideremos então a seguinte derivação $D' \in NL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{matrix} D'_1 \\ \alpha_1 \Rightarrow \beta \end{matrix} \qquad \begin{matrix} D'_2 \\ \alpha_2 \Rightarrow \beta \end{matrix}}{\alpha_1 \vee \alpha_2 \Rightarrow \beta} \vee_L$$

Temos que $\underset{\alpha_1 \vee \alpha_2 \Rightarrow \beta}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\vee_{R1}$:**

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1 \\ \alpha \Rightarrow \beta_1 \end{matrix}}{\alpha \Rightarrow \beta_1 \vee \beta_2} \vee_{R1}$$

Assumimos $P(D_1)$ como hipótese de indução. De $P(D_1)$, existe $D'_1 \in NL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha \Rightarrow \beta_1}{D'_1}$.

Consideremos então a seguinte derivação $D' \in NL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{matrix} D'_1 \\ \alpha \Rightarrow \beta_1 \end{matrix}}{\alpha \Rightarrow \beta_1 \vee \beta_2} \vee_{R1}$$

Temos que $\underset{\alpha \Rightarrow \beta_1 \vee \beta_2}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\vee_{R2}$:**

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1 \\ \alpha \Rightarrow \beta_2 \end{matrix}}{\alpha \Rightarrow \beta_1 \vee \beta_2} \vee_{R2}$$

Assumimos $P(D_1)$ como hipótese de indução. De $P(D_1)$, existe $D'_1 \in NL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha \Rightarrow \beta_2}{D'_1}$.

Consideremos então a seguinte derivação $D' \in NL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{matrix} D'_1 \\ \alpha \Rightarrow \beta_2 \end{matrix}}{\alpha \Rightarrow \beta_1 \vee \beta_2} \vee_{R2}$$

Temos que $\underset{\alpha \Rightarrow \beta_1 \vee \beta_2}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\supset_L$:**

$$\dfrac{\begin{array}{c}D_1\\ \top \Rightarrow \alpha_1\end{array} \quad \begin{array}{c}D_2\\ \alpha_2 \Rightarrow \beta\end{array}}{\alpha_1 \supset \alpha_2 \Rightarrow \beta} \supset_L$$

Assumimos $P(D_1)$ e $P(D_2)$ como hipóteses de indução. De $P(D_1)$, existe $D'_1 \in NL\text{-}cut$ tal que $\underset{\top\Rightarrow\alpha_1}{D'_1}$. De $P(D_2)$, existe $D'_2 \in NL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha_2\Rightarrow\beta}{D'_2}$.

Consideremos então a seguinte derivação $D' \in NL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{array}{c}D'_1\\ \top \Rightarrow \alpha_1\end{array} \quad \begin{array}{c}D'_2\\ \alpha_2 \Rightarrow \beta\end{array}}{\alpha_1 \supset \alpha_2 \Rightarrow \beta} \supset_L$$

Temos que $\underset{\alpha_1\supset\alpha_2\Rightarrow\beta}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\supset_R$:**

$$\dfrac{\begin{array}{c}D_1\\ \beta_1 \Rightarrow \beta_2\end{array}}{\top \Rightarrow \beta_1 \supset \beta_2} \supset_R$$

Assumimos $P(D_1)$ como hipótese de indução. De $P(D_1)$, existe $D'_1 \in NL\text{-}cut$ tal que $\underset{\beta_1\Rightarrow\beta_2}{D'_1}$.

Consideremos então a seguinte derivação $D' \in NL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{array}{c}D'_1\\ \beta_1 \Rightarrow \beta_2\end{array}}{\top \Rightarrow \beta_1 \supset \beta_2} \supset_R$$

Temos que $\underset{\top\Rightarrow\beta_1\supset\beta_2}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\supset_{order}$:**

$$\dfrac{\begin{array}{c}D_1\\ \beta_1 \Rightarrow \alpha_1\end{array} \quad \begin{array}{c}D_2\\ \alpha_2 \Rightarrow \beta_2\end{array}}{\alpha_1 \supset \alpha_2 \Rightarrow \beta_1 \supset \beta_2} \supset_{order}$$

Assumimos $P(D_1)$ e $P(D_2)$ como hipóteses de indução. De $P(D_1)$, existe $D'_1 \in NL\text{-}cut$ tal que $\underset{\beta_1\Rightarrow\alpha_1}{D'_1}$. De $P(D_2)$, existe $D'_2 \in NL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha_2\Rightarrow\beta_2}{D'_2}$.

Consideremos então a seguinte derivação $D' \in NL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{array}{c}D'_1\\ \beta_1 \Rightarrow \alpha_1\end{array} \quad \begin{array}{c}D'_2\\ \alpha_2 \Rightarrow \beta_2\end{array}}{\alpha_1 \supset \alpha_2 \Rightarrow \beta_1 \supset \beta_2} \supset_{order}$$

Temos que $\underset{\alpha_1\supset\alpha_2\Rightarrow\beta_1\supset\beta_2}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\subset_L$:**

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_1 \\ \alpha_1 \Rightarrow \alpha_2 \end{array}}{\alpha_1 \subset \alpha_2 \Rightarrow \bot} \subset_L$$

Assumimos $P(D_1)$ como hipótese de indução. De $P(D_1)$, existe $D'_1 \in NL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha_1 \Rightarrow \alpha_2}{D'_1}$.

Consideremos então a seguinte derivação $D' \in NL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{array}{c} D'_1 \\ \alpha_1 \Rightarrow \alpha_2 \end{array}}{\alpha_1 \subset \alpha_2 \Rightarrow \bot} \subset_L$$

Temos que $\underset{\alpha_1 \subset \alpha_2 \Rightarrow \bot}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\subset_R$:**

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_1 \\ \alpha \Rightarrow \beta_1 \end{array} \qquad \begin{array}{c} D_2 \\ \beta_2 \Rightarrow \bot \end{array}}{\alpha \Rightarrow \beta_1 \subset \beta_2} \subset_R$$

Assumimos $P(D_1)$ e $P(D_2)$ como hipóteses de indução. De $P(D_1)$, existe $D'_1 \in NL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha \Rightarrow \beta_1}{D'_1}$. De $P(D_2)$, existe $D'_2 \in NL\text{-}cut$ tal que $\underset{\beta_2 \Rightarrow \bot}{D'_2}$.

Consideremos então a seguinte derivação $D' \in NL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{array}{c} D'_1 \\ \alpha \Rightarrow \beta_1 \end{array} \qquad \begin{array}{c} D'_2 \\ \beta_2 \Rightarrow \bot \end{array}}{\alpha \Rightarrow \beta_1 \subset \beta_2} \subset_R$$

Temos que $\underset{\alpha \Rightarrow \beta_1 \subset \beta_2}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\subset_{order}$:**

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_1 \\ \alpha_1 \Rightarrow \beta_1 \end{array} \qquad \begin{array}{c} D_2 \\ \beta_2 \Rightarrow \alpha_2 \end{array}}{\alpha_1 \subset \alpha_2 \Rightarrow \beta_1 \subset \beta_2} \supset_{order}$$

Assumimos $P(D_1)$ e $P(D_2)$ como hipóteses de indução. De $P(D_1)$, existe $D'_1 \in NL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha_1 \Rightarrow \beta_1}{D'_1}$. De $P(D_2)$, existe $D'_2 \in NL\text{-}cut$ tal que $\underset{\beta_2 \Rightarrow \alpha_2}{D'_2}$.

Consideremos então a seguinte derivação $D' \in NL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{array}{c} D'_1 \\ \alpha_1 \Rightarrow \beta_1 \end{array} \qquad \begin{array}{c} D'_2 \\ \beta_2 \Rightarrow \alpha_2 \end{array}}{\alpha_1 \subset \alpha_2 \Rightarrow \beta_1 \subset \beta_2} \supset_{order}$$

Temos que $\underset{\alpha_1 \subset \alpha_2 \Rightarrow \beta_1 \subset \beta_2}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $we_L$:**

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1 \\ \top \Rightarrow \beta \end{matrix}}{\alpha \Rightarrow \beta}\, we_L$$

Assumimos $P(D_1)$ como hipótese de indução. De $P(D_1)$, existe $D_1' \in NL\text{-}cut$ tal que $\underset{\top \Rightarrow \beta}{D_1'}$.

Consideremos então a seguinte derivação $D' \in NL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1' \\ \top \Rightarrow \beta \end{matrix}}{\alpha \Rightarrow \beta}\, we_L$$

Temos que $\underset{\alpha \Rightarrow \beta}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $we_R$:**

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1 \\ \alpha \Rightarrow \bot \end{matrix}}{\alpha \Rightarrow \beta}\, we_R$$

Assumimos $P(D_1)$ como hipótese de indução. De $P(D_1)$, existe $D_1' \in NL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha \Rightarrow \bot}{D_1'}$.

Consideremos então a seguinte derivação $D' \in NL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1' \\ \alpha \Rightarrow \bot \end{matrix}}{\alpha \Rightarrow \beta}\, we_R$$

Temos que $\underset{\alpha \Rightarrow \beta}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $cut$:**

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1 \\ \alpha \Rightarrow \gamma \end{matrix} \qquad \begin{matrix} D_2 \\ \gamma \Rightarrow \beta \end{matrix}}{\alpha \Rightarrow \beta}\, cut$$

Assumimos $P(D_1)$ e $P(D_2)$ como hipóteses de indução. De $P(D_1)$, existe $D_1' \in NL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha \Rightarrow \gamma}{D_1'}$. De $P(D_2)$, existe $D_2' \in NL\text{-}cut$ tal que $\underset{\gamma \Rightarrow \beta}{D_2'}$.

Pelo Teorema 84 (Admissibilidade do Corte em $NL$-*cut*), como $\underset{\alpha \Rightarrow \gamma}{D_1'}$ e $\underset{\gamma \Rightarrow \beta}{D_2'}$, temos então que existe $D' \in NL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha \Rightarrow \beta}{D'}$, e obtemos $P(D)$. □

**Teorema 86 (Decidibilidade de $NL$)**
O sistema de cálculo de mono-sequentes para a lógica nelsoniana $NL$ é decidível.

*Demonstração.*

Dados $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{NL}$, é possível implementar um algoritmo que determina se o mono-sequente $\alpha \Rightarrow \beta$ é derivável em $NL$.

Com efeito, pelo Teorema 85 (Eliminação do Corte em $NL$), podemos restringir a questão da decidibilidade ao sistema dedutivo sem cortes, $NL$-*cut*. Assim, dado o mono-sequente em questão, observamos que qualquer regra que possa ser aplicada para o inferir origina-se de mono-sequentes estruturalmente mais simples, isto é, de menor complexidade. As regras apenas eliminam fórmulas e conectivos de baixo para cima, e mais ainda, o conjunto de pares de regras e conjuntos de fórmulas capazes de inferir $\alpha \Rightarrow \beta$ é finito.

É, portanto, possível conceber um algoritmo que, dado um mono-sequente $S$, calcule todos os pares possíveis de regras e premissas necessárias que, pela aplicação da respetiva regra, permitiriam inferir $S$. Cada par (regra, premissas) corresponde a um nó numa árvore de derivação. Este processo é então repetido recursivamente para cada conjunto de premissas em cada nó, até se atingir sequentes em que poderão ser aplicadas as regras $A, \bot, \top$. Para este processo terminar, seria apenas necessário restringir as regras $we_L$ e $we_R$, de forma a não serem aplicadas em sequentes em que a premissa seria a própria conclusão, podendo, caso contrário, o programa não terminar.

Para decidir a validade do sequente original $\alpha \Rightarrow \beta$, executa-se uma procura em profundidade na árvore construída. Se existir um ramo a partir da raiz tal que, em todas as folhas, uma das seguintes regras $A, \bot, \top$ é aplicada com sucesso, então o sequente é derivável em $NL$. Caso contrário, o mono-sequente não é derivável em $NL$. $\square$

# 5 Lógica Quântica Paraconsistente Nelsoniana

A *lógica quântica paraconsistente nelsoniana* ($NQL$) é uma extensão *nelsoniana* da *lógica quântica paraconsistente*, obtida através da sua combinação com a *lógica paraconsistente de quatro valores de Nelson.* Esta extensão introduz os conectivos de *implicação* e *coimplicação* na lógica original.

Tal como nas lógicas de Nelson, o conceito de negação nesta lógica é fortalecido: ao contrário de sistemas como a lógica intuicionista, onde a negação é geralmente definida de forma indireta através do absurdo, aqui a negação é *construível* — ou seja, possui regras de inferência próprias no sistema dedutivo de monosequentes. Isto permite tratar a negação de forma mais direta e independente dos restantes conectivos.

O conceito de negação construível nas lógicas de Nelson foi explorado por Akama [1] e por Nascimento Silva et al. [8], onde são também estudadas as lógicas $\mathcal{N}3$, $\mathcal{N}4$ e $\mathcal{S}$, introduzidas por Nelson.

## 5.1 Sintaxe

**Definição 87** ($\mathcal{A}^{NQL}$)

O alfabeto da Lógica Quântica Paraconsistente Nelsoniana é dado por: $\mathcal{A}^{NQL} = \mathcal{V}_1 \cup \{\perp, \top, \wedge, \vee, \supset, \subset, \sim, (, )\}$

**Definição 88** ($\mathcal{F}^{NQL}$)

O conjunto das fórmulas da Lógica Quântica Paraconsistente Nelsoniana $\mathcal{F}^{NQL}$, é uma linguagem sobre $\mathcal{A}^{NQL}$, definido indutivamente por:

- $\perp \in \mathcal{F}^{NQL}$.
- $\top \in \mathcal{F}^{NQL}$.
- $q \in \mathcal{F}^{NQL}$, para todo $q \in \mathcal{V}_1$.
- $(\alpha \wedge \beta) \in \mathcal{F}^{NQL}$, para todo $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{NQL}$.
- $(\alpha \vee \beta) \in \mathcal{F}^{NQL}$, para todo $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{NQL}$.
- $(\alpha \supset \beta) \in \mathcal{F}^{NQL}$, para todo $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{NQL}$.
- $(\alpha \subset \beta) \in \mathcal{F}^{NQL}$, para todo $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{NQL}$.
- $(\sim \alpha) \in \mathcal{F}^{NQL}$, para todo $\alpha \in \mathcal{F}^{NQL}$.

**Definição 89** ($V : \mathcal{F}^{NQL} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{V}_1)$)

A função $V : \mathcal{F}^{NQL} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{V}_1)$, que a cada fórmula associa o conjunto das variáveis que nela ocorrem, é definida indutivamente por:

- $V(\bot) = \emptyset$.
- $V(\top) = \emptyset$.
- $V(q) = \{q\}$, para todo $q \in \mathcal{V}_1$.
- $V(\alpha \wedge \beta) = V(\alpha) \cup V(\beta)$, para todo $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{NQL}$.
- $V(\alpha \vee \beta) = V(\alpha) \cup V(\beta)$, para todo $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{NQL}$.
- $V(\alpha \supset \beta) = V(\alpha) \cup V(\beta)$, para todo $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{NQL}$.
- $V(\alpha \subset \beta) = V(\alpha) \cup V(\beta)$, para todo $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{NQL}$.
- $V(\sim \alpha) = V(\alpha)$, para todo $\alpha \in \mathcal{F}^{NQL}$.

**Definição 90 (Mono-Sequentes em $\mathcal{F}^{NQL}$)**
Um mono-sequente da Lógica Quântica Paraconsistente Nelsoniana é uma expressão da forma $\alpha \Rightarrow \beta$, em que $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{NQL}$.

## 5.2 Semântica

**Definição 91 (Valoração Paraconsistente)**
Seja $\mathcal{L} = (L, \sqcup, \sqcap, \sqsupset, \sqsubset, 0, 1)$ um reticulado-NL. Uma função $v' : \mathcal{F}^{NQL} \longrightarrow L$ diz-se uma valoração paraconsistente em $\mathcal{L}$ quando para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{NQL}$:

- $v'(\bot) = 0$
- $v'(\top) = 1$
- $v'(\sim \bot) = 1$
- $v'(\sim \top) = 0$
- $v'(\alpha \wedge \beta) = v'(\alpha) \sqcap v'(\beta)$
- $v'(\alpha \vee \beta) = v'(\alpha) \sqcup v'(\beta)$
- $v'(\alpha \supset \beta) = v'(\alpha) \sqsupset v'(\beta)$
- $v'(\alpha \subset \beta) = v'(\alpha) \sqsubset v'(\beta)$
- $v'(\sim (\alpha \wedge \beta)) = v'(\sim \alpha) \sqcup v'(\sim \beta)$
- $v'(\sim (\alpha \vee \beta)) = v'(\sim \alpha) \sqcap v'(\sim \beta)$
- $v'(\sim (\alpha \supset \beta)) = v'(\alpha) \sqcap v'(\sim \beta)$
- $v'(\sim (\alpha \subset \beta)) = v'(\sim \alpha) \sqcup v'(\beta)$
- $v'(\sim\sim \alpha) = v'(\alpha)$

**Definição 92** ($NQL \models^{v'} \alpha \Rightarrow \beta$)
Sejam $\mathcal{L}$ um reticulado-NL, $v'$ uma valoração paraconsistente em $\mathcal{L}$, $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{NQL}$. $\alpha \Rightarrow \beta$ é verdadeiro sobre $v'$ sse $v'(\alpha) \sqsubseteq_{\mathcal{L}} v'(\beta)$, denotado por $NQL \models^{v'} \alpha \Rightarrow \beta$.

**Definição 93** ($NQL \models \alpha \Rightarrow \beta$)
Sejam $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{NQL}$. $\alpha \Rightarrow \beta$ é $NQL-$válido sse para todo reticulado-NL $\mathcal{L}$ e valoração paraconsistente $v'$ em $\mathcal{L}$, $\alpha \Rightarrow \beta$ é verdadeiro sobre $v'$, denotado por $NQL \models \alpha \Rightarrow \beta$.

## 5.3 Sistema Dedutivo para a Lógica Quântica Paraconsistente Nelsoniana Interpolação de Craig

**Definição 94** ($NQL$)
O sistema dedutivo $NQL$ é um cálculo de mono-sequentes com as seguintes regras de inferência:

$$\frac{}{q \Rightarrow q}\,A \qquad \frac{}{\bot \Rightarrow \alpha}\,\bot \qquad \frac{}{\alpha \Rightarrow \top}\,\top$$

$$\frac{\top \Rightarrow \beta}{\alpha \Rightarrow \beta}\,we_L \qquad \frac{\alpha \Rightarrow \bot}{\alpha \Rightarrow \beta}\,we_R$$

$$\frac{\alpha_1 \Rightarrow \beta}{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \beta}\,\wedge_{L1} \qquad \frac{\alpha_2 \Rightarrow \beta}{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \beta}\,\wedge_{L2} \qquad \frac{\alpha \Rightarrow \beta_1 \quad \alpha \Rightarrow \beta_2}{\alpha \Rightarrow \beta_1 \wedge \beta_2}\,\wedge_R$$

$$\frac{\alpha_1 \Rightarrow \beta \quad \alpha_2 \Rightarrow \beta}{\alpha_1 \vee \alpha_2 \Rightarrow \beta}\,\vee_L \qquad \frac{\alpha \Rightarrow \beta_1}{\alpha \Rightarrow \beta_1 \vee \beta_2}\,\vee_{R1} \qquad \frac{\alpha \Rightarrow \beta_2}{\alpha \Rightarrow \beta_1 \vee \beta_2}\,\vee_{R2}$$

$$\frac{\top \Rightarrow \alpha \quad \beta \Rightarrow \delta}{\alpha \supset \beta \Rightarrow \delta}\,\supset_L \qquad \frac{\alpha \Rightarrow \beta}{\top \Rightarrow \alpha \supset \beta}\,\supset_R \qquad \frac{\alpha \Rightarrow \beta \quad \gamma \Rightarrow \delta}{\beta \supset \gamma \Rightarrow \alpha \supset \delta}\,\supset_{order}$$

$$\frac{\alpha \Rightarrow \beta}{\alpha \subset \beta \Rightarrow \bot}\,\subset_L \qquad \frac{\delta \Rightarrow \alpha \quad \beta \Rightarrow \bot}{\delta \Rightarrow \alpha \subset \beta}\,\subset_R \qquad \frac{\delta \Rightarrow \gamma \quad \beta \Rightarrow \alpha}{\delta \subset \alpha \Rightarrow \gamma \subset \beta}\,\subset_{order}$$

$$\frac{}{\sim q \Rightarrow \sim q}\,\sim A \qquad \frac{}{\alpha \Rightarrow \sim \bot}\,\sim \bot \qquad \frac{}{\sim \top \Rightarrow \alpha}\,\sim \top$$

$$\frac{\sim \bot \Rightarrow \alpha}{\beta \Rightarrow \alpha}\,\sim we_L \qquad \frac{\alpha \Rightarrow \sim \top}{\alpha \Rightarrow \beta}\,\sim we_R$$

$$\frac{\alpha \Rightarrow \beta}{\sim\sim \alpha \Rightarrow \beta}\,\sim\sim_L \qquad \frac{\alpha \Rightarrow \beta}{\alpha \Rightarrow \sim\sim \beta}\,\sim\sim_R$$

$$\frac{\sim \alpha_1 \Rightarrow \beta \quad \sim \alpha_2 \Rightarrow \beta}{\sim (\alpha_1 \wedge \alpha_2) \Rightarrow \beta}\,\sim \wedge_L \qquad \frac{\alpha \Rightarrow \sim \beta_1}{\alpha \Rightarrow \sim (\beta_1 \wedge \beta_2)}\,\sim \wedge_{R1} \qquad \frac{\alpha \Rightarrow \sim \beta_2}{\alpha \Rightarrow \sim (\beta_1 \wedge \beta_2)}\,\sim \wedge_{R2}$$

$$\frac{\sim \alpha_1 \Rightarrow \beta}{\sim (\alpha_1 \vee \alpha_2) \Rightarrow \beta}\,\sim \vee_{L1} \qquad \frac{\sim \alpha_2 \Rightarrow \beta}{\sim (\alpha_1 \vee \alpha_2) \Rightarrow \beta}\,\sim \vee_{L2} \qquad \frac{\alpha \Rightarrow \sim \beta_1 \quad \alpha \Rightarrow \sim \beta_2}{\alpha \Rightarrow \sim (\beta_1 \vee \beta_2)}\,\sim \vee_R$$

$$\frac{\alpha \Rightarrow \delta}{\sim (\alpha \supset \beta) \Rightarrow \delta}\,\sim\supset_{L1} \qquad \frac{\sim \beta \Rightarrow \delta}{\sim (\alpha \supset \beta) \Rightarrow \delta}\,\sim\supset_{L2} \qquad \frac{\gamma \Rightarrow \alpha \quad \gamma \Rightarrow \sim \beta}{\gamma \Rightarrow \sim (\alpha \supset \beta)}\,\sim\supset_R$$

$$\frac{\sim \alpha_1 \Rightarrow \beta \quad \alpha_2 \Rightarrow \beta}{\sim (\alpha_1 \subset \alpha_2) \Rightarrow \beta}\,\sim\subset_L \qquad \frac{\alpha \Rightarrow \sim \beta_1}{\alpha \Rightarrow \sim (\beta_1 \subset \beta_2)}\,\sim\subset_{R1} \qquad \frac{\alpha \Rightarrow \beta_2}{\alpha \Rightarrow \sim (\beta_1 \subset \beta_2)}\,\sim\subset_{R2}$$

$$\frac{\alpha \Rightarrow \gamma \quad \gamma \Rightarrow \beta}{\alpha \Rightarrow \beta}\,cut$$

**Definição 95 (Derivação de $NQL$)**
Uma derivação $D$ em $NQL$ de um mono-sequente $\alpha \Rightarrow \beta$ é uma árvore que pode ser definida indutivamente da seguinte maneira:

- A regra aplicada a todo o sequente que seja uma folha da árvore é necessariamente uma das regras $A, \bot, \top, \sim A, \sim \bot, \sim \top$, que não tem premissas.
- Cada nó interno da árvore é obtido pela aplicação de uma regra de inferência do sistema $NQL$, a partir de um ou dois mono-sequentes já presentes nos nós filhos.
- O sequente $\alpha \Rightarrow \beta$ é a raíz da árvore.

