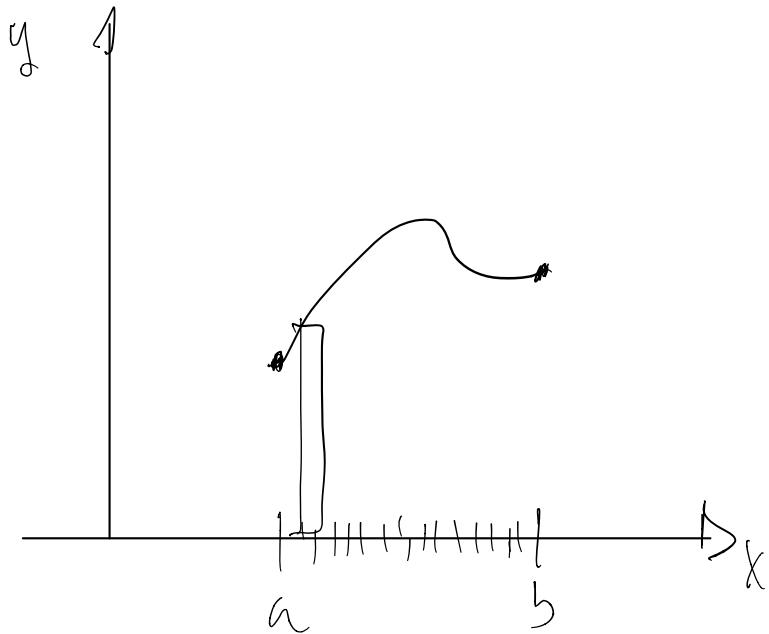


# Integral Definida

$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$



$P$  = partición de  $[a, b]$

$$t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b$$

$|P|$  = diámetro da partición

$$\bar{t}_i \in [t_{i-1}, t_i]$$

$\sum_{i=1}^n f(\bar{t}_i) \cdot \Delta t_i$  é o approximador da área embaixo do gráfico

altura base

$$\hookrightarrow S(f, P, \{\bar{x}_i\}) = \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i$$

$\hookrightarrow$  Soma de Riemann

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i$$

## 1ºo. Fund. Cálculo

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

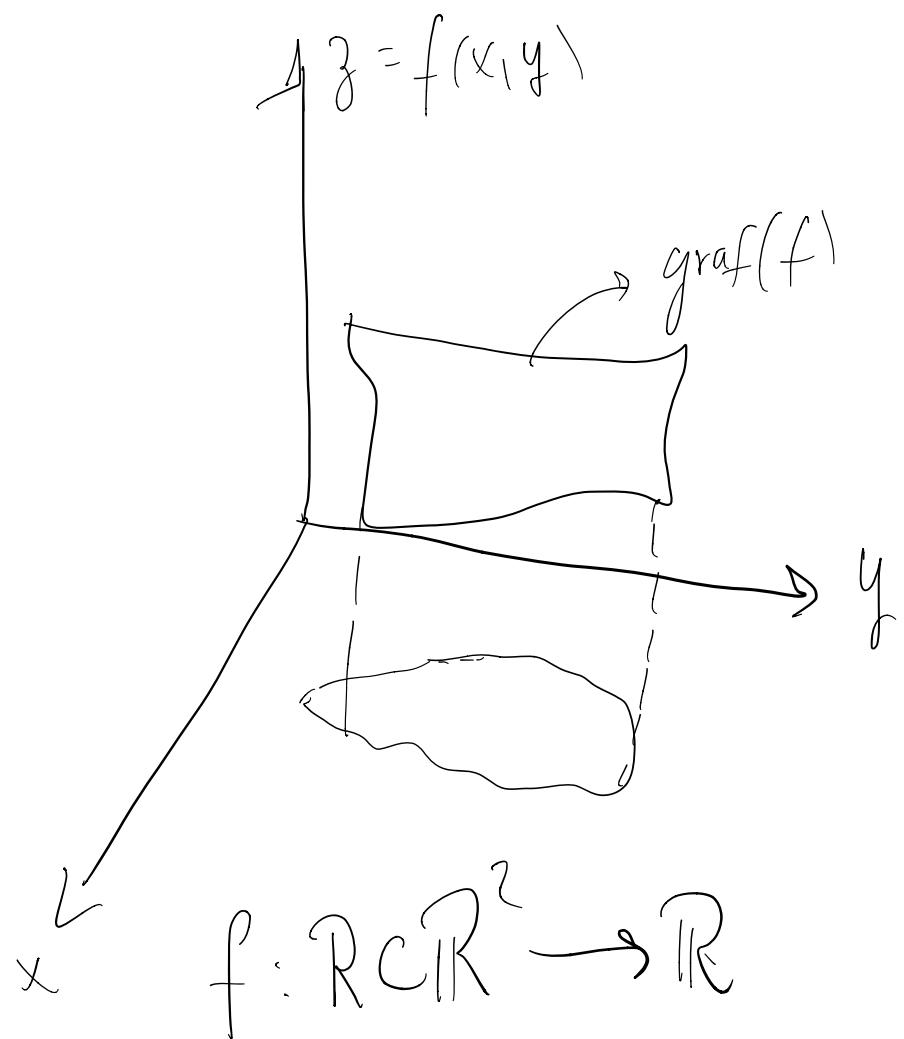
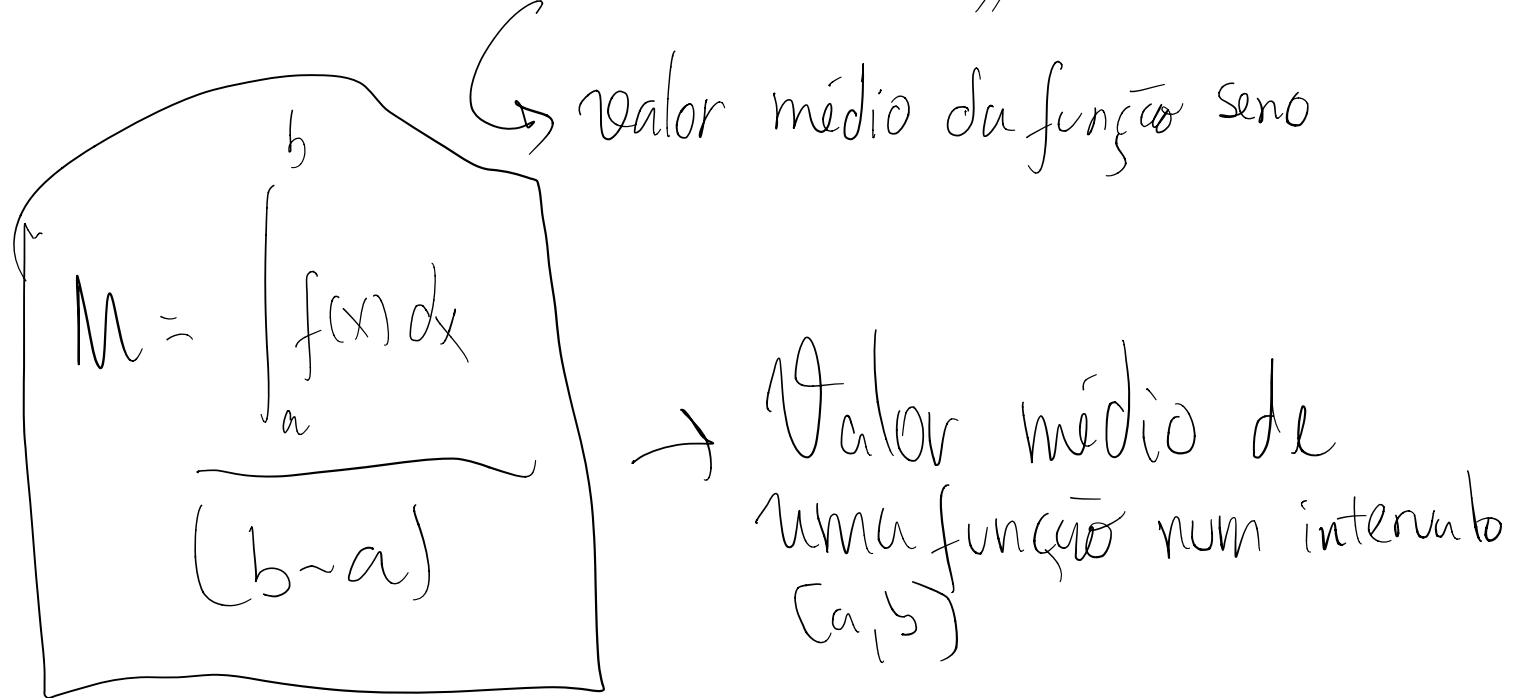
$F$  é primitiva de  $f$

$$F'(x) = f(x)$$

A média de uma função é uma função constante que sobre os mesmos bases realiza a mesma área que a própria função.

$$\int_0^{\pi} \sin x dx = M(\pi - 0) \Rightarrow -\cos x \Big|_0^{\pi} = \cos 0 + \cos \pi = M \cdot \pi$$

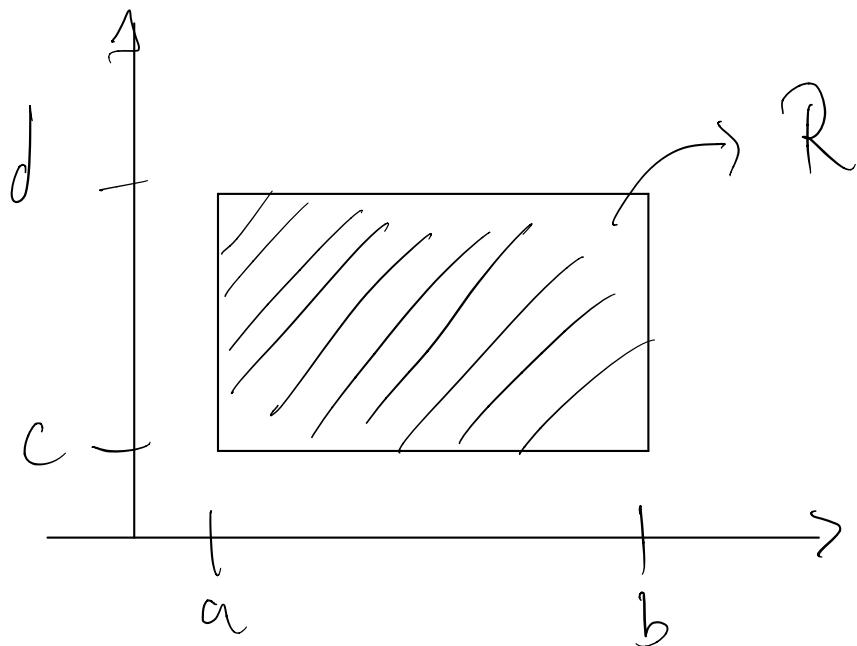
$$M\pi = 2 \Rightarrow \text{Média} = \frac{2}{\pi}$$



# Integral Dupla:

Retângulo de lados paralelos aos eixos

$$R = [a, b] \times [c, d]$$

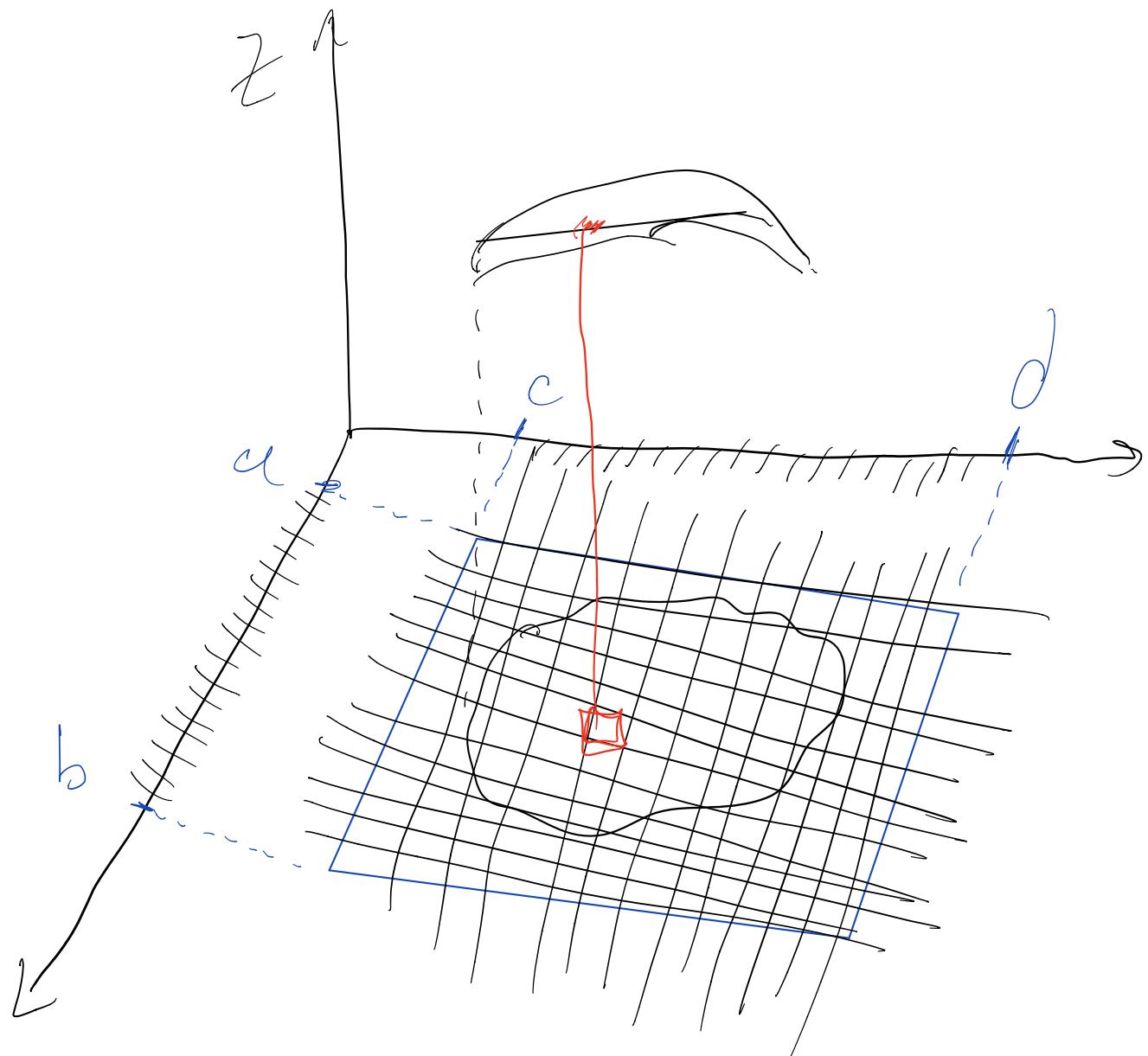


No entanto, por mais que seja simples montar a integral dupla, ela abrange apenas um pequeno leque de funções tornando-se uma ferramenta muito restritiva.

Def:  $D \subset \mathbb{R}^2$  é limitado se existe retângulo  $R = [a, b] \times [c, d]$  com  $D \subset R$

Dada  $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  limitada e com  $D$  limitado em  $\mathbb{R}^2$ , DCR, retângulo.

Tomamos partição de  $[a, b]$  e de  $[c, d]$



Partição dos intervalos  $[a, b]$  e  $[c, d]$   
 O que gera retângulos menores que englobam  
 a figura. Escolhendo então, um ponto arbitrário  
 dentro de cada retângulo c/ sua respectiva partição

Escolho  $(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \in R_{ij}$

$f(\bar{x}_i, \bar{y}_j)$  área ( $R_{ij}$ )

aproximador do volume abaixo do pequeno pedaço  
de superfície

↳ Se  $(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \notin D \Rightarrow f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) = 0$

↳ Volume vai pra 0

Estimador do volume da superfície:

$$\sum_{i,j} f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \text{ área } (R_{ij})$$

Se existir e for finito o  $\lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i,j} f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \text{ área } (R_{ij})$

então dizemos que é integrável em  $D$

Notação:

$$\iint_D f(x,y) dx dy$$

$dx dy = dA$   
Elemento de área

↳ Possui as mesmas propriedades que a integral de uma variável.

### Aplicações:

Imaginando uma função  $f(x,y) = \underline{L}$  ou seja, com altura constante e igual a  $\underline{L}$ , ao calcular seu volume pela integral dupla, chegaremos também ao valor da área do domínio  $D$ , ao qual realizamos a partição.

$$V = \underbrace{h \cdot A}_{f(x,y) \text{ é a altura}} \text{ se } f(x,y) = \underline{L}$$

$$\Rightarrow V = \underline{L} \cdot A \Rightarrow \boxed{\underline{V = A}}$$

Logo, com isso conseguimos definir a área de qualquer região do  $\mathbb{R}^2$

$$\boxed{\text{Área de } D = \iint_D 1 \, dx \, dy}$$

Se a integral em algum conjunto  $D$  não existir, diz-se que o conjunto  $D$  não possui área.

Teorema:  $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , limitada se:

- a fronteira de  $D$  tiver área zero
- O conjunto das descontinuidades de  $D$  tiver área zero

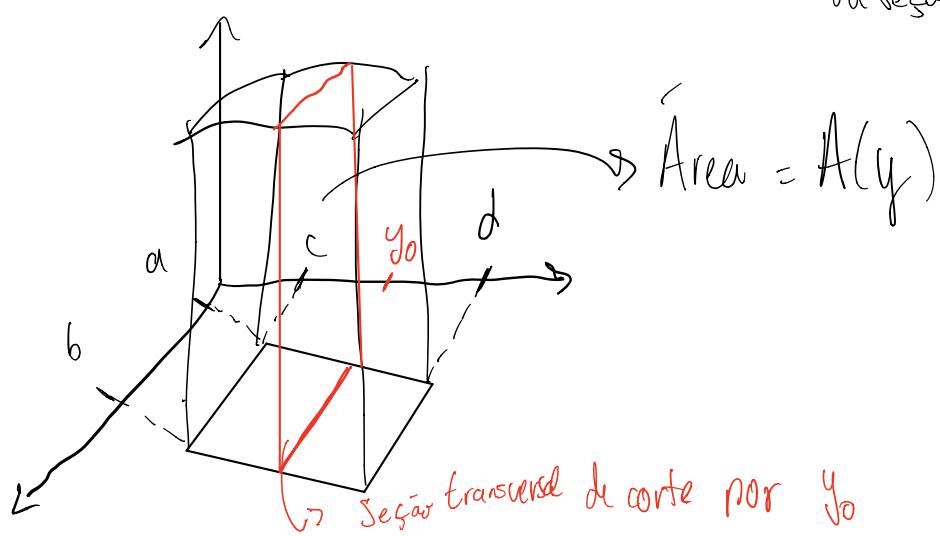
então existe:

$$\iint_D f(x,y) dx dy \hookrightarrow (\text{função e domínio bem comportados})$$

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i,j}^n f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \text{área}(R_{ij})$$

Teorema de Fubini  
(para retângulos)

$y_0 \in [c,d] \rightarrow A(y_0)$  área da seção



$$A(y_0) = \int_a^b f(x, y_0) dx$$

→ Nessa seção, temos que apenas  $x$  está variando ao passo que  $y$  está fixo em  $y_0$ . Comportando-se como uma função de uma variável

$$y \in [c, d] \rightarrow A(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

$$\int_c^d A(y) dy \rightarrow \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$

$\lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n A(\bar{y}_i) \Delta y_i \rightsquigarrow$  Soma de Riemann da partição de  $y$ .

## Teorema de Fubini:

$f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  limitada

$\forall y \in [c, d], A(y) = \int_a^b f(x, y) dx$  existe e que  $A: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  integrável. Então:

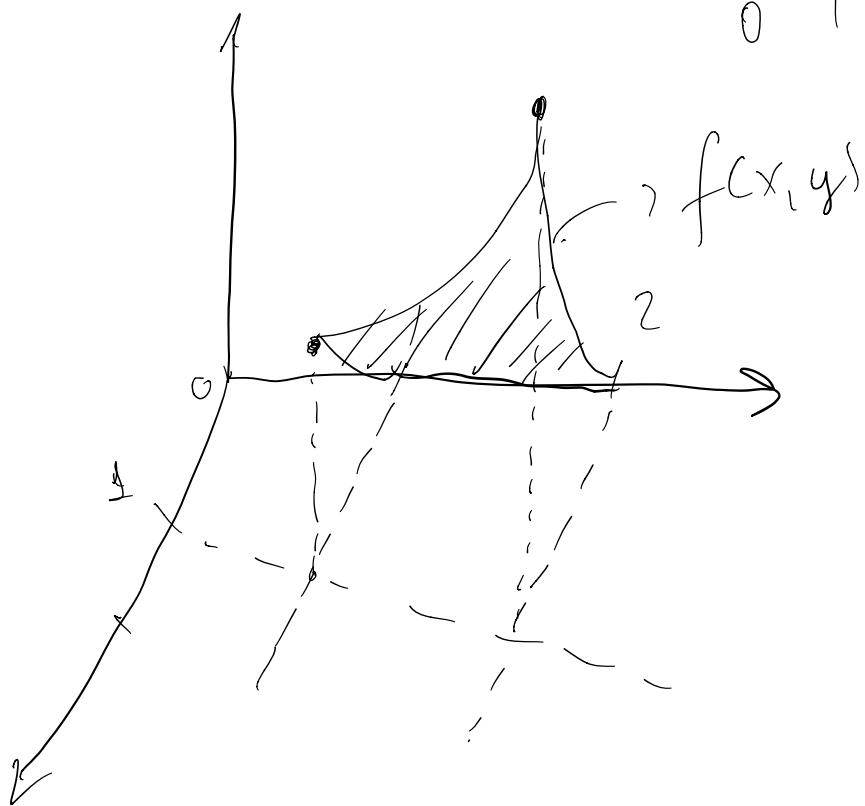
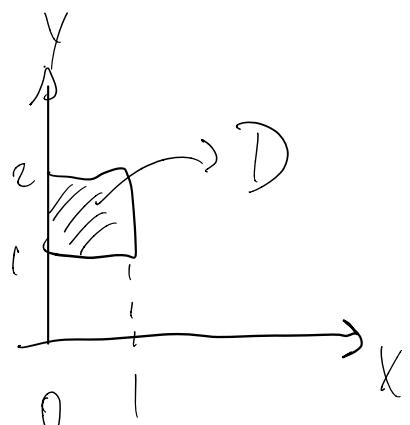
$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$

Sob a mesma analogia:

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x,y) dy dx$$

ex 2 -)  $\iint_D xy^2 dA$

$$D = [0,1] \times [1,2]$$



$$\iint_D xy^2 dA = \int_1^2 \left[ \int_0^1 xy^2 dx \right] dy \rightarrow \begin{array}{l} \text{Integral é feita} \\ \text{de dentro p/ fora} \end{array}$$

→ A primeira integração em  $x$ , mantém  $y$  constante

$$= \int_1^2 \frac{x^2 y^2}{2} \Big|_0^1 dy \Rightarrow \int_1^2 \frac{y^2}{2} dy$$

$$\int_1^2 \frac{y^2}{2} dy = \frac{y^3}{6} \Big|_1^2 = \frac{8}{6} - \frac{1}{6} = \frac{7}{6}$$

$$\text{D) } \iint_D xy^2 dA = \int_0^1 \int_1^2 xy^2 dy dx$$

$$= \int_0^1 \frac{xy^3}{3} \Big|_1^2 = \int_0^1 \frac{8x}{3} - \frac{x}{3} dx \Rightarrow \int_0^1 \frac{7x}{3} dx$$

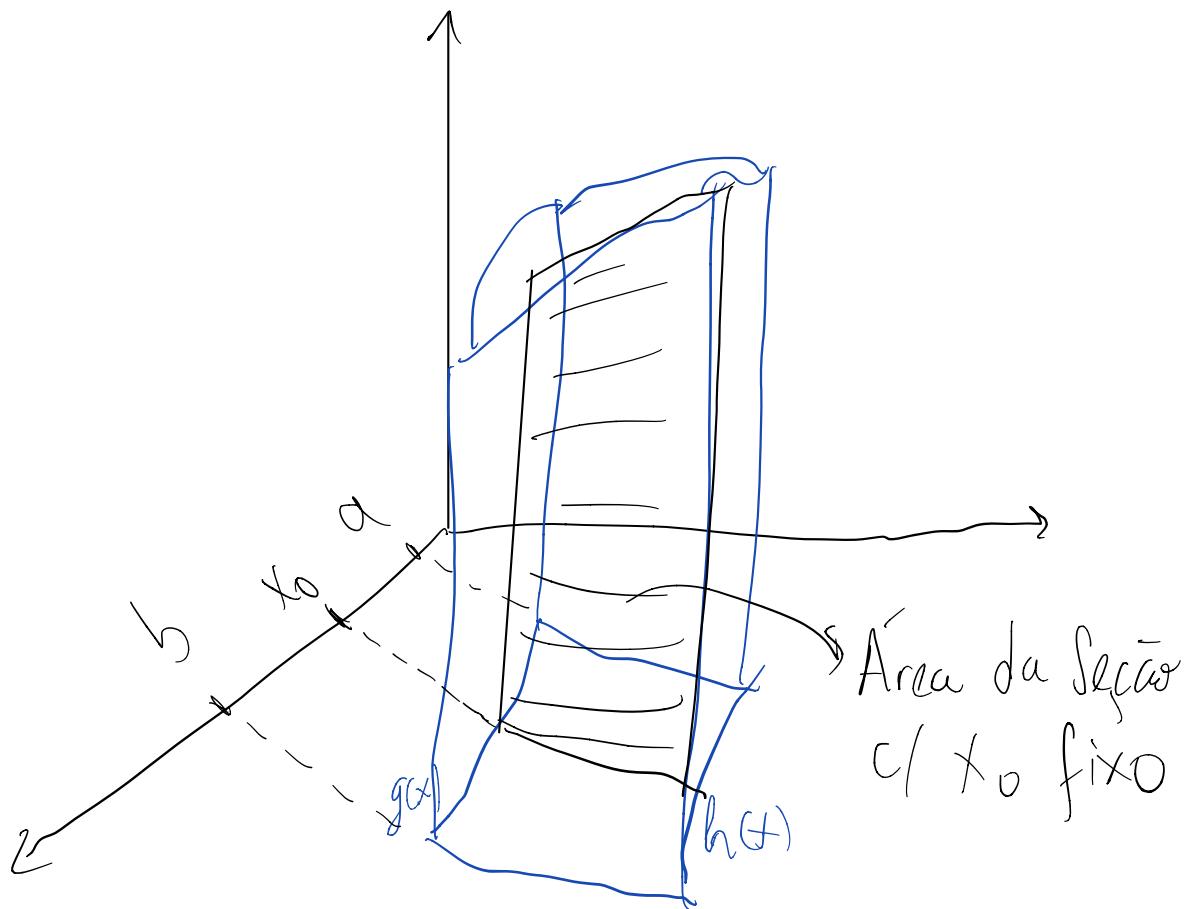
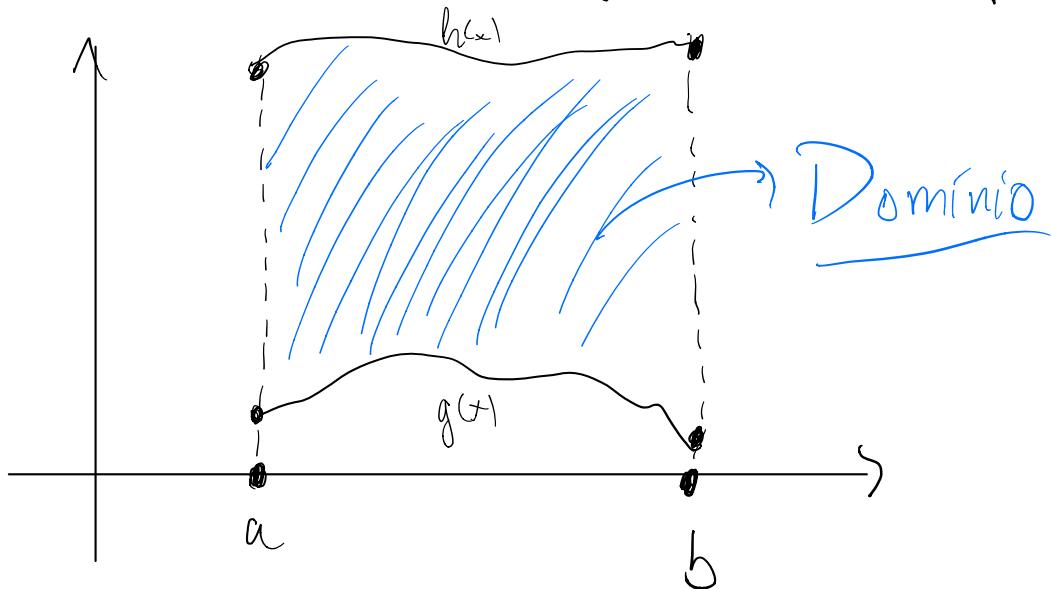
$$= \frac{7}{6} x^2 \Big|_0^1 = \frac{7}{6} - 0 = \frac{7}{6}$$

→ Quando o domínio  $D$  trata-se de um retângulo, não importa a ordem de integração.