**Notação 96 ($\underset{\alpha\Rightarrow\beta}{D}$ em $NQL$)**
Denotamos $\underset{\alpha\Rightarrow\beta}{D}$ quando $D$ é uma derivação em $NQL$ cuja conclusão é mono-sequente $\alpha \Rightarrow \beta$, com $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{NQL}$. Neste caso dizemos que $D$ deriva $\alpha \Rightarrow \beta$.

**Definição 97 (Derivabilidade em $NQL$)**
Um mono-sequente $\alpha \Rightarrow \beta$, com $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{NQL}$, diz-se derivável em $NQL$ se e só se existe $D \in NQL$ tal que $\underset{\alpha\Rightarrow\beta}{D}$, e denotamos por $NQL \vdash \alpha \Rightarrow \beta$.

**Definição 98 ($NQL$-*cut*)**
O sistema dedutivo $NQL$-*cut* é o sistema obtido a partir de $NQL$ pela remoção da regra de corte.

**Definição 99 (Derivação de $NQL$-*cut*)**
Uma derivação $D$ em $NQL$-*cut* de um mono-sequente $\alpha \Rightarrow \beta$ é uma árvore que pode ser definida indutivamente da seguinte maneira:

- A regra aplicada a todo o sequente que seja uma folha da árvore é necessariamente uma das regras $A, \bot, \top, \sim A, \sim \bot, \sim \top$, que não tem premissas.
- Cada nó interno da árvore é obtido pela aplicação de uma regra de inferência do sistema $NQL$-*cut*, a partir de um ou dois mono-sequentes já presentes nos nós filhos.
- O sequente $\alpha \Rightarrow \beta$ é a raíz da árvore.

**Notação 100 ($\underset{\alpha\Rightarrow\beta}{D}$ em $NQL$-*cut*)**
Denotamos $\underset{\alpha\Rightarrow\beta}{D}$ quando $D$ é uma derivação em $NQL$-*cut* cuja conclusão é mono-sequente $\alpha \Rightarrow \beta$, com $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{NQL}$. Neste caso dizemos que $D$ deriva $\alpha \Rightarrow \beta$.

**Definição 101 (Derivabilidade em $NQL$-*cut*)**
Um mono-sequente $\alpha \Rightarrow \beta$, com $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{NQL}$, diz-se derivável em $NQL$-*cut* se e só se existe $D \in NQL$-*cut* tal que $\underset{\alpha\Rightarrow\beta}{D}$, e denotamos por $NQL$-*cut* $\vdash \alpha \Rightarrow \beta$.

**Teorema 102 (Interpolação de Craig em $NQL$-*cut*)**
Para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{NQL}$, se $NQL$-*cut* $\vdash \alpha \Rightarrow \beta$, então existe $\gamma \in \mathcal{F}^{NQL}$ tal que $NQL$-*cut* $\vdash \alpha \Rightarrow \gamma$, $NQL$-*cut* $\vdash \gamma \Rightarrow \beta$ e $V(\gamma) \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta)$.

*Demonstração.* Por indução em derivações de $NQL$-*cut*
Para todo $D \in NQL$-*cut*, $P(D)$ : se $\underset{\alpha\Rightarrow\beta}{D}$, com $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{NQL}$, então existem $\gamma \in \mathcal{F}^{NQL}$, $D_1, D_2 \in NQL$-*cut* tais que $\underset{\alpha\Rightarrow\gamma}{D_1}$, $\underset{\gamma\Rightarrow\beta}{D_2}$ e $V(\gamma) \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta)$.

**Caso $A$:**

$$\frac{}{q \Rightarrow q}\ A$$

Sejam $D_1 = D_2 = D \in NQL\text{-}cut$. Temos que $\underset{q\Rightarrow q}{D_1}$, $\underset{q\Rightarrow q}{D_2}$, e mais ainda, $V(q) = \{q\} \subseteq V(q) \cap V(q)$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\sim A$:**

$$\frac{}{\sim q \Rightarrow \sim q}\ \sim A$$

Sejam $D_1 = D_2 = D \in NQL\text{-}cut$. Temos que $\underset{\sim q\Rightarrow \sim q}{D_1}$, $\underset{\sim q\Rightarrow \sim q}{D_2}$, e mais ainda, $V(\sim q) = \{q\} \subseteq V(\sim q) \cap V(\sim q)$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\perp$:**

$$\frac{}{\perp \Rightarrow \beta}\ \perp$$

Consideremos então as seguintes derivações $D_1, D_2 \in NQL\text{-}cut$:

$$\frac{}{\perp \Rightarrow \perp}\ \perp \qquad\qquad \frac{}{\perp \Rightarrow \beta}\ \perp$$

Temos que $\underset{\perp\Rightarrow\perp}{D_1}$, $\underset{\perp\Rightarrow\beta}{D_2}$, e mais ainda, $V(\perp) = \emptyset \subseteq V(\perp) \cap V(\beta)$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\top$:**

$$\frac{}{\alpha \Rightarrow \top}\ \top$$

Consideremos então as seguintes derivações $D_1, D_2 \in NQL\text{-}cut$:

$$\frac{}{\alpha \Rightarrow \top}\ \top \qquad\qquad \frac{}{\top \Rightarrow \top}\ \top$$

Temos que $\underset{\alpha\Rightarrow\top}{D_1}$, $\underset{\top\Rightarrow\top}{D_2}$, e mais ainda, $V(\top) = \emptyset \subseteq V(\alpha) \cap V(\top)$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\sim \perp$:**

$$\frac{}{\alpha \Rightarrow \sim \perp}\ \sim \perp$$

Consideremos então as seguintes derivações $D_1, D_2 \in NQL\text{-}cut$:

$$\frac{}{\alpha \Rightarrow \sim \perp}\ \sim \perp \qquad\qquad \frac{}{\sim \perp \Rightarrow \sim \perp}\ \sim \perp$$

Temos que $\underset{\alpha\Rightarrow\sim\perp}{D_1}$, $\underset{\sim\perp\Rightarrow\sim\perp}{D_2}$, e mais ainda, $V(\sim \perp) = \emptyset \subseteq V(\alpha) \cap V(\sim \perp)$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\sim \top$:**

$$\frac{}{\sim \top \Rightarrow \beta}\ \sim \top$$

Consideremos então as seguintes derivações $D_1, D_2 \in NQL\text{-}cut$:

$$\frac{}{\sim \top \Rightarrow \sim \top}\ \sim \top \qquad\qquad \frac{}{\sim \top \Rightarrow \beta}\ \sim \top$$

Temos que $\underset{\sim\top\Rightarrow\sim\top}{D_1}$, $\underset{\sim\top\Rightarrow\beta}{D_2}$, e mais ainda, $V(\sim \top) = \emptyset \subseteq V(\sim \top) \cap V(\beta)$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $we_L$:**

$$\dfrac{\begin{array}{c}D'\\ \top \Rightarrow \beta\end{array}}{\alpha \Rightarrow \beta}\, we_L$$

Seja $D_2 = D'$. Consideremos então a seguinte derivação $D_1 \in NQL\text{-}cut$:

$$\dfrac{}{\alpha \Rightarrow \top}\, \top$$

Temos que $\underset{\alpha\Rightarrow\top}{D_1}, \underset{\top\Rightarrow\beta}{D_2}$, e mais ainda, $V(\top) = \emptyset \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta)$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $we_R$:**

$$\dfrac{\begin{array}{c}D'\\ \alpha \Rightarrow \bot\end{array}}{\alpha \Rightarrow \beta}\, we_R$$

Seja $D_1 = D'$. Consideremos então a seguinte derivação $D_2 \in NQL\text{-}cut$:

$$\dfrac{}{\bot \Rightarrow \beta}\, \bot$$

Temos que $\underset{\alpha\Rightarrow\bot}{D_1}, \underset{\bot\Rightarrow\beta}{D_2}$, e mais ainda, $V(\bot) = \emptyset \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta)$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\sim we_L$:**

$$\dfrac{\begin{array}{c}D'\\ \sim \bot \Rightarrow \beta\end{array}}{\alpha \Rightarrow \beta}\, \sim we_L$$

Seja $D_2 = D'$. Consideremos então a seguinte derivação $D_1 \in NQL\text{-}cut$:

$$\dfrac{}{\alpha \Rightarrow \sim \bot}\, \sim \bot$$

Temos que $\underset{\alpha\Rightarrow\sim\bot}{D_1}, \underset{\sim\bot\Rightarrow\beta}{D_2}$, e mais ainda, $V(\sim \bot) = \emptyset \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta)$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\sim we_R$:**

$$\dfrac{\begin{array}{c}D'\\ \alpha \Rightarrow \sim \top\end{array}}{\alpha \Rightarrow \beta}\, \sim we_R$$

Seja $D_1 = D'$. Consideremos então a seguinte derivação $D_2 \in NQL\text{-}cut$:

$$\dfrac{}{\sim \top \Rightarrow \beta}\, \sim \top$$

Temos que $\underset{\alpha\Rightarrow\sim\top}{D_1}, \underset{\sim\top\Rightarrow\beta}{D_2}$, e mais ainda, $V(\sim \top) = \emptyset \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta)$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\sim\sim_L$:**

$$\dfrac{\begin{array}{c} D' \\ \alpha \Rightarrow \beta \end{array}}{\sim\sim \alpha \Rightarrow \beta} \sim\sim_L$$

Assumimos $P(D')$ como hipótese de indução. De $P(D')$, existem $\gamma \in \mathcal{F}^{NQL}$, $D'_1, D_2 \in NQL\text{-}cut$, tais que $\underset{\alpha\Rightarrow\gamma}{D'_1}$, $\underset{\gamma\Rightarrow\beta}{D_2}$ e $V(\gamma) \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta)$.

Consideremos então a seguinte derivação $D_1 \in NQL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{array}{c} D'_1 \\ \alpha \Rightarrow \gamma \end{array}}{\sim\sim \alpha \Rightarrow \gamma} \sim\sim_L$$

Temos que $\underset{\sim\sim\alpha\Rightarrow\gamma}{D_1}$, $\underset{\gamma\Rightarrow\beta}{D_2}$, e mais ainda, $V(\gamma) \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta)$, e como $V(\sim\sim \alpha) = V(\alpha)$, temos também que $V(\gamma) \subseteq V(\sim\sim \alpha) \cap V(\beta)$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\sim\sim_R$:**

$$\dfrac{\begin{array}{c} D' \\ \alpha \Rightarrow \beta \end{array}}{\alpha \Rightarrow \sim\sim \beta} \sim\sim_R$$

Assumimos $P(D')$ como hipótese de indução. De $P(D')$, existem $\gamma \in \mathcal{F}^{NQL}$, $D_1, D'_2 \in NQL\text{-}cut$, tais que $\underset{\alpha\Rightarrow\gamma}{D_1}$, $\underset{\gamma\Rightarrow\beta}{D'_2}$ e $V(\gamma) \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta)$.

Consideremos então a seguinte derivação $D_2 \in NQL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{array}{c} D'_2 \\ \gamma \Rightarrow \beta \end{array}}{\gamma \Rightarrow \sim\sim \beta} \sim\sim_R$$

Temos que $\underset{\alpha\Rightarrow\gamma}{D_1}$, $\underset{\gamma\Rightarrow\sim\sim\beta}{D_2}$, e mais ainda, $V(\gamma) \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta)$, e como $V(\sim\sim \beta) = V(\beta)$, temos também que $V(\gamma) \subseteq V(\alpha) \cap V(\sim\sim \beta)$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\wedge_{L1}$:**

$$\dfrac{\begin{array}{c} D' \\ \alpha_1 \Rightarrow \beta \end{array}}{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \beta} \wedge_{L1}$$

Assumimos $P(D')$ como hipótese de indução. De $P(D')$, existem $\gamma \in \mathcal{F}^{NQL}$, $D'_1, D_2 \in NQL\text{-}cut$, tais que $\underset{\alpha_1\Rightarrow\gamma}{D'_1}$, $\underset{\gamma\Rightarrow\beta}{D_2}$ e $V(\gamma) \subseteq V(\alpha_1) \cap V(\beta)$.

Consideremos então a seguinte derivação $D_1 \in NQL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{array}{c} D'_1 \\ \alpha_1 \Rightarrow \gamma \end{array}}{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \gamma} \wedge_{L1}$$

Temos que $\underset{\alpha_1\wedge\alpha_2\Rightarrow\gamma}{D_1}$, $\underset{\gamma\Rightarrow\beta}{D_2}$, e mais ainda, como $V(\gamma) \subseteq V(\alpha_1) \cap V(\beta)$ e $V(\alpha_1) \subseteq V(\alpha_1 \wedge \alpha_2)$, ou seja, $V(\alpha_1) \cap V(\beta) \subseteq V(\alpha_1 \wedge \alpha_2) \cap V(\beta)$, temos também que $V(\gamma) \subseteq V(\alpha_1 \wedge \alpha_2) \cap V(\beta)$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\wedge_{L2}$:**

$$\dfrac{\begin{matrix} D' \\ \alpha_2 \Rightarrow \beta \end{matrix}}{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \beta}\ \wedge_{L2}$$

Assumimos $P(D')$ como hipótese de indução. De $P(D')$, existem $\gamma \in \mathcal{F}^{NQL}$, $D_1', D_2 \in NQL\text{-}cut$, tais que $\underset{\alpha_2\Rightarrow\gamma}{D_1'}$ , $\underset{\gamma\Rightarrow\beta}{D_2}$ e $V(\gamma) \subseteq V(\alpha_2) \cap V(\beta)$.

Consideremos então a seguinte derivação $D_1 \in NQL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1' \\ \alpha_2 \Rightarrow \gamma \end{matrix}}{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \gamma}\ \wedge_{L2}$$

Temos que $\underset{\alpha_1\wedge\alpha_2\Rightarrow\gamma}{D_1}$ , $\underset{\gamma\Rightarrow\beta}{D_2}$, e mais ainda, como $V(\gamma) \subseteq V(\alpha_2) \cap V(\beta)$ e $V(\alpha_2) \subseteq V(\alpha_1 \wedge \alpha_2)$, ou seja, $V(\alpha_2) \cap V(\beta) \subseteq V(\alpha_1 \wedge \alpha_2) \cap V(\beta)$, temos também que $V(\gamma) \subseteq V(\alpha_1 \wedge \alpha_2) \cap V(\beta)$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\wedge_R$:**

$$\dfrac{\begin{matrix} D' \\ \alpha \Rightarrow \beta_1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} D'' \\ \alpha \Rightarrow \beta_2 \end{matrix}}{\alpha \Rightarrow \beta_1 \wedge \beta_2}\ \wedge_R$$

Assumimos $P(D')$ e $P(D'')$ como hipóteses de indução. De $P(D')$, existem $\gamma_1 \in \mathcal{F}^{NQL}$, $D_1', D_2' \in NQL\text{-}cut$, tais que $\underset{\alpha\Rightarrow\gamma_1}{D_1'}$ , $\underset{\gamma_1\Rightarrow\beta_1}{D_2'}$ e $V(\gamma_1) \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta_1)$. De $P(D'')$, existem $\gamma_2 \in \mathcal{F}^{NQL}$, $D_1'', D_2'' \in NQL\text{-}cut$, tais que $\underset{\alpha\Rightarrow\gamma_2}{D_1''}$ , $\underset{\gamma_2\Rightarrow\beta_2}{D_2''}$ e $V(\gamma_2) \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta_2)$.

Consideremos então as seguintes derivações $D_1, D_2 \in NQL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1' \\ \alpha \Rightarrow \gamma_1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} D_1'' \\ \alpha \Rightarrow \gamma_2 \end{matrix}}{\alpha \Rightarrow \gamma_1 \wedge \gamma_2}\ \wedge_R \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix} D_2' \\ \gamma_1 \Rightarrow \beta_1 \end{matrix}}{\gamma_1 \wedge \gamma_2 \Rightarrow \beta_1}\ \wedge_{L1} \qquad \dfrac{\begin{matrix} D_2'' \\ \gamma_2 \Rightarrow \beta_2 \end{matrix}}{\gamma_1 \wedge \gamma_2 \Rightarrow \beta_2}\ \wedge_{L2}}{\gamma_1 \wedge \gamma_2 \Rightarrow \beta_1 \wedge \beta_2}\ \wedge_R$$

Temos que $\underset{\alpha\Rightarrow\gamma_1\wedge\gamma_2}{D_1}$ , $\underset{\gamma_1\wedge\gamma_2\Rightarrow\beta_1\wedge\beta_2}{D_2}$ . Mais ainda, como $V(\gamma_1) \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta_1)$ e $V(\gamma_2) \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta_2)$, temos que $V(\gamma_1) \cup V(\gamma_2) \subseteq (V(\alpha) \cap V(\beta_1)) \cup (V(\alpha) \cap V(\beta_2))$, ou seja, $V(\gamma_1) \cup V(\gamma_2) \subseteq V(\alpha) \cap (V(\beta_1) \cup V(\beta_2))$, logo, $V(\gamma_1 \wedge \gamma_2) \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta_1 \wedge \beta_2)$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\vee_L$:**

$$\dfrac{\begin{matrix} D' \\ \alpha_1 \Rightarrow \beta \end{matrix} \qquad \begin{matrix} D'' \\ \alpha_2 \Rightarrow \beta \end{matrix}}{\alpha_1 \vee \alpha_2 \Rightarrow \beta}\ \vee_L$$

Assumimos $P(D')$ e $P(D'')$ como hipóteses de indução. De $P(D')$, existem $\gamma_1 \in \mathcal{F}^{NQL}$, $D_1', D_2' \in NQL\text{-}cut$, tais que $\underset{\alpha_1\Rightarrow\gamma_1}{D_1'}$ , $\underset{\gamma_1\Rightarrow\beta}{D_2'}$ e $V(\gamma_1) \subseteq V(\alpha_1) \cap V(\beta)$. De $P(D'')$, existem $\gamma_2 \in \mathcal{F}^{NQL}$, $D_1'', D_2'' \in NQL\text{-}cut$, tais que $\underset{\alpha_2\Rightarrow\gamma_2}{D_1''}$ , $\underset{\gamma_2\Rightarrow\beta}{D_2''}$ e $V(\gamma_2) \subseteq V(\alpha_2) \cap V(\beta)$.

Consideremos então as seguintes derivações $D_1, D_2 \in NQL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}D_1'\\ \alpha_1 \Rightarrow \gamma_1\end{array}}{\alpha_1 \Rightarrow \gamma_1 \vee \gamma_2}\vee_{R1} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}D_1''\\ \alpha_2 \Rightarrow \gamma_2\end{array}}{\alpha_2 \Rightarrow \gamma_1 \vee \gamma_2}\vee_{R2}}{\alpha_1 \vee \alpha_2 \Rightarrow \gamma_1 \vee \gamma_2}\vee_L \qquad \dfrac{\begin{array}{c}D_2'\\ \gamma_1 \Rightarrow \beta\end{array} \qquad \begin{array}{c}D_2''\\ \gamma_2 \Rightarrow \beta\end{array}}{\gamma_1 \vee \gamma_2 \Rightarrow \beta}\vee_L$$

Temos que $\underset{\alpha_1 \vee \alpha_2 \Rightarrow \gamma_1 \vee \gamma_2}{D_1}$, $\underset{\gamma_1 \vee \gamma_2 \Rightarrow \beta}{D_2}$. Mais ainda, como $V(\gamma_1) \subseteq V(\alpha_1) \cap V(\beta)$ e $V(\gamma_2) \subseteq V(\alpha_2) \cap V(\beta)$, temos que $V(\gamma_1) \cup V(\gamma_2) \subseteq (V(\alpha_1) \cap V(\beta)) \cup (V(\alpha_2) \cap V(\beta))$, ou seja, $V(\gamma_1) \cup V(\gamma_2) \subseteq (V(\alpha_1) \cup V(\alpha_2)) \cap V(\beta)$, logo, $V(\gamma_1 \vee \gamma_2) \subseteq V(\alpha_1 \vee \alpha_2) \cap V(\beta)$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\vee_{R1}$:**

$$\dfrac{\begin{array}{c}D'\\ \alpha \Rightarrow \beta_1\end{array}}{\alpha \Rightarrow \beta_1 \vee \beta_2}\vee_{R1}$$

Assumimos $P(D')$ como hipótese de indução. De $P(D')$, existem $\gamma \in \mathcal{F}^{NQL}$, $D_1, D_2' \in NQL\text{-}cut$, tais que $\underset{\alpha \Rightarrow \gamma}{D_1}$, $\underset{\gamma \Rightarrow \beta_1}{D_2'}$ e $V(\gamma) \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta_1)$.

Consideremos então a seguinte derivação $D_2 \in NQL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{array}{c}D_2'\\ \gamma \Rightarrow \beta_1\end{array}}{\gamma \Rightarrow \beta_1 \vee \beta_2}\vee_{R1}$$

Temos que $\underset{\alpha \Rightarrow \gamma}{D_1}$, $\underset{\gamma \Rightarrow \beta_1 \vee \beta_2}{D_2}$, e mais ainda, como $V(\gamma) \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta_1)$ e $V(\beta_1) \subseteq V(\beta_1 \vee \beta_2)$, ou seja, $V(\alpha) \cap V(\beta_1) \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta_1 \vee \beta_2)$, temos também que $V(\gamma) \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta_1 \vee \beta_2)$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\vee_{R2}$:**

$$\dfrac{\begin{array}{c}D'\\ \alpha \Rightarrow \beta_2\end{array}}{\alpha \Rightarrow \beta_1 \vee \beta_2}\vee_{R2}$$

Assumimos $P(D')$ como hipótese de indução. De $P(D')$, existem $\gamma \in \mathcal{F}^{NQL}$, $D_1, D_2' \in NQL\text{-}cut$, tais que $\underset{\alpha \Rightarrow \gamma}{D_1}$, $\underset{\gamma \Rightarrow \beta_2}{D_2'}$ e $V(\gamma) \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta_2)$.

Consideremos então a seguinte derivação $D_2 \in NQL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{array}{c}D_2'\\ \gamma \Rightarrow \beta_2\end{array}}{\gamma \Rightarrow \beta_1 \vee \beta_2}\vee_{R2}$$

Temos que $\underset{\alpha \Rightarrow \gamma}{D_1}$, $\underset{\gamma \Rightarrow \beta_1 \vee \beta_2}{D_2}$, e mais ainda, como $V(\gamma) \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta_2)$ e $V(\beta_2) \subseteq V(\beta_1 \vee \beta_2)$, ou seja, $V(\alpha) \cap V(\beta_2) \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta_1 \vee \beta_2)$, temos também que $V(\gamma) \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta_1 \vee \beta_2)$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\supset_L$:**

$$\dfrac{\begin{array}{c}D'\\ \top \Rightarrow \alpha_1\end{array} \qquad \begin{array}{c}D''\\ \alpha_2 \Rightarrow \beta\end{array}}{\alpha_1 \supset \alpha_2 \Rightarrow \beta}\supset_L$$

Assumimos $P(D'')$ como hipótese de indução. De $P(D'')$, existem $\gamma \in \mathcal{F}^{NQL}$, $D''_1, D_2 \in NQL\text{-}cut$, tais que $\underset{\alpha_2 \Rightarrow \gamma}{D''_1}$, $\underset{\gamma \Rightarrow \beta}{D_2}$ e
$V(\gamma) \subseteq V(\alpha_2) \cap V(\beta)$.

Consideremos então a seguinte derivação $D_1 \in NQL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{array}{c} D' \\ \top \Rightarrow \alpha_1 \end{array} \qquad \begin{array}{c} D''_1 \\ \alpha_2 \Rightarrow \gamma \end{array}}{\alpha_1 \supset \alpha_2 \Rightarrow \gamma} \supset_L$$

Temos que $\underset{\alpha_1 \supset \alpha_2 \Rightarrow \gamma}{D_1}$, $\underset{\gamma \Rightarrow \beta}{D_2}$, e mais ainda, como $V(\gamma) \subseteq V(\alpha_2) \cap V(\beta)$ e $V(\alpha_2) \subseteq V(\alpha_1 \supset \alpha_2)$, ou seja, $V(\alpha_2) \cap V(\beta) \subseteq V(\alpha_1 \supset \alpha_2) \cap V(\beta)$, temos também que $V(\gamma) \subseteq V(\alpha_1 \supset \alpha_2) \cap V(\beta)$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\supset_R$:**

$$\dfrac{\begin{array}{c} D' \\ \beta_1 \Rightarrow \beta_2 \end{array}}{\top \Rightarrow \beta_1 \supset \beta_2}$$

Seja $D_2 = D \in NQL\text{-}cut$. Consideremos então a seguinte derivação $D_1 \in NQL\text{-}cut$:

$$\dfrac{}{\top \Rightarrow \top} \top$$

Temos que $\underset{\top \Rightarrow \top}{D_1}$, $\underset{\top \Rightarrow \beta_1 \supset \beta_2}{D_2}$, e mais ainda, $V(\top) = \emptyset \subseteq V(\beta_1 \supset \beta_2)$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\supset_{order}$:**

$$\dfrac{\begin{array}{c} D' \\ \beta_1 \Rightarrow \alpha_1 \end{array} \qquad \begin{array}{c} D'' \\ \alpha_2 \Rightarrow \beta_2 \end{array}}{\alpha_1 \supset \alpha_2 \Rightarrow \beta_1 \supset \beta_2} \supset_{order}$$

Assumimos $P(D')$ e $P(D'')$ como hipóteses de indução. De $P(D')$, existem $\gamma_1 \in \mathcal{F}^{NQL}$, $D'_1, D'_2 \in NQL\text{-}cut$, tais que $\underset{\beta_1 \Rightarrow \gamma_1}{D'_1}$, $\underset{\gamma_1 \Rightarrow \alpha_1}{D'_2}$ e $V(\gamma_1) \subseteq V(\beta_1) \cap V(\alpha_1)$. De $P(D'')$, existem $\gamma_2 \in \mathcal{F}^{NQL}$, $D''_1, D''_2 \in NQL\text{-}cut$, tais que $\underset{\alpha_2 \Rightarrow \gamma_2}{D''_1}$, $\underset{\gamma_2 \Rightarrow \beta_2}{D''_2}$ e $V(\gamma_2) \subseteq V(\alpha_2) \cap V(\beta_2)$.

Consideremos então as seguintes derivações $D_1, D_2 \in NQL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{array}{c} D'_2 \\ \gamma_1 \Rightarrow \alpha_1 \end{array} \qquad \begin{array}{c} D''_1 \\ \alpha_2 \Rightarrow \gamma_2 \end{array}}{\alpha_1 \supset \alpha_2 \Rightarrow \gamma_1 \supset \gamma_2} \supset_{order} \qquad \qquad \dfrac{\begin{array}{c} D'_1 \\ \beta_1 \Rightarrow \gamma_1 \end{array} \qquad \begin{array}{c} D''_2 \\ \gamma_2 \Rightarrow \beta_2 \end{array}}{\gamma_1 \supset \gamma_2 \Rightarrow \beta_1 \supset \beta_2} \supset_{order}$$

Temos que $\underset{\alpha_1 \supset \alpha_2 \Rightarrow \gamma_1 \supset \gamma_2}{D_1}$, $\underset{\gamma_1 \supset \gamma_2 \Rightarrow \beta_1 \supset \beta_2}{D_2}$. Mais ainda, como $V(\gamma_1) \subseteq V(\beta_1) \cap V(\alpha_1)$ e $V(\gamma_2) \subseteq V(\alpha_2) \cap V(\beta_2)$, temos então que $V(\gamma_1) \subseteq V(\alpha_1) \cap V(\beta_1)$ e $V(\gamma_2) \subseteq V(\alpha_2) \cap V(\beta_2)$, logo,
$V(\gamma_1) \cup V(\gamma_2) \subseteq (V(\alpha_1) \cap V(\beta_1)) \cup (V(\alpha_2) \cap V(\beta_2))$.

Ora como $V(\alpha_1) \cap V(\beta_1) \subseteq V(\alpha_1) \subseteq V(\alpha_1) \cup V(\alpha_2)$ e $V(\alpha_1) \cap V(\beta_1) \subseteq V(\beta_1) \subseteq V(\beta_1) \cup V(\beta_2)$, temos então que $V(\alpha_1) \cap V(\beta_1) \subseteq (V(\alpha_1) \cup V(\alpha_2)) \cap (V(\beta_1) \cup V(\beta_2))$.

Ora como $V(\alpha_2) \cap V(\beta_2) \subseteq V(\alpha_2) \subseteq V(\alpha_1) \cup V(\alpha_2)$ e $V(\alpha_2) \cap V(\beta_2) \subseteq V(\beta_2) \subseteq V(\beta_1) \cup V(\beta_2)$, temos então que $V(\alpha_2) \cap V(\beta_2) \subseteq (V(\alpha_1) \cup V(\alpha_2)) \cap (V(\beta_1) \cup V(\beta_2))$.

Logo, concluímos que $(V(\alpha_1) \cap V(\beta_1)) \cup (V(\alpha_2) \cap V(\beta_2)) \subseteq (V(\alpha_1) \cup V(\alpha_2)) \cap (V(\beta_1) \cup V(\beta_2))$, e segue que,
$V(\gamma_1) \cup V(\gamma_2) \subseteq (V(\alpha_1) \cup V(\alpha_2)) \cap (V(\beta_1) \cup V(\beta_2))$, ou seja,
$V(\gamma_1 \supset \gamma_2) \subseteq V(\alpha_1 \supset \alpha_2) \cap V(\beta_1 \supset \beta_2)$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\subset_L$:**

$$\dfrac{\begin{array}{c} D' \\ \alpha_1 \Rightarrow \alpha_2 \end{array}}{\alpha_1 \supset \alpha_2 \Rightarrow \bot} \subset_L$$

Seja $D_1 = D \in NQL\text{-}cut$. Consideremos então a seguinte derivação $D_2 \in NQL\text{-}cut$:

$$\dfrac{}{\bot \Rightarrow \bot} \bot$$

Temos que $\underset{\alpha_1 \supset \alpha_2 \Rightarrow \bot}{D_1}$ , $\underset{\bot \Rightarrow \bot}{D_2}$ , e mais ainda, $V(\bot) = \emptyset \subseteq V(\alpha_1 \subset \alpha_2) \cap V(\bot)$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\subset_R$:**

$$\dfrac{\begin{array}{c} D' \\ \alpha \Rightarrow \beta_1 \end{array} \quad \begin{array}{c} D'' \\ \beta_2 \Rightarrow \bot \end{array}}{\alpha \Rightarrow \beta_1 \subset \beta_2} \subset_R$$

Assumimos $P(D')$ como hipótese de indução. De $P(D')$, existem $\gamma \in \mathcal{F}^{NQL}$, $D_1, D_2' \in NQL\text{-}cut$, tais que $\underset{\alpha \Rightarrow \gamma}{D_1}$ , $\underset{\gamma \Rightarrow \beta_1}{D_2}$ e
$V(\gamma) \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta_1)$.
Consideremos então a seguinte derivação $D_1 \in NQL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_2' \\ \gamma \Rightarrow \beta_1 \end{array} \quad \begin{array}{c} D'' \\ \beta_2 \Rightarrow \bot \end{array}}{\gamma \Rightarrow \beta_1 \subset \beta_2} \subset_R$$

Temos que $\underset{\alpha \Rightarrow \gamma}{D_1}$ , $\underset{\gamma \Rightarrow \beta_1 \subset \beta_2}{D_2}$ , e mais ainda, como $V(\gamma) \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta_1)$ e $V(\beta_1) \subseteq V(\beta_1 \subset \beta_2)$, ou seja, $V(\alpha) \cap V(\beta_1) \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta_1 \subset \beta_2)$, temos também que $V(\gamma) \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta_1 \subset \beta_2)$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\subset_{order}$:**

$$\dfrac{\begin{array}{c} D' \\ \alpha_1 \Rightarrow \beta_1 \end{array} \quad \begin{array}{c} D'' \\ \beta_2 \Rightarrow \alpha_2 \end{array}}{\alpha_1 \subset \alpha_2 \Rightarrow \beta_1 \subset \beta_2} \subset_{order}$$

Assumimos $P(D')$ e $P(D'')$ como hipóteses de indução. De $P(D')$, existem $\gamma_1 \in \mathcal{F}^{NQL}$, $D_1', D_2' \in NQL\text{-}cut$, tais que $\underset{\alpha_1 \Rightarrow \gamma_1}{D_1'}$ , $\underset{\gamma_1 \Rightarrow \beta_1}{D_2'}$ e $V(\gamma_1) \subseteq V(\alpha_1) \cap V(\beta_1)$. De $P(D'')$, existem $\gamma_2 \in \mathcal{F}^{NQL}$, $D_1'', D_2'' \in NQL\text{-}cut$, tais que $\underset{\beta_2 \Rightarrow \gamma_2}{D_1''}$ , $\underset{\gamma_2 \Rightarrow \alpha_2}{D_2''}$ e $V(\gamma_2) \subseteq V(\beta_2) \cap V(\alpha_2)$.
Consideremos então as seguintes derivações $D_1, D_2 \in NQL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_1' \\ \alpha_1 \Rightarrow \gamma_1 \end{array} \quad \begin{array}{c} D_2'' \\ \gamma_2 \Rightarrow \alpha_2 \end{array}}{\alpha_1 \subset \alpha_2 \Rightarrow \gamma_1 \subset \gamma_2} \subset_{order} \qquad \dfrac{\begin{array}{c} D_2' \\ \gamma_1 \Rightarrow \beta_1 \end{array} \quad \begin{array}{c} D_1'' \\ \beta_2 \Rightarrow \gamma_2 \end{array}}{\gamma_1 \subset \gamma_2 \Rightarrow \beta_1 \subset \beta_2} \subset_{order}$$

Temos que $\underset{\alpha_1 \subset \alpha_2 \Rightarrow \gamma_1 \subset \gamma_2}{D_1}$ , $\underset{\gamma_1 \subset \gamma_2 \Rightarrow \beta_1 \subset \beta_2}{D_2}$ . Mais ainda, como $V(\gamma_1) \subseteq V(\alpha_1) \cap V(\beta_1)$ e $V(\gamma_2) \subseteq V(\beta_2) \cap V(\alpha_2)$, temos então que $V(\gamma_1) \subseteq V(\alpha_1) \cap V(\beta_1)$ e $V(\gamma_2) \subseteq V(\alpha_2) \cap V(\beta_2)$, logo,
$V(\gamma_1) \cup V(\gamma_2) \subseteq (V(\alpha_1) \cap V(\beta_1)) \cup (V(\alpha_2) \cap V(\beta_2))$.
Ora como $V(\alpha_1) \cap V(\beta_1) \subseteq V(\alpha_1) \subseteq V(\alpha_1) \cup V(\alpha_2)$ e $V(\alpha_1) \cap V(\beta_1) \subseteq V(\beta_1) \subseteq V(\beta_1) \cup V(\beta_2)$,
temos então que $V(\alpha_1) \cap V(\beta_1) \subseteq (V(\alpha_1) \cup V(\alpha_2)) \cap (V(\beta_1) \cup V(\beta_2))$.
Ora como $V(\alpha_2) \cap V(\beta_2) \subseteq V(\alpha_2) \subseteq V(\alpha_1) \cup V(\alpha_2)$ e $V(\alpha_2) \cap V(\beta_2) \subseteq V(\beta_2) \subseteq V(\beta_1) \cup V(\beta_2)$,

temos então que $V(\alpha_2) \cap V(\beta_2) \subseteq (V(\alpha_1) \cup V(\alpha_2)) \cap (V(\beta_1) \cup V(\beta_2))$.

Logo, concluímos que $(V(\alpha_1) \cap V(\beta_1)) \cup (V(\alpha_2) \cap V(\beta_2)) \subseteq (V(\alpha_1) \cup V(\alpha_2)) \cap (V(\beta_1) \cup V(\beta_2))$, e segue que,

$V(\gamma_1) \cup V(\gamma_2) \subseteq (V(\alpha_1) \cup V(\alpha_2)) \cap (V(\beta_1) \cup V(\beta_2))$, ou seja,

$V(\gamma_1 \subset \gamma_2) \subseteq V(\alpha_1 \subset \alpha_2) \cap V(\beta_1 \subset \beta_2)$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\sim \wedge_L$:**

$$\dfrac{\overset{D'}{\sim \alpha_1 \Rightarrow \beta} \qquad \overset{D''}{\sim \alpha_2 \Rightarrow \beta}}{\sim (\alpha_1 \wedge \alpha_2) \Rightarrow \beta} \sim \wedge_L$$

Assumimos $P(D')$ e $P(D'')$ como hipóteses de indução. De $P(D')$, existem $\gamma_1 \in \mathcal{F}^{NQL}$, $D'_1, D'_2 \in$ *NQL-cut*, tais que $\underset{\sim\alpha_1 \Rightarrow \gamma_1}{D'_1}$, $\underset{\gamma_1 \Rightarrow \beta}{D'_2}$ e $V(\gamma_1) \subseteq V(\sim \alpha_1) \cap V(\beta)$. De $P(D'')$, existem $\gamma_2 \in \mathcal{F}^{NQL}$, $D''_1, D''_2 \in$ *NQL-cut*, tais que $\underset{\sim\alpha_2 \Rightarrow \gamma_2}{D''_1}$, $\underset{\gamma_2 \Rightarrow \beta}{D''_2}$ e $V(\gamma_2) \subseteq V(\sim \alpha_2) \cap V(\beta)$.

Consideremos então as seguintes derivações $D_1, D_2 \in$ *NQL-cut*:

$$\dfrac{\dfrac{\overset{D'_1}{\sim \alpha_1 \Rightarrow \gamma_1}}{\sim \alpha_1 \Rightarrow \gamma_1 \vee \gamma_2} \vee_{R1} \qquad \dfrac{\overset{D''_1}{\sim \alpha_2 \Rightarrow \gamma_2}}{\sim \alpha_2 \Rightarrow \gamma_1 \vee \gamma_2} \vee_{R2}}{\sim (\alpha_1 \wedge \alpha_2) \Rightarrow \gamma_1 \vee \gamma_2} \sim \wedge_L \qquad\qquad \dfrac{\overset{D'_2}{\gamma_1 \Rightarrow \beta} \qquad \overset{D''_2}{\gamma_2 \Rightarrow \beta}}{\gamma_1 \vee \gamma_2 \Rightarrow \beta} \vee_L$$

Temos que $\underset{\sim(\alpha_1 \wedge \alpha_2) \Rightarrow \gamma_1 \vee \gamma_2}{D_1}$, $\underset{\gamma_1 \vee \gamma_2 \Rightarrow \beta}{D_2}$. Mais ainda, como $V(\gamma_1) \subseteq V(\sim \alpha_1) \cap V(\beta)$ e

$V(\gamma_2) \subseteq V(\sim \alpha_2) \cap V(\beta)$, temos que $V(\gamma_1) \cup V(\gamma_2) \subseteq (V(\sim \alpha_1) \cap V(\beta)) \cup (V(\sim \alpha_2) \cap V(\beta))$, ou seja, $V(\gamma_1) \cup V(\gamma_2) \subseteq (V(\sim \alpha_1) \cup V(\sim \alpha_2)) \cap V(\beta)$, e como $V(\sim \alpha_1) = V(\alpha_1)$ e $V(\sim \alpha_2) = V(\alpha_2)$, temos também que $V(\gamma_1) \cup V(\gamma_2) \subseteq (V(\alpha_1) \cup V(\alpha_2)) \cap V(\beta)$, logo, $V(\gamma_1 \vee \gamma_2) \subseteq V(\alpha_1 \wedge \alpha_2) \cap V(\beta)$, e segue que $V(\gamma_1 \vee \gamma_2) \subseteq V(\sim (\alpha_1 \wedge \alpha_2)) \cap V(\beta)$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\sim \wedge_{R1}$:**

$$\dfrac{\overset{D'}{\alpha \Rightarrow \sim \beta_1}}{\alpha \Rightarrow \sim (\beta_1 \vee \beta_2)} \sim \wedge_{R1}$$

Assumimos $P(D')$ como hipótese de indução. De $P(D')$, existem $\gamma \in \mathcal{F}^{NQL}$, $D_1, D'_2 \in$ *NQL-cut*, tais que $\underset{\alpha \Rightarrow \gamma}{D_1}$, $\underset{\gamma \Rightarrow \sim \beta_1}{D'_2}$ e $V(\gamma) \subseteq V(\alpha) \cap V(\sim \beta_1)$.

Consideremos então a seguinte derivação $D_2 \in$ *NQL-cut*:

$$\dfrac{\overset{D'_2}{\gamma \Rightarrow \sim \beta_1}}{\gamma \Rightarrow \sim (\beta_1 \wedge \beta_2)} \sim \wedge_{R1}$$

Temos que $\underset{\alpha \Rightarrow \gamma}{D_1}$, $\underset{\gamma \Rightarrow \sim(\beta_1 \wedge \beta_2)}{D_2}$, e mais ainda, como $V(\gamma) \subseteq V(\alpha) \cap V(\sim \beta_1)$ e

$V(\sim \beta_1) = V(\beta_1) \subseteq V(\beta_1 \wedge \beta_2) = V(\sim (\beta_1 \wedge \beta_2))$, ou seja, $V(\alpha) \cap V(\sim \beta_1) \subseteq V(\alpha) \cap V(\sim (\beta_1 \wedge \beta_2))$, temos também que $V(\gamma) \subseteq V(\alpha) \cap V(\sim (\beta_1 \wedge \beta_2))$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\sim\wedge_{R2}$:**

$$\dfrac{\begin{array}{c} D' \\ \alpha \Rightarrow\sim \beta_2 \end{array}}{\alpha \Rightarrow\sim (\beta_1 \vee \beta_2)} \sim\wedge_{R2}$$

Assumimos $P(D')$ como hipótese de indução. De $P(D')$, existem $\gamma \in \mathcal{F}^{NQL}$, $D_1, D_2' \in NQL\text{-}cut$, tais que $\underset{\alpha\Rightarrow\gamma}{D_1}$, $\underset{\gamma\Rightarrow\sim\beta_2}{D_2'}$ e $V(\gamma) \subseteq V(\alpha) \cap V(\sim \beta_2)$.

Consideremos então a seguinte derivação $D_2 \in NQL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_2' \\ \gamma \Rightarrow\sim \beta_2 \end{array}}{\gamma \Rightarrow\sim (\beta_1 \wedge \beta_2)} \sim\wedge_{R2}$$

Temos que $\underset{\alpha\Rightarrow\gamma}{D_1}$, $\underset{\gamma\Rightarrow\sim(\beta_1\wedge\beta_2)}{D_2}$, e mais ainda, como $V(\gamma) \subseteq V(\alpha) \cap V(\sim \beta_2)$ e

$V(\sim \beta_2) = V(\beta_2) \subseteq V(\beta_1 \wedge \beta_2) = V(\sim (\beta_1 \wedge \beta_2))$, ou seja, $V(\alpha) \cap V(\sim \beta_2) \subseteq V(\alpha) \cap V(\sim (\beta_1 \wedge \beta_2))$, temos também que $V(\gamma) \subseteq V(\alpha) \cap V(\sim (\beta_1 \wedge \beta_2))$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\sim\vee_{L1}$:**

$$\dfrac{\begin{array}{c} D' \\ \sim \alpha_1 \Rightarrow \beta \end{array}}{\sim (\alpha_1 \vee \alpha_2) \Rightarrow \beta} \sim\vee_{L1}$$

Assumimos $P(D')$ como hipótese de indução. De $P(D')$, existem $\gamma \in \mathcal{F}^{NQL}$, $D_1', D_2 \in NQL\text{-}cut$, tais que $\underset{\sim\alpha_1\Rightarrow\gamma}{D_1'}$, $\underset{\gamma\Rightarrow\beta}{D_2}$ e $V(\gamma) \subseteq V(\sim \alpha_1) \cap V(\beta)$.

Consideremos então a seguinte derivação $D_1 \in NQL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_1' \\ \sim \alpha_1 \Rightarrow \gamma \end{array}}{\sim (\alpha_1 \vee \alpha_2) \Rightarrow \gamma} \sim\vee_{L1}$$

Temos que $\underset{\sim(\alpha_1\wedge\alpha_2)\Rightarrow\gamma}{D_1}$, $\underset{\gamma\Rightarrow\beta}{D_2}$, e mais ainda, como $V(\gamma) \subseteq V(\sim \alpha_1) \cap V(\beta)$ e

$V(\sim \alpha_1) = V(\alpha_1) \subseteq V(\alpha_1 \vee \alpha_2) = V(\sim (\alpha_1 \vee \alpha_2))$, ou seja, $V(\alpha_1) \cap V(\beta) \subseteq V(\sim (\alpha_1 \vee \alpha_2)) \cap V(\beta)$, temos também que $V(\gamma) \subseteq V(\sim (\alpha_1 \vee \alpha_2)) \cap V(\beta)$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\sim\vee_{L2}$:**

$$\dfrac{\begin{array}{c} D' \\ \sim \alpha_2 \Rightarrow \beta \end{array}}{\sim (\alpha_1 \vee \alpha_2) \Rightarrow \beta} \sim\vee_{L2}$$

Assumimos $P(D')$ como hipótese de indução. De $P(D')$, existem $\gamma \in \mathcal{F}^{NQL}$, $D_1', D_2 \in NQL\text{-}cut$, tais que $\underset{\sim\alpha_2\Rightarrow\gamma}{D_1'}$, $\underset{\gamma\Rightarrow\beta}{D_2}$ e $V(\gamma) \subseteq V(\sim \alpha_2) \cap V(\beta)$.

Consideremos então a seguinte derivação $D_1 \in NQL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_1' \\ \sim \alpha_2 \Rightarrow \gamma \end{array}}{\sim (\alpha_1 \vee \alpha_2) \Rightarrow \gamma} \sim\vee_{L2}$$

Temos que $\underset{\sim(\alpha_1 \wedge \alpha_2)\Rightarrow\gamma}{D_1}$, $\underset{\gamma\Rightarrow\beta}{D_2}$, e mais ainda, como $V(\gamma) \subseteq V(\sim \alpha_2) \cap V(\beta)$ e $V(\sim \alpha_2) = V(\alpha_2) \subseteq V(\alpha_1 \vee \alpha_2) = V(\sim (\alpha_1 \vee \alpha_2))$, ou seja, $V(\alpha_2) \cap V(\beta) \subseteq V(\sim (\alpha_1 \vee \alpha_2)) \cap V(\beta)$, temos também que $V(\gamma) \subseteq V(\sim (\alpha_1 \vee \alpha_2)) \cap V(\beta)$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\sim \vee_R$:**

$$\dfrac{\begin{array}{c} D' \\ \alpha \Rightarrow \sim \beta_1 \end{array} \quad \begin{array}{c} D'' \\ \alpha \Rightarrow \sim \beta_2 \end{array}}{\alpha \Rightarrow \sim (\beta_1 \wedge \beta_2)} \wedge_R$$

Assumimos $P(D')$ e $P(D'')$ como hipóteses de indução. De $P(D')$, existem $\gamma_1 \in \mathcal{F}^{NQL}$, $D_1', D_2' \in$ $NQL$-$cut$, tais que $\underset{\alpha\Rightarrow\gamma_1}{D_1'}$, $\underset{\gamma_1\Rightarrow\sim\beta_1}{D_2'}$ e $V(\gamma_1) \subseteq V(\alpha) \cap V(\sim \beta_1)$. De $P(D'')$, existem $\gamma_2 \in \mathcal{F}^{NQL}$, $D_1'', D_2'' \in$ $NQL$-$cut$, tais que $\underset{\alpha\Rightarrow\gamma_2}{D_1''}$, $\underset{\gamma_2\Rightarrow\sim\beta_2}{D_2''}$ e $V(\gamma_2) \subseteq V(\alpha) \cap V(\sim \beta_2)$.