# Teorema de Fubini (Geral)

$$f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$D = \{(x, y); a \leq x \leq b \text{ e } g(x) \leq y \leq h(x)\}$$



$$A(x_0) = \int_{g(x_0)}^{h(x_0)} f(x_0, y) dy ; \text{ fazendo agora } x_0 \text{ variar em } [a, b]$$

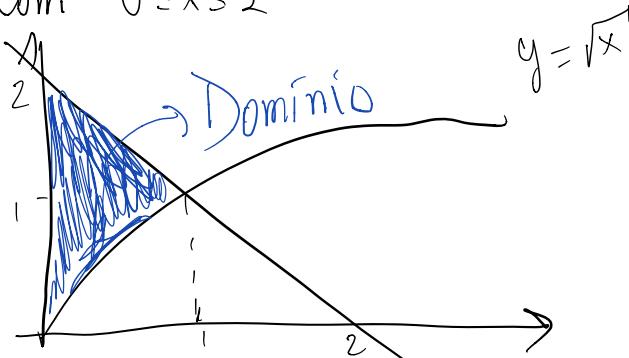
$\forall x \in [a, b]$

$$A(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy ; \text{ fazemos então essa área percorrer todo } x \in [a, b] \text{ obtendo então o volume}$$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy dx$$

Ex2: Calcule  $\iint_D (x^2 - 2x) dA$

Sendo  $D$  a região limitada entre o gráfico de  $y = \sqrt{x}$  e  $y = 2 - x$  com  $0 \leq x \leq 1$



$$\int_0^1 \int_y^{2-y} x^2 - 2x \, dy \, dx$$

$\sqrt{x}$

$$= \int_0^1 (x^2 - 2x)y \Big|_{\sqrt{x}}^{2-x} = \int_0^1 (x^2 - 2x)[\sqrt{x} - 2x] \, dx$$

$$\int_0^1 2x^2 - x^2 + 2x^2 - 4x - x^{5/2} + 2x^{3/2} \, dx$$

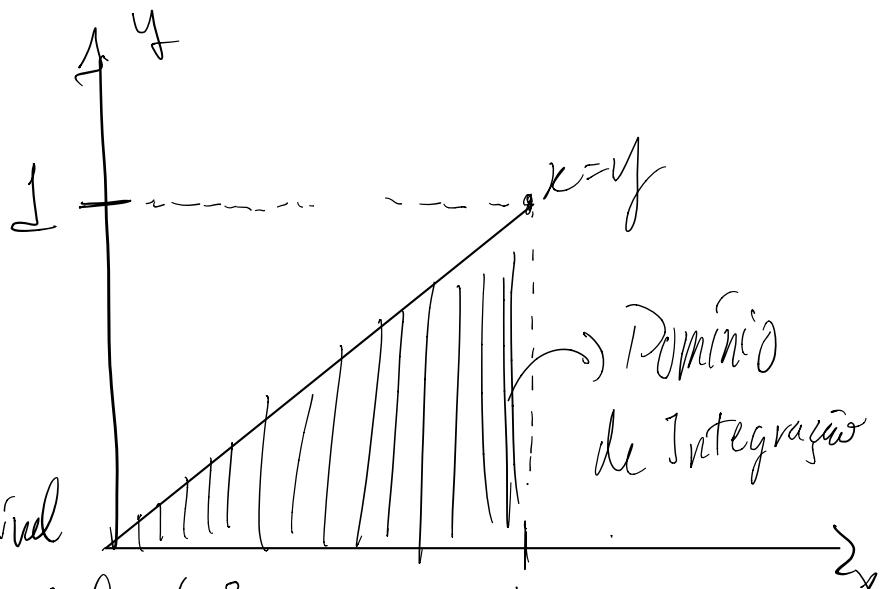
$$\left. \frac{4}{3}x^3 - \frac{x^4}{4} - 2x^2 - \frac{2}{7}x^{7/2} + \frac{4}{5}x^{5/2} \right|_0^1$$

$$= \frac{4}{3} - \frac{1}{4} - 2 - \frac{2}{7} + \frac{4}{5} \quad \boxed{\phantom{00}}$$

Ex: Calcule:

$$\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2} \, dx \, dy$$

Inverte-se a ordem de integração, por é impossível resolver  $\int e^{x^2} \, dx$  mas é possível  $\int e^{x^2} \, dy$



Invertendo a ordem de integração:

$$\int_0^1 \int_0^x e^{x^2} dy dx$$

Mudança de ordem nas del uma maneira que continue respeitando o teorema de Fubini.

$$\int_0^1 e^{x^2} y \Big|_0^x dx =$$

$$\int_0^1 \cancel{x} e^{x^2} dx$$

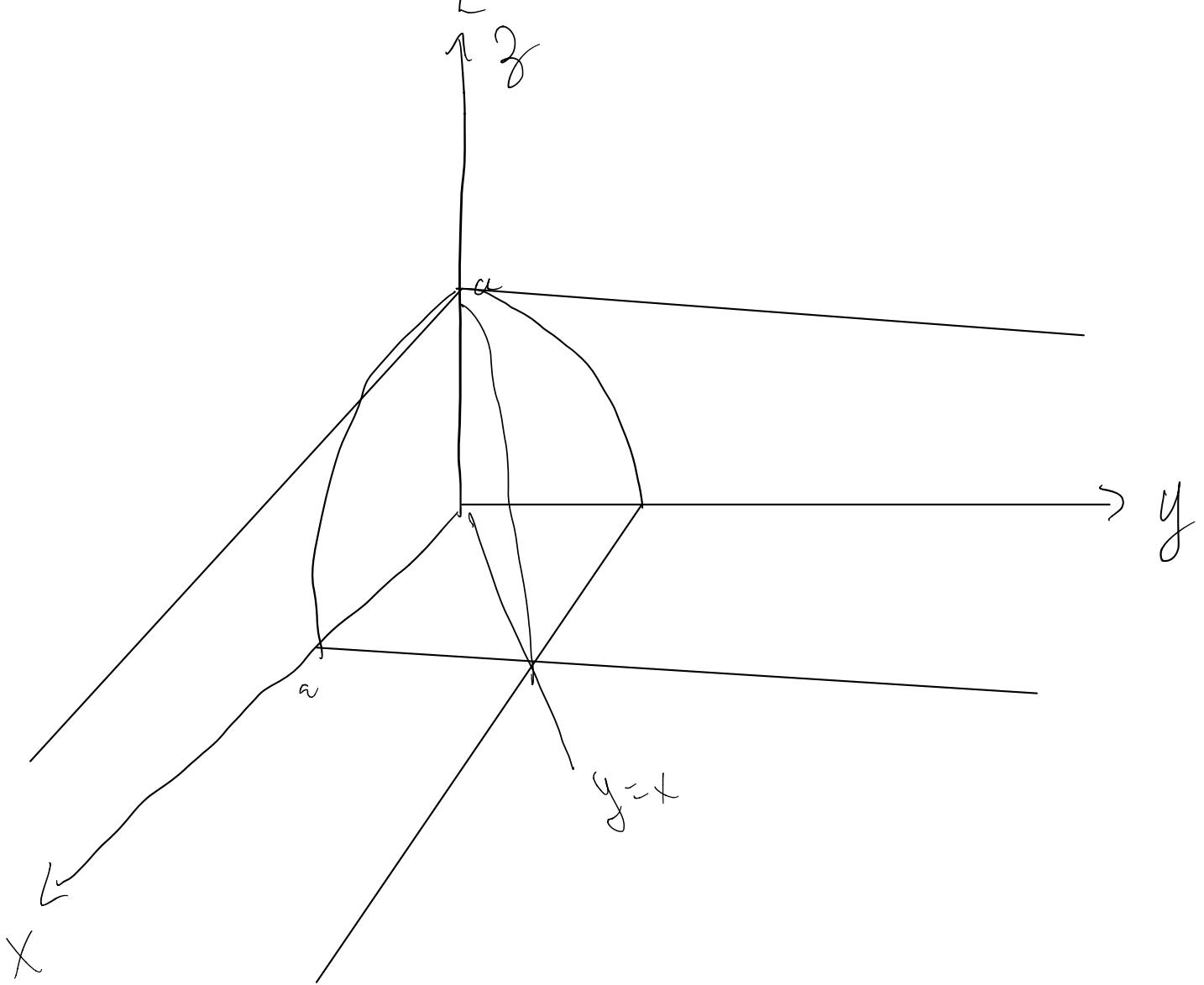
$$u = x^2 \quad \begin{cases} u=0 & \\ u=1 & \end{cases}$$

$$du = 2x dx$$

$$\frac{du}{2} = x dx$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{e^u}{2} du \Rightarrow \frac{e^u}{2} \Big|_0^1 \Rightarrow \frac{e}{2} - \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}(e-1)$$

Ex2: Calcule o volume do sólido dado por:  $x^2 + z^2 \leq a^2$   
 $y^2 + z^2 \leq a^2$  ( $a \neq 0$ )



$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + z^2 = a^2 \\ y^2 + z^2 = a^2 \end{array} \right. \sim y^2 = x^2$$

$y = \pm x$

$$V = \frac{1}{6} \cdot \int_0^a \int_0^y \sqrt{a^2 - y^2} \, dx \, dy$$

$$V = \frac{1}{2} \int_0^a y \sqrt{a^2 - y^2} dy$$

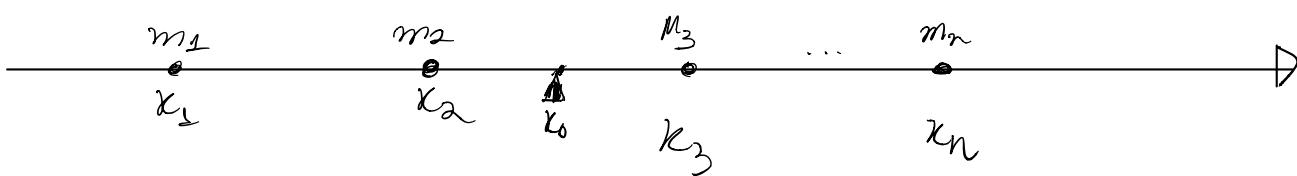
$$u = a^2 - y^2 \quad \begin{cases} u = a^2 \\ u = 0 \end{cases}$$

$$du = -2y dy$$

$$y dy = \frac{du}{2}$$

$$V = \frac{-16}{2} \int_{a^2}^0 \sqrt{u} = V = \frac{16}{2} \int_0^{a^2} \sqrt{u} du = \frac{16}{2} \int_0^{a^2} u^{1/2} du$$

$$V = \frac{16}{2} \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} \Big|_0^{a^2} = \frac{16}{3} (a^2)^{3/2} = \frac{16a^3}{3}$$



$\sum_{x=x_0}^{momento} M \sum m_i (x_i - x_0)$

$M_x = X_G \rightsquigarrow$  centro de gravidade (se apoiado em cima de  $x_0 = X_G$ , o sistema permanece em equilíbrio estático)

$$\sum (x_i - x_g) m_i = 0$$

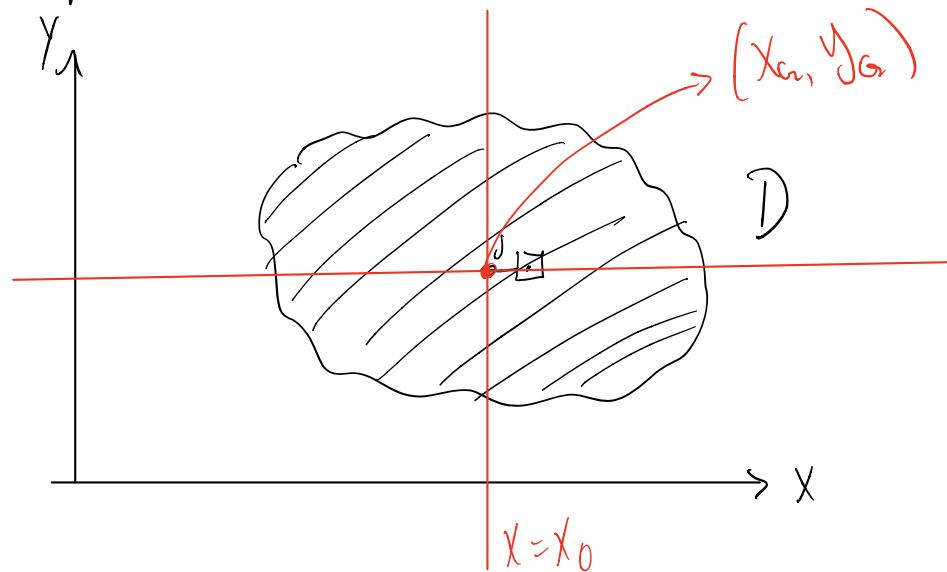
$$\sum m_i x_i - \sum m_i x_g = 0 \Rightarrow \boxed{\sum m_i x_i = x_g \sum m_i}$$

Definição de centro de gravidade:

$$x_g = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{M_{x=0}}{\text{Massa}}$$

Aplicação:

$D \subset \mathbb{R}^2$  placa com  $\delta: D \rightarrow \mathbb{R}$   $\delta(x,y)$  = densidade superficial



O centro de gravidade da placa será dado pelo seguinte raciocínio:  
 Encontrar uma reta vertical na qual equilibre o objeto de qualquer movimento horizontal, depois encontrar outra reta horizontal que equilibre o objeto de qualquer movimento vertical. O centro de gravidade será a intersecção dessas duas retas.

$$\sum_{i,j} \delta(x_i, y_j) \text{área}(R_{ij}) (x_i - x_0) \approx \text{estimador do momento}$$

$$M_{x=x_0} = \iint_D (x - x_0) \delta(x, y) dA$$

$$M_{y=y_0} = \iint_D (y - y_0) \delta(x, y) dA$$

$(x_{\text{gr}}, y_{\text{gr}})$  é o centro de gravidade de  $D$  se  $M_{x=x_{\text{gr}}} = 0$   $M_{y=y_{\text{gr}}} = 0$

$$M_{x=x_{\text{gr}}} = 0 \Leftrightarrow \iint_D (x - x_{\text{gr}}) \delta(x, y) dA = 0 \Rightarrow \iint_D x \delta(x, y) dA = \iint_D x_{\text{gr}} \delta(x, y) dA$$

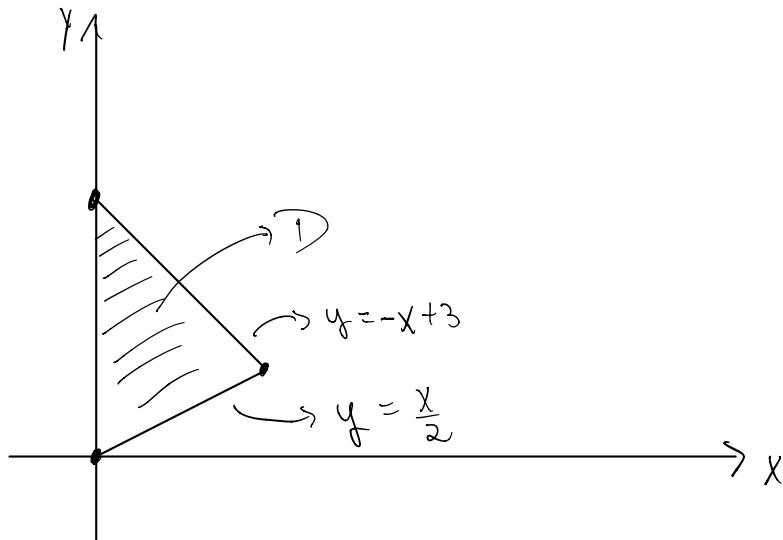
$$\iint_D x \delta(x, y) dA = x_{\text{gr}} \iint_D \delta(x, y) dA \Rightarrow x_{\text{gr}} = \frac{\iint_D x \delta(x, y) dA}{\iint_D \delta(x, y) dA}$$

Concomitantemente p/  $y_{\text{gr}}$ :

$$y_{\text{gr}} = \frac{\iint_D y \delta(x, y) dA}{\iint_D \delta(x, y) dA}$$

Ex 3: Centro de gravidade de um triângulo de vértices  $(0,0)$ ;  $(0,3)$ ;  $(2,1)$  com densidade proporcional à abscissa do ponto.

$$\delta(x,y) = k \cdot x \quad k \in \mathbb{R}, \text{ constante}$$



$$\text{massa} = \iint_D \delta(x,y) dx dy = \int_0^2 \int_{x/2}^{-x+3} kx dy dx$$

$$k \int_0^2 \left( -x^2 + 3x - \frac{x^2}{2} \right) dx = k \left( -\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) \Big|_0^2 \Rightarrow k \left( -\frac{8}{3} + \frac{12}{2} - \frac{8}{6} \right) = 2k$$

$$\begin{aligned} M_{x=0} &= \iint_D x \delta(x,y) dx dy = \int_0^2 \int_{x/2}^{-x+3} kx^2 dy dx = k \int_0^2 x^2 y \Big|_{-\frac{x}{2}}^{-x+3} dx = k \int_0^2 -x^3 + 3x^2 - \frac{x^3}{2} dx \\ &= k \left( -\frac{x^4}{4} + x^3 - \frac{x^4}{8} \right) \Big|_0^2 = k(-4 + 8 - 2) = 2k \end{aligned}$$

$$M_{y=0} = \iint_D y \delta(x,y) dx dy = \int_0^2 \int_{x/2}^{-x+3} kx y dy dx$$

# Mudança de variáveis

## Observações preliminares

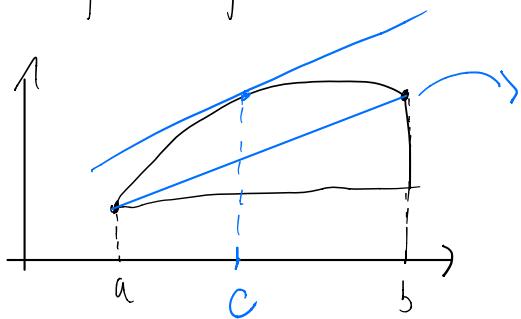
1-) Em uma variável:

$$\int_a^b f(x) dx \xrightarrow{X = g(u) \quad dx = g'(u) du} \int_c^d f(g(u)) g'(u) du$$

mudança de variável

2-) Teorema do valor médio (TVM)

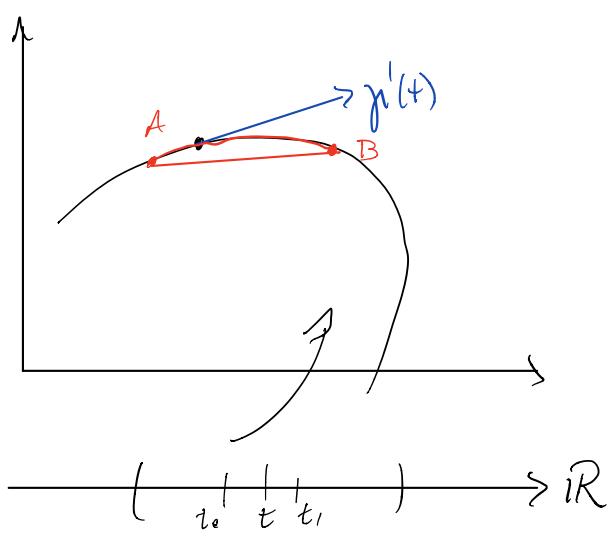
$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$



$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$  → TVM diz que existe um ponto "c" no meio do intervalo  $[a, b]$  cuja tangente (derivada) é paralela a reta  $ab$

3-) Curvaz

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) \quad (\text{no plano})$$



$$\gamma'(t) = (x'(t), y'(t)) \quad (\text{vetor tangente a curva})$$

$$A = \gamma(t_0) = (x(t_0), y(t_0))$$

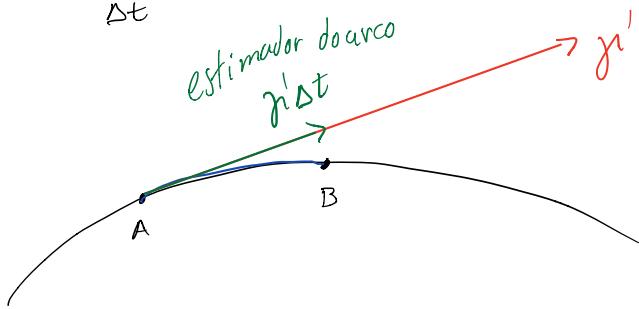
$$B = \gamma(t_1) = (x(t_1), y(t_1))$$

No situação limite em que  $B \rightarrow A$  tanto a reta  $\overline{AB}$  quanto o arco  $\widehat{AB}$  tende a ficar mais próximos (direção e tamanho). Quando  $\Delta t \rightarrow 0$

Logo quando  $\Delta t \rightarrow 0 \Rightarrow \widehat{\vec{AB}} \approx \vec{AB} = (x(t_1) - x(t_0); y(t_1) - y(t_0))$

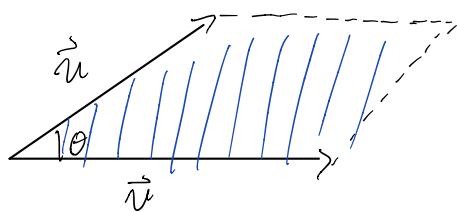
aplicando o TVM

$$\left( \frac{x'(\bar{t})(t_1 - t_0)}{\Delta t}; \frac{y'(\bar{t})(t_1 - t_0)}{\Delta t} \right) \approx (x'(\bar{t}); y'(\bar{t})). \Delta t = y'(\bar{t}) \Delta t$$



4-) Produto vetorial  $\vec{u}, \vec{v}$  vetores no  $\mathbb{R}^3$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} ; \quad \vec{u} \wedge \vec{v} \perp \vec{u}, \quad \vec{u} \wedge \vec{v} \perp \vec{v}$$



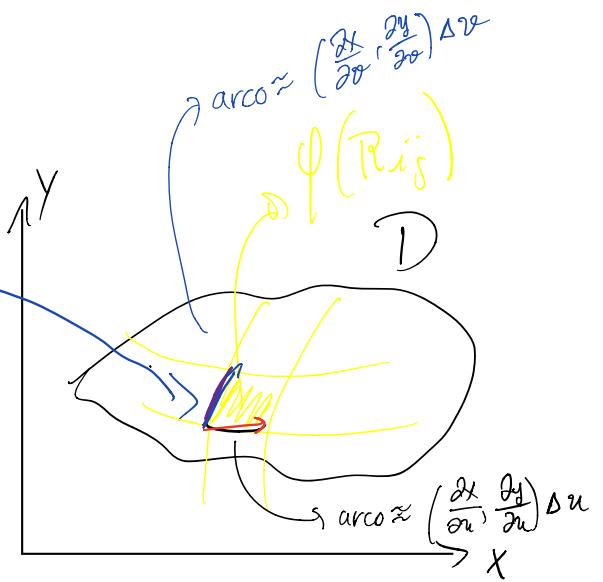
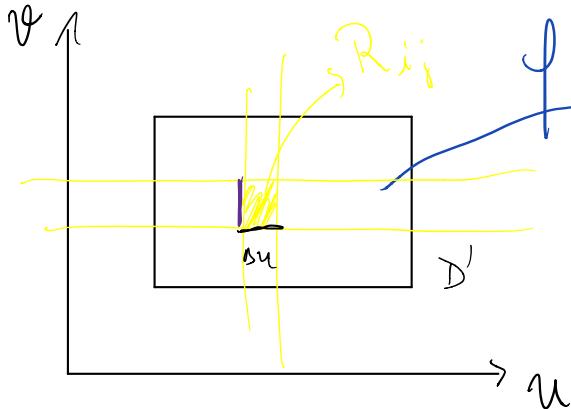
$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin \theta$$

↳ área do paralelogramo definido por  $\vec{u} e \vec{v}$

"em  $\mathbb{R}^2$ "

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & 0 \\ v_1 & v_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