Consideremos então as seguintes derivações $D_1, D_2 \in NQL$-$cut$:

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_1' \\ \alpha \Rightarrow \gamma_1 \end{array} \quad \begin{array}{c} D_1'' \\ \alpha \Rightarrow \gamma_2 \end{array}}{\alpha \Rightarrow \gamma_1 \wedge \gamma_2} \wedge_R \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c} D_2' \\ \gamma_1 \Rightarrow \sim \beta_1 \end{array}}{\gamma_1 \wedge \gamma_2 \Rightarrow \sim \beta_1} \wedge_{L1} \quad \dfrac{\begin{array}{c} D_2'' \\ \gamma_2 \Rightarrow \sim \beta_2 \end{array}}{\gamma_1 \wedge \gamma_2 \Rightarrow \sim \beta_2} \wedge_{L2}}{\gamma_1 \wedge \gamma_2 \Rightarrow \sim (\beta_1 \vee \beta_2)} \sim \vee_R$$

Temos que $\underset{\alpha\Rightarrow\gamma_1\wedge\gamma_2}{D_1}$, $\underset{\gamma_1\wedge\gamma_2\Rightarrow\sim(\beta_1\vee\beta_2)}{D_2}$. Mais ainda, como $V(\gamma_1) \subseteq V(\alpha) \cap V(\sim \beta_1)$ e $V(\gamma_2) \subseteq V(\alpha) \cap V(\sim \beta_2)$, temos que $V(\gamma_1) \cup V(\gamma_2) \subseteq (V(\alpha) \cap V(\sim \beta_1)) \cup (V(\alpha) \cap V(\sim \beta_2))$, ou seja, $V(\gamma_1) \cup V(\gamma_2) \subseteq V(\alpha) \cap (V(\sim \beta_1) \cup V(\sim \beta_2))$, e como $V(\sim \beta_1) = V(\beta_1)$ e $V(\sim \beta_2) = V(\beta_2)$, temos também que $V(\gamma_1) \cup V(\gamma_2) \subseteq V(\alpha) \cap (V(\beta_1) \cup V(\beta_2))$, logo, $V(\gamma_1 \wedge \gamma_2) \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta_1 \vee \beta_2)$, segue que $V(\gamma_1 \wedge \gamma_2) \subseteq V(\alpha) \cap V(\sim (\beta_1 \vee \beta_2))$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\sim\supset_{L1}$:**

$$\dfrac{\begin{array}{c} D' \\ \alpha_1 \Rightarrow \beta \end{array}}{\sim (\alpha_1 \supset \alpha_2) \Rightarrow \beta} \sim\supset_{L1}$$

Assumimos $P(D')$ como hipótese de indução. De $P(D')$, existem $\gamma \in \mathcal{F}^{NQL}$, $D_1', D_2 \in NQL$-$cut$, tais que $\underset{\alpha_1\Rightarrow\gamma}{D_1'}$, $\underset{\gamma\Rightarrow\beta}{D_2}$ e $V(\gamma) \subseteq V(\alpha_1) \cap V(\beta)$.

Consideremos então a seguinte derivação $D_1 \in NQL$-$cut$:

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_1' \\ \alpha_1 \Rightarrow \gamma \end{array}}{\sim (\alpha_1 \supset \alpha_2) \Rightarrow \gamma} \sim\supset_{L1}$$

Temos que $\underset{\sim(\alpha_1\supset\alpha_2)\Rightarrow\gamma}{D_1}$, $\underset{\gamma\Rightarrow\beta}{D_2}$, e mais ainda, como $V(\gamma) \subseteq V(\alpha_1) \cap V(\beta)$ e $V(\alpha_1) \subseteq V(\alpha_1 \supset \alpha_2)$, ou seja, $V(\alpha_1) \cap V(\beta) \subseteq V(\alpha_1 \supset \alpha_2) \cap V(\beta)$, temos também que $V(\gamma) \subseteq V(\alpha_1 \supset \alpha_2) \cap V(\beta)$, e visto também que $V(\sim (\alpha_1 \supset \alpha_2)) = V(\alpha_1 \supset \alpha_2)$, concluímos que $V(\gamma) \subseteq V(\sim (\alpha_1 \supset \alpha_2)) \cap V(\beta)$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\sim\supset_{L2}$:**

$$\dfrac{\begin{array}{c} D' \\ \sim \alpha_2 \Rightarrow \beta \end{array}}{\sim (\alpha_1 \supset \alpha_2) \Rightarrow \beta} \sim\supset_{L2}$$

Assumimos $P(D')$ como hipótese de indução. De $P(D')$, existem $\gamma \in \mathcal{F}^{NQL}$, $D'_1, D_2 \in NQL\text{-}cut$, tais que $\underset{\sim\alpha_2\Rightarrow\gamma}{D'_1}$ , $\underset{\gamma\Rightarrow\beta}{D_2}$ e $V(\gamma) \subseteq V(\sim \alpha_2) \cap V(\beta)$.

Consideremos então a seguinte derivação $D_1 \in NQL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{matrix} D'_1 \\ \sim \alpha_2 \Rightarrow \gamma \end{matrix}}{\sim (\alpha_1 \supset \alpha_2) \Rightarrow \gamma} \sim\supset_{L2}$$

Temos que $\underset{\sim(\alpha_1\supset\alpha_2)\Rightarrow\gamma}{D_1}$ , $\underset{\gamma\Rightarrow\beta}{D_2}$ , e mais ainda, como $V(\gamma) \subseteq V(\sim \alpha_2) \cap V(\beta)$ e $V(\sim \alpha_2) = V(\alpha_2)$, segue que $V(\gamma) \subseteq V(\alpha_2) \cap V(\beta)$, temos também que como $V(\alpha_2) \subseteq V(\alpha_1 \supset \alpha_2)$, ou seja,
$V(\alpha_2) \cap V(\beta) \subseteq V(\alpha_1 \supset \alpha_2) \cap V(\beta)$, então $V(\gamma) \subseteq V(\alpha_1 \supset \alpha_2) \cap V(\beta)$, e novamente como
$V(\sim (\alpha_1 \supset \alpha_2)) = V(\alpha_1 \supset \alpha_2)$, concluímos que $V(\gamma) \subseteq V(\sim (\alpha_1 \supset \alpha_2)) \cap V(\beta)$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\sim\supset_R$:**

$$\dfrac{\begin{matrix} D' \\ \alpha \Rightarrow \beta_1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} D'' \\ \alpha \Rightarrow \sim \beta_2 \end{matrix}}{\alpha \Rightarrow \sim (\beta_1 \supset \beta_2)} \sim\supset_R$$

Assumimos $P(D')$ e $P(D'')$ como hipóteses de indução. De $P(D')$, existem $\gamma_1 \in \mathcal{F}^{NQL}$, $D'_1, D'_2 \in NQL\text{-}cut$, tais que $\underset{\alpha\Rightarrow\gamma_1}{D'_1}$ , $\underset{\gamma_1\Rightarrow\beta_1}{D'_2}$ e $V(\gamma_1) \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta_1)$. De $P(D'')$, existem $\gamma_2 \in \mathcal{F}^{NQL}$, $D''_1, D''_2 \in NQL\text{-}cut$, tais que $\underset{\alpha\Rightarrow\gamma_2}{D''_1}$ , $\underset{\gamma_2\Rightarrow\sim\beta_2}{D''_2}$ e $V(\gamma_2) \subseteq V(\alpha) \cap V(\sim \beta_2)$.

Consideremos então as seguintes derivações $D_1, D_2 \in NQL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{matrix} D'_1 \\ \alpha \Rightarrow \gamma_1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} D''_1 \\ \alpha \Rightarrow \gamma_2 \end{matrix}}{\alpha \Rightarrow \gamma_1 \wedge \gamma_2} \wedge_R \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix} D'_2 \\ \gamma_1 \Rightarrow \beta_1 \end{matrix}}{\gamma_1 \wedge \gamma_2 \Rightarrow \beta_1} \wedge_{L1} \qquad \dfrac{\begin{matrix} D''_2 \\ \gamma_2 \Rightarrow \sim \beta_2 \end{matrix}}{\gamma_1 \wedge \gamma_2 \Rightarrow \sim \beta_2} \wedge_{L2}}{\gamma_1 \wedge \gamma_2 \Rightarrow \sim (\beta_1 \supset \beta_2)} \sim\supset_R$$

Temos que $\underset{\alpha\Rightarrow\gamma_1\wedge\gamma_2}{D_1}$ , $\underset{\gamma_1\wedge\gamma_2\Rightarrow\sim(\beta_1\supset\beta_2)}{D_2}$ . Mais ainda, como $V(\gamma_1) \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta_1)$ e $V(\gamma_2) \subseteq V(\alpha) \cap V(\sim \beta_2)$ e $V(\sim \beta_2) = V(\beta_2)$, temos que $V(\gamma_2) \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta_2)$, logo, $V(\gamma_1) \cup V(\gamma_2) \subseteq (V(\alpha) \cap V(\beta_1)) \cup (V(\alpha) \cap V(\beta_2))$, ou seja, $V(\gamma_1) \cup V(\gamma_2) \subseteq V(\alpha) \cap (V(\beta_1) \cup V(\beta_2))$, e segue que $V(\gamma_1 \wedge \gamma_2) \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta_1 \supset \beta_2)$, novamente como $V(\sim (\beta_1 \supset \beta_2)) = V(\beta_1 \supset \beta_2)$, concluímos que $V(\gamma_1 \wedge \gamma_2) \subseteq V(\alpha) \cap V(\sim (\beta_1 \supset \beta_2))$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\sim\subset_L$:**

$$\dfrac{\begin{matrix} D' \\ \sim \alpha_1 \Rightarrow \beta \end{matrix} \qquad \begin{matrix} D'' \\ \alpha_2 \Rightarrow \beta \end{matrix}}{\sim (\alpha_1 \subset \alpha_2) \Rightarrow \beta} \sim\subset_L$$

Assumimos $P(D')$ e $P(D'')$ como hipóteses de indução. De $P(D')$, existem $\gamma_1 \in \mathcal{F}^{NQL}$, $D'_1, D'_2 \in NQL\text{-}cut$, tais que $\underset{\sim\alpha_1\Rightarrow\gamma_1}{D'_1}$ , $\underset{\gamma_1\Rightarrow\beta}{D'_2}$ e $V(\gamma_1) \subseteq V(\sim \alpha_1) \cap V(\beta)$. De $P(D'')$, existem $\gamma_2 \in \mathcal{F}^{NQL}$, $D''_1, D''_2 \in NQL\text{-}cut$, tais que $\underset{\alpha_2\Rightarrow\gamma_2}{D''_1}$ , $\underset{\gamma_2\Rightarrow\beta}{D''_2}$ e $V(\gamma_2) \subseteq V(\alpha_2) \cap V(\beta)$.

Consideremos então as seguintes derivações $D_1, D_2 \in NQL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix} D'_1 \\ \sim \alpha_1 \Rightarrow \gamma_1 \end{matrix}}{\sim \alpha_1 \Rightarrow \gamma_1 \vee \gamma_2} \vee_{R1} \qquad \dfrac{\begin{matrix} D''_1 \\ \alpha_2 \Rightarrow \gamma_2 \end{matrix}}{\alpha_2 \Rightarrow \gamma_1 \vee \gamma_2} \vee_{R2}}{\sim (\alpha_1 \subset \alpha_2) \Rightarrow \gamma_1 \vee \gamma_2} \sim\subset_L \qquad\qquad \dfrac{\begin{matrix} D'_2 \\ \gamma_1 \Rightarrow \beta \end{matrix} \qquad \begin{matrix} D''_2 \\ \gamma_2 \Rightarrow \beta \end{matrix}}{\gamma_1 \vee \gamma_2 \Rightarrow \beta} \vee_L$$

Temos que $\underset{\sim(\alpha_1 \subset \alpha_2) \Rightarrow \gamma_1 \vee \gamma_2}{D_1}$, $\underset{\gamma_1 \vee \gamma_2 \Rightarrow \beta}{D_2}$. Mais ainda, como $V(\gamma_1) \subseteq V(\sim \alpha_1) \cap V(\beta)$ e $V(\gamma_2) \subseteq V(\alpha_2) \cap V(\beta)$ e $V(\sim \alpha_1) = V(\alpha_1)$, temos que $V(\gamma_1) \subseteq V(\alpha_1) \cap V(\beta)$, logo $V(\gamma_1) \cup V(\gamma_2) \subseteq (V(\alpha_1) \cap V(\beta)) \cup (V(\alpha_2) \cap V(\beta))$, ou seja, $V(\gamma_1) \cup V(\gamma_2) \subseteq (V(\alpha_1) \cup V(\alpha_2)) \cap V(\beta)$, e segue que, $V(\gamma_1 \vee \gamma_2) \subseteq V(\alpha_1 \subset \alpha_2) \cap V(\beta)$, novamente como $V(\sim (\alpha_1 \subset \alpha_2)) = V(\alpha_1 \subset \alpha_2)$, concluímos que $V(\gamma_1 \vee \gamma_2) \subseteq V(\sim (\alpha_1 \subset \alpha_2)) \cap V(\beta)$ e obtemos $P(D)$.

**Caso $\sim\subset_{R1}$:**

$$\cfrac{\begin{matrix} D' \\ \alpha \Rightarrow \sim \beta_1 \end{matrix}}{\alpha \Rightarrow \sim (\beta_1 \subset \beta_2)} \sim\subset_{R1}$$

Assumimos $P(D')$ como hipótese de indução. De $P(D')$, existem $\gamma \in \mathcal{F}^{NQL}$, $D_1, D_2' \in NQL\text{-}cut$, tais que $\underset{\alpha \Rightarrow \gamma}{D_1}$, $\underset{\gamma \Rightarrow \sim \beta_1}{D_2'}$ e $V(\gamma) \subseteq V(\alpha) \cap V(\sim \beta_1)$.

Consideremos então a seguinte derivação $D_2 \in NQL\text{-}cut$:

$$\cfrac{\begin{matrix} D_2' \\ \gamma \Rightarrow \sim \beta_1 \end{matrix}}{\gamma \Rightarrow \sim (\beta_1 \subset \beta_2)} \sim\subset_{R1}$$

Temos que $\underset{\alpha \Rightarrow \gamma}{D_1}$, $\underset{\gamma \Rightarrow \sim (\beta_1 \subset \beta_2)}{D_2}$, e mais ainda, como $V(\gamma) \subseteq V(\alpha) \cap V(\sim \beta_1)$ e $V(\sim \beta_1) = V(\beta_1)$, segue que $V(\gamma) \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta_1)$, temos também que como $V(\beta_1) \subseteq V(\beta_1 \subset \beta_2)$, ou seja,
$V(\alpha) \cap V(\beta_1) \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta_1 \subset \beta_2)$, então $V(\gamma) \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta_1 \subset \beta_2)$, e novamente como
$V(\sim (\beta_1 \subset \beta_2)) = V(\beta_1 \subset \beta_2)$, concluímos que $V(\gamma) \subseteq V(\alpha) \cap V(\sim (\beta_1 \subset \beta_2))$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\sim\subset_{R2}$:**

$$\cfrac{\begin{matrix} D' \\ \alpha \Rightarrow \beta_2 \end{matrix}}{\alpha \Rightarrow \sim (\beta_1 \subset \beta_2)} \sim\subset_{R2}$$

Assumimos $P(D')$ como hipótese de indução. De $P(D')$, existem $\gamma \in \mathcal{F}^{NQL}$, $D_1, D_2' \in NQL\text{-}cut$, tais que $\underset{\alpha \Rightarrow \gamma}{D_1}$, $\underset{\gamma \Rightarrow \beta_2}{D_2'}$ e $V(\gamma) \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta_2)$.

Consideremos então a seguinte derivação $D_2 \in NQL\text{-}cut$:

$$\cfrac{\begin{matrix} D_2' \\ \gamma \Rightarrow \beta_2 \end{matrix}}{\gamma \Rightarrow \sim (\beta_1 \subset \beta_2)} \sim\subset_{R2}$$

Temos que $\underset{\alpha \Rightarrow \gamma}{D_1}$, $\underset{\gamma \Rightarrow \sim (\beta_1 \subset \beta_2)}{D_2}$, e mais ainda, como $V(\gamma) \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta_2)$ e $V(\beta_2) \subseteq V(\beta_1 \subset \beta_2)$, ou seja, $V(\alpha) \cap V(\beta_2) \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta_1 \subset \beta_2)$, temos também que $V(\gamma) \subseteq V(\alpha) \cap V(\beta_1 \subset \beta_2)$, e visto também que $V(\sim (\beta_1 \subset \beta_2)) = V(\beta_1 \subset \beta_2)$, concluímos que $V(\gamma) \subseteq V(\alpha) \cap V(\sim (\beta_1 \subset \beta_2))$, e obtemos $P(D)$. $\square$

## 5.4 Mergulho Sintático de $NQL$ em $NL$ Eliminação e Admissibilidade do Corte e Decidibilidade

**Definição 103** ($f : \mathcal{F}^{NQL} \longrightarrow \mathcal{F}^{NL}$)
A função $f : \mathcal{F}^{NQL} \longrightarrow \mathcal{F}^{NL}$, é definida indutivamente por:

- $f(\bot) = \bot$.
- $f(\top) = \top$.
- $f(\sim \bot) = \top$.
- $f(\sim \top) = \bot$.
- $f(q) = q$, para todo $q \in \mathcal{V}_1$.
- $f(\sim q) = q'$, para todo $q \in \mathcal{V}_1$ (com $q' \in \mathcal{V}_2$).
- $f(\alpha \wedge \beta) = f(\alpha) \wedge f(\beta)$, para todo $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{PQL}$.
- $f(\alpha \vee \beta) = f(\alpha) \vee f(\beta)$, para todo $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{PQL}$.
- $f(\alpha \supset \beta) = f(\alpha) \supset f(\beta)$, para todo $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{PQL}$.
- $f(\alpha \subset \beta) = f(\alpha) \subset f(\beta)$, para todo $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{PQL}$.
- $f(\sim (\alpha \wedge \beta)) = f(\sim \alpha) \vee f(\sim \beta)$, para todo $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{PQL}$.
- $f(\sim (\alpha \vee \beta)) = f(\sim \alpha) \wedge f(\sim \beta)$, para todo $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{PQL}$.
- $f(\sim (\alpha \supset \beta)) = f(\alpha) \wedge f(\sim \beta)$, para todo $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{PQL}$.
- $f(\sim (\alpha \subset \beta)) = f(\sim \alpha) \vee f(\beta)$, para todo $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{PQL}$.
- $f(\sim\sim \alpha) = f(\alpha)$, para todo $\alpha \in \mathcal{F}^{PQL}$.

**Teorema 104** ($1^\circ$ **Mergulho Sintático Fraco de** $NQL$ **em** $NL$)
Para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{NQL}$, se $NQL \vdash \alpha \Rightarrow \beta$, então $NL \vdash f(\alpha) \Rightarrow f(\beta)$.

*Demonstração.* Por indução em derivações de $NQL$.
Para qualquer $D \in NQL$, $P(D)$ : para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{NQL}$, se $\underset{\alpha \Rightarrow \beta}{D}$, então existe $D' \in NL$ tal que $\underset{f(\alpha) \Rightarrow f(\beta)}{D'}$.

**Caso** $A$**:**

$$\dfrac{}{q \Rightarrow q}\ A$$

Temos que $f(q) = q$.
Consideremos então a seguinte derivação $D' \in NL$:

$$\dfrac{}{q \Rightarrow q}\ A$$

Temos que $\underset{q \Rightarrow q}{D'}$, logo, $\underset{f(q) \Rightarrow f(q)}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\sim A$:**

$$\dfrac{}{\sim q \Rightarrow \sim q} \sim A$$

Temos que $f(\sim q) = q'$, $q' \in \mathcal{V}_1$.
Consideremos então a seguinte derivação $D' \in NL$:

$$\dfrac{}{q' \Rightarrow q'} A$$

Temos que $\underset{q' \Rightarrow q'}{D'}$, logo, $\underset{f(\sim q) \Rightarrow f(\sim q)}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\perp$:**

$$\dfrac{}{\perp \Rightarrow \beta} \perp$$

Temos que $f(\perp) = \perp$.
Consideremos então a seguinte derivação $D' \in NL$:

$$\dfrac{}{\perp \Rightarrow f(\beta)} \perp$$

Temos que $\underset{\perp \Rightarrow f(\beta)}{D'}$, logo, $\underset{f(\perp) \Rightarrow f(\beta)}{D'}$ e obtemos $P(D)$.

**Caso $\top$:**

$$\dfrac{}{\alpha \Rightarrow \top} \top$$

Temos que $f(\top) = \top$.
Consideremos então a seguinte derivação $D' \in NL$:

$$\dfrac{}{f(\alpha) \Rightarrow \top} \top$$

Temos que $\underset{f(\alpha) \Rightarrow \top}{D'}$, logo, $\underset{f(\alpha) \Rightarrow f(\top)}{D'}$ e obtemos $P(D)$.

**Caso $\sim \perp$:**

$$\dfrac{}{\alpha \Rightarrow \sim \perp} \sim \perp$$

Temos que $f(\sim \perp) = \top$.
Consideremos então a seguinte derivação $D' \in NL$:

$$\dfrac{}{f(\alpha) \Rightarrow \top} \top$$

Temos que $\underset{f(\alpha) \Rightarrow \top}{D'}$, logo, $\underset{f(\alpha) \Rightarrow f(\sim \perp)}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\sim \top$:**

$$\dfrac{}{\sim \top \Rightarrow \beta} \sim \top$$

Temos que $f(\sim \top) = \bot$.
Consideremos então a seguinte derivação $D' \in NL$:

$$\dfrac{}{\bot \Rightarrow f(\beta)} \bot$$

Temos que $\underset{\bot \Rightarrow f(\beta)}{D'}$, logo, $\underset{f(\sim\top) \Rightarrow f(\beta)}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $we_L$:**

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1 \\ \top \Rightarrow \beta \end{matrix}}{\alpha \Rightarrow \beta} we_L$$

Temos que $f(\top) = \top$.
Assumimos $P(D_1)$ como hipótese de indução. De $P(D_1)$, existe $D'_1 \in NL$ tal que $\underset{f(\top) \Rightarrow f(\beta)}{D'_1}$.
Consideremos então a seguinte derivação $D' \in NL$:

$$\dfrac{\begin{matrix} D'_1 \\ f(\top) \Rightarrow f(\beta) \end{matrix}}{f(\alpha) \Rightarrow f(\beta)} we_L$$

Temos que $\underset{f(\alpha) \Rightarrow f(\beta)}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $we_R$:**

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1 \\ \alpha \Rightarrow \bot \end{matrix}}{\alpha \Rightarrow \beta} we_R$$

Temos que $f(\bot) = \bot$.
Assumimos $P(D_1)$ como hipótese de indução. De $P(D_1)$, existe $D'_1 \in NL$ tal que $\underset{f(\alpha) \Rightarrow f(\bot)}{D'_1}$.
Consideremos então a seguinte derivação $D' \in NL$:

$$\dfrac{\begin{matrix} D'_1 \\ f(\alpha) \Rightarrow f(\bot) \end{matrix}}{f(\alpha) \Rightarrow f(\beta)} we_R$$

Temos que $\underset{f(\alpha) \Rightarrow f(\beta)}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\sim we_L$:**

$$\cfrac{\begin{matrix} D_1 \\ \sim\bot \Rightarrow \beta \end{matrix}}{\alpha \Rightarrow \beta} \sim we_L$$

Temos que $f(\sim\bot) = \top$.
Assumimos $P(D_1)$ como hípótese de indução. De $P(D_1)$, existe $D'_1 \in NL$ tal que $\underset{f(\sim\bot)\Rightarrow f(\beta)}{D'_1}$.
Consideremos então a seguinte derivação $D' \in NL$:

$$\cfrac{\begin{matrix} D'_1 \\ f(\sim\bot) \Rightarrow f(\beta) \end{matrix}}{f(\alpha) \Rightarrow f(\beta)} we_L$$

Temos que $\underset{f(\alpha)\Rightarrow f(\beta)}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\sim we_R$:**

$$\cfrac{\begin{matrix} D_1 \\ \alpha \Rightarrow \sim\top \end{matrix}}{\alpha \Rightarrow \beta} \sim we_R$$

Temos que $f(\sim\top) = \bot$.
Assumimos $P(D_1)$ como hípótese de indução. De $P(D_1)$, existe $D'_1 \in NL$ tal que $\underset{f(\alpha)\Rightarrow f(\sim\top)}{D'_1}$.
Consideremos então a seguinte derivação $D' \in NL$:

$$\cfrac{\begin{matrix} D'_1 \\ f(\alpha) \Rightarrow f(\sim\top) \end{matrix}}{f(\alpha) \Rightarrow f(\beta)} we_R$$

Temos que $\underset{f(\alpha)\Rightarrow f(\beta)}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\wedge_{L1}$:**

$$\cfrac{\begin{matrix} D_1 \\ \alpha_1 \Rightarrow \beta \end{matrix}}{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \beta} \wedge_{L1}$$

Temos que $f(\alpha_1 \wedge \alpha_2) = f(\alpha_1) \wedge f(\alpha_2)$.
Assumimos $P(D_1)$ como hípótese de indução. De $P(D_1)$, existe $D'_1 \in NL$ tal que $\underset{f(\alpha_1)\Rightarrow f(\beta)}{D'_1}$.
Consideremos então a seguinte derivação $D' \in NL$:

$$\cfrac{\begin{matrix} D'_1 \\ f(\alpha_1) \Rightarrow f(\beta) \end{matrix}}{f(\alpha_1) \wedge f(\alpha_2) \Rightarrow f(\beta)} \wedge_{L1}$$

Temos que $\underset{f(\alpha_1)\wedge f(\alpha_2)\Rightarrow f(\beta)}{D'}$, logo, $\underset{f(\alpha_1\wedge\alpha_2)\Rightarrow f(\beta)}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\wedge_{L2}$:**

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1 \\ \alpha_2 \Rightarrow \beta \end{matrix}}{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \beta} \wedge_{L2}$$

Temos que $f(\alpha_1 \wedge \alpha_2) = f(\alpha_1) \wedge f(\alpha_2)$.

Assumimos $P(D_1)$ como hipótese de indução. De $P(D_1)$, existe $D'_1 \in NL$ tal que $\underset{f(\alpha_2)\Rightarrow f(\beta)}{D'_1}$.

Consideremos então a seguinte derivação $D' \in NL$:

$$\dfrac{\begin{matrix} D'_1 \\ f(\alpha_2) \Rightarrow f(\beta) \end{matrix}}{f(\alpha_1) \wedge f(\alpha_2) \Rightarrow f(\beta)} \wedge_{L2}$$

Temos que $\underset{f(\alpha_1)\wedge f(\alpha_2)\Rightarrow f(\beta)}{D'}$, logo, $\underset{f(\alpha_1\wedge\alpha_2)\Rightarrow f(\beta)}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\wedge_R$:**

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1 \\ \alpha \Rightarrow \beta_1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} D_2 \\ \alpha \Rightarrow \beta_2 \end{matrix}}{\alpha \Rightarrow \beta_1 \wedge \beta_2} \wedge_R$$

Temos que $f(\beta_1 \wedge \beta_2) = f(\beta_1) \wedge f(\beta_2)$.

Assumimos $P(D_1)$ e $P(D_2)$ como hipóteses de indução. De $P(D_1)$, existe $D'_1 \in NL$ tal que $\underset{f(\alpha)\Rightarrow f(\beta_1)}{D'_1}$. De $P(D_2)$, existe $D'_2 \in NL$ tal que $\underset{f(\alpha)\Rightarrow f(\beta_2)}{D'_2}$.

Consideremos então a seguinte derivação $D' \in NL$:

$$\dfrac{\begin{matrix} D'_1 \\ f(\alpha) \Rightarrow f(\beta_1) \end{matrix} \qquad \begin{matrix} D'_2 \\ f(\alpha) \Rightarrow f(\beta_2) \end{matrix}}{f(\alpha) \Rightarrow f(\beta_1) \wedge f(\beta_2)} \wedge_R$$

Temos que $\underset{f(\alpha)\Rightarrow f(\beta_1)\wedge f(\beta_2)}{D'}$, logo, $\underset{f(\alpha)\Rightarrow f(\beta_1\wedge\beta_2)}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\vee_L$:**

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1 \\ \alpha_1 \Rightarrow \beta \end{matrix} \qquad \begin{matrix} D_2 \\ \alpha_2 \Rightarrow \beta \end{matrix}}{\alpha_1 \vee \alpha_2 \Rightarrow \beta} \vee_L$$

Temos que $f(\alpha_1 \vee \alpha_2) = f(\alpha_1) \vee f(\alpha_2)$.

Assumimos $P(D_1)$ e $P(D_2)$ como hipóteses de indução. De $P(D_1)$, existe $D'_1 \in NL$ tal que $\underset{f(\alpha_1)\Rightarrow f(\beta)}{D'_1}$. De $P(D_2)$, existe $D'_2 \in NL$ tal que $\underset{f(\alpha_2)\Rightarrow f(\beta)}{D'_2}$.

Consideremos então a seguinte derivação $D' \in NL$:

$$\dfrac{\begin{matrix} D'_1 \\ f(\alpha_1) \Rightarrow f(\beta) \end{matrix} \qquad \begin{matrix} D'_2 \\ f(\alpha_2) \Rightarrow f(\beta) \end{matrix}}{f(\alpha_1) \vee f(\alpha_2) \Rightarrow f(\beta)} \vee_L$$

Temos que $\underset{f(\alpha_1)\vee f(\alpha_2)\Rightarrow f(\beta)}{D'}$, logo, $\underset{f(\alpha_1\vee\alpha_2)\Rightarrow f(\beta)}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\vee_{R1}$:**

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_1 \\ \alpha \Rightarrow \beta_1 \end{array}}{\alpha \Rightarrow \beta_1 \vee \beta_2} \vee_{R1}$$

Temos que $f(\beta_1 \vee \beta_2) = f(\beta_1) \vee f(\beta_2)$.

Assumimos $P(D_1)$ como hipótese de indução. De $P(D_1)$, existe $D_1' \in NL$ tal que $\underset{f(\alpha)\Rightarrow f(\beta_1)}{D_1'}$.

Consideremos então a seguinte derivação $D' \in NL$:

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_1' \\ f(\alpha) \Rightarrow f(\beta_1) \end{array}}{f(\alpha) \Rightarrow f(\beta_1) \vee f(\beta_2)} \vee_{R1}$$

Temos que $\underset{f(\alpha)\Rightarrow f(\beta_1)\vee f(\beta_2)}{D'}$, logo, $\underset{f(\alpha)\Rightarrow f(\beta_1\vee\beta_2)}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\vee_{R2}$:**

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_1 \\ \alpha \Rightarrow \beta_2 \end{array}}{\alpha \Rightarrow \beta_1 \vee \beta_2} \vee_{R2}$$

Temos que $f(\beta_1 \vee \beta_2) = f(\beta_1) \vee f(\beta_2)$.

Assumimos $P(D_1)$ como hipótese de indução. De $P(D_1)$, existe $D_1' \in NL$ tal que $\underset{f(\alpha)\Rightarrow f(\beta_2)}{D_1'}$.

Consideremos então a seguinte derivação $D' \in NL$:

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_1' \\ f(\alpha) \Rightarrow f(\beta_2) \end{array}}{f(\alpha) \Rightarrow f(\beta_1) \vee f(\beta_2)} \vee_{R2}$$

Temos que $\underset{f(\alpha)\Rightarrow f(\beta_1)\vee f(\beta_2)}{D'}$, logo, $\underset{f(\alpha)\Rightarrow f(\beta_1\vee\beta_2)}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\supset_L$:**

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_1 \\ \top \Rightarrow \alpha_1 \end{array} \qquad \begin{array}{c} D_2 \\ \alpha_1 \Rightarrow \beta \end{array}}{\alpha_1 \supset \alpha_2 \Rightarrow \beta} \supset_L$$

Temos que $f(\alpha_1 \supset \alpha_2) = f(\alpha_1) \supset f(\alpha_2)$.

Assumimos $P(D_1)$ e $P(D_2)$ como hipóteses de indução. De $P(D_1)$, existe $D_1' \in NL$ tal que $\underset{f(\top)\Rightarrow f(\alpha_1)}{D_1'}$.
De $P(D_2)$, existe $D_2' \in NL$ tal que $\underset{f(\alpha_2)\Rightarrow f(\beta)}{D_2'}$.

Temos mais ainda que $f(\top) = \top$.

Consideremos então a seguinte derivação $D' \in NL$:

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_1' \\ f(\top) \Rightarrow f(\alpha_1) \end{array} \qquad \begin{array}{c} D_2' \\ f(\alpha_2) \Rightarrow f(\beta) \end{array}}{f(\alpha_1) \supset f(\alpha_2) \Rightarrow f(\beta)} \supset_L$$

Temos que $\underset{f(\alpha_1)\supset f(\alpha_2)\Rightarrow f(\beta)}{D'}$, logo, $\underset{f(\alpha_1\supset\alpha_2)\Rightarrow f(\beta)}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\supset_R$:**

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_1 \\ \beta_1 \Rightarrow \beta_2 \end{array}}{\top \Rightarrow \beta_1 \supset \beta_2} \supset_R$$

Temos que $f(\beta_1 \supset \beta_2) = f(\beta_1) \supset f(\beta_2)$. Mais ainda, $f(\top) = \top$.
Assumimos $P(D_1)$ como hipótese de indução. De $P(D_1)$, existe $D'_1 \in NL$ tal que $\underset{f(\beta_1) \Rightarrow f(\beta_2)}{D'_1}$.
Consideremos então a seguinte derivação $D' \in NL$:

$$\dfrac{\begin{array}{c} D'_1 \\ f(\beta_1) \Rightarrow f(\beta_2) \end{array}}{f(\top) \Rightarrow f(\beta_1) \supset f(\beta_2)} \supset_R$$

Temos que $\underset{f(\top) \Rightarrow f(\beta_1) \supset f(\beta_2)}{D'}$, logo, $\underset{f(\top) \Rightarrow f(\beta_1 \supset \beta_2)}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\supset_{order}$:**

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_1 \\ \beta_1 \Rightarrow \alpha_1 \end{array} \qquad \begin{array}{c} D_2 \\ \alpha_2 \Rightarrow \beta_2 \end{array}}{\alpha_1 \supset \alpha_2 \Rightarrow \beta_1 \supset \beta_2} \supset_{order}$$

Temos que $f(\alpha_1 \supset \alpha_2) = f(\alpha_1) \supset f(\alpha_2)$. Mais ainda, $f(\beta_1 \supset \beta_2) = f(\beta_1) \supset f(\beta_2)$.
Assumimos $P(D_1)$ e $P(D_2)$ como hipóteses de indução. De $P(D_1)$, existe $D'_1 \in NL$ tal que $\underset{f(\beta_1) \Rightarrow f(\alpha_1)}{D'_1}$.
De $P(D_2)$, existe $D'_2 \in NL$ tal que $\underset{f(\alpha_2) \Rightarrow f(\beta_2)}{D'_2}$.
Consideremos então a seguinte derivação $D' \in NL$:

$$\dfrac{\begin{array}{c} D'_1 \\ f(\beta_1) \Rightarrow f(\alpha_1) \end{array} \qquad \begin{array}{c} D'_2 \\ f(\alpha_2) \Rightarrow f(\beta_2) \end{array}}{f(\alpha_1) \supset f(\alpha_2) \Rightarrow f(\beta_1) \supset f(\beta_2)} \supset_{order}$$

Temos que $\underset{f(\alpha_1) \supset f(\alpha_2) \Rightarrow f(\beta_1) \supset f(\beta_2)}{D'}$, logo, $\underset{f(\alpha_1 \supset \alpha_2) \Rightarrow f(\beta_1 \supset \beta_2)}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\subset_L$:**

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_1 \\ \alpha_1 \Rightarrow \alpha_2 \end{array}}{\alpha_1 \subset \alpha_2 \Rightarrow \bot} \subset_L$$

Temos que $f(\alpha_1 \subset \alpha_2) = f(\alpha_1) \subset f(\alpha_2)$. Mais ainda, $f(\bot) = \bot$.
Assumimos $P(D_1)$ como hipótese de indução. De $P(D_1)$, existe $D'_1 \in NL$ tal que $\underset{f(\alpha_1) \Rightarrow f(\alpha_2)}{D'_1}$.
Consideremos então a seguinte derivação $D' \in NL$:

$$\dfrac{\begin{array}{c} D'_1 \\ f(\alpha_1) \Rightarrow f(\alpha_2) \end{array}}{f(\alpha_1) \subset f(\alpha_2) \Rightarrow f(\bot)} \subset_L$$

Temos que $\underset{f(\alpha_1) \subset f(\alpha_2) \Rightarrow f(\bot)}{D'}$, logo, $\underset{f(\alpha_1 \subset \alpha_2) \Rightarrow f(\bot)}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\subset_R$:**

$$\dfrac{\begin{array}{cc} D_1 & D_2 \\ \alpha \Rightarrow \beta_1 & \beta_2 \Rightarrow \bot \end{array}}{\alpha \Rightarrow \beta_1 \subset \beta_2} \subset_R$$

Temos que $f(\beta_1 \subset \beta_2) = f(\beta_1) \subset f(\beta_2)$.

Assumimos $P(D_1)$ e $P(D_2)$ como hipóteses de indução. De $P(D_1)$, existe $D'_1 \in NL$ tal que $\underset{f(\alpha)\Rightarrow f(\beta_1)}{D'_1}$.
De $P(D_2)$, existe $D'_2 \in NL$ tal que $\underset{f(\beta_2)\Rightarrow f(\bot)}{D'_2}$.

Temos mais ainda que $f(\top) = \top$.

Consideremos então a seguinte derivação $D' \in NL$:

$$\dfrac{\begin{array}{cc} D'_1 & D'_2 \\ f(\alpha) \Rightarrow f(\beta_1) & f(\beta_2) \Rightarrow f(\bot) \end{array}}{f(\alpha) \Rightarrow f(\beta_1) \subset f(\beta_2)} \subset_R$$

Temos que $\underset{f(\alpha)\Rightarrow f(\beta_1)\subset f(\beta_2)}{D'}$, logo, $\underset{f(\alpha)\Rightarrow f(\beta_1\subset\beta_2)}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\subset_{order}$:**

$$\dfrac{\begin{array}{cc} D_1 & D_2 \\ \alpha_1 \Rightarrow \beta_1 & \beta_2 \Rightarrow \alpha_2 \end{array}}{\alpha_1 \subset \alpha_2 \Rightarrow \beta_1 \subset \beta_2} \subset_{order}$$

Temos que $f(\alpha_1 \subset \alpha_2) = f(\alpha_1) \subset f(\alpha_2)$. Mais ainda, $f(\beta_1 \subset \beta_2) = f(\beta_1) \subset f(\beta_2)$.

Assumimos $P(D_1)$ e $P(D_2)$ como hipóteses de indução. De $P(D_1)$, existe $D'_1 \in NL$ tal que $\underset{f(\alpha_1)\Rightarrow f(\beta_1)}{D'_1}$.
De $P(D_2)$, existe $D'_2 \in NL$ tal que $\underset{f(\beta_2)\Rightarrow f(\alpha_2)}{D'_2}$.

Consideremos então a seguinte derivação $D' \in NL$:

$$\dfrac{\begin{array}{cc} D'_1 & D'_2 \\ f(\alpha_1) \Rightarrow f(\beta_1) & f(\beta_2) \Rightarrow f(\alpha_2) \end{array}}{f(\alpha_1) \subset f(\alpha_2) \Rightarrow f(\beta_1) \subset f(\beta_2)} \subset_{order}$$

Temos que $\underset{f(\alpha_1)\subset f(\alpha_2)\Rightarrow f(\beta_1)\subset f(\beta_2)}{D'}$, logo, $\underset{f(\alpha_1\subset\alpha_2)\Rightarrow f(\beta_1\subset\beta_2)}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\sim\sim_L$:**

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_1 \\ \alpha \Rightarrow \beta \end{array}}{\sim\sim \alpha \Rightarrow \beta} \sim\sim_L$$

Temos que $f(\sim\sim \alpha) = f(\alpha)$.

Assumimos $P(D_1)$ como hipótese de indução. De $P(D_1)$, existe $D' \in NL$ tal que $\underset{f(\alpha)\Rightarrow f(\beta)}{D'}$, ou seja, $\underset{f(\sim\sim\alpha)\Rightarrow f(\beta)}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\sim\sim_R$:**

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_1 \\ \alpha \Rightarrow \beta \end{array}}{\alpha \Rightarrow \sim\sim \beta} \sim\sim_R$$

Temos que $f(\sim\sim \beta) = f(\beta)$.

Assumimos $P(D_1)$ como hipótese de indução. De $P(D_1)$, existe $D' \in NL$ tal que $\underset{f(\alpha)\Rightarrow f(\beta)}{D'}$, logo, $\underset{f(\alpha)\Rightarrow f(\sim\sim\beta)}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\sim \wedge_L$:**

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_1 \\ \sim \alpha_1 \Rightarrow \beta \end{array} \qquad \begin{array}{c} D_2 \\ \sim \alpha_2 \Rightarrow \beta \end{array}}{\sim (\alpha_1 \wedge \alpha_2) \Rightarrow \beta} \sim \wedge_L$$

Temos que $f(\sim (\alpha_1 \wedge \alpha_2)) = f(\sim \alpha_1) \vee f(\sim \alpha_2)$.

Assumimos $P(D_1)$ e $P(D_2)$ como hipóteses de indução. De $P(D_1)$, existe $D'_1 \in NL$ tal que $\underset{f(\sim\alpha_1)\Rightarrow f(\beta)}{D'_1}$. De $P(D_2)$, existe $D'_2 \in NL$ tal que $\underset{f(\sim\alpha_2)\Rightarrow f(\beta)}{D'_2}$.

Consideremos então a seguinte derivação $D' \in NL$:

$$\dfrac{\begin{array}{c} D'_1 \\ f(\sim \alpha_1) \Rightarrow f(\beta) \end{array} \qquad \begin{array}{c} D'_2 \\ f(\sim \alpha_2) \Rightarrow f(\beta) \end{array}}{f(\sim \alpha_1) \vee f(\sim \alpha_2) \Rightarrow f(\beta)} \vee_L$$

Temos que $\underset{f(\sim\alpha_1)\vee f(\sim\alpha_2))\Rightarrow f(\beta)}{D'}$, logo, $\underset{f(\sim(\alpha_1\wedge\alpha_2))\Rightarrow f(\beta)}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\sim \wedge_{R1}$:**

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_1 \\ \alpha \Rightarrow\sim \beta_1 \end{array}}{\alpha \Rightarrow\sim (\beta_1 \wedge \beta_2)} \sim \wedge_{R1}$$

Temos que $f(\sim (\beta_1 \wedge \beta_2)) = f(\sim \beta_1) \vee f(\sim \beta_2)$.

Assumimos $P(D_1)$ como hipótese de indução. De $P(D_1)$, existe $D'_1 \in NL$ tal que $\underset{f(\alpha)\Rightarrow f(\sim\beta_1)}{D'_1}$.

Consideremos então a seguinte derivação $D' \in NL$:

$$\dfrac{\begin{array}{c} D'_1 \\ f(\alpha) \Rightarrow f(\sim \beta_1) \end{array}}{f(\alpha) \Rightarrow f(\sim \beta_1) \vee f(\sim \beta_2)} \vee_{R1}$$

Temos que $\underset{f(\alpha)\Rightarrow f(\sim\beta_1)\vee f(\sim\beta_2)}{D'}$, logo, $\underset{f(\alpha)\Rightarrow f(\sim(\beta_1\wedge\beta_2))}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso** $\sim \wedge_{R2}$**:**

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_1 \\ \alpha \Rightarrow \sim \beta_2 \end{array}}{\alpha \Rightarrow \sim (\beta_1 \wedge \beta_2)} \sim \wedge_{R2}$$

Temos que $f(\sim (\beta_1 \wedge \beta_2)) = f(\sim \beta_1) \vee f(\sim \beta_2)$.
Assumimos $P(D_1)$ como hipótese de indução. De $P(D_1)$, existe $D'_1 \in NL$ tal que $\underset{f(\alpha) \Rightarrow f(\sim \beta_2)}{D'_1}$.
Consideremos então a seguinte derivação $D' \in NL$:

$$\dfrac{\begin{array}{c} D'_1 \\ f(\alpha) \Rightarrow f(\sim \beta_2) \end{array}}{f(\alpha) \Rightarrow f(\sim \beta_1) \vee f(\sim \beta_2)} \vee_{R2}$$

Temos que $\underset{f(\alpha) \Rightarrow f(\sim \beta_1) \vee f(\sim \beta_2)}{D'}$, logo, $\underset{f(\alpha) \Rightarrow f(\sim (\beta_1 \wedge \beta_2))}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso** $\sim \vee_{L1}$**:**

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_1 \\ \sim \alpha_1 \Rightarrow \beta \end{array}}{\sim (\alpha_1 \vee \alpha_2) \Rightarrow \beta} \sim \vee_{L1}$$

Temos que $f(\sim (\alpha_1 \vee \alpha_2)) = f(\sim \alpha_1) \wedge f(\sim \alpha_2)$.
Assumimos $P(D_1)$ como hipótese de indução. De $P(D_1)$, existe $D'_1 \in NL$ tal que $\underset{f(\sim \alpha_1) \Rightarrow f(\beta)}{D'_1}$.
Consideremos então a seguinte derivação $D' \in NL$:

$$\dfrac{\begin{array}{c} D'_1 \\ f(\sim \alpha_1) \Rightarrow f(\beta) \end{array}}{f(\sim \alpha_1) \wedge f(\sim \alpha_2) \Rightarrow f(\beta)} \wedge_{L1}$$

Temos que $\underset{f(\sim \alpha_1) \wedge f(\sim \alpha_2) \Rightarrow f(\beta)}{D'}$, logo, $\underset{f(\sim (\alpha_1 \vee \alpha_2)) \Rightarrow f(\beta)}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso** $\sim \vee_{L2}$**:**

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_1 \\ \sim \alpha_2 \Rightarrow \beta \end{array}}{\sim (\alpha_1 \vee \alpha_2) \Rightarrow \beta} \sim \vee_{L2}$$

Temos que $f(\sim (\alpha_1 \vee \alpha_2)) = f(\sim \alpha_1) \wedge f(\sim \alpha_2)$.
Assumimos $P(D_1)$ como hipótese de indução. De $P(D_1)$, existe $D'_1 \in NL$ tal que $\underset{f(\sim \alpha_2) \Rightarrow f(\beta)}{D'_1}$.
Consideremos então a seguinte derivação $D' \in NL$:

$$\dfrac{\begin{array}{c} D'_1 \\ f(\sim \alpha_2) \Rightarrow f(\beta) \end{array}}{f(\sim \alpha_1) \wedge f(\sim \alpha_2) \Rightarrow f(\beta)} \wedge_{L2}$$

Temos que $\underset{f(\sim \alpha_1) \wedge f(\sim \alpha_2) \Rightarrow f(\beta)}{D'}$, logo, $\underset{f(\sim (\alpha_1 \vee \alpha_2)) \Rightarrow f(\beta)}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\sim \vee_R$:**

$$\dfrac{\begin{array}{c}D_1\\ \alpha \Rightarrow \sim \beta_1\end{array} \qquad \begin{array}{c}D_2\\ \alpha \Rightarrow \sim \beta_2\end{array}}{\alpha \Rightarrow \sim (\beta_1 \vee \beta_2)} \sim \vee_R$$

Temos que $f(\sim (\beta_1 \vee \beta_2)) = f(\sim \beta_1) \wedge f(\sim \beta_2)$.

Assumimos $P(D_1)$ e $P(D_2)$ como hipótese de indução. De $P(D_1)$, existe $D'_1 \in NL$ tal que $\underset{f(\alpha)\Rightarrow f(\sim\beta_1)}{D'_1}$. De $P(D_2)$, existe $D'_2 \in NL$ tal que $\underset{f(\alpha)\Rightarrow f(\sim\beta_2)}{D'_2}$.

Consideremos então a seguinte derivação $D' \in NL$:

$$\dfrac{\begin{array}{c}D'_1\\ f(\alpha) \Rightarrow f(\sim \beta_1)\end{array} \qquad \begin{array}{c}D'_2\\ f(\alpha) \Rightarrow f(\sim \beta_2)\end{array}}{f(\alpha) \Rightarrow f(\sim \beta_1) \wedge f(\sim \beta_2)} \wedge_R$$

Temos que $\underset{f(\alpha)\Rightarrow f(\sim\beta_1)\wedge f(\sim\beta_2)}{D'}$, logo, $\underset{f(\alpha)\Rightarrow f(\sim(\beta_1\vee\beta_2))}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\sim\supset_{L1}$:**

$$\dfrac{\begin{array}{c}D_1\\ \alpha_1 \Rightarrow \beta\end{array}}{\sim (\alpha_1 \supset \alpha_2) \Rightarrow \beta} \sim\supset_{L1}$$

Temos que $f(\sim (\alpha_1 \supset \alpha_2)) = f(\alpha_1) \wedge f(\sim \alpha_2)$.