## 5) Mudança de Variável



A fim de obter um domínio mais adequado p/ integração, por exemplo de alguma figura bizarra p/ algo retangular e muito mais simples de integrar, mudamos o domínio de integração por meio de uma transformação (função) que leve os pontos  $(x, y)$  do domínio  $D$  para um domínio mais adequado  $D'$  de pontos  $(u, v)$

$$\psi(u, v) = (x(u, v); y(u, v))$$

Imaginando uma partição no domínio  $D'$ , essa partição será transmitida a  $D$  por meio da função  $\psi$ . Uma pergunta cabível seria: qual a relação entre as duas áreas da mesma partição?

$$u \rightarrow \psi(u, v_0) = (x(u, v_0); y(u, v_0))$$

$$\text{ vetor tangente : } \left( \frac{\partial x}{\partial u}(u, v_0); \frac{\partial y}{\partial u}(u, v_0) \right)$$

o módulo do produto  
vetorial é justamente  
a área delimitada entre os  
polígonos. Em português:

para um infinitesimal de área

$$\text{área}(\psi(R_{ij})) \approx \left\| \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \Delta u \wedge \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \Delta v \right\| ; \text{ logo:}$$

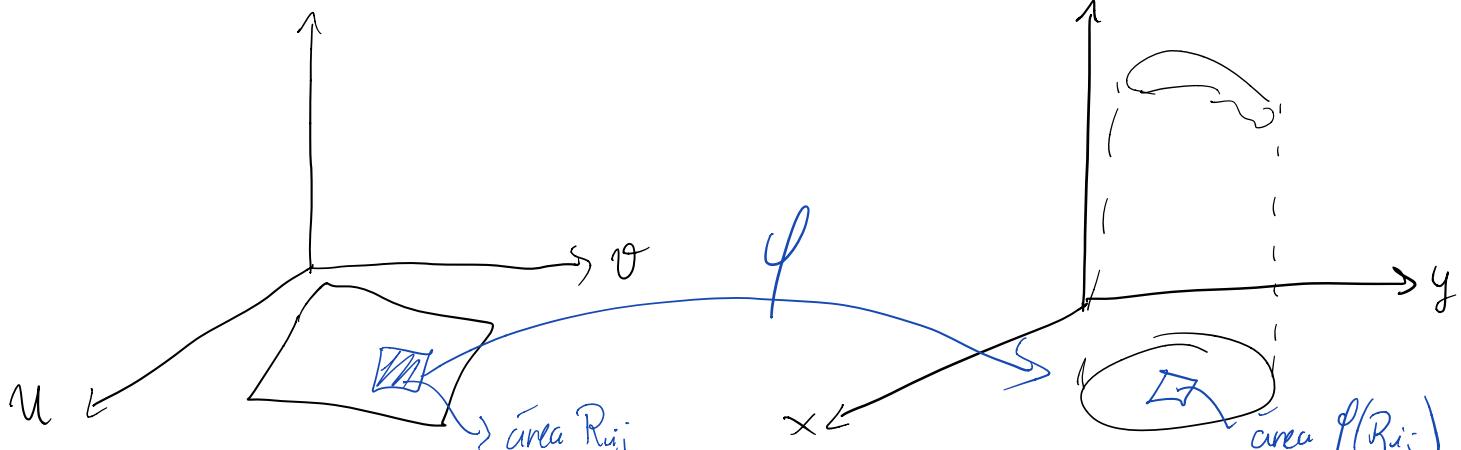
$\boxed{\text{área}(\psi(R_{ij})) \approx \left\| \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \Delta u \Delta v \right\|}$

$$= \left| \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \right| \Delta u \Delta v = \boxed{|\mathcal{J}| \text{ área}(R_{ij}) = \text{área}(\psi(R_{ij}))}$$

Jacobiano ( $\mathcal{J}$ )

Ao realizar uma mudança de variável, as áreas dadas pelas transformações realizadas pela função  $\psi$  não são iguais. Para poder afirmar igualdade entre áreas, entra o papel do Jacobiano. Esse fator de correção de área

OBS: O estimador da área em  $xy$  é dado pelo vetor tangente, visto que não necessariamente trata-se de uma região inteiramente reta.



$$\iint_D f(x,y) dx dy = \sum_{i,j} f(x_i, y_j) \text{ área } \varphi(R_{ij})$$

$$\approx \sum_{i,j} f(\varphi(u_i, v_j)) |J| \text{ área } R_{ij}$$

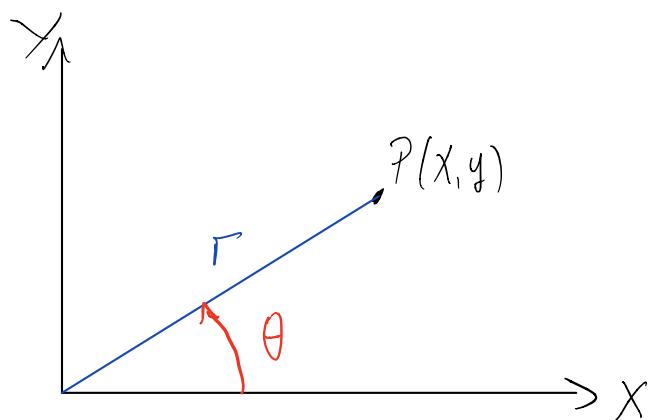
Teorema:  $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  contínua;  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow D$

- $\varphi$  é de classe  $C^1$ , injetora
- $|J| \neq 0$  no interior de  $R$

Então:

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \iint_R f(\varphi(u,v)) \cdot |J| du dv$$

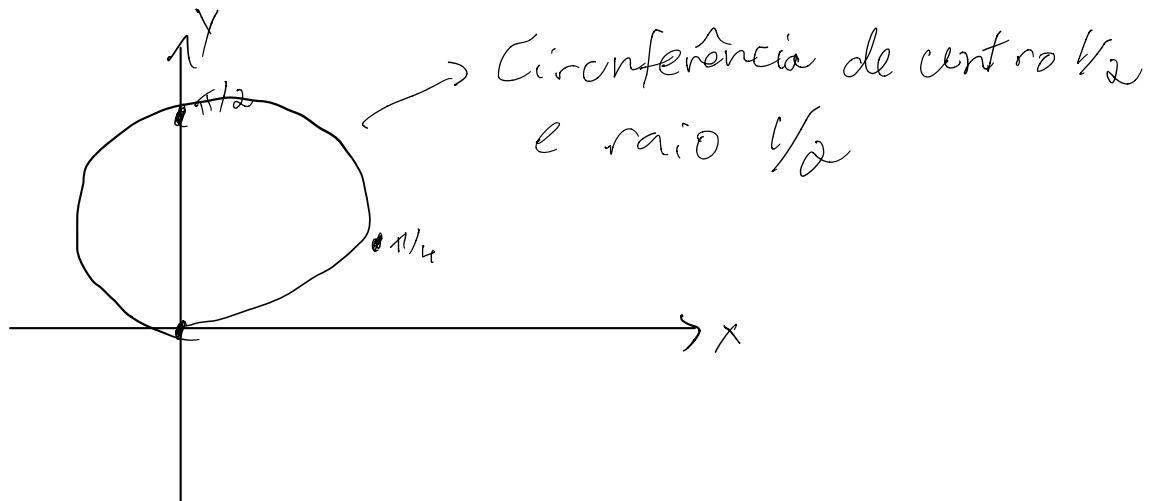
Exemplo: Coordenadas Polares  $(r, \theta)$



$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad r \geq 0$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

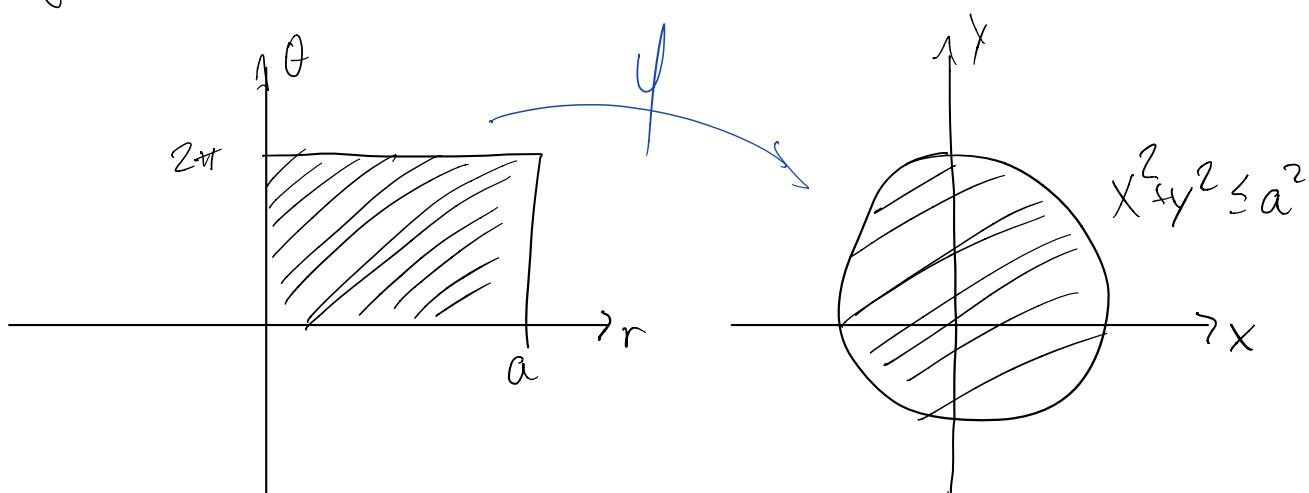
$$r(\theta) = \sin \theta$$



$$x(r, \theta) = r \cdot \cos \theta \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

$$r \geq 0$$

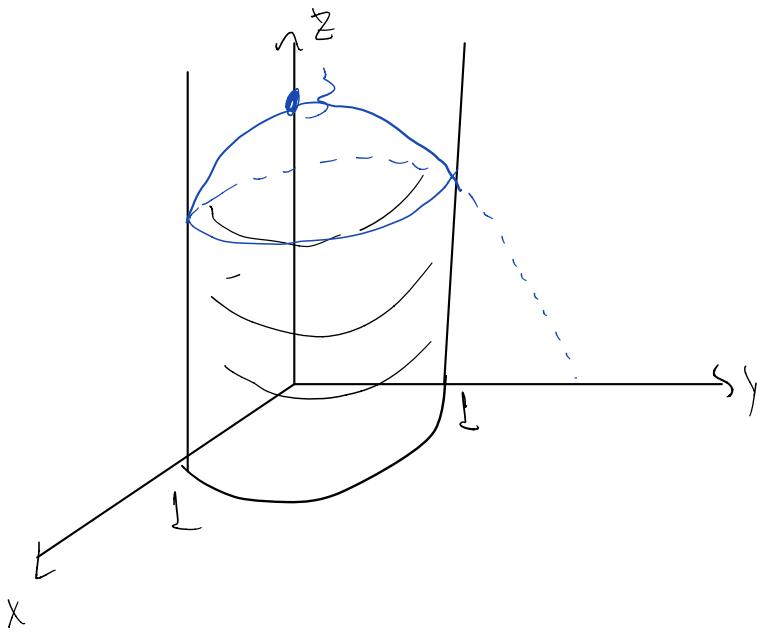
$$y(r, \theta) = r \cdot \sin \theta$$



$$\begin{aligned} J &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -r \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r (\underbrace{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}_{1}) = \boxed{r} \end{aligned}$$

$$\boxed{|J| = r} \quad (\text{Coordenadas Polares})$$

Ex: Calcule o volume do sólido dado por:  $x^2+y^2 \leq 1$ ,  $z \geq 0$



$$0 \leq z \leq 3 - x^2 - y^2$$

$$\iint_D (3 - x^2 - y^2) dx dy \text{ onde } D: x^2 + y^2 \leq 1$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (3 - x^2 - y^2) dy dx \quad (\text{too complex})$$

↳ mudança de variável

p/ coordenadas polares

$$x = r \cos \theta \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$y = r \sin \theta \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$|J| = r$$

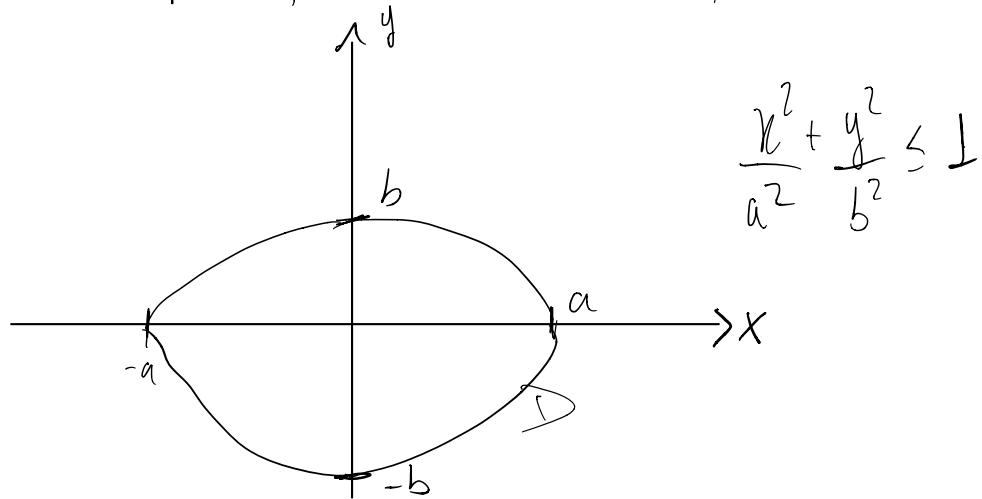
*Sacobiano!*

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 r(3 - r^2) dr d\theta = 2\pi \int_0^1 3r - r^3 dr = 2\pi \left[ \frac{3r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^1$$

$$2\pi \left[ \frac{3}{2} - \frac{1}{4} \right] = 2\pi \left[ \frac{5}{4} \right] \Rightarrow \underline{\underline{\frac{5\pi}{2}}}$$

## Casos Particulares:

Passando uma elipse para coordenadas polares:

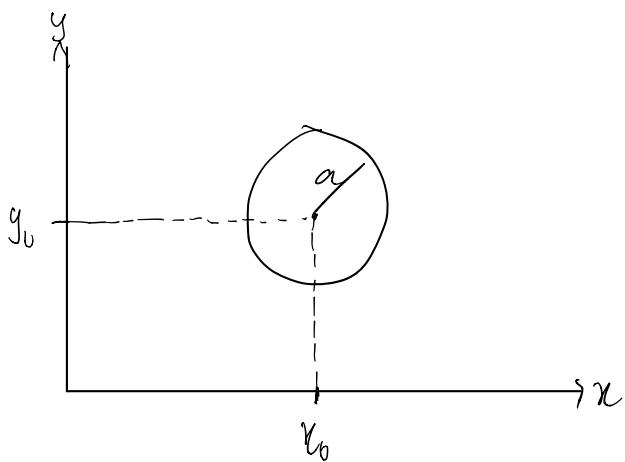


Realizando a seguinte mudança de variável:

$$\begin{cases} x = a \cdot r \cdot \cos \theta \\ y = b \cdot r \cdot \sin \theta \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 1 \end{cases} \Rightarrow |J| = abr$$

Logo, teremos:  $\iint_D f(x,y) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 f(r,\theta) abr dr d\theta$

Analisando o caso de uma circunferência de centro  $(x_0, y_0)$ :

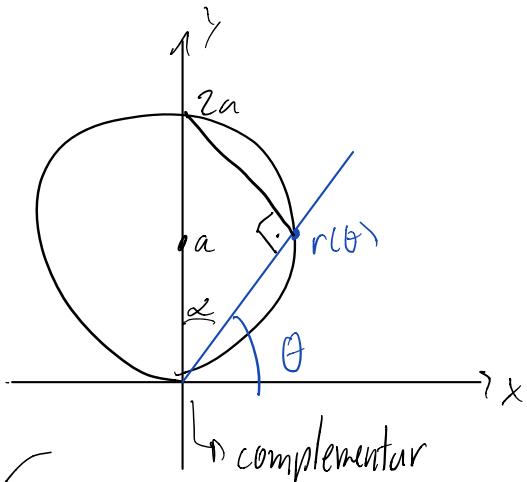


$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq a^2$$

$$\begin{cases} x = x_0 + r \cdot \cos \theta \\ y = y_0 + r \cdot \sin \theta \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq a \end{cases} \Rightarrow |J| = r$$

$$0 \leq r \leq a$$

$$iii) -) x^2 + (y-a)^2 \leq a^2$$



duas possibilidades de mudança:

$$i) \begin{cases} x = r \cdot \cos \theta \\ y = a + r \cdot \sin \theta \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{desloca o origem} \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq \end{array}$$

complementar  
 $\alpha + \theta = \pi/2$

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

$$0 \leq r \leq 2a \sin \theta$$

$$ii) \begin{cases} x = r \cdot \cos \theta \\ y = r \cdot \sin \theta \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{não desloca a origem} \\ \text{da circunferência, logo} \\ \text{os extremos de r e} \\ \text{devem ser ajustados} \end{array}$$

$$\cos \alpha = \frac{r(\theta)}{2a}$$

$$r(\theta) = 2a \cos \alpha \Rightarrow r(\theta) = 2a \sin \theta \quad (\text{maneira geométrica})$$

Método analítico  $\leadsto$  jogar a mudança de variável na função.

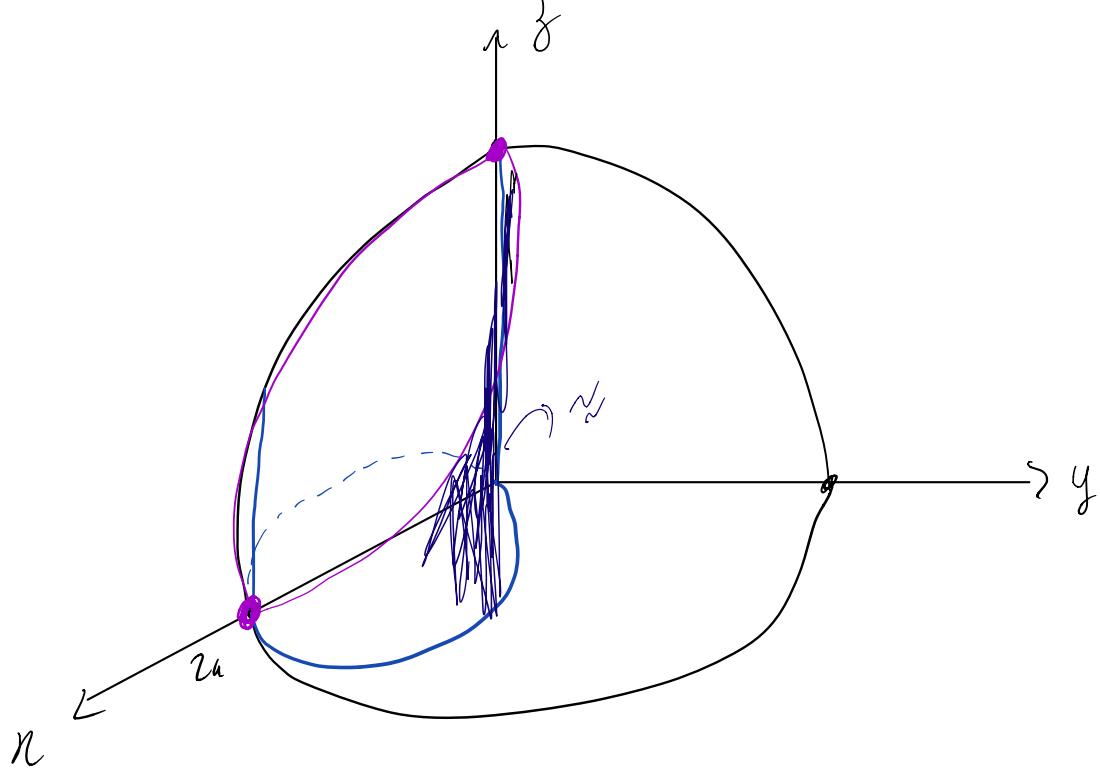
$$\underbrace{x^2 + y^2}_{r^2} - 2ay \leq 0$$

$$r^2 - 2arsin\theta \leq 0 \quad \leadsto \quad r \leq 2a \sin \theta$$

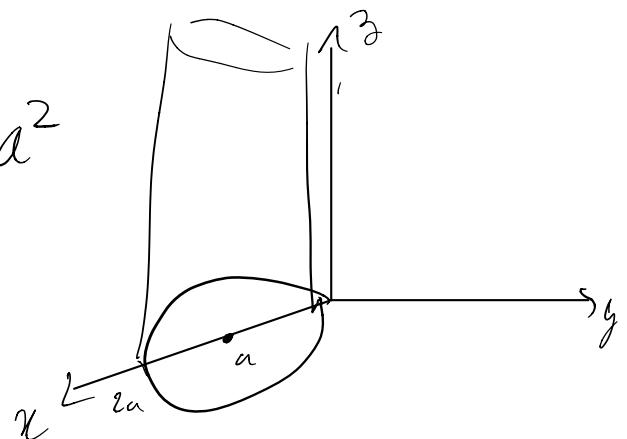
Ex: Volume do Sólido no interior de  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4a^2$  e no interior de  $x^2 - 2ax + y^2 \leq 0$

$z$  não está presente portanto é valida  $z \in \mathbb{R}$

Sfera no origem de raio  $2a$ .

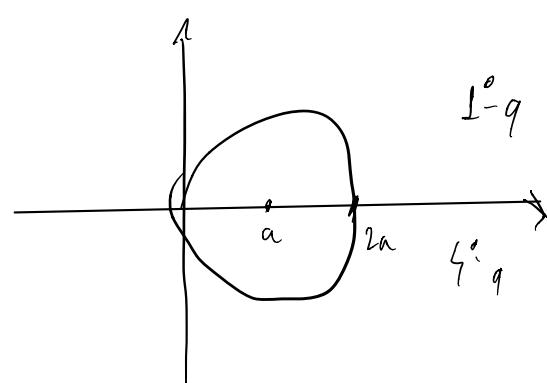


$$x^2 - 2ax + y^2 = 0 \rightsquigarrow (x-a)^2 + y^2 = a^2$$



a figura pega tanto no  $y^{>0}$  quanto  $y^{<0}$

$$\text{Vol} = 2 \iint_{D_{xy}} \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2} \, dx \, dy$$



fazendo a mudança de variável:  $\begin{cases} x = r \cdot \cos \theta & -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2 \\ y = r \cdot \sin \theta & 0 \leq r \leq 2a \cos \theta \end{cases}$

$$|S| = r$$

Com isso, a integral se transforma em:

$$2 \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2a\cos\theta} \sqrt{4a^2 - r^2} r dr d\theta \quad 4a^2 - r^2 = u \quad r=0 \Rightarrow u=4a^2$$

$$du = -2rdr \quad r=2a\cos\theta \Rightarrow u=4a^2 - 4a^2\cos^2\theta$$

$$u = 4a^2(1 - \cos^2\theta)$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left( u^{1/2} \left( -\frac{1}{3} u^{-3/2} \right) \right) du d\theta = - \left[ \frac{2}{3} u^{3/2} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \quad 4a^2 \sin^2\theta \quad 4a^2 \sin^2\theta$$

$$= - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (8a^3 |\sin^3\theta| - 8a^3) \frac{2}{3} \int \theta = - \frac{16a^3}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (|\sin^3\theta| - 1) d\theta$$

$$= - \frac{32a^3}{3} \int_0^{\pi/2} \sin^3\theta - 1 d\theta \Rightarrow - \frac{32a^3}{3} \int_0^{\pi/2} \sin\theta - \cos^2\theta \sin\theta - 1 d\theta$$

$$- \frac{32a^3}{3} \left( -\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3} - \theta \right) \Big|_0^{\pi/2} = - \frac{32a^3}{3} \left( -\cos\pi/2 + \frac{\cos^3\pi/2}{3} - \pi/2 \right)$$

$$+ \cos 0 - \frac{\cos^3 0}{3} + 0 \Big) = - \frac{32a^3}{3} \left( -\pi/2 + 1 - \frac{1}{3} \right)$$

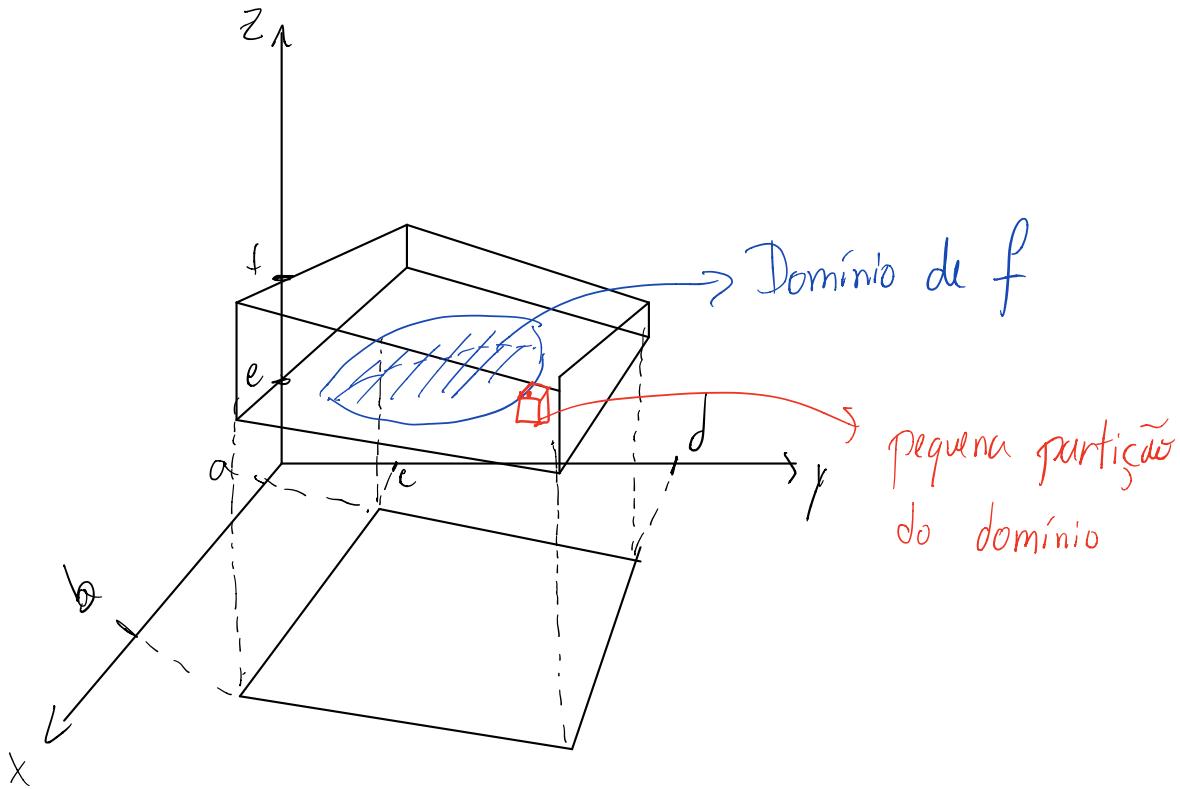
$$= \frac{32a^3}{3} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right)$$

- Bonito né?