Assumimos $P(D_1)$ como hipótese de indução. De $P(D_1)$, existe $D'_1 \in NL$ tal que $\underset{f(\alpha_1)\Rightarrow f(\beta)}{D'_1}$.

Consideremos então a seguinte derivação $D' \in NL$:

$$\dfrac{\begin{array}{c}D'_1\\ f(\alpha_1) \Rightarrow f(\beta)\end{array}}{f(\alpha_1) \wedge f(\sim \alpha_2) \Rightarrow f(\beta)} \wedge_{L1}$$

Temos que $\underset{f(\alpha_1)\wedge f(\sim\alpha_2)\Rightarrow f(\beta)}{D'}$, logo, $\underset{f(\sim(\alpha_1\supset\alpha_2))\Rightarrow f(\beta)}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\sim\supset_{L2}$:**

$$\dfrac{\begin{array}{c}D_1\\ \sim \alpha_2 \Rightarrow \beta\end{array}}{\sim (\alpha_1 \supset \alpha_2) \Rightarrow \beta} \sim\supset_{L2}$$

Temos que $f(\sim (\alpha_1 \supset \alpha_2)) = f(\alpha_1) \wedge f(\sim \alpha_2)$.

Assumimos $P(D_1)$ como hipótese de indução. De $P(D_1)$, existe $D'_1 \in NL$ tal que $\underset{f(\sim\alpha_2)\Rightarrow f(\beta)}{D'_1}$.

Consideremos então a seguinte derivação $D' \in NL$:

$$\dfrac{\begin{array}{c}D'_1\\ f(\sim \alpha_2) \Rightarrow f(\beta)\end{array}}{f(\alpha_1) \wedge f(\sim \alpha_2) \Rightarrow f(\beta)} \wedge_{L2}$$

Temos que $\underset{f(\alpha_1)\wedge f(\sim\alpha_2)\Rightarrow f(\beta)}{D'}$, logo, $\underset{f(\sim(\alpha_1\supset\alpha_2))\Rightarrow f(\beta)}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso** $\sim\supset_R$**:**

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1 \\ \alpha \Rightarrow \beta_1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} D_2 \\ \alpha \Rightarrow \sim \beta_2 \end{matrix}}{\alpha \Rightarrow \sim (\beta_1 \supset \beta_2)} \sim\supset_R$$

Temos que $f(\sim (\beta_1 \supset \beta_2)) = f(\beta_1) \wedge f(\sim \beta_2)$.

Assumimos $P(D_1)$ e $P(D_2)$ como hipóteses de indução. De $P(D_1)$, existe $D'_1 \in NL$ tal que $\underset{f(\alpha)\Rightarrow f(\beta_1)}{D'_1}$. De $P(D_2)$, existe $D'_2 \in NL$ tal que $\underset{f(\alpha)\Rightarrow f(\sim\beta_2)}{D'_2}$.

Consideremos então a seguinte derivação $D' \in NL$:

$$\dfrac{\begin{matrix} D'_1 \\ f(\alpha) \Rightarrow f(\beta_1) \end{matrix} \qquad \begin{matrix} D'_2 \\ f(\alpha) \Rightarrow f(\sim \beta_2) \end{matrix}}{f(\alpha) \Rightarrow f(\beta_1) \wedge f(\sim \beta_2)} \wedge_R$$

Temos que $\underset{f(\alpha)\Rightarrow f(\beta_1)\wedge f(\sim\beta_2)}{D'}$, logo, $\underset{f(\alpha_1)\Rightarrow f(\sim(\beta_1\supset\beta_2))}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso** $\sim\subset_L$**:**

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1 \\ \sim \alpha_1 \Rightarrow \beta \end{matrix} \qquad \begin{matrix} D_2 \\ \alpha_2 \Rightarrow \beta \end{matrix}}{\sim (\alpha_1 \subset \alpha_2) \Rightarrow \beta} \sim\subset_L$$

Temos que $f(\sim (\alpha_1 \subset \alpha_2)) = f(\sim \alpha_1) \vee f(\alpha_2)$.

Assumimos $P(D_1)$ e $P(D_2)$ como hipóteses de indução. De $P(D_1)$, existe $D'_1 \in NL$ tal que $\underset{f(\sim\alpha_1)\Rightarrow f(\beta)}{D'_1}$. De $P(D_2)$, existe $D'_2 \in NL$ tal que $\underset{f(\alpha_2)\Rightarrow f(\beta)}{D'_2}$.

Consideremos então a seguinte derivação $D' \in NL$:

$$\dfrac{\begin{matrix} D'_1 \\ f(\sim \alpha_1) \Rightarrow f(\beta) \end{matrix} \qquad \begin{matrix} D'_2 \\ f(\alpha_2) \Rightarrow f(\beta) \end{matrix}}{f(\sim \alpha_1) \vee f(\alpha_2) \Rightarrow f(\beta)} \vee_L$$

Temos que $\underset{f(\sim\alpha_1)\vee f(\alpha_2)\Rightarrow f(\beta)}{D'}$, logo, $\underset{f(\sim(\alpha_1\subset\alpha_2))\Rightarrow f(\beta)}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso** $\sim\subset_{R1}$**:**

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1 \\ \alpha \Rightarrow \sim \beta_1 \end{matrix}}{\alpha \Rightarrow \sim (\beta_1 \subset \beta_2)} \sim\subset_{R1}$$

Temos que $f(\sim (\beta_1 \subset \beta_2)) = f(\sim \beta_1) \vee f(\beta_2)$.

Assumimos $P(D_1)$ como hipótese de indução. De $P(D_1)$, existe $D'_1 \in NL$ tal que $\underset{f(\alpha)\Rightarrow f(\sim\beta_1)}{D'_1}$.

Consideremos então a seguinte derivação $D' \in NL$:

$$\dfrac{\begin{matrix} D'_1 \\ f(\alpha) \Rightarrow f(\sim \beta_1) \end{matrix}}{f(\alpha) \Rightarrow f(\sim \beta_1) \vee f(\beta_2)} \vee_{R1}$$

Temos que $\underset{f(\alpha)\Rightarrow f(\sim\beta_1)\vee f(\beta_2)}{D'}$, logo, $\underset{f(\alpha)\Rightarrow f(\sim(\beta_1\subset\beta_2))}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\sim\subset_{R2}$:**

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1 \\ \alpha \Rightarrow \beta_2 \end{matrix}}{\alpha \Rightarrow \sim (\beta_1 \subset \beta_2)} \sim\subset_{R2}$$

Temos que $f(\sim (\beta_1 \subset \beta_2)) = f(\sim \beta_1) \vee f(\beta_2)$.
Assumimos $P(D_1)$ como hipótese de indução. De $P(D_1)$, existe $D'_1 \in NL$ tal que $\underset{f(\alpha)\Rightarrow f(\beta_2)}{D'_1}$.
Consideremos então a seguinte derivação $D' \in NL$:

$$\dfrac{\begin{matrix} D'_1 \\ f(\alpha) \Rightarrow f(\beta_2) \end{matrix}}{f(\alpha) \Rightarrow f(\sim \beta_1) \vee f(\beta_2)} \vee_{R2}$$

Temos que $\underset{f(\alpha)\Rightarrow f(\sim\beta_1)\vee f(\beta_2)}{D'}$, logo, $\underset{f(\alpha)\Rightarrow f(\sim(\beta_1\subset\beta_2))}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso *cut*:**

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1 \\ \alpha \Rightarrow \gamma \end{matrix} \qquad \begin{matrix} D_2 \\ \gamma \Rightarrow \beta \end{matrix}}{\alpha \Rightarrow \beta} \, cut$$

Assumimos $P(D_1)$ e $P(D_2)$ como hipóteses de indução. De $P(D_1)$, existe $D'_1 \in NL$ tal que $\underset{f(\alpha)\Rightarrow f(\gamma)}{D'_1}$.
De $P(D_2)$, existe $D'_2 \in NL$ tal que $\underset{f(\gamma)\Rightarrow f(\beta)}{D'_2}$.
Consideremos então a seguinte derivação $D' \in NL$:

$$\dfrac{\begin{matrix} D'_1 \\ f(\alpha) \Rightarrow f(\gamma) \end{matrix} \qquad \begin{matrix} D'_2 \\ f(\gamma) \Rightarrow f(\beta) \end{matrix}}{f(\alpha) \Rightarrow f(\beta)} \, cut$$

Temos que $\underset{f(\alpha)\Rightarrow f(\beta)}{D'}$, e obtemos $P(D)$. $\square$

**Teorema 105 ($2^\circ$ Mergulho Sintático Fraco de $NQL$ em $NL$)**
Para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{NQL}$, se $NL$-*cut* $\vdash f(\alpha) \Rightarrow f(\beta)$, então $NQL$-*cut* $\vdash \alpha \Rightarrow \beta$.

*Demonstração.* Por indução em Derivações de $NL$-*cut*.
Para qualquer $D \in NL$-*cut*, $P(D)$ : para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{NQL}$, se $\underset{f(\alpha)\Rightarrow f(\beta)}{D}$, então existe $D' \in NQL$-*cut* tal que $\underset{\alpha\Rightarrow\beta}{D'}$.

**Caso $A$:**

**Subcaso:**

$$\frac{}{f(q) \Rightarrow f(q)}\ A \qquad\qquad \text{Pois } f(q) = q, \in \mathcal{V}_1.$$

Consideremos então a seguinte derivação $D' \in NQL\text{-}cut$:

$$\frac{}{q \Rightarrow q}\ A$$

Temos que $\underset{q\Rightarrow q}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Subcaso:**

$$\frac{}{f(\sim q) \Rightarrow f(\sim q)}\ A \qquad\qquad \text{Pois } f(\sim q) = q', \in \mathcal{V}_2.$$

Consideremos então a seguinte derivação $D' \in NQL\text{-}cut$:

$$\frac{}{\sim q \Rightarrow \sim q}\ \sim A$$

Temos que $\underset{\sim q\Rightarrow \sim q}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\perp$:**

**Subcaso:**

$$\frac{}{f(\perp) \Rightarrow f(\beta)}\ \perp \qquad\qquad \text{Pois } f(\perp) = \perp.$$

Consideremos então a seguinte derivação $D' \in NQL\text{-}cut$:

$$\frac{}{\perp \Rightarrow \beta}\ \perp$$

Temos que $\underset{\perp\Rightarrow \beta}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Subcaso:**

$$\frac{}{f(\sim \top) \Rightarrow f(\beta)}\ \perp \qquad\qquad \text{Pois } f(\sim \top) = \perp.$$

Consideremos então a seguinte derivação $D' \in NQL\text{-}cut$:

$$\frac{}{\sim \top \Rightarrow \beta}\ \sim \top$$

Temos que $\underset{\sim\top\Rightarrow \beta}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\top$:**

**Subcaso:**

$$\frac{}{f(\alpha) \Rightarrow f(\top)}\ \top \qquad\qquad \text{Pois } f(\top) = \top.$$

Consideremos então a seguinte derivação $D' \in NQL\text{-}cut$:

$$\frac{}{\alpha \Rightarrow \top}\ \top$$

Temos que $\underset{\alpha\Rightarrow \top}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Subcaso:**

$$\frac{}{f(\alpha) \Rightarrow f(\sim \perp)}\ \top \qquad\qquad \text{Pois } f(\sim \perp) = \top.$$

Consideremos então a seguinte derivação $D' \in NQL\text{-}cut$:

$$\dfrac{}{\alpha \Rightarrow \sim \bot} \sim \bot$$

Temos que $\underset{\alpha \Rightarrow \sim \bot}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $we_L$:**

**Subcaso:**

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1 \\ f(\top) \Rightarrow f(\beta) \end{matrix}}{f(\alpha) \Rightarrow f(\beta)} we_L \qquad \text{Pois } f(\top) = \top.$$

Assumimos $P(D_1)$ como hipótese de indução. De $P(D_1)$, existe $D'_1 \in NQL\text{-}cut$ tal que $\underset{\top \Rightarrow \beta}{D'}$. Consideremos então a seguinte derivação $D' \in NQL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{matrix} D'_1 \\ \top \Rightarrow \beta \end{matrix}}{\alpha \Rightarrow \beta} we_L$$

Temos que $\underset{\alpha \Rightarrow \beta}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Subcaso:**

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1 \\ f(\sim \bot) \Rightarrow f(\beta) \end{matrix}}{f(\alpha) \Rightarrow f(\beta)} we_L \qquad \text{Pois } f(\sim \bot) = \top.$$

Assumimos $P(D_1)$ como hipótese de indução. De $P(D_1)$, existe $D'_1 \in NQL\text{-}cut$ tal que $\underset{\sim \bot \Rightarrow \beta}{D'}$. Consideremos então a seguinte derivação $D' \in NQL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{matrix} D'_1 \\ \sim \bot \Rightarrow \beta \end{matrix}}{\alpha \Rightarrow \beta} \sim we_L$$

Temos que $\underset{\alpha \Rightarrow \beta}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $we_R$:**

**Subcaso:**

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1 \\ f(\alpha) \Rightarrow f(\bot) \end{matrix}}{f(\alpha) \Rightarrow f(\beta)} we_R \qquad \text{Pois } f(\bot) = \bot.$$

Assumimos $P(D_1)$ como hipótese de indução. De $P(D_1)$, existe $D'_1 \in NQL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha \Rightarrow \bot}{D'}$. Consideremos então a seguinte derivação $D' \in NQL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1 \\ \alpha \Rightarrow \bot \end{matrix}}{\alpha \Rightarrow \beta} we_R$$

Temos que $\underset{\alpha \Rightarrow \beta}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Subcaso:**

$$\dfrac{\begin{array}{c}D_1\\ f(\alpha) \Rightarrow f(\sim \top)\end{array}}{f(\alpha) \Rightarrow f(\beta)}\, we_R \qquad\qquad \text{Pois } f(\sim \top) = \bot.$$

Assumimos $P(D_1)$ como hipótese de indução. De $P(D_1)$, existe $D_1' \in NQL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha \Rightarrow \sim \top}{D'}$.
Consideremos então a seguinte derivação $D' \in NQL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{array}{c}D_1\\ \alpha \Rightarrow \sim \top\end{array}}{\alpha \Rightarrow \beta} \sim we_R$$

Temos que $\underset{\alpha \Rightarrow \beta}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\wedge_{L1}$:**

**Subcaso:**

$$\dfrac{\begin{array}{c}D_1\\ f(\alpha_1) \Rightarrow f(\beta)\end{array}}{f(\alpha_1 \wedge \alpha_2) \Rightarrow f(\beta)}\, \wedge_{L1} \qquad\qquad \text{Pois } f(\alpha_1 \wedge \alpha_2) = f(\alpha_1) \wedge f(\alpha_2).$$

Assumimos $P(D_1)$ como hipótese de indução. De $P(D_1)$, existe $D_1' \in NQL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha_1 \Rightarrow \beta}{D'}$.
Consideremos então a seguinte derivação $D' \in NQL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{array}{c}D_1'\\ \alpha \Rightarrow \beta\end{array}}{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \beta}\, \wedge_{L1}$$

Temos que $\underset{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \beta}{D'}$, obtemos $P(D)$.

**Subcaso:**

$$\dfrac{\begin{array}{c}D_1\\ f(\sim \alpha_1) \Rightarrow f(\beta)\end{array}}{f(\sim (\alpha_1 \vee \alpha_2)) \Rightarrow f(\beta)}\, \wedge_{L1} \qquad\qquad \text{Pois } f(\sim (\alpha_1 \vee \alpha_2)) = f(\sim \alpha_1) \wedge f(\sim \alpha_2).$$

Assumimos $P(D_1)$ como hipótese de indução. De $P(D_1)$, existe $D_1' \in NQL\text{-}cut$ tal que $\underset{\sim \alpha_1 \Rightarrow \beta}{D_1'}$.
Consideremos então a seguinte derivação $D' \in NQL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{array}{c}D_1'\\ \sim \alpha_1 \Rightarrow \beta\end{array}}{\sim (\alpha_1 \vee \alpha_2) \Rightarrow \beta} \sim \vee_{L1}$$

Temos que $\underset{\sim (\alpha_1 \vee \alpha_2) \Rightarrow \beta}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Subcaso:**

$$\dfrac{\begin{array}{c}D_1\\ f(\alpha_1) \Rightarrow f(\beta)\end{array}}{f(\sim (\alpha_1 \supset \alpha_2)) \Rightarrow f(\beta)}\, \wedge_{L1} \qquad\qquad \text{Pois } f(\sim (\alpha_1 \supset \alpha_2)) = f(\alpha_1) \wedge f(\sim \alpha_2).$$

Assumimos $P(D_1)$ como hipótese de indução. De $P(D_1)$, existe $D_1' \in NQL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha_1 \Rightarrow \beta}{D_1'}$.
Consideremos então a seguinte derivação $D' \in NQL\text{-}cut$:

$$\frac{\overset{D'_1}{\alpha_1 \Rightarrow \beta}}{\sim (\alpha_1 \supset \alpha_2) \Rightarrow \beta}\ {\sim}{\supset}_{L1}$$

Temos que $\underset{\sim(\alpha_1 \supset \alpha_2) \Rightarrow \beta}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso** $\wedge_{L2}$**:**

**Subcaso:**

$$\frac{\overset{D_1}{f(\alpha_2) \Rightarrow f(\beta)}}{f(\alpha_1 \wedge \alpha_2) \Rightarrow f(\beta)}\ \wedge_{L2}$$

Pois $f(\alpha_1 \wedge \alpha_2) = f(\alpha_1) \wedge f(\alpha_2)$. Assum

$P(D_1)$ como hipótese de indução. De $P(D_1)$, existe $D'_1 \in NQL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha_2 \Rightarrow \beta}{D'_1}$.

Consideremos então a seguinte derivação $D' \in NQL\text{-}cut$:

$$\frac{\overset{D'_1}{\alpha_2 \Rightarrow \beta}}{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \beta}\ \wedge_{L2}$$

Temos que $\underset{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \beta}{D'}$, obtemos $P(D)$.

**Subcaso:**

$$\frac{\overset{D_1}{f(\sim \alpha_2) \Rightarrow f(\beta)}}{f(\sim (\alpha_1 \vee \alpha_2)) \Rightarrow f(\beta)}\ \wedge_{L2}$$

Pois $f(\sim (\alpha_1 \vee \alpha_2)) = f(\sim \alpha_1) \wedge f(\sim \alpha_2)$.

Assumimos $P(D_1)$ como hipótese de indução. De $P(D_1)$, existe $D'_1 \in NQL\text{-}cut$ tal que $\underset{\sim \alpha_2 \Rightarrow \beta}{D'_1}$.

Consideremos então a seguinte derivação $D' \in NQL\text{-}cut$:

$$\frac{\overset{D'_1}{\sim \alpha_2 \Rightarrow \beta}}{\sim (\alpha_1 \vee \alpha_2) \Rightarrow \beta}\ \sim \vee_{L2}$$

Temos que $\underset{\sim(\alpha_1 \vee \alpha_2) \Rightarrow \beta}{D'}$, e obtemos $P(D)$

**Subcaso:**

$$\frac{\overset{D_1}{f(\sim \alpha_2) \Rightarrow f(\beta)}}{f(\sim (\alpha_1 \supset \alpha_2)) \Rightarrow f(\beta)}\ \wedge_{L2}$$

Pois $f(\sim (\alpha_1 \supset \alpha_2)) = f(\alpha_1) \wedge f(\sim \alpha_2)$. Assum

$P(D_1)$ como hipótese de indução. De $P(D_1)$, existe $D'_1 \in NQL\text{-}cut$ tal que $\underset{\sim \alpha_2 \Rightarrow \beta}{D'_1}$.

Consideremos então a seguinte derivação $D' \in NQL\text{-}cut$:

$$\frac{\overset{D'_1}{\sim \alpha_2 \Rightarrow \beta}}{\sim (\alpha_1 \supset \alpha_2) \Rightarrow \beta}\ {\sim}{\supset}_{L2}$$

Temos que $\underset{\sim(\alpha_1 \supset \alpha_2) \Rightarrow \beta}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\wedge_R$:**

**Subcaso:**

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1 \\ f(\alpha) \Rightarrow f(\beta_1) \end{matrix} \qquad \begin{matrix} D_2 \\ f(\alpha) \Rightarrow f(\beta_2) \end{matrix}}{f(\alpha) \Rightarrow f(\beta_1 \wedge \beta_2)} \wedge_R \qquad \text{Pois } f(\beta_1 \wedge \beta_2) = f(\beta_1) \wedge f(\beta_2).$$

Assumimos $P(D_1)$ e $P(D_2)$ como hipóteses de indução. De $P(D_1)$, existe $D_1' \in NQL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha \Rightarrow \beta_1}{D_1'}$. De $P(D_2)$, existe $D_2' \in NQL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha \Rightarrow \beta_2}{D_2'}$.

Consideremos então a seguinte derivação $D' \in NQL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1' \\ \alpha \Rightarrow \beta_1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} D_2' \\ \alpha \Rightarrow \beta_2 \end{matrix}}{\alpha \Rightarrow \beta_1 \wedge \beta_2} \wedge_R$$

Temos que $\underset{\alpha \Rightarrow \beta_1 \wedge \beta_2}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Subcaso:**

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1 \\ f(\alpha) \Rightarrow f(\sim \beta_1) \end{matrix} \qquad \begin{matrix} D_2 \\ f(\alpha) \Rightarrow f(\sim \beta_2) \end{matrix}}{f(\alpha) \Rightarrow f(\sim (\beta_1 \vee \beta_2))} \wedge_R \qquad \text{Pois } f(\sim (\beta_1 \vee \beta_2)) = f(\sim \beta_1) \wedge f(\sim \beta_2).$$

Assumimos $P(D_1)$ e $P(D_2)$ como hipóteses de indução. De $P(D_1)$, existe $D_1' \in NQL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha \Rightarrow \sim \beta_1}{D_1'}$. De $P(D_2)$, existe $D_2' \in NQL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha \Rightarrow \sim \beta_2}{D_2'}$.

Consideremos então a seguinte derivação $D' \in NQL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1' \\ \alpha \Rightarrow \sim \beta_1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} D_2' \\ \alpha \Rightarrow \sim \beta_2 \end{matrix}}{\alpha \Rightarrow \sim (\beta_1 \vee \beta_2)} \sim \vee_R$$

Temos que $\underset{\alpha \Rightarrow \sim (\beta_1 \vee \beta_2)}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Subcaso:**

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1 \\ f(\alpha) \Rightarrow f(\beta_1) \end{matrix} \qquad \begin{matrix} D_2 \\ f(\alpha) \Rightarrow f(\sim \beta_2) \end{matrix}}{f(\alpha) \Rightarrow f(\sim (\beta_1 \supset \beta_2))} \wedge_R \qquad \text{Pois } f(\sim (\beta_1 \supset \beta_2)) = f(\beta_1) \wedge f(\sim \beta_2).$$

Assumimos $P(D_1)$ e $P(D_2)$ como hipóteses de indução. De $P(D_1)$, existe $D_1' \in NQL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha \Rightarrow \beta_1}{D_1'}$. De $P(D_2)$, existe $D_2' \in NQL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha \Rightarrow \sim \beta_2}{D_2'}$.

Consideremos então a seguinte derivação $D' \in NQL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1' \\ \alpha \Rightarrow \beta_1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} D_2' \\ \alpha \Rightarrow \sim \beta_2 \end{matrix}}{\alpha \Rightarrow \sim (\beta_1 \supset \beta_2)} \sim \supset_R$$

Temos que $\underset{\alpha \Rightarrow \sim (\beta_1 \supset \beta_2)}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\vee_L$:**

**Subcaso:**

$$\dfrac{\begin{array}{cc} D_1 & D_2 \\ f(\alpha_1) \Rightarrow f(\beta) & f(\alpha_2) \Rightarrow f(\beta) \end{array}}{f(\alpha_1 \vee \alpha_2) \Rightarrow f(\beta)} \vee_L$$

Pois $f(\alpha_1 \vee \alpha_2) = f(\alpha_1) \vee f(\alpha_2)$.