## Integrais Triplos:

$f: D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$   $\rightsquigarrow$  Imaginando  $f$  como função densidade de um ponto no espaço.

$D \subset [a,b] \times [c,d] \times [e,f]$



$$P = \text{partição} \Rightarrow \sum_{i,j,k} f(x_i, y_j, z_k) \text{Vol}(R_{ijk}) \approx \text{estimativa da massa}$$

$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i,j,k} f(x_i, y_j, z_k) \text{Vol}(R_{ijk})$  se a soma tiver um limite finito, então

$f$  é integrável em  $D$

$$\iint\limits_D f(x, y, z) dv = \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz$$

A ideia é análoga à integral dupla, só que ao invés de realizar uma partição em pequenos retângulos, realizamos a partição em pequenos paralelepípedos.

Se existe  $\iiint_D L \, dv$ , então  $D$  tem volume e:

$$\boxed{\text{Vol}(D) = \iiint_D L \, dv}$$

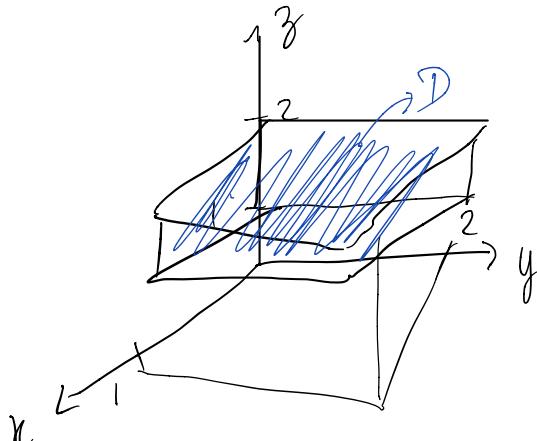
Teorema de Fubini p/ paralelepípedos:

$f: D = [a, b] \times [c, d] \times [e, f] \rightarrow \mathbb{R}$  integrável

$$\iiint_D f(x, y, z) \, dv = \int_c^d \int_e^f \int_a^b f(x, y, z) \, dx \, dz \, dy$$

Novamente a ordem de integração p/ este caso não importa (necessitando apenas mudanças coerentes na integral.)

Ex: Calcule  $\iiint_D xyz \, dv$  sobre  $D = [0, 1] \times [0, 2] \times [1, 2]$

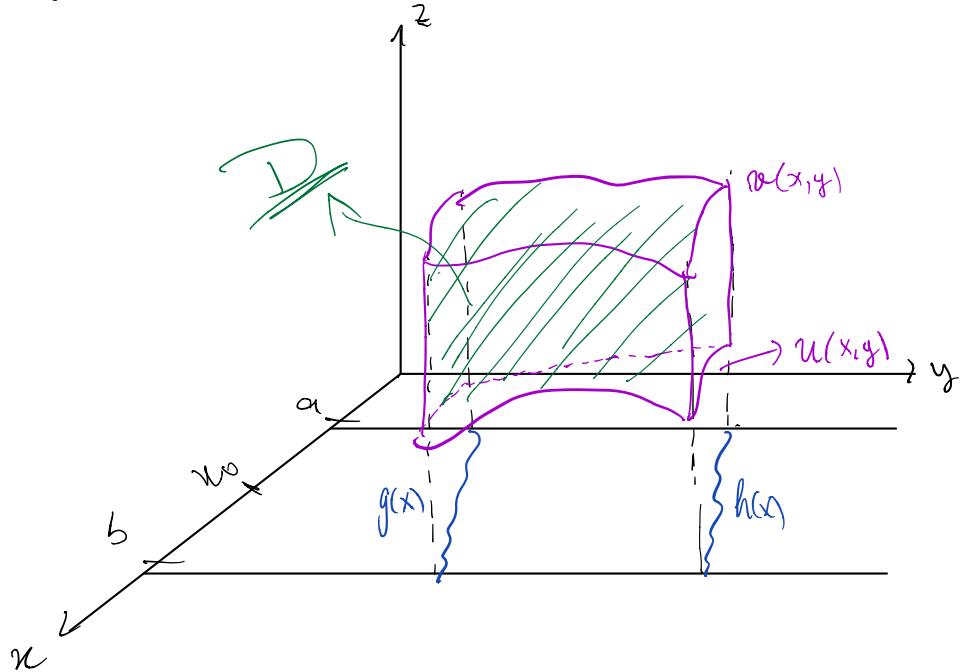


$$\begin{aligned} \iiint_D xyz \, dv &= \int_1^2 \int_0^2 \int_0^1 xyz \, dx \, dy \, dz = \int_1^2 \int_0^2 \frac{x^2 z}{2} \Big|_0^1 \, dy \, dz \\ &= \int_1^2 \int_0^2 \frac{y^2 z}{2} \, dy \, dz = \int_1^2 \frac{y^3 z}{6} \Big|_0^2 \, dz = \int_1^2 z \, dz = \frac{z^2}{2} \Big|_1^2 \\ &= 2 - \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

## Teorema de Fubini - Caso Geral:

$f: D \subset \mathbb{R}^3$ ,  $D$  limitado,  $f$  integrável      hipótese:  $\forall x_0 \in [a, b]$  existe  $\iint_D f(x_0, y, z) dy dz$

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq x \leq b; g(x) \leq y \leq h(x); u(x, y) \leq z \leq v(x, y) \right\}$$



pode haver mudança na ordem.

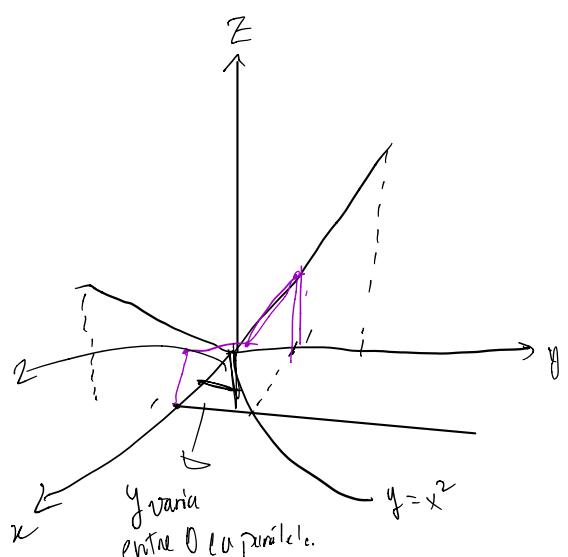
$$\iiint_D f(x, y, z) dv = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} \int_{u(x, y)}^{v(x, y)} f(x, y, z) dz dy dx$$

Ex:  $\iiint_D y dk dy dz$

$D$ : abaixo de  $z = x + 2y$ ; acima de  $xy$ :

limitado:  $y = x^2$ ;  $y = 0$ ;  $x = 1$

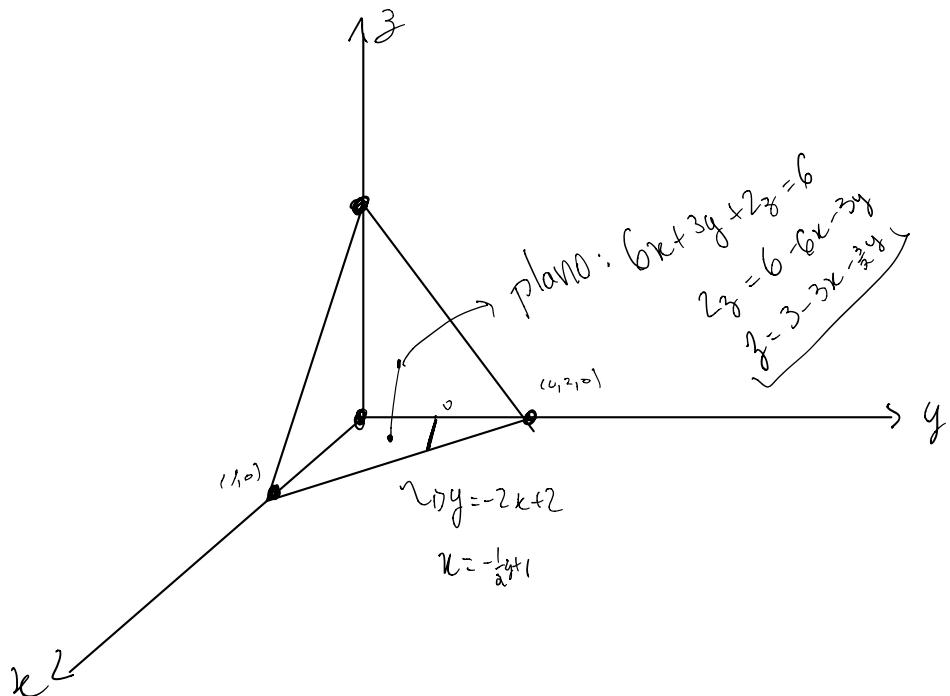
$z$  varia entre  $z = 0$  e o plano  $x+2y$



$$\int_0^1 \int_0^{x^2} \int_0^{x+2y} y^2 dz dy dx = \int_0^1 \left( yz \Big|_0^{x+2y} \right) dy dx = \int_0^1 (x+2y)^2 dy dx$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \left( \frac{y^2 x}{2} + \frac{2y^3}{3} \Big|_0^{x^2} \right) = \int_0^1 \left( \frac{x^4}{2} + \frac{2x^3}{3} \right) dx = \int_0^1 \left( \frac{x^5}{2} + \frac{2^2 x^3}{3} \right) dx = \left[ \frac{x^6}{12} + \frac{2x^5}{21} \right]_0^1 \\ = \frac{1}{12} + \frac{2}{21} = \frac{7+8}{84} = \frac{15}{84} = \frac{5}{28}$$

Ex: Escreva a integral  $\iiint f(x, y, z) dv$  V é a pirâmide de vértices  $(0, 0, 0)$ ;  $(1, 0, 0)$ ;  $(0, 2, 0)$ ;  $(0, 0, 3)$



$$\int_0^2 \int_0^{1-y/2} \int_0^{3-3x-\frac{3}{2}y} f(x, y, z) dz dx dy$$

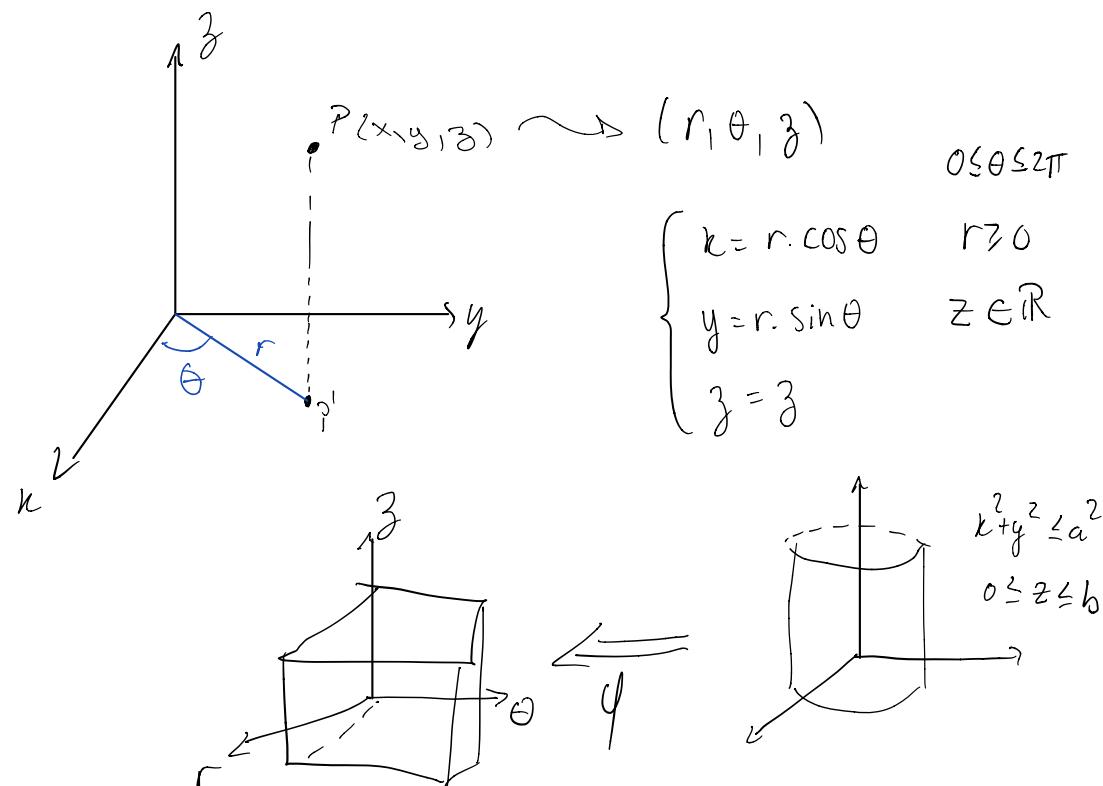
## Mudança de Variável na Integral Triplo

$\psi(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$ ; funciona igualmente a integral dupla

$$\bar{J} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{l} \text{produto misto entre 3 vetores} \\ \hookrightarrow \text{correção de volume ao mudar} \\ \text{de variável.} \end{array}$$

$$\iiint_{D_{xyz}} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{D_{uvw}} f(\psi(u, v, w)) |\bar{J}| du dv dw$$

Ex: Coordenadas Cilíndricas

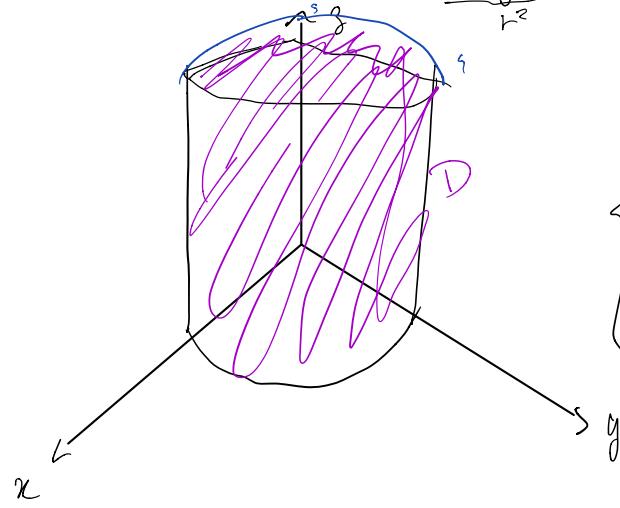


$$J = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$$

$|J| = r$

Ex: Calcular a massa de  $x^2+y^2 \leq 1$   $0 \leq z \leq 5-x^2-y^2$

Com densidade  $\delta(x, y, z) = \frac{x^2+y^2}{r^2}$



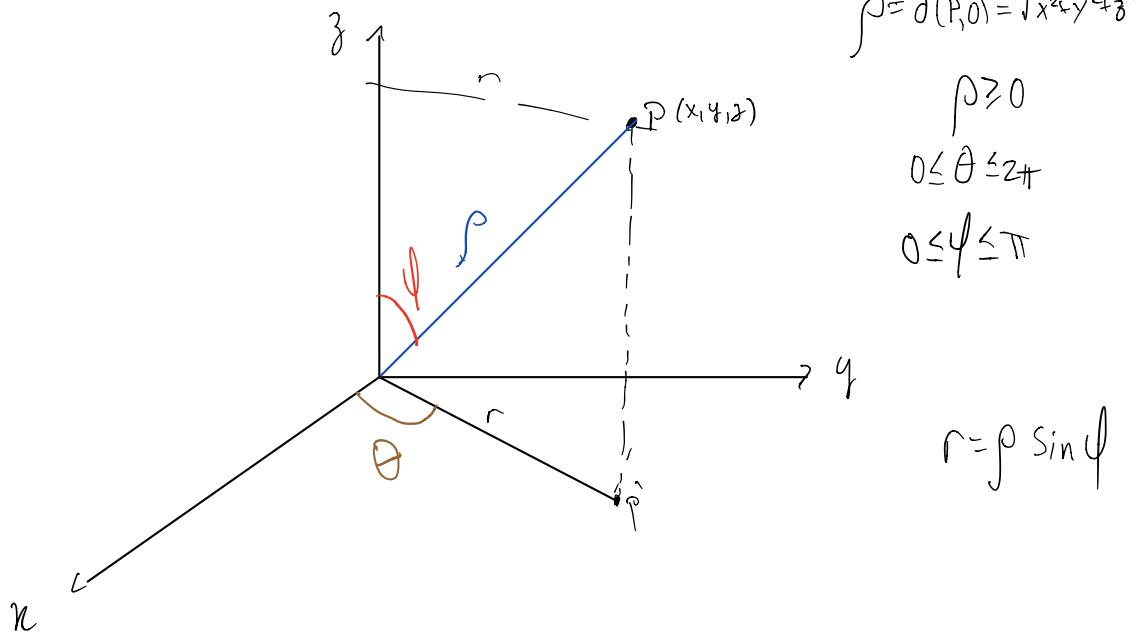
$$\left\{ \begin{array}{l} x = r \cdot \cos\theta \\ y = r \cdot \sin\theta \\ z = z \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq z \leq 5-r^2 \\ |J| = r \end{array}$$

Logo a integral ficara:

$$m = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{4-r^2}^1 r^3 dz dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 \left[ z \right]_{4-r^2}^1 dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 5r^3 - r^5 dr d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left( \frac{5r^4}{4} - \frac{r^6}{6} \right) \Big|_0^1 d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{13}{12} d\theta = \frac{13}{12} \cdot 2\pi = \frac{13\pi}{6}$$

# Coordenadas Esféricas:



$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \sin \phi \\ y = \rho \sin \theta \sin \phi \\ z = \rho \cos \phi \end{cases}$$

$$|J| = \begin{vmatrix} \cos \theta \sin \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \phi \\ -\rho \sin \theta \sin \phi & \rho \cos \theta \sin \phi & 0 \\ \rho \cos \theta \cos \phi & \rho \sin \theta \cos \phi & -\rho \sin \phi \end{vmatrix}$$

$$|J| = \rho^2 \sin \phi$$

com

Exercício: massa de  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ ,  $z^2 - x^2 - y^2 \geq 0$   
 com densidade  $\delta(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

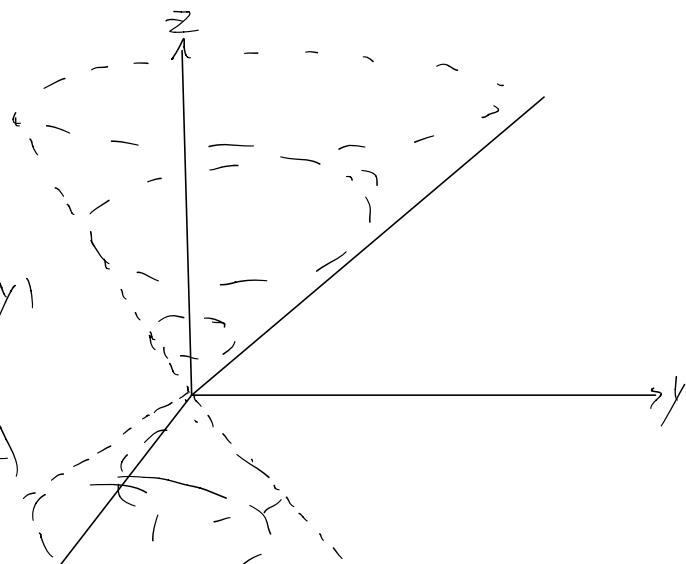
$$z^2 = x^2 + y^2$$

de  $x=0$

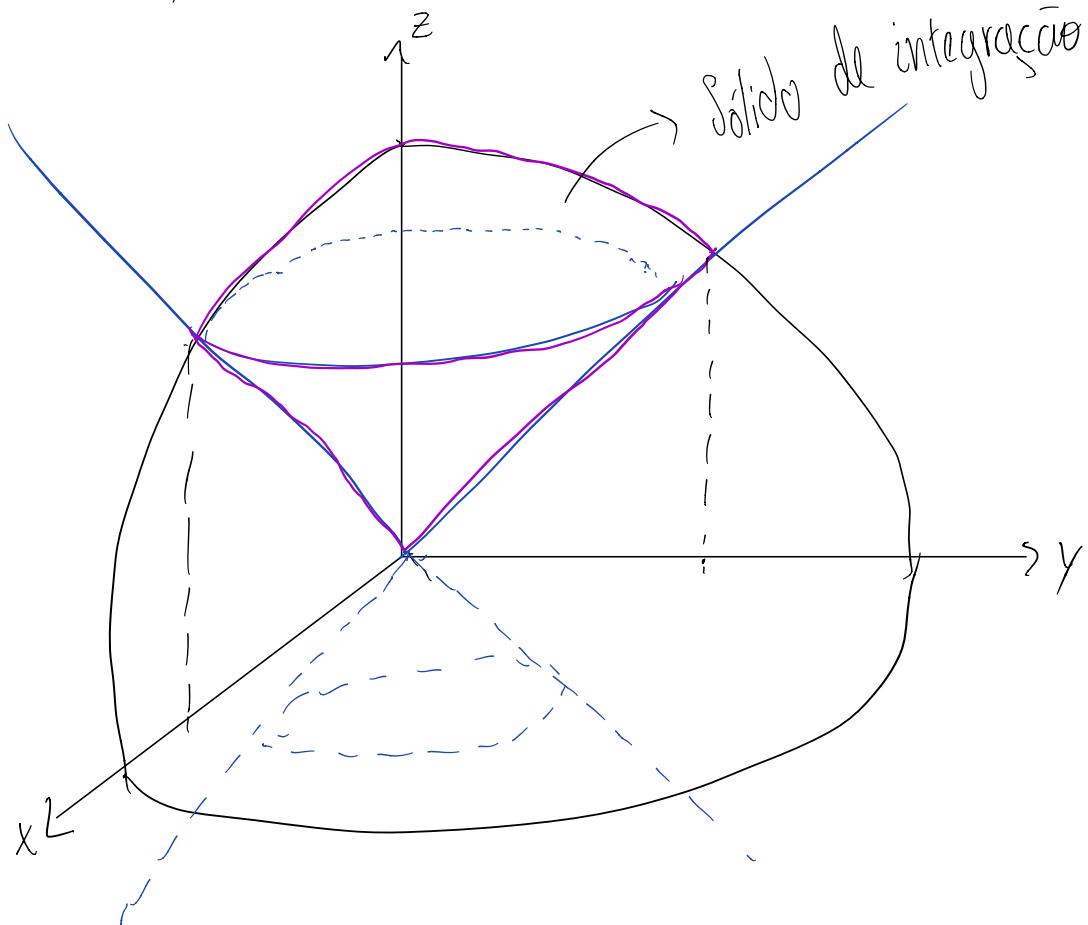
$$y^2 = z^2 \quad z = \pm y \quad (\text{plano } zy)$$

de  $y=0$

$$z^2 = x^2 \quad z = \pm x \quad (\text{plano } xz)$$



Curva de nível  $z = \text{cte}$   
 $\text{cte} = x^2 + y^2 \rightarrow$  Circunferência



Massa =  $\iiint_D \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dV$ , passando p/ coordenadas esféricas.

D

$$0 \leq \rho \leq 2$$

$$x = \rho \cos \theta \sin \varphi$$

$$0 \leq \varphi \leq \pi/4$$

$$y = \rho \sin \theta \sin \varphi$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$z = \rho \cos \varphi$$

O  $\varphi$  varia também de  $\frac{3\pi}{4}$  até  $\pi$ , devido a parte inferior do cone e do z negativo que também adentra no domínio de integração. No entanto, como tudo demonstra uma certa simetria. Fazemos  $\varphi$  variar em  $[0, \pi/4]$  e multiplicamos a massa

por um fator 2.

$$\text{Massa} = 2 \cdot \iiint_D \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dV$$

$$M = 2 \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^2 \rho \rho^2 \sin \varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$$

$$M = 4\pi \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^2 \rho^3 \sin \varphi \, d\rho = 4\pi \int_0^{\pi/4} d\varphi \sin \varphi \int_0^2 \rho^4 \, d\rho = 16\pi \int_0^{\pi/4} \sin \varphi \, d\varphi$$

$$-16\pi \cos \varphi \Big|_0^{\pi/4} = 16\pi \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \right)$$

Observações:

• Cartesianas

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ z^2 - x^2 - y^2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2(x^2 + y^2) = 4 \\ z^2 = 4 \end{cases}$$

$x^2 + y^2 = 2 \rightarrow$  Circunferência  
de raio  $\sqrt{2}$ .

$$2 \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} \delta(x, y, z) dz$$

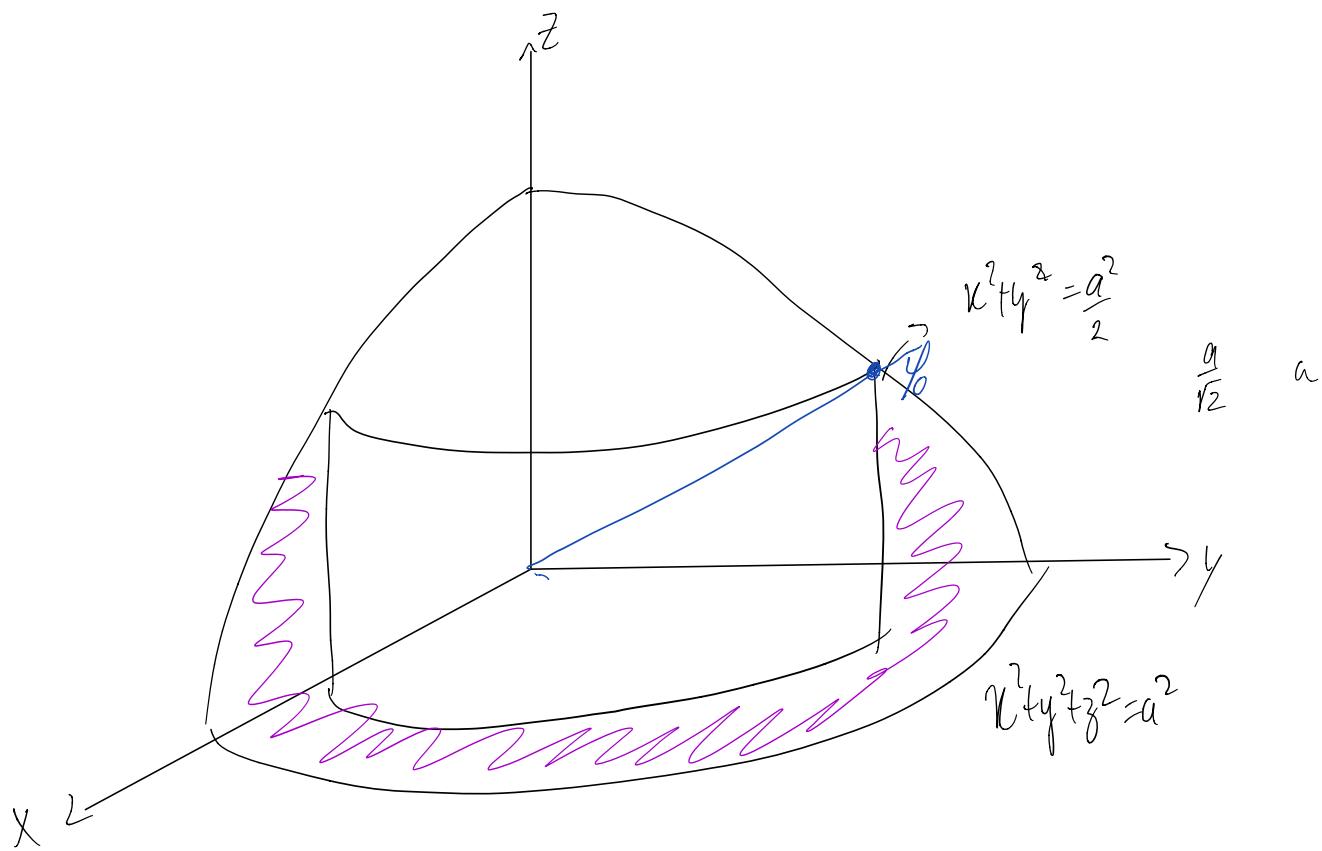
Cilíndricas:

$$2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{z-r^2}} f(r, \theta, z) \cdot r \cdot dz \, dr \, d\theta$$

Esféricas

$$2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^z f(\rho, \theta, \phi) \rho^2 \sin\phi \, d\phi \, d\theta \, d\rho$$

Exercício 2- Volume de  $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$   
 $x^2 + y^2 \geq a^2/2$



Cilíndricas :  $x = r \cdot \cos\theta$        $0 \leq \theta \leq 2\pi$   
 $y = r \cdot \sin\theta$        $\frac{a}{\sqrt{2}} \leq r \leq a$   
 $z = z$        $0 \leq z \leq \sqrt{a^2 - r^2}$       ( $\times 2$ )  
 $|z| = r$        $-\sqrt{a^2 - r^2} \leq z \leq \sqrt{a^2 - r^2}$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x^2 + y^2 = a^2/2 \end{cases} \rightarrow r^2 + z^2 = a^2 \Rightarrow z^2 = a^2 - r^2 \Rightarrow z = \pm \sqrt{a^2 - r^2}$$

$$V = 2 \int_0^{2\pi} \int_{\frac{a}{\sqrt{2}}}^a \int_0^{\sqrt{a^2 - r^2}} r \cdot r \cdot dz \cdot dr \cdot d\theta$$

NUNCA ESQUEÇA DO JACOBIANO

### Esféricas :

$$\begin{array}{ll} x = \rho \sin\phi \cos\theta & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ y = \rho \sin\phi \sin\theta & \frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{3\pi}{2} \\ z = \rho \cos\phi & \frac{a}{\sqrt{2}} \leq \rho \leq a \\ |z| = \rho^2 \sin\phi & \end{array}$$

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2}{2} \quad \rightarrow \quad \rho^2 \sin^2\phi = \frac{a^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \rho \sin\phi = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{\rho = \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \csc\phi}$$

$$V = \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_{\frac{a}{\sqrt{2}} \csc\phi}^a \rho^2 \sin\phi \cdot d\rho \cdot d\phi \cdot d\theta$$

Volume do elipsóide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$$

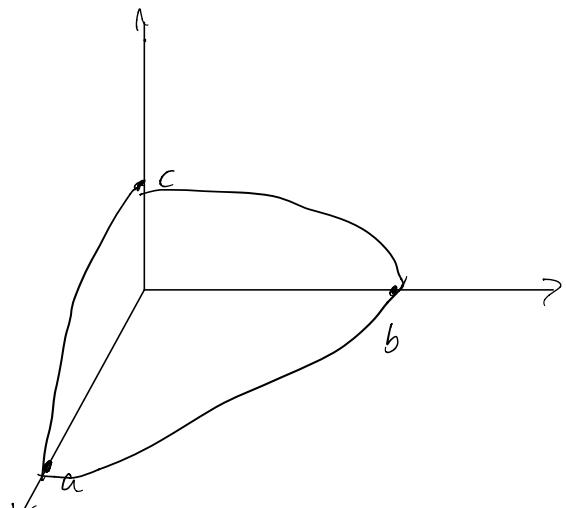
parametrização:

$$x = a\rho \sin\phi \cos\theta$$

$$y = b\rho \sin\phi \sin\theta$$

$$z = c\rho \cos\phi$$

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \phi \leq \pi \\ 0 \leq \rho \leq 1 \end{array} \right\}$$



igualmente ao plano.

$$|\mathcal{S}| = abc\rho^2 \sin\phi$$

$$Vol = \iiint L dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^1 abc\rho^2 \sin\phi d\rho d\phi d\theta$$

$$= 2\pi abc \int_0^{\pi} \frac{\rho^3}{3} \Big|_0^1 \sin\phi d\phi = \frac{2\pi abc}{3} \int_0^{\pi} \sin\phi d\phi = \frac{2\pi abc}{3} (-\cos\phi) \Big|_0^{\pi}$$

$$\underline{\frac{2\pi abc}{3}} \left( -\frac{\cos\pi + \cos 0}{-\pi + 1} \right) = \underline{\frac{4\pi abc}{3}}$$

## Integral de Linha:

Curvar no  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$

- propriedade / lugar geométrico
- equação geral
- Parametrizações

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = a^2 \rightarrow \gamma(t) = (x_0 + a \cos t, y_0 + a \sin t)$$

$0 \leq t \leq 2\pi$

→ é possível aplicar o cálculo diferencial e integral a curvas parametrizadas.

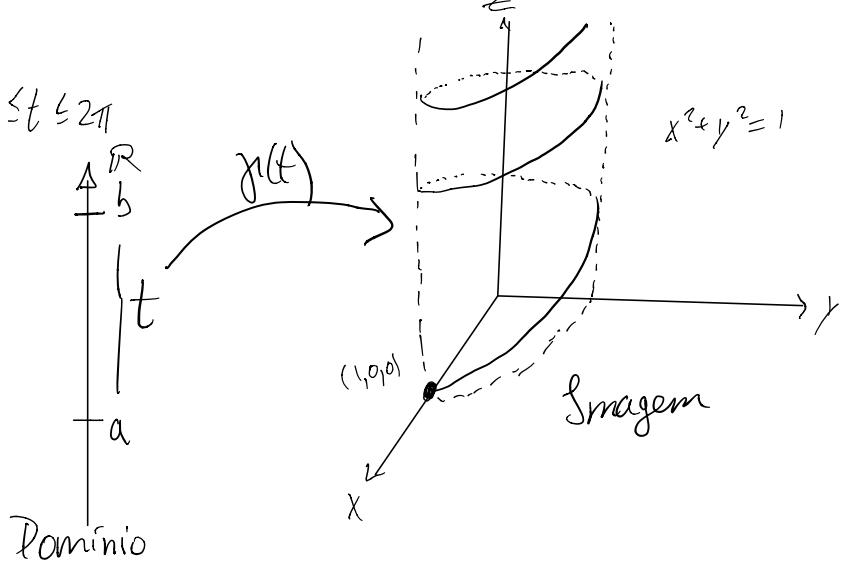
DEF:  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  (ou  $\mathbb{R}^3$ )  
chama-se curva parametrizada.

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) ; \quad \gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

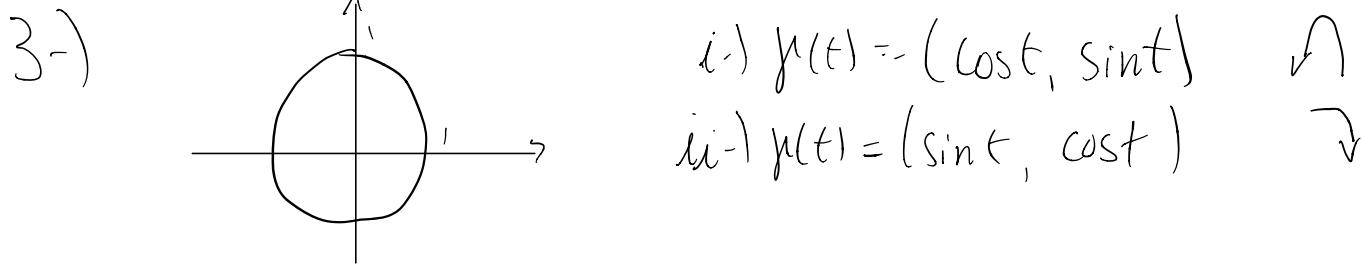
Vamos assumir  $\gamma$  é de classe  $C^k$

1-)  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

2-)  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t) \quad 0 \leq t \leq 2\pi$



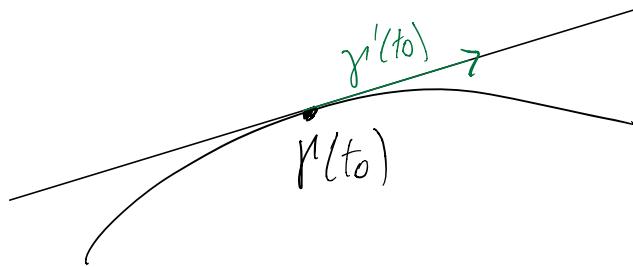
DEF: Traço de uma curva é a sua imagem.  $\gamma = \gamma([a, b])$



$$x^2 + y^2 = 1$$

uma parametrização adiciona um sentido de percurso e ponto inicial.

DEF: reta tangente à  $\gamma$  em  $\gamma(t_0)$



$$\chi: \chi(\lambda) = \gamma(t_0) + \lambda \gamma'(t_0); \lambda \in \mathbb{R}$$

desde que  $\gamma'(t_0) \neq 0$

DEF:  $\gamma$  é uma curva regular se  $\gamma'(t) \neq 0 \quad \forall t \in [a, b]$

DEF: um ponto múltiplo de  $\gamma$  é um ponto  $A$  tal que existam  $t_1 \neq t_2$  e  $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$

DEF:  $\gamma$  é uma curva simples se não possui ponto múltiplo.

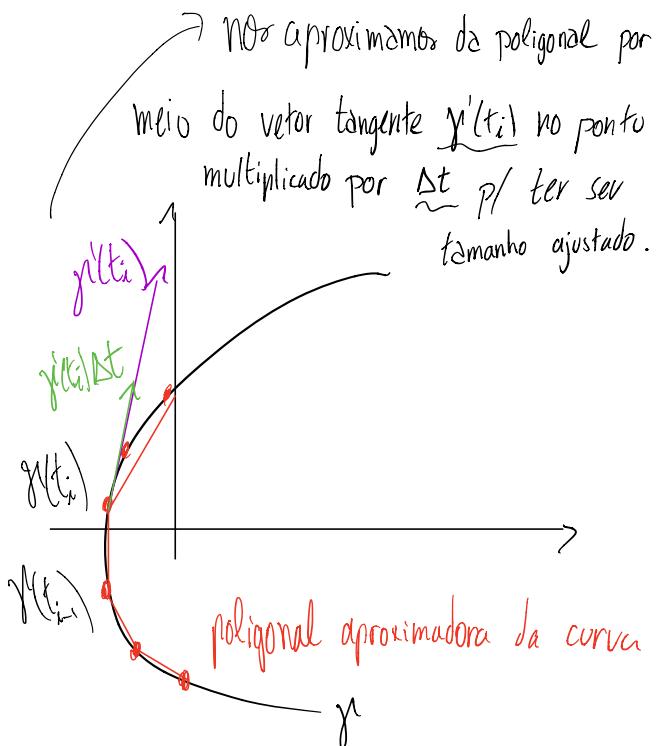
DEF:  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{2(3)}$  é fechada se  $\gamma(a) = \gamma(b)$ ; ponto inicial e final coincidem.

DEF: Curva fechada simples é aquela em que o único ponto múltiplo é  $\gamma(a) = \gamma(b)$

### Comprimento de Arco:

$$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{2(3)}$$

$$a \quad | \quad b \quad \rightarrow \mathbb{R}$$

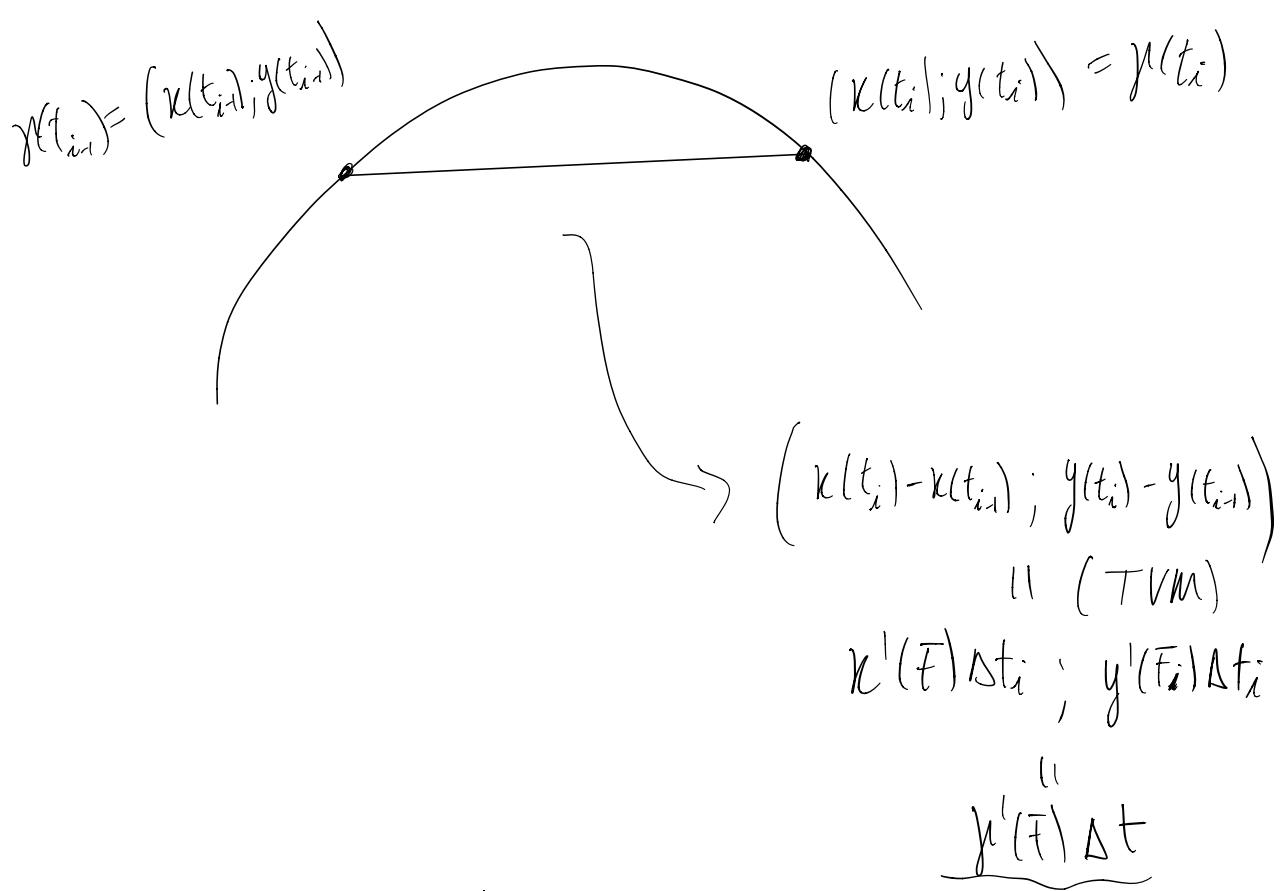


$$l(P_n) = \sum_i^n \text{Cordas}(\overline{P_{i-1} P_i}) \approx \sum_i^n \|\gamma'(t_i)\| \Delta t_i$$

$$\text{fazendo } \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_i^n \|\gamma'(t_i)\| \Delta t = \int_a^b |\gamma'(t)| dt = s(t)$$

$$s(t) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

Comprimento de arco



DEF:  $\ell(y) = \int_y \perp ds = \int_a^b \parallel y'(t) \parallel dt$

Papel do Jacobiano  
que transforma o comprimento  
ab em  $\ell(y)$

MASSA:  
 $y: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{(z)}$  regular.

$\delta(x, y)$  densidade linear de  $y$ .

Massa =  $\int_y \delta(x) ds = \int_a^b \delta(x) \parallel y'(x) \parallel dx$

Mais geral:

$$\int_{\gamma} f(x, y, z) dx = \int_a^b f(\gamma(s)) \cdot \| \gamma'(s) \| ds$$

Ex: Comprimento de  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$   
 ↳ hélice.

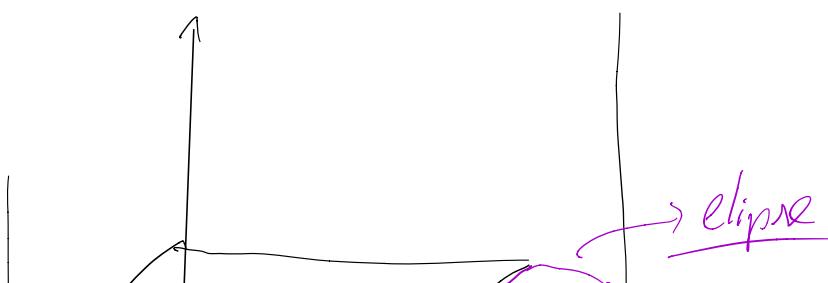
$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$$

$$\| \gamma'(t) \| = \sqrt{\underbrace{\sin^2 t + \cos^2 t + 1}_1} = \sqrt{2}$$

$$l = \int_{\gamma} 1 ds = \int_0^{2\pi} \| \gamma'(t) \| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} dt = \cancel{2\pi\sqrt{2}}$$

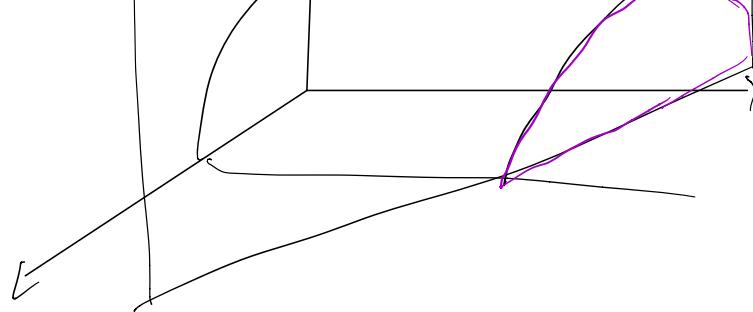
OBS: Sempre ao trabalhar com uma curva para a integral de linha, ela deve estar parametrizada.

2) Calcule a massa da curva intersecção  $x^2 + z^2 = 1$ ,  $x+y=3$  com densidade  $\delta(x, y, z) = \sqrt{1+z^2}$



$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = 3 - \cos t \\ z = \sin t \end{cases}$$

$$0 \leq t \leq 2\pi$$



$x^2 + z^2 = 1 \rightarrow$  Circunferência no plano  $XZ \rightsquigarrow$  parametrizando temos que 'qualquer ponto' esteja no cilindro. Fazendo agora  $Y$  respeitar a equação do plano, temos então a parametrização da região de intersecção.

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \sin t, \cos t)$$

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + \sin^2 t}$$

$$\text{Massa} = \int_{\gamma} \delta(t) dt = \int_a^b \delta(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \sin^2 t} \cdot \sqrt{1 + \sin^2 t} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} 1 + \sin^2 t dt = 2\pi + \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt$$

$\left\{ \begin{array}{l} \cos^2 + \sin^2 = 1 \\ \cos^2 - \sin^2 = \cos 2\theta \end{array} \right.$

$$= 2\pi + \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} - \frac{\cos 2t}{2} = 2\pi + \pi - \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2t}{2} = 3\pi - \frac{\sin 2t}{4} \Big|_0^{2\pi}$$

$$3\pi - \frac{\sin(4\pi)}{4} + \frac{\sin(0)}{4} = 3\pi$$

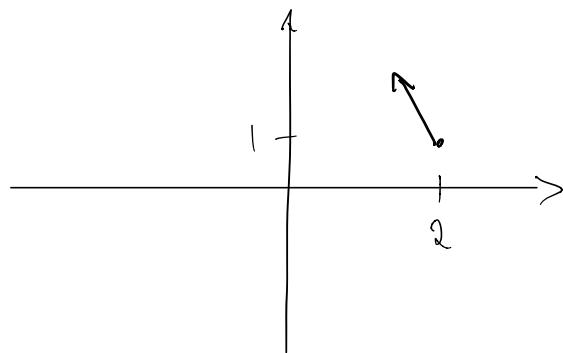
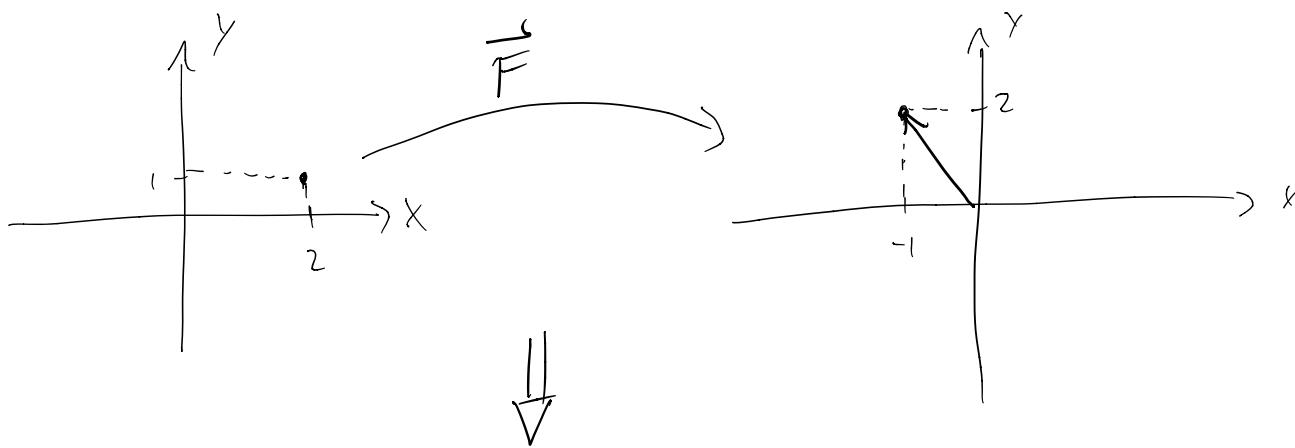
# Integrais de linha de Campos Vetoriais

## Campo Vetorial:

$$F: D \subset \mathbb{R}^{2(3)} \rightarrow \mathbb{R}^{2(3)}$$

D: aberto

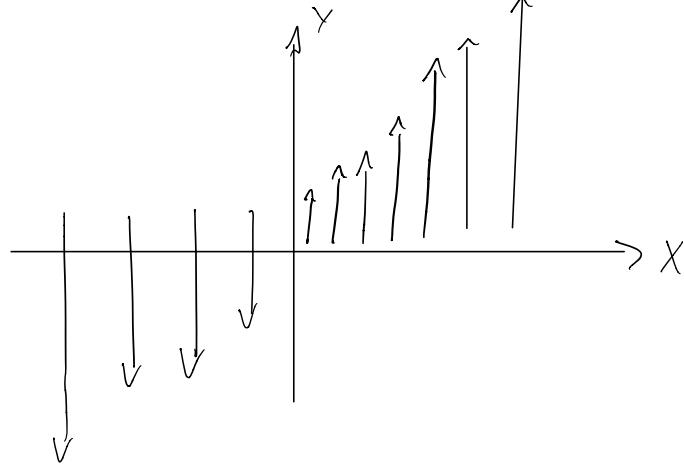
Ex:  $\vec{F}(x,y) = (-y, x)$



→ No ponto  $(2,1)$  temos  
o vetor  $(-1,2)$  aplicado  
no ponto.

Ex:  $\vec{r} = r(x,y) = (x,y) = x\vec{i} + y\vec{j}$  ;  $r = \|\vec{r}\| = \sqrt{x^2+y^2}$

Ex:  $F(x,y) = (0, x)$



Ex.  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciável (função escalar)

$$\text{Gradiente de } f = \vec{\nabla} f(x,y) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

- $\perp$  as curvas de nível
- da a direção de maior variação da função.

Rotacional de um campo:

$$\vec{F}(x,y,z) = (P(x,y,z); Q(x,y,z); R(x,y,z)) \text{ diferenciável.}$$

$$\text{rot}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \Rightarrow \boxed{\text{rot}(\vec{F}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{F}}$$

$$= \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}$$

Obs:  $\vec{F}(x,y) = (P(x,y); Q(x,y))$

$$\text{rot } \vec{F} = \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}$$

Ex3)  $\vec{F}(x,y) = (0, k)$

$$\text{rot } \vec{F} = \vec{k}$$

Ex)  $\vec{F}(x,y) = \left( -\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$

Obs:  $\vec{r} \cdot \vec{F} = 0 \Rightarrow$  trajetórios circulares

$$\text{rot } \vec{F} = \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k} = \left( \frac{x^2+y^2 - x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} - \frac{-x^2-y^2 + y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} \right) \vec{k}$$

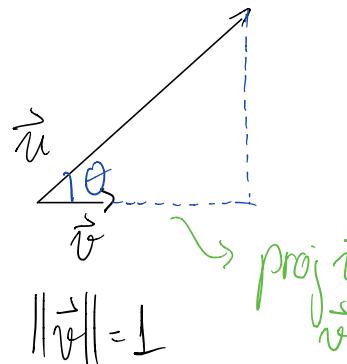
$$= \left( \frac{-x^2+y^2+x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \right) \vec{k} = 0 \vec{k}$$

Rotacional mede a tendência local de um objeto (extenso) a rotacionar em torno de seu próprio eixo (velocidade angular).