Assumimos $P(D_1)$ e $P(D_2)$ como hipóteses de indução. De $P(D_1)$, existe $D_1' \in NQL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha_1 \Rightarrow \beta}{D_1'}$. De $P(D_2)$, existe $D_2' \in NQL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha_2 \Rightarrow \beta}{D_2'}$.

Consideremos então a seguinte derivação $D' \in NQL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{array}{cc} D_1' & D_2' \\ \alpha_1 \Rightarrow \beta & \alpha_2 \Rightarrow \beta \end{array}}{\alpha_1 \vee \alpha_2 \Rightarrow \beta} \vee_L$$

Temos que $\underset{\alpha_1 \vee \alpha_2 \Rightarrow \beta}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Subcaso:**

$$\dfrac{\begin{array}{cc} D_1 & D_2 \\ f(\sim \alpha_1) \Rightarrow f(\beta) & f(\sim \alpha_2) \Rightarrow f(\beta) \end{array}}{f(\sim (\alpha_1 \wedge \alpha_2)) \Rightarrow f(\beta)} \vee_L$$

Pois $f(\sim (\alpha_1 \wedge \alpha_2)) = f(\sim \alpha_1) \vee f(\sim \alpha_2)$. Assumimos $P(D_1)$ e $P(D_2)$ como hipóteses de indução. De $P(D_1)$ existe $D_1' \in NQL\text{-}cut$ tal que $\underset{\sim \alpha_1 \Rightarrow \beta}{D_1'}$. De $P(D_2)$ existe $D_2' \in NQL\text{-}cut$ tal que $\underset{\sim \alpha_2 \Rightarrow \beta}{D_2'}$.

Consideremos então a seguinte derivação $D' \in NQL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{array}{cc} D_1' & D_2' \\ \sim \alpha_1 \Rightarrow \beta & \sim \alpha_2 \Rightarrow \beta \end{array}}{\sim (\alpha_1 \wedge \alpha_2) \Rightarrow \beta} \sim \wedge_L$$

Temos que $\underset{\sim (\alpha_1 \wedge \alpha_2) \Rightarrow \beta}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Subcaso:**

$$\dfrac{\begin{array}{cc} D_1 & D_2 \\ f(\sim \alpha_1) \Rightarrow f(\beta) & f(\alpha_2) \Rightarrow f(\beta) \end{array}}{f(\sim (\alpha_1 \subset \alpha_2)) \Rightarrow f(\beta)} \vee_L$$

Pois $f(\sim (\alpha_1 \subset \alpha_2)) = f(\sim \alpha_1) \vee f(\alpha_2)$.

Assumimos $P(D_1)$ e $P(D_2)$ como hipóteses de indução. De $P(D_1)$, existe $D_1' \in NQL\text{-}cut$ tal que $\underset{\sim \alpha_1 \Rightarrow \beta}{D_1'}$. De $P(D_2)$, existe $D_2' \in NQL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha_2 \Rightarrow \beta}{D_2'}$.

Consideremos então a seguinte derivação $D' \in NQL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{array}{cc} D_1' & D_2' \\ \sim \alpha_1 \Rightarrow \beta & \alpha_2 \Rightarrow \beta \end{array}}{\sim (\alpha_1 \subset \alpha_2) \Rightarrow \beta} \sim\subset_L$$

Temos que $\underset{\sim (\alpha_1 \subset \alpha_2) \Rightarrow \beta}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\vee_{R1}$:**

**Subcaso:**

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1 \\ f(\alpha) \Rightarrow f(\beta_1) \end{matrix}}{f(\alpha) \Rightarrow f(\beta_1 \vee \beta_2)} \vee_{R1}$$

Pois $f(\beta_1 \vee \beta_2) = f(\beta_1) \vee f(\beta_2)$.

Assumimos $P(D_1)$ como hipóteses de indução. De $P(D_1)$, existe $D_1' \in NQL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha \Rightarrow \beta_1}{D_1'}$.

Consideremos então a seguinte derivação $D' \in NQL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1' \\ \alpha \Rightarrow \beta_1 \end{matrix}}{\alpha \Rightarrow \beta_1 \vee \beta_2} \vee_{R1}$$

Temos que $\underset{\alpha \Rightarrow \beta_1 \vee \beta_2}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Subcaso:**

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1 \\ f(\alpha) \Rightarrow f(\sim \beta_1) \end{matrix}}{f(\alpha) \Rightarrow f(\sim (\beta_1 \wedge \beta_2))} \vee_{R1}$$

Pois $f(\sim (\beta_1 \wedge \beta_2)) = f(\sim \beta_1) \vee f(\sim \beta_2)$.

Assumimos $P(D_1)$ como hipóteses de indução. De $P(D_1)$, existe $D_1' \in NQL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha \Rightarrow \sim \beta_1}{D_1'}$.

Consideremos então a seguinte derivação $D' \in NQL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1' \\ \alpha \Rightarrow \sim \beta_1 \end{matrix}}{\alpha \Rightarrow \sim (\beta_1 \wedge \beta_2)} \sim \wedge_{R1}$$

Temos que $\underset{\alpha \Rightarrow \sim (\beta_1 \wedge \beta_2)}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Subcaso:**

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1 \\ f(\alpha) \Rightarrow f(\sim \beta_1) \end{matrix}}{f(\alpha) \Rightarrow f(\sim (\beta_1 \subset \beta_2))} \vee_{R1}$$

Pois $f(\sim (\beta_1 \subset \beta_2)) = f(\sim \beta_1) \vee f(\beta_2)$.

Assumimos $P(D_1)$ como hipóteses de indução. De $P(D_1)$, existe $D_1' \in NQL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha \Rightarrow \sim \beta_1}{D_1'}$.

Consideremos então a seguinte derivação $D' \in NQL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1' \\ \alpha \Rightarrow \sim \beta_1 \end{matrix}}{\alpha \Rightarrow \sim (\beta_1 \subset \beta_2)} \sim \subset_{R1}$$

Temos que $\underset{\alpha \Rightarrow \sim (\beta_1 \subset \beta_2)}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\vee_{R2}$:**

**Subcaso:**

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1 \\ f(\alpha) \Rightarrow f(\beta_2) \end{matrix}}{f(\alpha) \Rightarrow f(\beta_1 \vee \beta_2)} \vee_{R2}$$

Pois $f(\beta_1 \vee \beta_2) = f(\beta_1) \vee f(\beta_2)$. Assun

$P(D_1)$ como hipóteses de indução. De $P(D_1)$, existe $D_1' \in NQL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha \Rightarrow \beta_2}{D_1'}$.

Consideremos então a seguinte derivação $D' \in NQL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1' \\ \alpha \Rightarrow \beta_2 \end{matrix}}{\alpha \Rightarrow \beta_1 \vee \beta_2} \vee_{R2}$$

Temos que $\underset{\alpha \Rightarrow \beta_1 \vee \beta_2}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Subcaso:**

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1 \\ f(\alpha) \Rightarrow f(\sim \beta_2) \end{matrix}}{f(\alpha) \Rightarrow f(\sim (\beta_1 \wedge \beta_2))} \vee_{R2}$$

Pois $f(\sim (\beta_1 \wedge \beta_2)) = f(\sim \beta_1) \vee f(\sim \beta_2)$. Assun

$P(D_1)$ como hipóteses de indução. De $P(D_1)$, existe $D_1' \in NQL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha \Rightarrow \sim \beta_2}{D_1'}$.

Consideremos então a seguinte derivação $D' \in NQL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1' \\ \alpha \Rightarrow \sim \beta_2 \end{matrix}}{\alpha \Rightarrow \sim (\beta_1 \wedge \beta_2)} \sim \wedge_{R2}$$

Temos que $\underset{\alpha \Rightarrow \sim (\beta_1 \wedge \beta_2)}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Subcaso:**

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1 \\ f(\alpha) \Rightarrow f(\beta_2) \end{matrix}}{f(\alpha) \Rightarrow f(\sim (\beta_1 \subset \beta_2))} \vee_2$$

Pois $f(\sim (\beta_1 \subset \beta_2)) = f(\sim \beta_1) \vee f(\beta_2)$.

Assumimos $P(D_1)$ como hipóteses de indução. De $P(D_1)$, existe $D_1' \in NQL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha \Rightarrow \beta_2}{D_1'}$.

Consideremos então a seguinte derivação $D' \in NQL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1' \\ \alpha \Rightarrow \beta_2 \end{matrix}}{\alpha \Rightarrow \sim (\beta_1 \subset \beta_2)} \sim\subset_{R2}$$

Temos que $\underset{\alpha \Rightarrow \sim (\beta_1 \subset \beta_2)}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\supset_L$:**

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1 \\ f(\top) \Rightarrow f(\alpha_1) \end{matrix} \qquad \begin{matrix} D_2 \\ f(\alpha_2) \Rightarrow f(\beta) \end{matrix}}{f(\alpha_1 \supset \alpha_2) \Rightarrow f(\beta)} \supset_L$$

Pois $f(\alpha_1 \supset \alpha_2) = f(\alpha_1) \supset f(\alpha_2)$.

Assumimos $P(D_1)$ e $P(D_2)$ como hipóteses de indução. De $P(D_1)$, existe $D_1' \in NQL\text{-}cut$ tal que $\underset{\top \Rightarrow \alpha_1}{D_1'}$. De $P(D_2)$, existe $D_2' \in NQL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha_2 \Rightarrow \beta}{D_2'}$.

Consideremos então a seguinte derivação $D' \in NQL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1' \\ \top \Rightarrow \alpha_1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} D_2' \\ \alpha_2 \Rightarrow \beta \end{matrix}}{\alpha_1 \supset \alpha_2 \Rightarrow \beta} \supset_L$$

Temos que $\underset{\alpha_1 \supset \alpha_2 \Rightarrow \beta}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\supset_R$:**

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_1 \\ f(\beta_1) \Rightarrow f(\beta_2) \end{array}}{f(\top) \Rightarrow f(\beta_1 \supset \beta_2)} \supset_R$$

Pois $f(\beta_1 \supset \beta_2) = f(\beta_1) \supset f(\beta_2)$.
Pois $f(\top) = \top$.

Assumimos $P(D_1)$ como hipótese de indução. De $P(D_1)$, existe $D'_1 \in NQL\text{-}cut$ tal que $\underset{\beta_1 \Rightarrow \beta_2}{D'_1}$.

Consideremos então a seguinte derivação $D' \in NQL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{array}{c} D'_1 \\ \beta_1 \Rightarrow \beta_2 \end{array}}{\top \Rightarrow \beta_1 \supset \beta_2} \supset_R$$

Temos que $\underset{\top \Rightarrow \beta_1 \supset \beta_2}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\supset_{order}$:**

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_1 \\ f(\beta_1) \Rightarrow f(\alpha_1) \end{array} \qquad \begin{array}{c} D_2 \\ f(\alpha_2) \Rightarrow f(\beta_2) \end{array}}{f(\alpha_1 \supset \alpha_2) \Rightarrow f(\beta_1 \supset \beta_2)} \supset_{order}$$

Pois $f(\alpha_1 \supset \alpha_2) = f(\alpha_1) \supset f(\alpha_2)$.
Pois $f(\beta_1 \supset \beta_2) = f(\beta_1) \supset f(\beta_2)$.

Assumimos $P(D_1)$ e $P(D_2)$ como hipóteses de indução. De $P(D_1)$, existe $D'_1 \in NQL\text{-}cut$ tal que $\underset{\beta_1 \Rightarrow \alpha_1}{D'_1}$. De $P(D_2)$, existe $D'_2 \in NQL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha_2 \Rightarrow \beta_2}{D'_2}$.

Consideremos então a seguinte derivação $D' \in NQL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{array}{c} D'_1 \\ \beta_1 \Rightarrow \alpha_1 \end{array} \qquad \begin{array}{c} D'_2 \\ \alpha_2 \Rightarrow \beta_2 \end{array}}{\alpha_1 \supset \alpha_2 \Rightarrow \beta_1 \supset \beta_2} \supset_{order}$$

Temos que $\underset{\alpha_1 \supset \alpha_2 \Rightarrow \beta_1 \supset \beta_2}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\subset_L$:**

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_1 \\ f(\alpha_1) \Rightarrow f(\alpha_2) \end{array}}{f(\alpha_1 \subset \alpha_2) \Rightarrow f(\bot)} \subset_L$$

Pois $f(\alpha_1 \subset \alpha_2) = f(\alpha_1) \subset f(\alpha_2)$.
Pois $f(\bot) = \bot$.

Assumimos $P(D_1)$ como hipótese de indução. De $P(D_1)$, existe $D'_1 \in NQL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha_1 \Rightarrow \alpha_2}{D'_1}$.

Consideremos então a seguinte derivação $D' \in NQL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{array}{c} D'_1 \\ \alpha_1 \Rightarrow \alpha_2 \end{array}}{\alpha_1 \subset \alpha_2 \Rightarrow \bot} \subset_L$$

Temos que $\underset{\alpha_1 \subset \alpha_2 \Rightarrow \bot}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\subset_R$:**

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1 \\ f(\alpha) \Rightarrow f(\beta_1) \end{matrix} \qquad \begin{matrix} D_2 \\ f(\beta_2) \Rightarrow f(\bot) \end{matrix}}{f(\alpha) \Rightarrow f(\beta_1 \subset \beta_2)} \subset_R$$

Pois $f(\beta_1 \subset \beta_2) = f(\beta_1) \subset f(\beta_2)$.

Assumimos $P(D_1)$ e $P(D_2)$ como hipóteses de indução. De $P(D_1)$, existe $D_1' \in NQL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha \Rightarrow \beta_1}{D_1'}$. De $P(D_2)$, existe $D_2' \in NQL\text{-}cut$ tal que $\underset{\beta_2 \Rightarrow \bot}{D_2'}$.

Consideremos então a seguinte derivação $D' \in NQL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1' \\ \alpha \Rightarrow \beta_1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} D_2' \\ \beta_2 \Rightarrow \bot \end{matrix}}{\alpha \Rightarrow \beta_1 \subset \beta_2} \subset_R$$

Temos que $\underset{\alpha \Rightarrow \beta_1 \subset \beta_2}{D'}$, e obtemos $P(D)$.

**Caso $\subset_{order}$:**

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1 \\ f(\alpha_1) \Rightarrow f(\beta_1) \end{matrix} \qquad \begin{matrix} D_2 \\ f(\beta_2) \Rightarrow f(\alpha_2) \end{matrix}}{f(\alpha_1 \subset \alpha_2) \Rightarrow f(\beta_1 \subset \beta_2)} \subset_{order}$$

Pois $f(\alpha_1 \subset \alpha_2) = f(\alpha_1) \subset f(\alpha_2)$.
Pois $f(\beta_1 \subset \beta_2) = f(\beta_1) \subset f(\beta_2)$.

Assumimos $P(D_1)$ e $P(D_2)$ como hipóteses de indução. De $P(D_1)$, existe $D_1' \in NQL\text{-}cut$ tal que $\underset{\alpha_1 \Rightarrow \beta_1}{D_1'}$. De $P(D_2)$, existe $D_2' \in NQL\text{-}cut$ tal que $\underset{\beta_2 \Rightarrow \alpha_2}{D_2'}$.

Consideremos então a seguinte derivação $D' \in NQL\text{-}cut$:

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1' \\ \alpha_1 \Rightarrow \beta_1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} D_2' \\ \beta_2 \Rightarrow \alpha_2 \end{matrix}}{\alpha_1 \subset \alpha_2 \Rightarrow \beta_1 \subset \beta_2} \subset_{order}$$

Temos que $\underset{\alpha_1 \subset \alpha_2 \Rightarrow \beta_1 \subset \beta_2}{D'}$, e obtemos $P(D)$. $\square$

**Teorema 106** **($1^\circ$ Mergulho Sintático de $NQL$ em $NL$)**
Para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{NQL}$, $NQL \vdash \alpha \Rightarrow \beta$ sse $NL \vdash f(\alpha) \Rightarrow f(\beta)$.

*Demonstração.*
$\Longrightarrow$
Supomos $NQL \vdash \alpha \Rightarrow \beta$, pelo Teorema 104, $NL \vdash f(\alpha) \Rightarrow f(\beta)$.
$\Longleftarrow$
Supomos $NL \vdash f(\alpha) \Rightarrow f(\beta)$, segue que $NL\text{-}cut \vdash f(\alpha) \Rightarrow f(\beta)$, pelo Teorema 105 $NQL\text{-}cut \vdash \alpha \Rightarrow \beta$, segue que $NQL \vdash \alpha \Rightarrow \beta$. $\square$

**Teorema 107** **($2^\circ$ Mergulho Sintático de $NQL$ em $NL$)**
Para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{NQL}$, $NQL\text{-}cut \vdash \alpha \Rightarrow \beta$ sse $NL\text{-}cut \vdash f(\alpha) \Rightarrow f(\beta)$.

*Demonstração.*
$\Longrightarrow$
Supomos $NQL\text{-}cut \vdash \alpha \Rightarrow \beta$, segue que $NQL \vdash \alpha \Rightarrow \beta$, pelo Teorema 106 $NL \vdash f(\alpha) \Rightarrow f(\beta)$, pelo Teorema 85 $NL\text{-}cut \vdash f(\alpha) \Rightarrow f(\beta)$.
$\Longleftarrow$
Supomos $NL\text{-}cut \vdash f(\alpha) \Rightarrow f(\beta)$, pelo Teorema 105 $NQL\text{-}cut \vdash \alpha \Rightarrow \beta$. $\square$

**Teorema 108 (Eliminação do corte em $NQL$)**
Para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{NQL}$, se $NQL \vdash \alpha \Rightarrow \beta$, então $NQL\text{-}cut \vdash \alpha \Rightarrow \beta$.

*Demonstração.*
Supomos $NQL \vdash \alpha \Rightarrow \beta$, pelo Teorema 106 $NL \vdash f(\alpha) \Rightarrow f(\beta)$, pelo Teorema 85 $NL\text{-}cut \vdash f(\alpha) \Rightarrow f(\beta)$, pelo Teorema 107 $NQL\text{-}cut \vdash \alpha \Rightarrow \beta$. □

**Teorema 109 (Admissibilidade do corte em $NQL$-*cut*)**
Para quaisquer $\alpha, \gamma, \beta \in \mathcal{F}^{NQL}$, se $NQL\text{-}cut \vdash \alpha \Rightarrow \gamma$ e $NQL\text{-}cut \vdash \gamma \Rightarrow \beta$, então $NQL\text{-}cut \vdash \alpha \Rightarrow \beta$.

*Demonstração.*
Supomos $NQL\text{-}cut \vdash \alpha \Rightarrow \gamma$ e $NQL\text{-}cut \vdash \gamma \Rightarrow \beta$, pelo Teorema 107 $NL\text{-}cut \vdash f(\alpha) \Rightarrow f(\gamma)$ e $NL\text{-}cut \vdash f(\gamma) \Rightarrow f(\beta)$, pelo Teorema 84 $NL\text{-}cut \vdash f(\alpha) \Rightarrow f(\beta)$, pelo Teorema 107 $NQL\text{-}cut \vdash \alpha \Rightarrow \beta$. □

**Teorema 110 (Decidibilidade de $NQL$)**
O sistema de cálculo de mono-sequentes para a lógica quântica paraconsistente nelsoniana $NQL$ é decidível.

*Demonstração.*
Dados $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{NQL}$, é possível implementar um algoritmo que calcula se o mono-sequente $\alpha \Rightarrow \beta$ é $NQL$-válido.
Observamos que pelo Teorema 106 (1° Mergulho Sintático de $NQL$ em $NL$), o mono-sequente referido é derivável em $NQL$ sse a tradução do mesmo a partir da função $f$, é derivável em $NL$. Mais ainda, pelo Teorema 86 (Decidibilidade de $NL$), conseguimos decidir se a tradução do sequente original é derivável em $NL$. Caso a tradução seja derivável em $NL$, então o mono-sequente $\alpha \Rightarrow \beta$ é derivável em $NQL$. Caso contrário, $\alpha \Rightarrow \beta$ não é derivável em $NQL$. □

## 5.5 Mergulho Semântico de $NQL$ em $NL$ Completude e Correção

**Definição 111** ($rank : \mathcal{F}^{NQL} \longrightarrow \mathbb{N}$)
A função $rank : \mathcal{F}^{NQL} \longrightarrow \mathbb{N}$, que atribui a cada fórmula a sua complexidade, é definida indutivamente por:

- $rank(\bot) = 1$.
- $rank(\top) = 1$.
- $rank(q) = 1$, para todo $q \in \mathcal{V}_1$.
- $rank(\alpha \wedge \beta) = rank(\alpha) + rank(\beta) + 1$, para todo $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{NQL}$.
- $rank(\alpha \vee \beta) = rank(\alpha) + rank(\beta) + 1$, para todo $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{NQL}$.
- $rank(\alpha \supset \beta) = rank(\alpha) + rank(\beta) + 1$, para todo $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{NQL}$.
- $rank(\alpha \subset \beta) = rank(\alpha) + rank(\beta) + 1$, para todo $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{NQL}$.

- $rank(\sim \alpha) = rank(\alpha) + 1$, para todo $\alpha \in \mathcal{F}^{NQL}$.

**Lema 112**
Seja $\mathcal{L}$ um reticulado-NL. Temos que para qualquer valoração paraconsistente $v'$ em $\mathcal{L}$, existe uma valoração $v$ em $\mathcal{L}$ tal que para todo $\alpha \in \mathcal{F}^{NQL}$, $v'(\alpha) = v(f(\alpha))$.

*Demonstração.* Por indução em $\mathbb{N}$.
Para qualquer $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, $P(n)$: para qualquer $\alpha \in \mathcal{F}^{NQL}$ tal que $rank(\alpha) \leq n$, para quaisquer $\mathcal{L}$ reticulado-NL, $v'$ valoração paraconsistente em $\mathcal{L}$:
Seja $v$ a valoração em $\mathcal{L}$, tal que:

- para todo $q \in \mathcal{V}_1$, $v(q) = v'(q)$.
- para todo $q' \in \mathcal{V}_2$, $v(q') = v'(\sim q)$.

Temos que $v'(\alpha) = v(f(\alpha))$.

**Caso $n = 1$:**
**Subcaso $\alpha = q$:**
$v'(q) = v(q) = v(f(q))$

**Subcaso $\alpha = \bot$:**
$v'(\bot) = 0 = v(\bot) = v(f(\bot))$

**Subcaso $\alpha = \top$:**
$v'(\top) = 1 = v(\top) = v(f(\top))$

**Caso $n \geq 2$:**
**Subcaso $\alpha =\sim q$:**
$v'(\sim q) = v(q') = v(f(\sim q))$

**Subcaso $\alpha =\sim \bot$:**
$v'(\sim \bot) = 1 = v(\top) = v(f(\sim \bot))$

**Subcaso $\alpha =\sim \top$:**
$v'(\sim \top) = 0 = v(\bot) = v(f(\sim \top))$

**Subcaso $\alpha = \alpha_1 \wedge \alpha_2$:**
Assumimos $P(n-1)$ como hipótese de indução.
De $P(n-1)$, como $rank(\alpha_1) < rank(\alpha_1 \wedge \alpha_2) \leq n$, ou seja, $rank(\alpha_1) \leq n-1$, temos que $v'(\alpha_1) = v(f(\alpha_1))$.
De $P(n-1)$, como $rank(\alpha_2) < rank(\alpha_1 \wedge \alpha_2) \leq n$, ou seja, $rank(\alpha_2) \leq n-1$, temos que $v'(\alpha_2) = v(f(\alpha_2))$.
Então temos: $v'(\alpha_1 \wedge \alpha_2) = v'(\alpha_1) \sqcap v'(\alpha_2) = v(f(\alpha_1) \sqcap v(f(\alpha_2)) = v(f(\alpha_1)) \wedge f(\alpha_2)) = v(f(\alpha_1 \wedge \alpha_2))$.