# Integral de linha de Campo Vetorial

Obs:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \theta$$



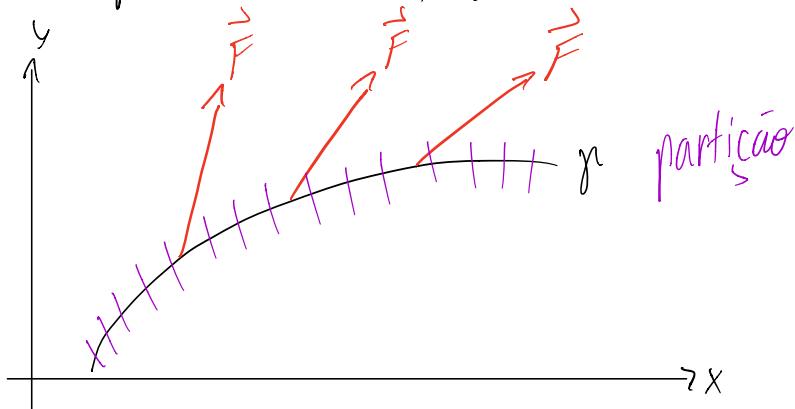
$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \cdot \cos \theta$$

$$\text{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \|\vec{u}\| \cdot \cos \theta$$

$$\|\vec{v}\| = 1$$

$\gamma = \gamma(t)$ ,  $t \in [a, b]$  trajetória

$\vec{F}$ , campo vetorial de forças atuando em  $\gamma$ .



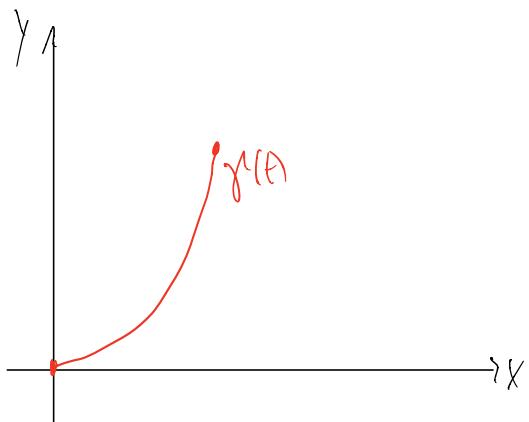
Trabalho é a força (componente tangencial) vezes a distância percorrida. A distância será um pedaço do arco, logo  $\|\gamma'(t)\| dt$ . A componente tangencial da força  $\vec{F}$  podemos obter pelo produto escalar de  $\vec{F}$  com  $\gamma'(t)$  (normalizado para conseguir o tamanho da projeção da força no arco de  $\gamma$ ).

$$\sum_n \underbrace{\left\langle \vec{F} \cdot \frac{\vec{y}'(t_i)}{\|\vec{y}'(t_i)\|} \right\rangle}_{\text{Componente tangencial}} \cdot \underbrace{\|\vec{y}'(t_i)\| dt}_{\text{distância}} \approx W \rightarrow \text{Trabalho}$$

$$W = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(y(t)) \cdot \vec{y}'(t) dt$$

Integral de linha de Campo Vetorial do tipo trabalho.

Ex.)  $\vec{F}(x,y) = (x, y)$ ;  $y(t) = (t, t^2)$ ,  $0 \leq t \leq 2$  Calcule  $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$



$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^2 \vec{F}(y(t)) \cdot \vec{y}'(t) dt$$

$$= \int_0^2 (t, t^2) \cdot (1, 2t) dt = \int_0^2 t + 2t^3 dt = \left. \frac{t^2}{2} + \frac{1}{4}t^4 \right|_0^2 = \frac{4}{2} + \frac{16}{4} = \frac{20}{2} = 10$$

Ex.)  $\vec{F}(x,y) = (-y, x)$

$y: x^2 + y^2 = a^2$ , ( $a > 0$ )  $\rightarrow$  é preciso parametrizar a curva  
Sentido horário.

$$\gamma(t) = (a \sin t, a \cos t) \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\gamma'(t) = (a \cos t, -a \sin t)$$

$$\vec{F}(\gamma(t)) = (-a \cos t, a \sin t)$$

$$\begin{aligned}\vec{F}(\gamma(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t) &= (-a \cos t, a \sin t) \cdot (a \cos t, -a \sin t) \\ &= -a^2 \cos^2 t - a^2 \sin^2 t = -a^2\end{aligned}$$

$$\int \vec{F} d\vec{r} = \int_0^{2\pi} -a^2 dt = \underline{-2\pi a^2}$$

Notação:  $\int_a^b \langle \vec{F}, \gamma' \rangle dt = \int_a^b \langle (\vec{P}, \vec{Q}) \cdot (\dot{x}, \dot{y}) \rangle dt = \int_a^b P \dot{x} dt + Q \dot{y} dt$

$$= \boxed{\int_P dx + Q dy} \quad \text{ou} \quad \boxed{\int_P dx + Q dy + R dz}$$

Ex-)  $\int_{\gamma} \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy \quad \gamma: x^2+y^2 = a^2, a>0$   
 Sentido anti-horário.  
 (Campo  $d\theta$ )

$$\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t) \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\gamma'(t) = (-a \sin t, a \cos t)$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[ \frac{dx \sin t}{x^2} \cdot (-a \sin t) + \frac{dy \cos t}{x^2} \cdot a \cos t \right] dt = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{1} dt \Rightarrow \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

Circuitação  $\rightsquigarrow$  integral sobre uma curva fechada.

## Campos Conservativos

DEF:  $\vec{F}(x, y, z)$  é conservativo se satisfizer qualquer uma das 3 condições:

1-)  $\exists \psi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  com  $\vec{\nabla} \psi = \vec{F}$

$$\text{dom } \psi = \text{dom } \vec{F}$$

$\psi$  chama-se "potencial"

$\vec{F}$  chama-se "campo gradiente"

Ex:  $\vec{F}(x, y) = \left( \frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2} \right)$  é gradiente

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2}$$

A função potencial é  $\psi(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2+y^2)$

2-)  $\int_{\gamma} \vec{F} d\vec{r}$  não depende de  $\gamma$ , só depende de  $f(a)$  e  $f(b)$  (extremos)  
independência do caminho.

$$\int_{\gamma} \vec{F} d\vec{r} = \psi(\gamma_b) - \psi(\gamma_a)$$

Trabalho realizado é a diferença de potencial

3)  $\oint_{\gamma} \vec{F} d\vec{r} = 0$  (integral de linha sobre uma curva fechada é nula.)

1  $\Rightarrow$  2

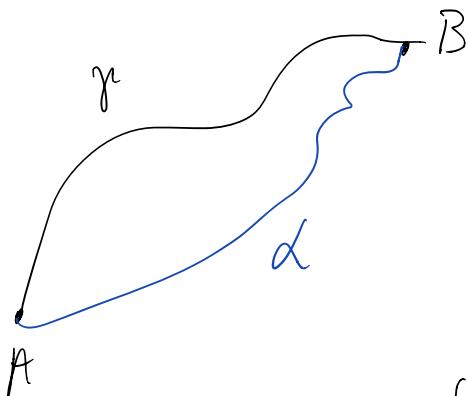
$$\exists \psi \text{ com } \vec{F} = \vec{\nabla} \psi$$

(Regrada  
Cadeia)

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} \vec{F} d\vec{r} &= \int_a^b \vec{F} \cdot \vec{y}' dt = \int_a^b \vec{\nabla} \psi \cdot \vec{y}' dt = \int_a^b \frac{d}{dt} (\psi \circ \gamma) dt = \psi(\gamma(b)) - \psi(\gamma(a)) \\ &= \psi(\gamma(b)) - \psi(\gamma(a)) \end{aligned}$$

2  $\Rightarrow$  3 Como  $\gamma(a) = \gamma(b) \Rightarrow \psi(\gamma(b)) - \psi(\gamma(a)) = 0$

3  $\Rightarrow$  2

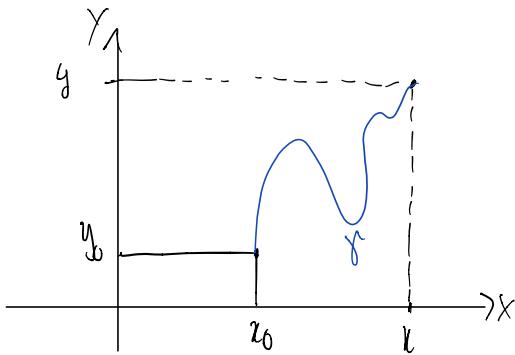


$\gamma \cup (-\alpha)$  é fechada

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma \cup (-\alpha)} \vec{F} d\vec{r} &= 0 \Rightarrow \int_{\gamma} \vec{F} d\vec{r} + \int_{-\alpha} \vec{F} d\vec{r} = 0 \\ \Rightarrow \int_{\gamma} \vec{F} d\vec{r} &= - \int_{-\alpha} \vec{F} d\vec{r} \Rightarrow \int_{\gamma} \vec{F} d\vec{r} = \int_{\alpha} \vec{F} d\vec{r} \end{aligned}$$

2  $\Rightarrow$  1

Fixamos  $(x_0, y_0) \in \text{domínio}$ , Tomo  $(x, y)$  qualquer

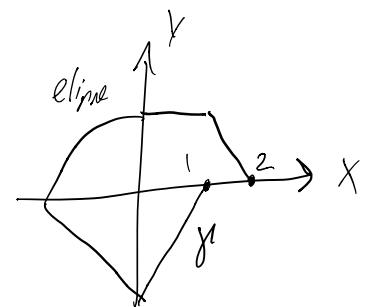


$$\varphi(x, y) = \int_{\gamma}^{\vec{r}} \vec{F} d\vec{r}, \text{ onde } \gamma \text{ é uma curva qualquer}$$

saindo de  $(x_0, y_0)$  e terminando em  $(x, y)$

Falta provar que  $\vec{\nabla} \varphi = \vec{F}$

Ex:  $\int_{\gamma} \frac{x}{x^2+y^2} dx + \frac{y}{x^2+y^2} dy$  onde  $\gamma$  é a curva:



Campo Conservativo.

$$\int_{\gamma} \vec{F} d\vec{r} = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a)),$$

pois o campo é conservativo, logo a integral de linha se reduz somente a diferença de potencial.

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2+y^2)$$

$$\gamma(b) = (1, 0) = 0$$

$$\gamma(a) = (2, 0) \quad \frac{1}{2} \ln 4$$

Ex: Calcule  $\int_{\gamma} (e^y \sin x + x e^y \cos y) dx + x e^y \sin x dy$

onde  $\gamma$  é a elipse  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

Se o campo for conservativo, então:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = e^y \sin x + x e^y \cos x$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = x e^y \sin x \rightsquigarrow \text{integrando em } y (\text{simplamente pela integral ser mais simples})$$

$$\psi'(x, y) = \int x e^y \sin x \, dy \Rightarrow \psi'(x, y) = x e^y \sin x + g(x)$$

Comparando  $\psi'(x, y)$  encontrado com  $\frac{\partial \psi}{\partial x}$  temos:

$$\frac{\partial \psi'}{\partial x} = e^y \sin x + x e^y \cos x + g'(x) \Rightarrow g'(x) = 0 \Rightarrow \underline{g(x) = \text{cte}}$$

Logo o campo é conservativo e possui potencial  $\psi(x, y) = x e^y \sin x$  portanto  $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$

Teorema:  $\vec{F}$  é de classe  $C^2$   
 $\vec{F}$  conservativo  $\Rightarrow \text{rot } \vec{F} = 0$  a recíproca não é válida

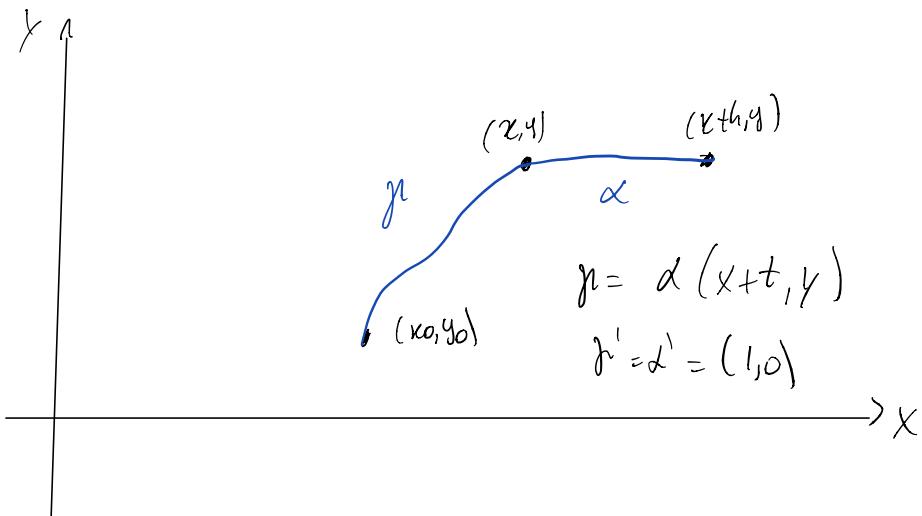
Operador diferencial  $\rightarrow$  função que atua sobre funções

2  $\Rightarrow$  1

$$\psi(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \vec{F} d\vec{r} = \int_{y_0}^y P dx + Q dy$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = Q$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\psi(x+h, y) - \psi(x, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_{(x_0, y_0)}^{(x+h, y)} \vec{F} d\vec{r} - \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \vec{F} d\vec{r}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_{(x_0, y_0)}^{(x+h, y)} \vec{F} d\vec{r}}{h}$$



$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_0^h P dx}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P h}{h} = \underline{P}$$

## Teorema de Green:

$$\vec{F}: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \vec{F} = (P, Q)$$

de classe  $C^1$

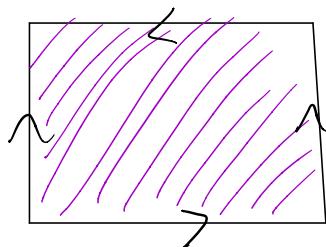
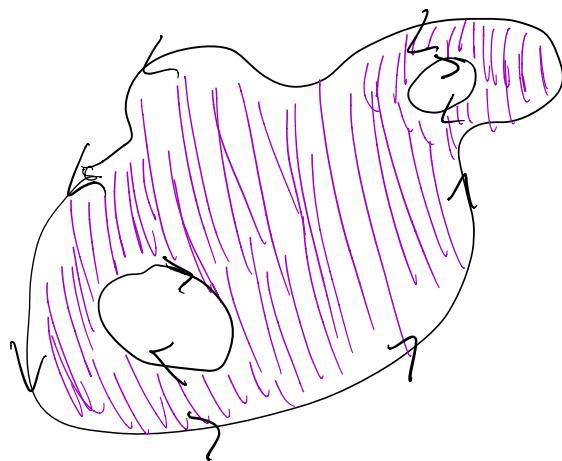
D: fechada, limitada, com fronteira,  $\partial D$ , formada por um número finito de curvas fechadas, simples, regulares por partes, disjuntas e orientadas positivamente.

fronteira de um conjunto

Então:

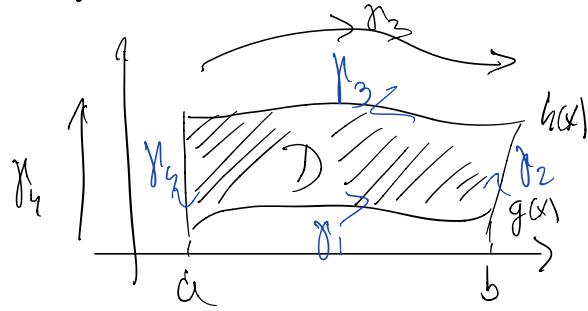
$$\oint_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \text{rot } \vec{F} \cdot \hat{k} dA$$

(Teorema de Green)



Orientação positiva: a região  $D$  fica à esquerda quando percorremos  $\partial D$ .

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}$$



$$\oint_{\partial D} P dx = \iint_D -\frac{\partial P}{\partial y} dA$$

$$\textcircled{1} \quad \iint_D + \frac{\partial P}{\partial y} dA = \int_a^b \left[ \int_{g(x)}^{h(x)} + \frac{\partial P}{\partial y} dy \right] dx = \int_a^b P \Big|_{g(x)}^{h(x)} dx = \int_a^b P(x, h(x)) - P(x, g(x)) dx$$

$$\textcircled{2} \quad \begin{cases} P dx \\ \partial D \end{cases} = \begin{cases} P dx \\ \Gamma_1 \end{cases} + \begin{cases} P dx \\ \Gamma_2 \end{cases} - \begin{cases} P dx \\ \Gamma_3 \end{cases} + \begin{cases} P dx \\ \Gamma_4 \end{cases}$$

sentidos contrarios devida a facilidad  
de parametrización.

$$\gamma_1(t) = (t, g(t)) \quad a \leq t \leq b$$

$$\gamma_2(t) = (b, t) \quad g(b) \leq t \leq h(b)$$

$$\gamma_3(t) = (t, h(t)) \quad a \leq t \leq b$$

$$\gamma_4(t) = (a, t) \quad g(a) \leq t \leq h(a)$$

$$\begin{cases} P dx \\ \partial D \end{cases} = \begin{cases} \int_a^b P(t, g(t)) dt \\ \Gamma_1 \end{cases} + \begin{cases} 0 \\ \Gamma_2 \end{cases} - \begin{cases} \int_a^b P(t, h(t)) dx \\ \Gamma_3 \end{cases} + \begin{cases} 0 \\ \Gamma_4 \end{cases} = \int_a^b P(t, g(t)) - P(t, h(t)) dt$$

Comparando \textcircled{1} e \textcircled{2} temos:

$$\begin{cases} P dx \\ \partial D \end{cases} = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dA$$

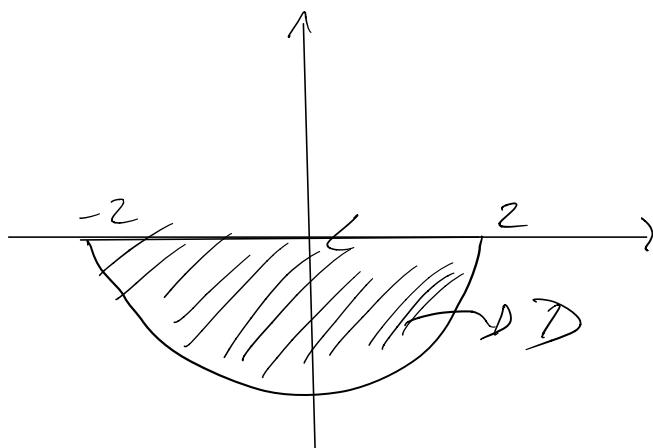
*tangente.*

Orientação positiva: base  $\{\vec{t}, \vec{n}\}$  positiva

$$\underline{\text{Ex:}} \int_C \cos x dx + (2y^{\cos y} + k) dy$$

Onde  $C$  é a reunião da parte de  $x^2 + y^2 = 4, y \geq 0$  reunida com o segmento que liga  $(2,0)$  a  $(-2,0)$  percorridos no sentido anti-horário.

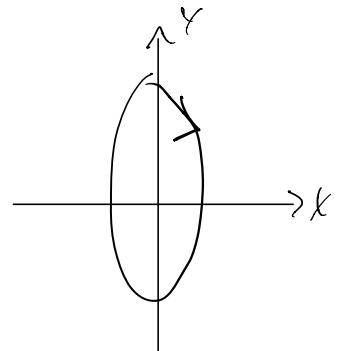
$$\text{rot } \vec{F} = \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \hat{k} = (1 - 0) \hat{k} = \hat{k}$$



Pelo Teorema de Green:  $\iint_D 1 dA = \text{área}(D) = \frac{\pi r^2}{2} = 2\pi$

$$\underline{\text{Ex:}} F(x,y) = (x^2 - y) \hat{i} + ((\sin^2 y)^{\cos y} + k) \hat{j}$$

$$\int_C \vec{F} dr \quad \text{C: } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad \text{Sentido horário.}$$



$$\text{rot } \vec{F} = \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \hat{k} = 1 - (-1) = 2 \hat{k}$$

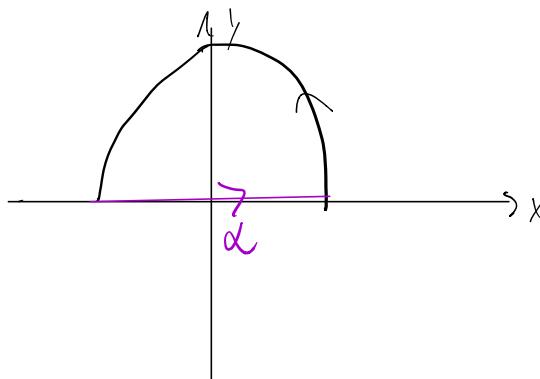
Pelo Teorema de Green

$$\int_{\partial D} \vec{F} d\vec{r} = \iint_D \nabla \times \vec{F} dA$$

$$\int_{\partial D} \vec{F} d\vec{r} = - \iint_D 2 dA \Rightarrow -2 \underbrace{\text{área}(D)}_{\pi ab} = -2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 3 = -12\pi$$

Ex) Calcule  $\int_{\gamma} (x^2 y) dx + (\sin^2 y \cos y + x^2) dy$

$\gamma$ : arco de  $y = 4 - x^2$ ,  $y \geq 0$ , ligando  $(-2, 0)$ ,  $(2, 0)$



$\partial U(-r) \rightarrow$  Curva fechada

logo se pode aplicar

o Teorema de Green

$$\operatorname{rot} \vec{F} = (2x + 1) \hat{z} \neq 0,$$

Seja  $D \subset \mathbb{R}^2$ , a região cujo bordo é  $\partial U(-r)$ , logo, pelo teorema de Green:

$$\int_{\partial D} \vec{F} d\vec{r} = \iint_D \operatorname{rot} \vec{F} dA$$

$$\int_{\partial D} \vec{F} d\vec{r} - \int_{\gamma} \vec{F} d\vec{r} = \iint_D \operatorname{rot} \vec{F} dA \Rightarrow \boxed{\int_{\gamma} \vec{F} d\vec{r} = \int_{\partial D} \vec{F} d\vec{r} - \iint_D \operatorname{rot} \vec{F} dA}$$

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} t, 0 \end{pmatrix} \quad -2 \leq t \leq 2$$

$$\alpha'(t) = (1, 0)$$

$$\int_{\alpha} \vec{F} d\vec{r} = \int_{-2}^2 t^6 dt = 2 \cdot \int_0^2 t^6 dt = 2 \cdot \frac{t^7}{7} \Big|_0^2 = \frac{2 \cdot 2^7}{7} = \frac{2^8}{7} \quad \boxed{= \frac{256}{7}}$$

$$2) \iint_D (2x+1) dA = \int_{-2}^2 dx \int_0^{4-x^2} 2x+1 dy = \int_{-2}^2 dx \left[ x^2 + x \right]_0^{4-x^2} = \int_{-2}^2 (4-x^2)^2 + 4-x^2 dx$$

$$\int_{-2}^2 (16 - 8x^2 + x^4 + 4 - x^2) dx \Rightarrow \cancel{\int_{-2}^2 (26 - 9x^2 + x^4) dx} \Rightarrow \boxed{32/3}$$

$$\int_{\gamma} \vec{F} d\vec{r} = \frac{256}{7} - \frac{32}{3} \quad \cancel{L}$$

**Ex-)** Calcule  $\int_{\gamma} \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy$ , sendo

1)  $\gamma: x^2+y^2=a^2$ , sentido anti-horário

$$\gamma: \gamma(t) = (a \cos t, a \sin t) \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

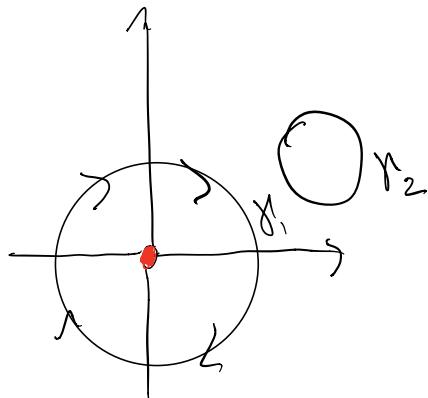
$$\gamma'(t) = (-a \sin t, a \cos t)$$

$$\int_{\gamma} \vec{F} d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \frac{(-a \sin t)(-a \sin t)}{a^2} + \frac{(a \cos t)(a \cos t)}{a^2} dt = 2\pi \quad \boxed{X}$$

OBS:  $\text{rot } \vec{F} = 0$

DOMÍNIO

$$\text{dom } \vec{F} = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$$

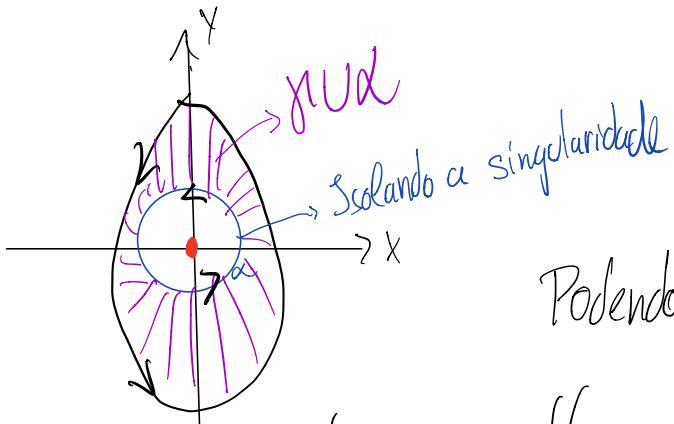


2)  $\gamma: (x-3)^2 + (y-3)^2 = 1$ , anti-horário

$$\int_{\gamma} \vec{F} dr = \iint_{\text{int}(\gamma)} \text{rot } \vec{F} = \iint_{\text{int}(\gamma)} 0 = 0$$

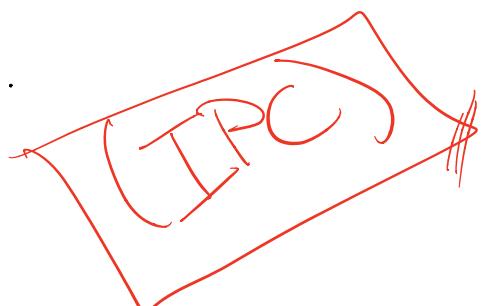
Isso é possível somente pois o interior da curva encontra-se inteiramente no domínio do campo  $\vec{F}$ .