**Subcaso $\alpha = \alpha_1 \vee \alpha_2$:**
Assumimos $P(n-1)$ como hipótese de indução.
De $P(n-1)$, como $rank(\alpha_1) < rank(\alpha_1 \vee \alpha_2) \leq n$, ou seja, $rank(\alpha_1) \leq n-1$, temos que $v'(\alpha_1) = v(f(\alpha_1))$.
De $P(n-1)$, como $rank(\alpha_2) < rank(\alpha_1 \vee \alpha_2) \leq n$, ou seja, $rank(\alpha_2) \leq n-1$, temos que $v'(\alpha_2) = v(f(\alpha_2))$.
Então temos: $v'(\alpha_1 \vee \alpha_2) = v'(\alpha_1) \sqcup v'(\alpha_2) = v(f(\alpha_1) \sqcup v(f(\alpha_2)) = v(f(\alpha_1)) \vee f(\alpha_2)) = v(f(\alpha_1 \vee \alpha_2))$.

**Subcaso $\alpha = \alpha_1 \supset \alpha_2$:**
Assumimos $P(n-1)$ como hipótese de indução.
De $P(n-1)$, como $rank(\alpha_1) < rank(\alpha_1 \supset \alpha_2) \leq n$, ou seja, $rank(\alpha_1) \leq n-1$, temos que $v'(\alpha_1) = v(f(\alpha_1))$.
De $P(n-1)$, como $rank(\alpha_2) < rank(\alpha_1 \supset \alpha_2) \leq n$, ou seja, $rank(\alpha_2) \leq n-1$, temos que $v'(\alpha_2) = v(f(\alpha_2))$.
Então temos: $v'(\alpha_1 \supset \alpha_2) = v'(\alpha_1) \sqsupset v'(\alpha_2) = v(f(\alpha_1) \sqsupset v(f(\alpha_2)) = v(f(\alpha_1) \supset f(\alpha_2)) = v(f(\alpha_1 \supset \alpha_2))$.

**Subcaso $\alpha = \alpha_1 \subset \alpha_2$:**
Assumimos $P(n-1)$ como hipótese de indução.
De $P(n-1)$, como $rank(\alpha_1) < rank(\alpha_1 \subset \alpha_2) \leq n$, ou seja, $rank(\alpha_1) \leq n-1$, temos que $v'(\alpha_1) = v(f(\alpha_1))$.
De $P(n-1)$, como $rank(\alpha_2) < rank(\alpha_1 \subset \alpha_2) \leq n$, ou seja, $rank(\alpha_2) \leq n-1$, temos que $v'(\alpha_2) = v(f(\alpha_2))$.
Então temos: $v'(\alpha_1 \subset \alpha_2) = v'(\alpha_1) \sqsubset v'(\alpha_2) = v(f(\alpha_1) \sqsubset v(f(\alpha_2)) = v(f(\alpha_1) \subset f(\alpha_2)) = v(f(\alpha_1 \subset \alpha_2))$.

**Subcaso $\alpha =\sim (\alpha_1 \wedge \alpha_2)$:**
Assumimos $P(n-1)$ como hipótese de indução.
De $P(n-1)$, como $rank(\sim \alpha_1) < rank(\sim (\alpha_1 \wedge \alpha_2)) \leq n$, ou seja, $rank(\sim \alpha_1) \leq n-1$, temos que $v'(\sim \alpha_1) = v(f(\sim \alpha_1))$.
De $P(n-1)$, como $rank(\sim \alpha_2) < rank(\sim (\alpha_1 \wedge \alpha_2)) \leq n$, ou seja, $rank(\sim \alpha_2) \leq n-1$, temos que $v'(\sim \alpha_2) = v(f(\sim \alpha_2))$.
Então temos: $v'(\sim (\alpha_1 \wedge \alpha_2)) = v'(\sim \alpha_1) \sqcup v'(\sim \alpha_2) = v(f(\sim \alpha_1)) \sqcup v'(f(\sim \alpha_2)) = v(f(\sim \alpha_1) \vee f(\sim \alpha_2)) = v(f(\sim (\alpha_1 \wedge \alpha_2)))$.

**Subcaso $\alpha =\sim (\alpha_1 \vee \alpha_2)$:**
Assumimos $P(n-1)$ como hipótese de indução.
De $P(n-1)$, como $rank(\sim \alpha_1) < rank(\sim (\alpha_1 \vee \alpha_2)) \leq n$, ou seja, $rank(\sim \alpha_1) \leq n-1$, temos que $v'(\sim \alpha_1) = v(f(\sim \alpha_1))$.
De $P(n-1)$, como $rank(\sim \alpha_2) < rank(\sim (\alpha_1 \vee \alpha_2)) \leq n$, ou seja, $rank(\sim \alpha_2) \leq n-1$, temos que $v'(\sim \alpha_2) = v(f(\sim \alpha_2))$.
Então temos: $v'(\sim (\alpha_1 \vee \alpha_2)) = v'(\sim \alpha_1) \sqcap v'(\sim \alpha_2) = v(f(\sim \alpha_1)) \sqcap v'(f(\sim \alpha_2)) = v(f(\sim \alpha_1) \wedge f(\sim \alpha_2)) = v(f(\sim (\alpha_1 \vee \alpha_2)))$.

**Subcaso $\alpha =\sim (\alpha_1 \supset \alpha_2)$:**
Assumimos $P(n-1)$ como hipótese de indução.
De $P(n-1)$, como $rank(\alpha_1) < rank(\sim (\alpha_1 \supset \alpha_2)) \leq n$, ou seja, $rank(\alpha_1) \leq n-1$, temos que $v'(\alpha_1) = v(f(\alpha_1))$.
De $P(n-1)$, como $rank(\sim \alpha_2) < rank(\sim (\alpha_1 \supset \alpha_2)) \leq n$, ou seja, $rank(\sim \alpha_2) \leq n-1$, temos que $v'(\sim \alpha_2) = v(f(\sim \alpha_2))$.
Então temos: $v'(\sim (\alpha_1 \supset \alpha_2)) = v'(\alpha_1) \sqcap v'(\sim \alpha_2) = v(f(\alpha_1)) \sqcap v(f(\sim \alpha_2)) = v(f(\alpha_1) \wedge f(\sim \alpha_2)) = v(f(\sim (\alpha_1 \supset \alpha_2)))$.

**Subcaso $\alpha =\sim (\alpha_1 \subset \alpha_2)$:**
Assumimos $P(n-1)$ como hipótese de indução.
De $P(n-1)$, como $rank(\sim \alpha_1) < rank(\sim (\alpha_1 \subset \alpha_2)) \leq n$, ou seja, $rank(\sim \alpha_1) \leq n-1$, temos que

$v'(\sim \alpha_1) = v(f(\sim \alpha_1))$.

De $P(n-1)$, como $rank(\alpha_2) < rank(\sim (\alpha_1 \subset \alpha_2)) \leq n$, ou seja, $rank(\alpha_2) \leq n-1$, temos que $v'(\alpha_2) = v(f(\alpha_2))$.

Então temos: $v'(\sim (\alpha_1 \subset \alpha_2)) = v'(\sim \alpha_1) \sqcup v'(\alpha_2) = v(f(\sim \alpha_1)) \sqcup v(f(\alpha_2)) = v(f(\sim \alpha_1) \vee f(\alpha_2)) = v(f(\sim (\alpha_1 \subset \alpha_2)))$.

**Subcaso $\alpha = \sim\sim \alpha_1$:**

Assumimos $P(n-1)$ como hipótese de indução.

De $P(n-1)$, como $rank(\alpha_1) < rank(\sim\sim \alpha_1) \leq n$, ou seja, $rank(\alpha_1) \leq n-1$, temos que $v'(\alpha_1) = v(f(\alpha_1))$.

Então temos: $v'(\sim\sim \alpha_1) = v'(\alpha_1) = v(f(\alpha_1)) = v(f(\sim\sim \alpha_1))$. □

**Lema 113**

Seja $\mathcal{L}$ um reticulado-NL. Temos que para toda a valoração $v$ em $\mathcal{L}$, existe uma valoração paraconsistente $v'$ em $\mathcal{L}$, tal que para todo $\alpha \in \mathcal{F}^{NQL}$, $v(f(\alpha)) = v'(\alpha)$.

*Demonstração.* Por indução em $\mathbb{N}$.

Para qualquer $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, $P(n)$: para qualquer $\alpha \in \mathcal{F}^{NQL}$ tal que $rank(\alpha) \leq n$, para quaisquer $\mathcal{L}$ reticulado-NL, $v$ valoração em $\mathcal{L}$:

Seja $v'$ a valoração paraconsistente em $\mathcal{L}$, tal que:

- para todo $q \in \mathcal{V}_1$, $v'(q) = v(q)$.
- para todo $q \in \mathcal{V}_1$, $v'(\sim q) = v(q')$.

Temos que $v'(\alpha) = v(f(\alpha))$.

**Caso $n = 1$:**

**Subcaso $\alpha = q$:**

$v'(q) = v(q) = v(f(q))$

**Subcaso $\alpha = \perp$:**

$v'(\perp) = 0 = v(\perp) = v(f(\perp))$

**Subcaso $\alpha = \top$:**

$v'(\top) = 1 = v(\top) = v(f(\top))$

**Caso $n \geq 2$:**

**Subcaso $\alpha = \sim q$:**

$v'(\sim q) = v(q') = v(f(\sim q))$

**Subcaso $\alpha = \sim \perp$:**

$v'(\sim \perp) = 1 = v(\top) = v(f(\sim \perp))$

**Subcaso $\alpha = \sim \top$:**

$v'(\sim \top) = 0 = v(\perp) = v(f(\sim \top))$

**Subcaso $\alpha = \alpha_1 \wedge \alpha_2$:**

Assumimos $P(n-1)$ como hipótese de indução.

De $P(n-1)$, como $rank(\alpha_1) < rank(\alpha_1 \wedge \alpha_2) \leq n$, ou seja, $rank(\alpha_1) \leq n-1$, temos que $v'(\alpha_1) = v(f(\alpha_1))$.

De $P(n-1)$, como $rank(\alpha_2) < rank(\alpha_1 \wedge \alpha_2) \leq n$, ou seja, $rank(\alpha_2) \leq n-1$, temos que $v'(\alpha_2) = v(f(\alpha_2))$.
Então temos: $v'(\alpha_1 \wedge \alpha_2) = v'(\alpha_1) \sqcap v'(\alpha_2) = v(f(\alpha_1) \sqcap v(f(\alpha_2)) = v(f(\alpha_1)) \wedge f(\alpha_2)) = v(f(\alpha_1 \wedge \alpha_2))$.

**Subcaso $\alpha = \alpha_1 \vee \alpha_2$:**
Assumimos $P(n-1)$ como hipótese de indução.
De $P(n-1)$, como $rank(\alpha_1) < rank(\alpha_1 \vee \alpha_2) \leq n$, ou seja, $rank(\alpha_1) \leq n-1$, temos que $v'(\alpha_1) = v(f(\alpha_1))$.
De $P(n-1)$, como $rank(\alpha_2) < rank(\alpha_1 \vee \alpha_2) \leq n$, ou seja, $rank(\alpha_2) \leq n-1$, temos que $v'(\alpha_2) = v(f(\alpha_2))$.
Então temos: $v'(\alpha_1 \vee \alpha_2) = v'(\alpha_1) \sqcup v'(\alpha_2) = v(f(\alpha_1) \sqcup v(f(\alpha_2)) = v(f(\alpha_1)) \vee f(\alpha_2)) = v(f(\alpha_1 \vee \alpha_2))$.

**Subcaso $\alpha = \alpha_1 \supset \alpha_2$:**
Assumimos $P(n-1)$ como hipótese de indução.
De $P(n-1)$, como $rank(\alpha_1) < rank(\alpha_1 \supset \alpha_2) \leq n$, ou seja, $rank(\alpha_1) \leq n-1$, temos que $v'(\alpha_1) = v(f(\alpha_1))$.
De $P(n-1)$, como $rank(\alpha_2) < rank(\alpha_1 \supset \alpha_2) \leq n$, ou seja, $rank(\alpha_2) \leq n-1$, temos que $v'(\alpha_2) = v(f(\alpha_2))$.
Então temos: $v'(\alpha_1 \supset \alpha_2) = v'(\alpha_1) \sqsupset v'(\alpha_2) = v(f(\alpha_1) \sqsupset v(f(\alpha_2)) = v(f(\alpha_1)) \supset f(\alpha_2)) = v(f(\alpha_1 \supset \alpha_2))$.

**Subcaso $\alpha = \alpha_1 \subset \alpha_2$:**
Assumimos $P(n-1)$ como hipótese de indução.
De $P(n-1)$, como $rank(\alpha_1) < rank(\alpha_1 \subset \alpha_2) \leq n$, ou seja, $rank(\alpha_1) \leq n-1$, temos que $v'(\alpha_1) = v(f(\alpha_1))$.
De $P(n-1)$, como $rank(\alpha_2) < rank(\alpha_1 \subset \alpha_2) \leq n$, ou seja, $rank(\alpha_2) \leq n-1$, temos que $v'(\alpha_2) = v(f(\alpha_2))$.
Então temos: $v'(\alpha_1 \subset \alpha_2) = v'(\alpha_1) \sqsubset v'(\alpha_2) = v(f(\alpha_1) \sqsubset v(f(\alpha_2)) = v(f(\alpha_1)) \subset f(\alpha_2)) = v(f(\alpha_1 \subset \alpha_2))$.

**Subcaso $\alpha =\sim (\alpha_1 \wedge \alpha_2)$:**
Assumimos $P(n-1)$ como hipótese de indução.
De $P(n-1)$, como $rank(\sim \alpha_1) < rank(\sim (\alpha_1 \wedge \alpha_2)) \leq n$, ou seja, $rank(\sim \alpha_1) \leq n-1$, temos que $v'(\sim \alpha_1) = v(f(\sim \alpha_1))$.
De $P(n-1)$, como $rank(\sim \alpha_2) < rank(\sim (\alpha_2 \wedge \alpha_2)) \leq n$, ou seja, $rank(\sim \alpha_2) \leq n-1$, temos que $v'(\sim \alpha_2) = v(f(\sim \alpha_2))$.
Então temos: $v'(\sim (\alpha_1 \wedge \alpha_2)) = v'(\sim \alpha_1) \sqcup v'(\sim \alpha_2) = v(f(\sim \alpha_1)) \sqcup v'(f(\sim \alpha_2)) = v(f(\sim \alpha_1) \vee f(\sim \alpha_2)) = v(f(\sim (\alpha_1 \wedge \alpha_2)))$.

**Subcaso $\alpha =\sim (\alpha_1 \vee \alpha_2)$:**
Assumimos $P(n-1)$ como hipótese de indução.
De $P(n-1)$, como $rank(\sim \alpha_1) < rank(\sim (\alpha_1 \vee \alpha_2)) \leq n$, ou seja, $rank(\sim \alpha_1) \leq n-1$, temos que $v'(\sim \alpha_1) = v(f(\sim \alpha_1))$.
De $P(n-1)$, como $rank(\sim \alpha_2) < rank(\sim (\alpha_2 \vee \alpha_2)) \leq n$, ou seja, $rank(\sim \alpha_2) \leq n-1$, temos que $v'(\sim \alpha_2) = v(f(\sim \alpha_2))$.
Então temos: $v'(\sim (\alpha_1 \vee \alpha_2)) = v'(\sim \alpha_1) \sqcap v'(\sim \alpha_2) = v(f(\sim \alpha_1)) \sqcap v'(f(\sim \alpha_2)) = v(f(\sim \alpha_1) \wedge f(\sim \alpha_2)) = v(f(\sim (\alpha_1 \vee \alpha_2)))$.

**Subcaso $\alpha =\sim (\alpha_1 \supset \alpha_2)$:**
Assumimos $P(n-1)$ como hipótese de indução.
De $P(n-1)$, como $rank(\alpha_1) < rank(\sim (\alpha_1 \supset \alpha_2)) \leq n$, ou seja, $rank(\alpha_1) \leq n-1$, temos que

$v'(\alpha_1) = v(f(\alpha_1))$.

De $P(n-1)$, como $rank(\sim \alpha_2) < rank(\sim (\alpha_1 \supset \alpha_2)) \leq n$, ou seja, $rank(\sim \alpha_2) \leq n-1$, temos que $v'(\sim \alpha_2) = v(f(\sim \alpha_2))$.

Então temos: $v'(\sim (\alpha_1 \supset \alpha_2)) = v'(\alpha_1) \sqcap v'(\sim \alpha_2) = v(f(\alpha_1)) \sqcap v(f(\sim \alpha_2)) = v(f(\alpha_1) \wedge f(\sim \alpha_2)) = v(f(\sim (\alpha_1 \supset \alpha_2)))$.

**Subcaso $\alpha = \sim (\alpha_1 \subset \alpha_2)$:**

Assumimos $P(n-1)$ como hipótese de indução.

De $P(n-1)$, como $rank(\sim \alpha_1) < rank(\sim (\alpha_1 \subset \alpha_2)) \leq n$, ou seja, $rank(\sim \alpha_1) \leq n-1$, temos que $v'(\sim \alpha_1) = v(f(\sim \alpha_1))$.

De $P(n-1)$, como $rank(\alpha_2) < rank(\sim (\alpha_1 \subset \alpha_2)) \leq n$, ou seja, $rank(\alpha_1) \leq n-1$, temos que $v'(\alpha_2) = v(f(\alpha_2))$.

Então temos: $v'(\sim (\alpha_1 \subset \alpha_2)) = v'(\sim \alpha_1) \sqcup v'(\alpha_2) = v(f(\sim \alpha_1)) \sqcup v(f(\alpha_2)) = v(f(\sim \alpha_1) \vee f(\alpha_2)) = v(f(\sim (\alpha_1 \subset \alpha_2)))$.

**Subcaso $\alpha = \sim\sim \alpha_1$:**

Assumimos $P(n-1)$ como hipótese de indução.

De $P(n-1)$, como $rank(\alpha_1) < rank(\sim\sim \alpha_1) \leq n$, ou seja, $rank(\alpha_1) \leq n-1$, temos que $v'(\alpha_1) = v(f(\alpha_1))$

Então temos: $v'(\sim\sim \alpha_1) = v'(\alpha_1) = v(f(\alpha_1)) = v(f(\sim\sim \alpha_1))$. □

**Teorema 114 (Mergulho Semântico de $NQL$ em $NL$)**

Para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{NQL}$, $NQL \models \alpha \Rightarrow \beta$ sse $NL \models f(\alpha) \Rightarrow f(\beta)$.

*Demonstração.*

$\Longrightarrow$

Assumimos $NQL \models \alpha \Rightarrow \beta$.

Supomos agora que $NL \not\models f(\alpha) \Rightarrow f(\beta)$, ou seja, existe um reticulado-NL $\mathcal{L}$, e uma valoração $v$ em $\mathcal{L}$ tal que $v(f(\alpha)) \not\sqsubseteq_{\mathcal{L}} v(f(\beta))$.

Pelo Lema 113, existe uma valoração paraconsistente $v'$ em $\mathcal{L}$, tal que $v'(\gamma) = v(f(\gamma))$, para todo $\gamma \in \mathcal{F}^{NQL}$, em particular, $v'(\alpha) = v(f(\alpha))$ e $v'(\beta) = v(f(\beta))$, logo $v'(\alpha) \not\sqsubseteq_{\mathcal{L}} v'(\beta)$, e concluímos então que $NQL \not\models \alpha \Rightarrow \beta$

Obtemos uma contradição, então por redução ao absurdo concluímos $NL \models f(\alpha) \Rightarrow f(\beta)$.

$\Longleftarrow$

Assumimos $NL \models f(\alpha) \Rightarrow f(\beta)$.

Supomos agora que $NQL \not\models \alpha \Rightarrow \beta$, ou seja, existe um reticulado-NL $\mathcal{L}$, e uma valoração paraconsistente $v'$ em $\mathcal{L}$ tal que $v'(\alpha) \not\sqsubseteq_{\mathcal{L}} v'(\beta)$.

Pelo Lema 112, existe uma valoração $v$ em $\mathcal{L}$, tal que $v'(\gamma) = v(f(\gamma))$, para todo $\gamma \in \mathcal{F}^{NQL}$, em particular, $v'(\alpha) = v(f(\alpha))$ e $v'(\beta) = v(f(\beta))$, logo $v(f(\alpha)) \not\sqsubseteq_{\mathcal{L}} v(f(\beta))$, e concluímos então que

$NL \not\models f(\alpha) \Rightarrow f(\beta)$.

Obtemos uma contradição, então por redução ao absurdo concluímos $NQL \models \alpha \Rightarrow \beta$. □

**Teorema 115 (Completude e Correção em $NQL$)**

Para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{NQL}$, $NQL \models \alpha \Rightarrow \beta$ sse $NQL \vdash \alpha \Rightarrow \beta$.

*Demonstração.*

$NQL \models \alpha \Rightarrow \beta$ sse (pelo Teorema 114) $NL \models f(\alpha) \Rightarrow f(\beta)$ sse (pelo Teorema 78 e Teorema 79) $NL \vdash f(\alpha) \Rightarrow f(\beta)$ sse (pelo Teorema 106) $NQL \vdash \alpha \Rightarrow \beta$. □

# 6 Conclusão

Neste relatório, foram estudadas a lógica de reticulados, a lógica quântica paraconsistente, a lógica nelsoniana e a lógica quântica paraconsistente nelsoniana, com base em sistemas dedutivos de cálculo de mono-sequentes.

Para estas lógicas, foram inferidas propriedades fundamentais como a completude e a correção relativamente a semânticas baseadas em reticulados. Propriedades sintáticas, como a eliminação e admissibilidade do corte, decidibilidade e interpolação de Craig, também foram obtidas. Estas propriedades foram demonstradas diretamente para a lógica de reticulados e a lógica nelsoniana, sendo posteriormente transferidas para as restantes lógicas através de mergulhos sintáticos e semânticos.

Como trabalho futuro, poderá considerar-se a extensão deste estudo tanto às versões de primeira ordem como às versões modais destas quatro lógicas, mantendo a mesma abordagem baseada em mergulhos. Tal extensão permitiria explorar não apenas as propriedades fundamentais aqui demonstradas, mas também características específicas das lógicas de primeira ordem e das lógicas modais. Para a lógica quântica paraconsistente de primeira ordem ($FPQL$) e para a lógica quântica paraconsistente modal ($MQPL$), também estudadas por Kamide [4], foram obtidos resultados relevantes, como o teorema de eliminação do corte e, consequentemente, a decidibilidade. Torna-se, assim, pertinente aprofundar a investigação das restantes propriedades, através de mergulhos, para a lógica de reticulados de primeira ordem e para a lógica de reticulados modal, com o objetivo de alargar o conhecimento e as possíveis aplicações destas estruturas lógicas.

# Referências


[1] Seiki Akama. “Nelson’s paraconsistent logics”. *Logic and Logical Philosophy* 7.7 (1999), pp. 101–115.

[2] Jean-Yves Béziau. “Monosequent proof systems”. *Logic and Computation—Essays in Honour of Amilcar Sernadas*. Ed. por C. Caleiro, F. Dionisio, P. Gouveia, P. Mateus e J. Rasga. London: College Publications, 2017, pp. 111–137.

[3] M.L. Dalla Chiara e R. Giuntini. “Paraconsistent quantum logics”. *Foundations of Physics* 19.7 (1989), pp. 891–904.

[4] N. Kamide. “Extending paraconsistent quantum logic: a single antecedent/succedent system approach”. *Mathematical Logic Quarterly* 64.4-5 (2018), pp. 371–386.

[5] N. Kamide. “Lattice Logic, Bilattice Logic and Paraconsistent Quantum Logic: a Unified Framework Based on Monosequent Systems”. *Journal of Philosophical Logic* 50.4 (2021), pp. 781–811.

[6] N. Kamide. “Some properties for first-order Nelsonian paraconsistent quantum logic”. *Journal of Applied Logics – IfCoLoG Journal of Logics and their Applications* 7.1 (2020), pp. 59–88.

[7] N. Kamide e H. Wansing. “Proof theory of Nelson’s paraconsistent logic: A uniform perspective”. *Theoretical Computer Science* 415.1 (2012), pp. 1–38.

[8] Thiago Nascimento Silva, Umberto Rivieccio, João Marcos e Matthew Spinks. “Nelson’s Logic S”. *Logic Journal of the IGPL* 28.6 (2020), pp. 1182–1206.