3)  $\gamma: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ , sentido anti-horário.



Seja:

$$\partial D = \gamma \text{ Ud} \quad \rightarrow \text{sentido horário}$$



Pode-se aplicar o teorema de Green temos:  
(figura fechada)

$$\int_{\gamma} \vec{F} dr = \iint_D \text{rot } \vec{F} dA$$

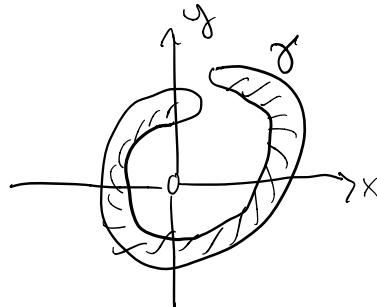
$$\int_{\gamma} \vec{F} d\vec{r} + \int_{\text{d}} \vec{F} d\vec{r} = \iint_D \text{rot } \vec{F}^{\circ} \Rightarrow \int_{\gamma} \vec{F} d\vec{r} = 2\pi$$

$\gamma$

-  $2\pi$

4.)  $\int_{\gamma} \vec{F} d\vec{r}$  onde  $\gamma$  é uma curva fechada simples que não passa pela origem, orientada no sentido anti-horário.

a-)  $\gamma$  não enlaça a origem



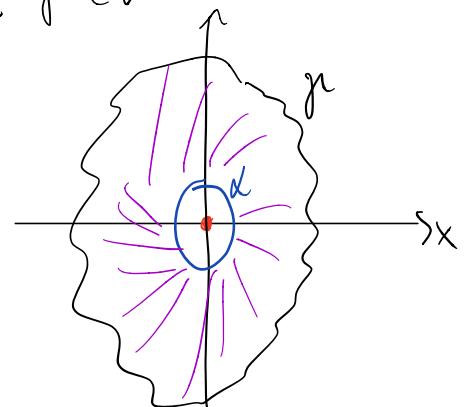
$$\int_{\gamma} \vec{F} d\vec{r} = \iint_{\text{int}(\gamma)} \text{rot } \vec{F} = 0$$

O teorema de Green é aplicado na região entre  $\gamma$  e  $d$ .

b-)  $\gamma$  enlaça a origem:

$$\text{Tomo } d: x^2 + y^2 = a^2 \text{ horário}$$

com a pequeno  $r$  que  $\gamma \cap d = \emptyset$



Seja  $D \subset \mathbb{R}^2$  tal que  $\partial D = \gamma \cup d$ , pelo Teorema de Green:

$$\int_{\gamma \cup d} \vec{F} d\vec{r} = \iint_D \text{rot } \vec{F} = \int_{\gamma} \vec{F} d\vec{r} + \int_d \vec{F} d\vec{r} = 0 \Rightarrow \int_{\gamma} \vec{F} d\vec{r} = 2\pi$$

$\gamma$

-  $2\pi$

DEF:  $D \subset \mathbb{R}^2$  é um domínio Simplemente Conexo se toda curva fechada em  $D$  puder ser contruída a um ponto em  $D$ .

Teorema:  $\vec{F}: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  campo vetorial

$D$  é simplesmente conexo

$$\text{rot } \vec{F} = 0$$

Então:  $\vec{F}$  é conservativo

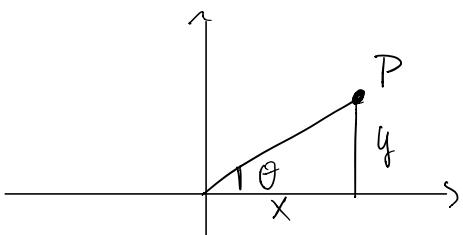
demonstração:  $\forall$  curva fechada qualquer,  $\oint_C \vec{F} d\vec{r} = 0$  |  $D$  simplesmente conexo  
 $\Rightarrow \text{int}(y) \subset D$

$$\Rightarrow (\text{Teorema de Green}) \quad \oint_C \vec{F} d\vec{r} = \iint_D \text{rot } \vec{F} dA$$

por hipótese:  $\text{rot } \vec{F} = 0$   $\Rightarrow \oint_C \vec{F} d\vec{r} = 0 \quad \forall$  fechada, logo

$\vec{F}$  é conservativo.

Ex  $\varphi(x, y) = \arctg \left( \frac{y}{x} \right) = \theta$



$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad | \quad \text{dom } \varphi = \mathbb{R} - \{ \text{eixo } y \}$$

$$\phi_1(x,y) = \arctg\left(\frac{y}{x}\right) = \theta \text{ (coordenadas polares)}$$

$$\vec{\nabla} \phi_1 = \left( -\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right) = \vec{F}$$

$$\text{dom } \phi_1 = \mathbb{R}^2 - \{ \text{eixo } y \}$$

$\vec{F}$  não possui um potencial definido em seu domínio ( $\mathbb{R}^2 - \{0,0\}$ ) entretanto partes de seu domínio acabam sendo simplesmente conexo o que leva a uma função potencial parcial.

$$\phi_2 = -\arctg\left(\frac{x}{y}\right)$$

→ O mesmo campo  $\vec{F}$  pode ter inúmeras funções potenciais com domínios diferentes

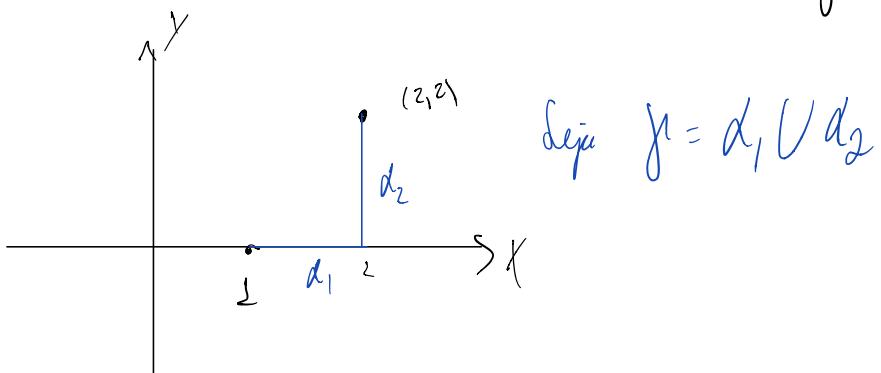
$$\vec{\nabla} \phi_2 = \vec{F}$$

$$\text{dom } \phi_2 = \mathbb{R}^2 - \{ \text{eixo } x \}$$

→ Sempre existe uma função potencial adequada para um domínio simplesmente conexo.

$$\boxed{\vec{F} = \vec{d}\theta}$$

Ex-) Calcule  $\int_C \vec{F} d\vec{r}$ ,  $\vec{F} = d\theta$  e  $C$ : é uma curva unindo  $(1,0)$  a  $(2,2)$ , sem passar pela origem.



$$\begin{aligned}\alpha_1(t) &= (t, 0) \quad 1 \leq t \leq 2 & \alpha_1'(t) &= (1, 0) \\ \alpha_2(t) &= (2, t) \quad 0 \leq t \leq 2 & \alpha_2'(t) &= (0, 1)\end{aligned}$$

$$\int_C \vec{F} d\vec{r} = \int_C d\theta = \int_{d_1}^{\alpha_1} \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy ; \int_{d_2}^{\alpha_2} = [0]$$

Resolução:  $\int_{d_2} \int d\theta = \int_0^2 \frac{-y}{k^2+y^2} dx + \frac{x}{k^2+y^2} dy = \int_0^2 \frac{2}{4+t^2} dt =$

$$2. \int_0^2 \frac{1}{4+t^2} dt = 2' \int_0^2 \frac{1}{4(1+\frac{t^2}{4})} dt = \left. \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left( \frac{t}{2} \right) \right|_0^2 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(1) - \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(0)$$

$$= \frac{\pi}{4} \cancel{1} \quad \therefore \int_C d\theta = \int_{d_1 \cup d_2} d\theta = \frac{\pi}{4}$$

Seja  $\beta$  uma curva unindo  $(1,0)$  a  $(2,2)$

1)  $\gamma \cup (-\beta)$  não enlaça a origem.

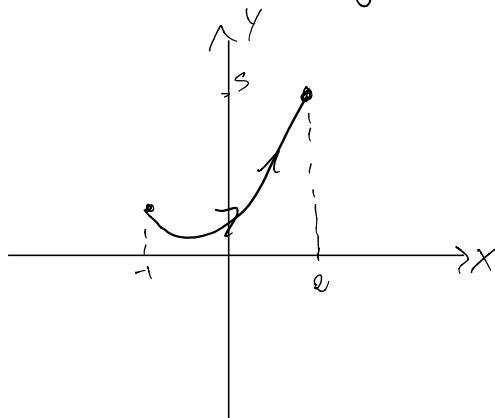
$$\hookrightarrow \begin{cases} d\theta = 0 & \Rightarrow \int_{\gamma} d\theta - \int_{\beta} d\theta = 0 \Rightarrow \int_{\gamma} d\theta = \int_{\beta} d\theta = \pi/4 \end{cases}$$

2)  $\gamma \cup (-\beta)$  enlaça a origem.

$$\begin{cases} d\theta = 2\pi & \Rightarrow \int_{\gamma} d\theta - \int_{\beta} d\theta = 2\pi \Rightarrow \int_{\beta} d\theta = \pi/4 - 2\pi = -7\pi/4 \end{cases}$$

Ex)  $\int_{\gamma} \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2} = \frac{\pi}{r}$        $\frac{\pi}{r}$

$\gamma$ : arco de  $y = x^2 + 1$ , de  $(-1,2)$  até  $(2,5)$      $-1 \leq x \leq 2$



$$\text{rot } \vec{F} = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{0 + 2xy}{(x^2+y^2)^2} ; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{0 - 2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = 0 \quad \text{rot } \vec{F} = 0$$

$$\underbrace{\text{dom } \vec{F} = \mathbb{R}^2 - \{0,0\}}$$

$\hookrightarrow$  O campo é conservativo mesmo não havendo domínio simplesmente conexo.

$$\psi(x,y) = \frac{1}{2} \ln(x^2+y^2)$$

$$\underbrace{\text{dom } \psi = \text{dom } \vec{F}}$$

Calculando pela diferença de potencial:

$$\Delta \psi = \psi_f - \psi_i = \frac{1}{2} \ln(2^2+s^2) - \frac{1}{2} \ln((-1)^2+1^2) = \frac{1}{2} (\ln(2s) - \ln(s))$$

$$\underbrace{\frac{1}{2} \ln\left(\frac{2s}{s}\right)}$$

Ex-)  $\int_{\gamma} 2x \sin y \, dx + (x^2 \cos y - 3y^2) \, dy$

$\gamma$ : curva ligando  $(-1,0)$  a  $(1,1)$

$$\underbrace{\text{dom } F = \mathbb{R}^2}$$

$\hookrightarrow$  Simplesmente conexo

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x \cos y$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x \cos y$$

$$\boxed{\text{rot} = 0}$$

$\vec{F}$  é conservativo.

$$\textcircled{1} \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = 2x \sin y$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = x^2 \cos y - 3y^2$$

$$\psi(x, y) = x^2 \sin y + g(y)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = x^2 \cos y + g'(y) \quad \stackrel{\text{comparando}}{\sim} \quad \cancel{x^2 \cos y} + g'(y) = \cancel{x^2 \cos y} - 3y^2$$

$$g'(y) = -3y^2$$

$$\int g'(y) dy = -3 \int y^2 dy$$

$$g(y) = -\frac{3y^3}{3}$$

$$g(y) = -y^3$$

$$\Rightarrow \boxed{\psi(x, y) = x^2 \sin y - y^3}$$

Calculando pela diferença de potencial tensor:

$$\Delta \psi = \psi_B - \psi_A = 2S \sin 1 - 1 - \underbrace{S \sin 0}_0 \Rightarrow \int \vec{F} dr = 2S \sin 1 - 1$$

Achando uma função potencial e se possuir mesmo domínio que o campo, o campo é conservativo.

## Superfícies Parametrizadas: ( $\mathbb{R}^3$ )

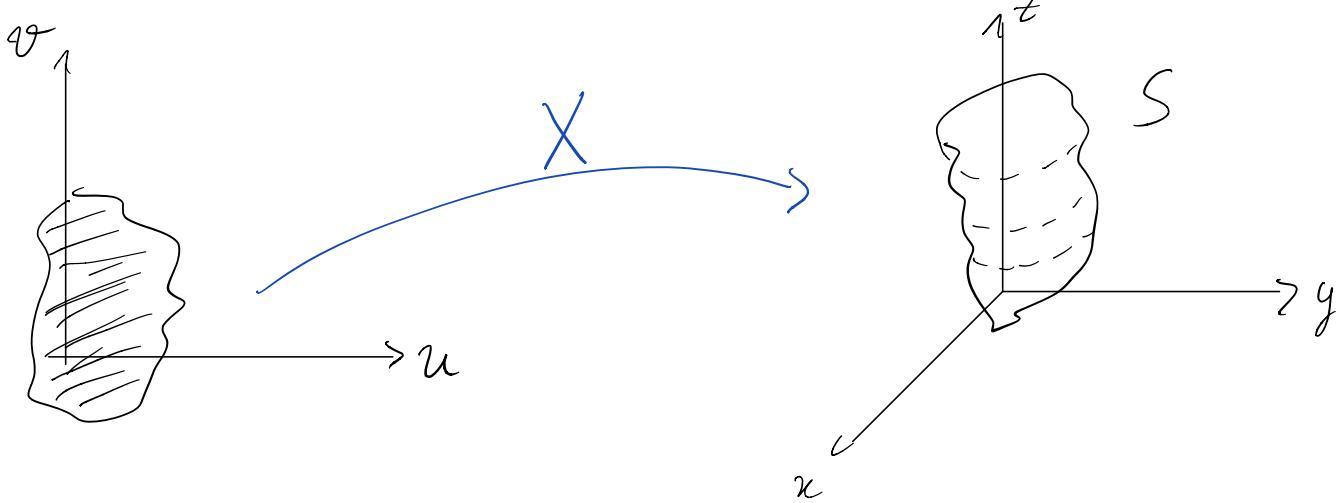
Def: Uma superfície parametrizada em  $\mathbb{R}^3$ , é uma aplicação

$$\chi: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\chi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

Em cálculo sempre se trabalha com a superfície parametrizada.

$x, y, z$  funções de classe  $C^r$



Ex1) Plano:  $2x + y - 3z = 4$

$$\begin{cases} x = u \\ y = 4 - 2u + 3v \\ z = v \end{cases} \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

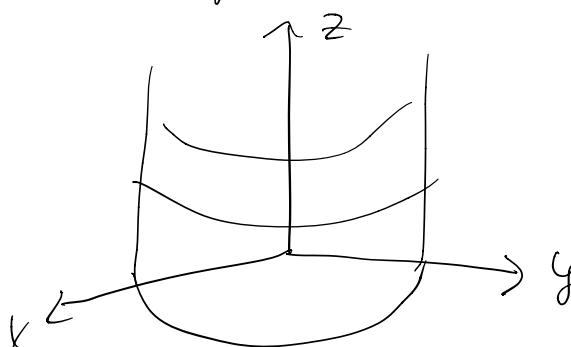
**Ex-) Esfera**

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \quad (a > 0)$$

$$\begin{cases} x = a \cdot \cos\theta \sin\phi & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ y = a \cdot \sin\theta \sin\phi & 0 \leq \phi \leq \pi \\ z = a \cdot \cos\phi \end{cases}$$

**Ex-) Cilindro**

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad (a > 0)$$



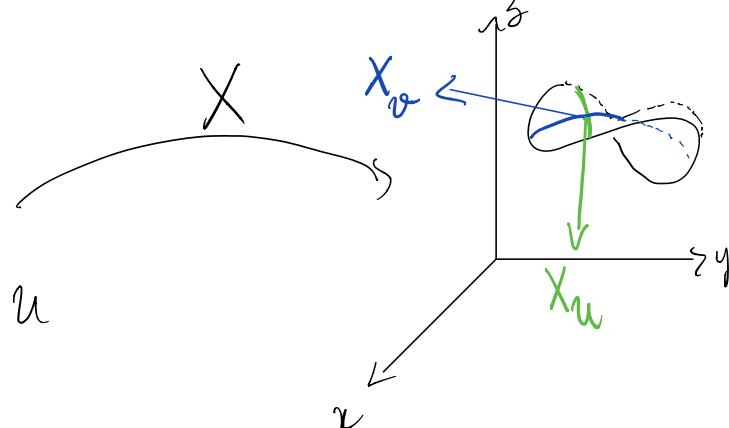
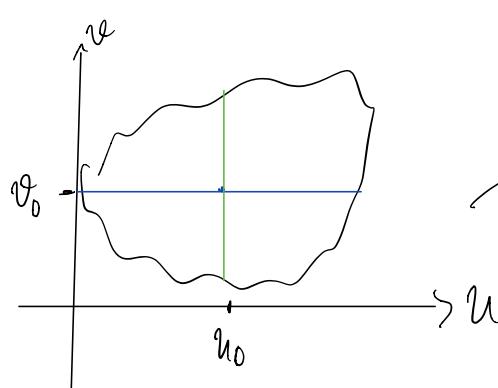
$$\begin{cases} x = a \cdot \cos\theta & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ y = a \cdot \sin\theta & z \in \mathbb{R} \\ z = z & (\theta, z) \rightarrow (x, y, z) \end{cases}$$

**Ex-) Cone:**

$$z^2 - x^2 - y^2 = 0 \quad (z \geq 0)$$

$$z^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \sqrt{u^2 + v^2} \end{cases} \quad \begin{cases} x = r \cdot \cos\theta \\ y = r \cdot \sin\theta \\ z = r \end{cases} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$



Pegar-se duas retas tais que  $u = \text{cte}$  e  $v = \text{cte}$ . Por meio da transformação  $X$  se transformam em curvas no espaço  $XYZ$ . A derivada dessas curvas será uma derivada parcial, mas mais importante: serão tangentes à superfície. Com esses dois vetores tangentes, é possível construir um plano tangente à superfície.

$$\mathcal{Y}_1: \mathcal{Y}_1(u) = X(u, v_0) = (x(u, v_0); y(u, v_0); z(u, v_0))$$

↳ vetor tangente:  $\mathcal{Y}'_1(u) = \vec{X}_u = \left( \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right)$

$$\mathcal{Y}_2: \mathcal{Y}_2(v) = X(u_0, v) = (x(u_0, v); y(u_0, v); z(u_0, v))$$

↳ vetor tangente:  $\mathcal{Y}'_2(v) = \vec{X}_v = \left( \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right)$

Def: A superfície parametrizada  $X: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é regular se possuir planos tangentes. Se  $\vec{X}_u$  e  $\vec{X}_v$  forem linearmente independentes.

$$\vec{X}_u \wedge \vec{X}_v \neq 0$$

Neste caso, o plano tangente é dado por:

$$X = \lambda \vec{X}_u + \mu \vec{X}_v ; \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Ex.) Esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

$$\begin{cases} x = \cos \theta \sin \varphi & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ y = \sin \theta \sin \varphi & 0 \leq \varphi \leq \pi \\ z = \cos \varphi \end{cases}$$

Plano tangente em  $X(\pi/4, \pi/4)$

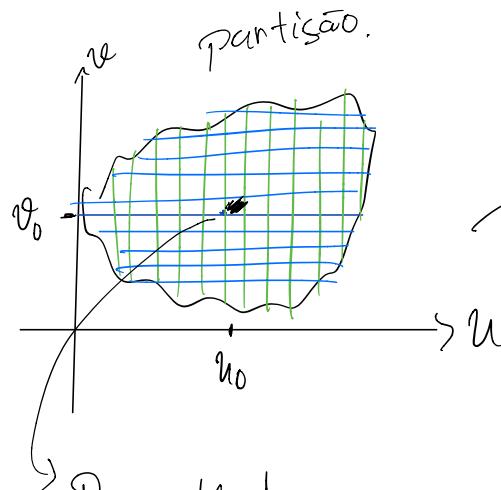
$$X\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\vec{X}_\theta = (-\sin\theta \sin\varphi, \cos\theta \sin\varphi, 0) \rightsquigarrow \vec{X}_\theta(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$$

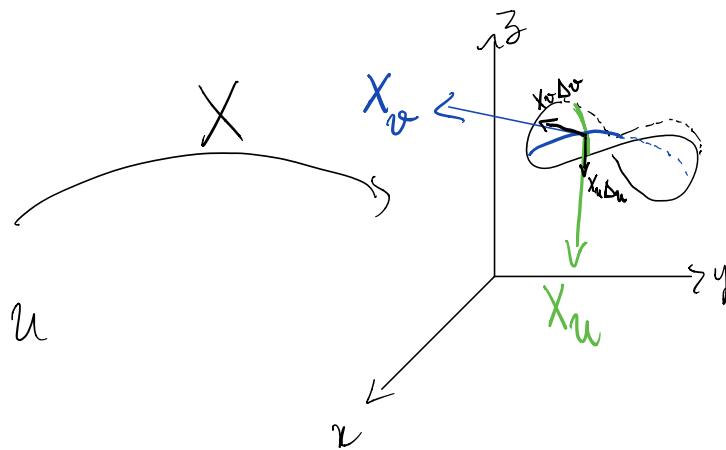
$$\vec{X}_\varphi = (\sin\theta \cos\varphi, \sin\theta \sin\varphi, -\cos\theta) \rightsquigarrow \vec{X}_\varphi(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Plano tangente:

$$\vec{X} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \lambda \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) + \mu \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$



$R_{ij}$  = retângulo em  $u, v$ .



multiplicamos  
 $X_u$  e  $X_v$  por

$\Delta u$  e  $\Delta v$

para a correção  
do tamanho do  
vetor, se aproximando do elemento de arco.

$$\text{área}(x(R_{ij})) \approx \| \vec{X}_u \Delta u \wedge \vec{X}_v \Delta v \|$$

pois o produto vetorial (módulo) devolve a área  
do paralelogramo entre os 2 vetores, por isso esse  
produto vetorial acaba sendo um estimador da  
área.

$$= \| \vec{X}_u \wedge \vec{X}_v \| \Delta u \Delta v$$

fator local de correção  
de área  
(Jacobian)

$$\text{área}(S) = \lim_{|p| \rightarrow 0} \sum \| \vec{X}_u \wedge \vec{X}_v \| \Delta u \Delta v$$

$$\text{Área}(S) = \iint_D \|\vec{x}_u \wedge \vec{x}_v\| du dv$$

Ex-1 Esfera:  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$0 \leq \varphi \leq \pi$$

$$\begin{cases} x = a \cdot \cos \theta \sin \varphi \\ y = a \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi \\ z = a \cdot \cos \varphi \end{cases}$$

$$\vec{x}_\theta = (-a \sin \theta \sin \varphi, a \cos \theta \sin \varphi, 0)$$

$$\vec{x}_\varphi = (a \cos \theta \cos \varphi, a \sin \theta \cos \varphi, -a \sin \varphi)$$

$$\vec{x}_\theta \wedge \vec{x}_\varphi = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -a \sin \theta \sin \varphi & a \cos \theta \sin \varphi & 0 \\ a \cos \theta \cos \varphi & a \sin \theta \cos \varphi & -a \sin \varphi \end{vmatrix} = \left( -a \cos^2 \theta \sin^2 \varphi \hat{i}, -a^2 \sin^2 \theta \sin \varphi \hat{j}, a^2 \sin \theta \cos \varphi \hat{k} \right)$$

$$\|\vec{x}_\theta \wedge \vec{x}_\varphi\| = \sqrt{a^4 \cos^2 \theta \sin^4 \varphi + a^4 \sin^4 \theta \sin^2 \varphi + a^4 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi} = \underline{a^2 \sin \varphi}$$

$$\text{área}(S) = \iint_D \|\vec{x}_u \wedge \vec{x}_v\| du dv = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi a^2 \sin \varphi d\varphi d\theta = \int_0^\pi 2\pi a^2 \sin \varphi d\varphi$$

$$= -2\pi a^2 \cos \varphi \Big|_0^\pi = -\underbrace{2\pi a^2 \cos \pi}_{-2\pi a^2} + \underbrace{2\pi a^2 \cos 0}_{1} = \underline{4\pi a^2}$$

**Ex-)** Área do parabolóide hiperbólico  $Z = y^2 - x^2$  entre os cilindros  $x^2 + y^2 = 1$  e  $y^2 + x^2 = 4$ .

$$\begin{cases} u = x \\ v = y \\ z = v^2 - u^2 \end{cases} \quad 1 \leq u^2 + v^2 \leq 4$$

$$\vec{x}_u = (1, 0, -2u)$$

$$\vec{x}_v = (0, 1, 2v)$$

$$\vec{x}_u \wedge \vec{x}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -2u \\ 0 & 1 & 2v \end{vmatrix} = (2u, -2v, 1)$$

$$\|\vec{x}_u \wedge \vec{x}_v\| = \sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}$$

área =  $\iint \sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1} \, du \, dv$ , mudando de coordenadas:

$$1 \leq u^2 + v^2 \leq 4$$

podria  
ter feito de  
primera

$$\begin{cases} u = r \cdot \cos \theta & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ v = r \cdot \sin \theta & 1 \leq r \leq 2 \\ |J| = r \end{cases}$$

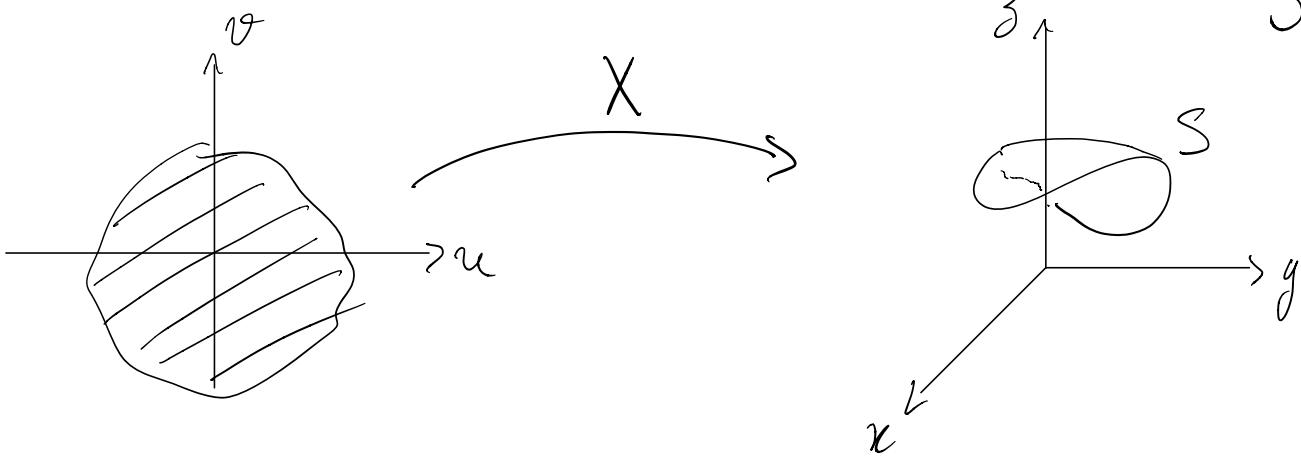
$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \int_1^2 \sqrt{4r^2 + 1} \, r \, dr \, d\theta = \frac{2\pi}{8} \left( 4r^2 + 1 \right)^{3/2} \cdot \frac{2}{3} \Big|_1^2 = \boxed{\text{[redacted]}}$$

# Superfícies Parametrizadas:

$$X: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \mathbb{C}^r;$$

$$(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) ; \quad (u, v) \in D$$

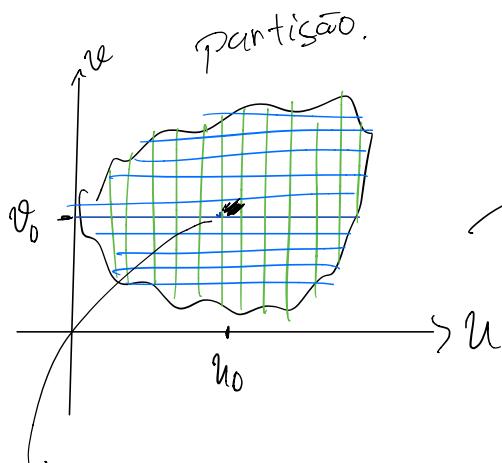
$$S = X(D)$$



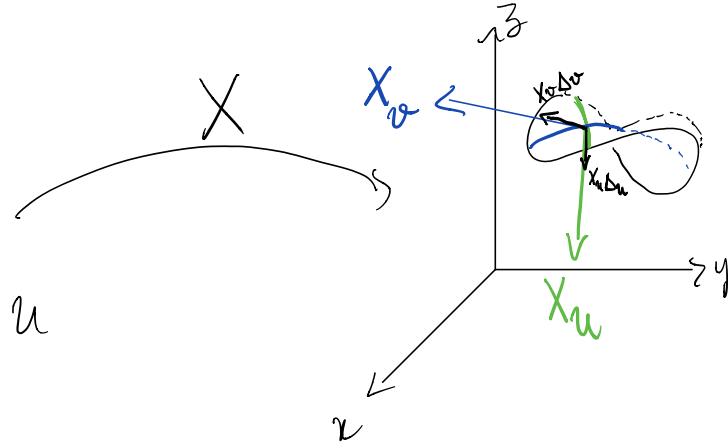
$$\vec{X}_u = \left( \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial Y}{\partial u}, \frac{\partial Z}{\partial u} \right)$$

$$\vec{X}_v = \left( \frac{\partial X}{\partial v}, \frac{\partial Y}{\partial v}, \frac{\partial Z}{\partial v} \right)$$

Dois vetores tangentes a superfície  $S$ .



$$R_{ij} = \text{retângulo em } u, v.$$



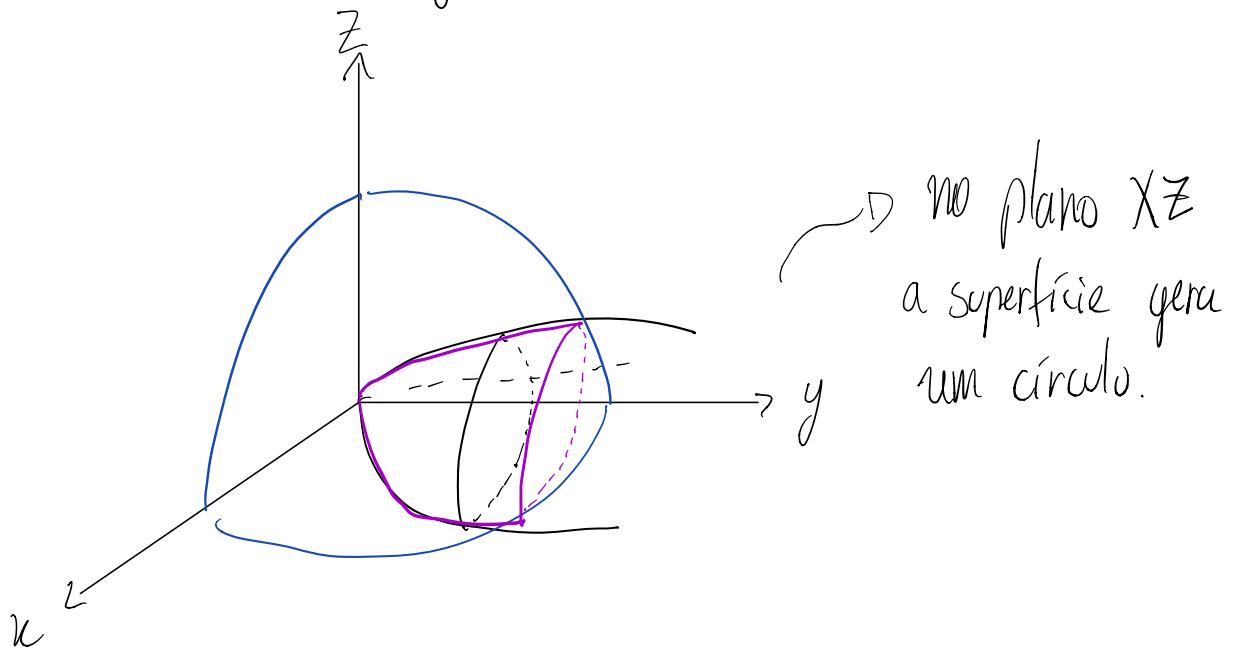
vetores LI

$$S \text{ é regular} \Leftrightarrow \vec{X}_u \wedge \vec{X}_v \neq 0$$

Logo  $\vec{x}_u$  e  $\vec{x}_v$  geram um plano tangente em  $S$ .

$$\text{Área}(S) = \iint_S 1 \, dS = \iint_D \|\vec{x}_u \wedge \vec{x}_v\| \, du \, dv$$

Ex: Área do pedaço de  $y = x^2 + z^2$ , contida no interior de  $x^2 + y^2 + z^2 = 2$



$$\begin{cases} y = x^2 + z^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow y^2 + y - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 9 \Rightarrow y = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow y_1 = \frac{-4}{2} \cancel{, y_2 = -2}$$

$$y_2 = 1$$

$$y = 1 \Rightarrow x^2 + z^2 = 1$$

↳ Circunferência de raio 1.

$$S = \begin{cases} x = u \\ y = u^2 + v^2 \\ z = v \end{cases}, D = u^2 + v^2 \leq 1$$

$$D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / u^2 + v^2 \leq 1\}$$

$$\vec{x} \quad \vec{u} \quad \vec{v}$$

$$\vec{X}_u = (1, 2u, 0)$$

$$\vec{X}_v = (0, 2v, 1)$$

$$\vec{X}_u \wedge \vec{X}_v = \vec{i}(2u) - \vec{j}(1) + \vec{k}(2v)$$

$$\|\vec{X}_u \wedge \vec{X}_v\| = \sqrt{1+4u^2+4v^2}$$

$$\text{Área}(S) = \iint_{u^2+v^2 \leq 1} \sqrt{1+4u^2+4v^2} \, du \, dv$$

$$\begin{cases} u = r \cos \theta & 0 \leq r \leq 1 \\ v = r \sin \theta & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ |S| = r \end{cases}$$

$$A(S) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1+4r^2} r \, dr \, d\theta = 2\pi \int_0^1 \sqrt{1+4r^2} r \, dr = \frac{\pi}{6} (5\sqrt{5} - 1)$$

Massa de S:

$$\text{densidade} = \delta(x, y, z)$$

$$\boxed{\text{Massa} = \iint_S \delta(x, y, z) \, ds}$$

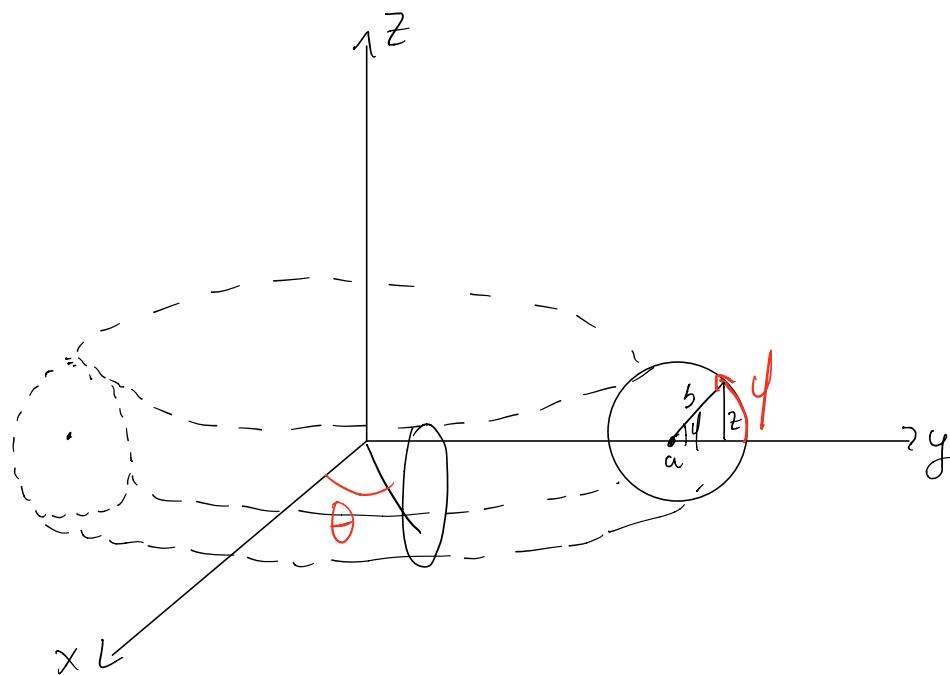
$$= \iint \delta(u, v) \|\vec{X}_u \wedge \vec{X}_v\| \, du \, dv$$

D  
(u, v)

## 2-) Torno de revolução:

S: obtida pela rotação de  $(y-a)^2 + z^2 = b^2$ ,  $x=0$  em torno do eixo Oz  $0 < b < a$

oi L3  
te amoooo



$$\begin{cases} x = (a + b \cos \varphi) \cdot \cos \theta & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ y = (a + b \cos \varphi) \cdot \sin \theta & 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ z = b \sin \varphi \end{cases}$$

$$\vec{x}_\theta = \left( -(a + b \cos \varphi \cdot \sin \theta), (a + b \cos \varphi) \cdot \cos \theta, 0 \right)$$

$$\vec{x}_\varphi = \left( -b \sin \varphi \cos \theta, -b \sin \varphi \sin \theta, b \cos \varphi \right)$$

$$E = \langle \vec{x}_\theta, \vec{x}_\theta \rangle = (a + b \cos \varphi)^2; F = \langle \vec{x}_\theta, \vec{x}_\varphi \rangle = 0; G = \langle \vec{x}_\varphi, \vec{x}_\varphi \rangle = b^2$$

$$\|\vec{x}_\theta \wedge \vec{x}_\varphi\| = \sqrt{E_G - F^2} = \underline{b(a + b \cos \varphi)} \quad \leadsto \text{agora calcular a integral}$$

# Fluxo

Orientação de Superfície:

$\vec{x}_u \wedge \vec{x}_v \neq 0$ , se regular

em cada ponto há 2 versões normais (um que aponta pra dentro e outro que aponta pra fora).

$$\vec{n} = \pm \frac{\vec{x}_u \wedge \vec{x}_v}{\|\vec{x}_u \wedge \vec{x}_v\|}$$

↳ Vale lembrar que  $\vec{x}_u, \vec{x}_v$  são ambos vetores tangentes a superfície, logo o vetor resultante de seu produto vetorial será um vetor normal (perpendicular) a superfície em todos os seus pontos.

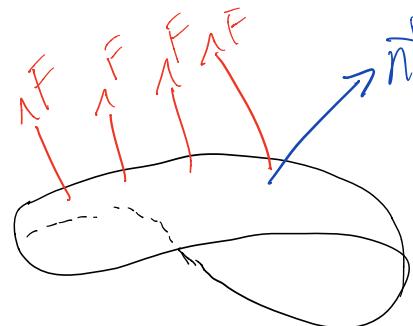
→ Pensando numa ideia de fluxo de um campo vetorial, estamos interessados em calcular intuitivamente pensando, o quanto do campo atravessa uma região da superfície. Para isso é analisado a componente do campo vetorial que é paralela a normal da superfície, por meio de um produto escalar do campo com o vetor normal (unitário) e o resultado serve o quanto do campo está projetado nessa direção normal e a isso nomeamos Fluxo.

Ou ainda o quanto do campo segue essa direção, o que leva a o quanto do campo atravessa a superfície.

Matematicamente temos:

Fluxo de  $\vec{F}$  através de  $S$ .

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$$



$$\iint_D \vec{F} \cdot \frac{\vec{x}_u \wedge \vec{x}_v}{\|\vec{x}_u \wedge \vec{x}_v\|} \, dudv$$

Se funções p/ superfícies  
orientáveis.

$$\Rightarrow \iint_D \vec{F} \cdot \vec{x}_u \wedge \vec{x}_v \, dudv$$

Def: S. regular é orientável se:  $\vec{n}(u,v) = \frac{\vec{x}_u \wedge \vec{x}_v}{\|\vec{x}_u \wedge \vec{x}_v\|}$

é contínuo em S

(se existe escolha contínua de versores normais em S).

Ex de não orientáveis: Faixa de Möbius  
(n tem lado)



## Garrafa de Klein:

↳ Nenhuma interior nem exterior



## Def: Fluxo:

dados  $\vec{F}$ , campo vetorial,  $S$  orientada pela escolha de um campo normal unitário;

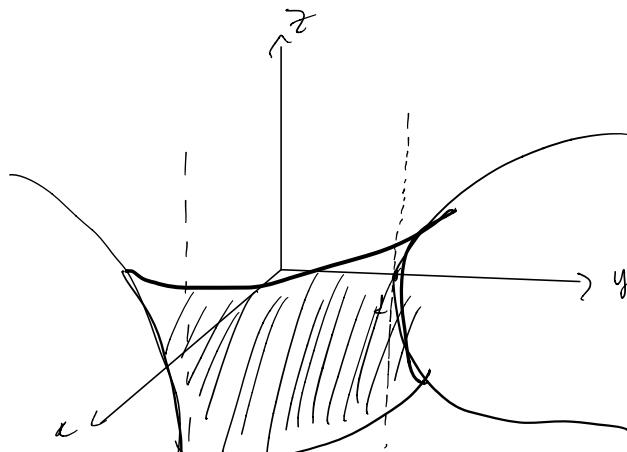
$$S \subset \text{dom } \vec{F}$$

Fluxo de  $\vec{F}$  através de  $S$  é

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_D \vec{F} \cdot \vec{x}_u \wedge \vec{x}_v dudv$$

Ex)  $\iint_S \vec{F} dS$ , sendo  $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, 0)$

$S$ : pedaço de  $z^2 = x^2 + y^2 - 1$  com  $0 \leq z \leq 1$  com normal que se afasta do eixo  $Z$ .



Um esboço  
nada fiel  
à realidade.

Parametrizacão:

$$1) \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \sqrt{u^2 + v^2 - 1} \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = \sqrt{r^2 - 1} \end{cases} \quad \begin{array}{l} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 1 \leq r \leq \sqrt{2} \end{array}$$

$$1 \leq u^2 + v^2 \leq 2 \quad \Rightarrow \quad \vec{x}_0 = (-r \sin \theta, r \cos \theta, 0)$$

$$\vec{x}_r = \left( \cos \theta, \sin \theta, \frac{r}{\sqrt{r^2 - 1}} \right)$$

$$\vec{x}_0 \wedge \vec{x}_r = i \left( \frac{r^2 \cos \theta}{\sqrt{r^2 - 1}} \right) + j \left( \frac{r^2 \sin \theta}{\sqrt{r^2 - 1}} \right) + k(-r)$$

$$\text{Fluxo} = \int_0^{2\pi} \int_1^{\sqrt{2}} (r \cos \theta, r \sin \theta, 0) \cdot \left( \frac{r^2 \cos \theta}{\sqrt{r^2 - 1}}, \frac{r^2 \sin \theta}{\sqrt{r^2 - 1}}, 0 \right) dr d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_1^{\sqrt{2}} \frac{\cancel{r^2} \cdot r}{\cancel{r^2 - 1}} dr d\theta \quad t = r^2 - 1 \quad r=1 \Rightarrow t=0$$

$$dt = 2r dr \quad r=\sqrt{2} \Rightarrow t=1$$

$$r dr = \frac{dt}{2}$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{t+1}{\sqrt{t}} \frac{dt}{2} d\theta \Rightarrow 2\pi \cdot \frac{1}{2} \int_0^1 t^{1/2} + t^{-1/2} dt = \pi \left[ t^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{3} + t^{1/2} \cdot 2 \right]_0^1$$

$$\Rightarrow \pi \left[ \frac{2}{3} + 2 \right] = \boxed{8\pi/3}$$

Obs: também é escrito da seguinte forma:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy$$

Ex-) Calcule  $\iint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy$  sendo  $S$  o cilindro  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $0 \leq z \leq 1$  c/ normal que aponta p/ eixo  $Z$ .

$$S = \begin{cases} x = \cos\theta & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ y = \sin\theta & \\ z = z & 0 \leq z \leq 1 \end{cases}$$

$$\vec{X}_\theta = \left( -\sin\theta, \cos\theta, 0 \right) \quad \vec{X}_\theta \wedge \vec{X}_z = \cos\theta \hat{i} + \sin\theta \hat{j} + 0 \hat{k}$$

$$\vec{X}_z = (0, 0, 1)$$

A normal pedida é  $(-\cos\theta, -\sin\theta, 0)$

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \int_0^{2\pi} \int_0^1 -\cos^2\theta - \sin^2\theta dz d\theta \Rightarrow \int_0^{2\pi} \int_0^1 -1 dz d\theta = \int_0^1 -2\pi dz = -2\pi \cancel{\int_0^1}$$

$\vec{F}, \forall \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  Campo vetorial

$$\vec{F}(x, y, z) = (P, Q, R)$$

Divergente:

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}, \text{ ou na notação diferencial:}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Equações de continuidade: Mecânica dos Fluidos

$$\operatorname{div}(\rho \vec{v}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$\vec{v} = v(t, x, y, z)$  velocidade do fluido

$\rho = \rho(t, x, y, z)$  - densidade

↓ divergente está medindo a quantidade de massa que sai pelo volume por unidade de tempo.

↳ divergente mede o quanto o campo  $\vec{F}$  se espalha em cada ponto.  
↳ Jerge

## Teorema de Gauss:

Fechada!

$\vec{F}: V \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  campo vetorial de classe  $C^1$

$\partial V$  = Superfície regular por partes orientada pela normal exterior.

$$\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV = \iint_{\partial V} \vec{F} \cdot \vec{n} ds$$

Ex)  $\iint_S -xz dy \wedge dz + (y^3 - yz) dz \wedge dx + z^2 dx \wedge dy$

$S: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  ;  $\vec{n}$  normal exterior.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = -z + 3y^2 - z + 2z \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 3y^2$$

Pelo teorema de Gauss:

$$= \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \iiint_V 3y^2 \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$$

$$\begin{cases} x = a \rho \cos \theta \sin \phi \\ y = b \rho \sin \theta \sin \phi \\ z = c \rho \cos \phi \end{cases} \quad \begin{array}{l} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \phi \leq \pi \\ 0 \leq \rho \leq 1 \end{array}$$

$$|S| = abc \rho^2 \sin \phi$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^1 3 \cdot b^2 \rho^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi \cdot abc \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

$$3abc \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin^3 \varphi \sin^2 \theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi d\theta = \frac{3abc}{5} \int_0^{2\pi} \left[ \cos^2 \theta - \cos \varphi + \frac{\cos^3 \varphi}{3} \right] \Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{3}{5} \pi abc \frac{4}{3} = \frac{4\pi abc}{5}$$

Ex-2)  $\iint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy$

$S$ : bando/frontera do cubo  $= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$

normal  $\vec{n}$  exterior.

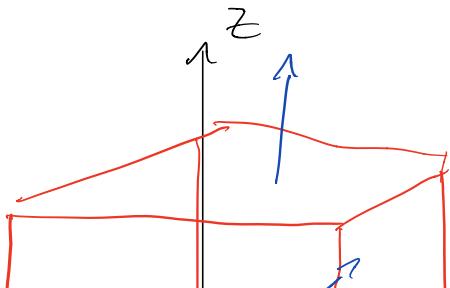
$$\vec{F} = \vec{r}(x, y, z) = (x, y, z)$$

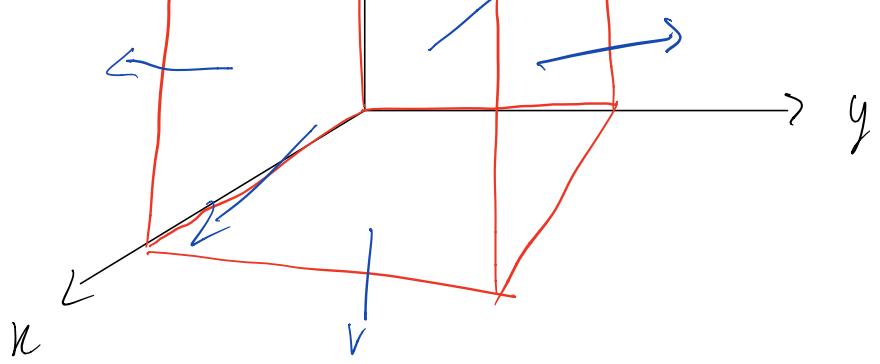
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = 1 + 1 + 1 = 3$$

pelo teorema de Gauss:  $\iiint_V 3 dV = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 3 \cdot dx dy dz$

$$= 3 \cdot xyz \Big|_0^1 = 3$$

$$3 \cdot \iiint_V dV = 3 \cdot \text{Vol}(V) = 3 \cdot 1 \cdot 1 = 3$$

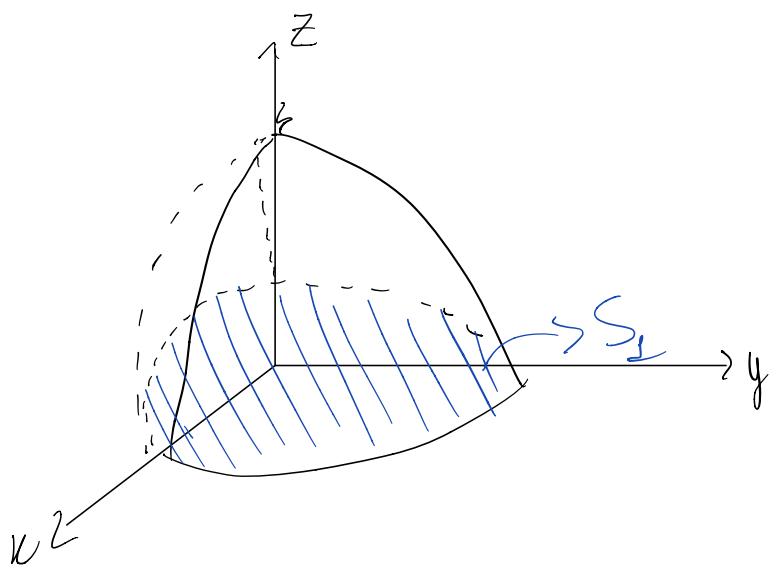




Ex-1) Calcule  $\iint_S x^3 dy dz + \left[ (\sin^2 z) \right]^{\sqrt{z^2+1}} dz dx + y^2 dx dy$

S: é o pedaço de  $z = 4 - x^2 - y^2$ , satisfazendo  $z \geq 0$  e com  $\vec{n}$  que se afasta do eixo z.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 3x^2$$



Seja  $S_1: x^2 + y^2 \leq 4, z = 0$  com normal  $\vec{n}_1 = -\vec{k}$

Seja  $V \subset \mathbb{R}^3$  com  $\partial V = S \cup S_1$

→ aqui o teorema de Gauss é aplicável.

$$\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS \Rightarrow \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}_1 dS + \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}_2 dS$$

$$\Rightarrow \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} - \iint_{S_L} \vec{F} \cdot \vec{n}_L ds$$

$$\textcircled{1} = \iiint_V 3x^2 \, dv$$

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos\theta & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ y = r \cdot \sin\theta & 0 \leq r \leq 2 \\ z = z & 0 \leq z \leq 4 - r^2 \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{4-r^2} 3r^2 \cos^2 \theta \frac{r}{|z|} \cdot dz dr d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 3r^2 \cos^2 \theta (4-r^2) dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left[ \frac{3}{12} \cos^2 \theta r^4 \right]_0^2 - \left[ \frac{3r^6 \cos^2 \theta}{18} \right]_0^2 d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} 3(\cos^2 \theta \cdot 2^4 - \frac{2^{65}}{2} \cos^2 \theta) d\theta = \int_0^{2\pi} 3(\cos^2 \theta / 16 - 32 \cos^2 \theta) d\theta$$

$2\theta = u$

$$\Rightarrow 16 \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \, d\theta = 16 \cdot \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} + \frac{\cos 2\theta}{2} \, d\theta \Rightarrow 8 \cdot \int_0^{2\pi} 1 + \cos 2\theta \, d\theta = 8 \left[ 2\pi + \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_0^{2\pi} = 16\pi$$

$$\textcircled{2} \quad \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$$

$$S_1: \begin{cases} k = r \cdot \cos \theta & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ y = r \cdot \sin \theta & 0 \leq r \leq 2 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\vec{x}_\theta = \left( -r \cdot \sin \theta, r \cdot \cos \theta, 0 \right)$$

$$\vec{x}_r = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$$

$$\vec{x}_\theta \wedge \vec{x}_r = 0\vec{i} + 0\vec{j} - r\vec{k} \quad \text{orientação correta.}$$

$$\textcircled{2} = \int_0^{2\pi} \int_0^2 -r^3 \cdot \sin^2 \theta \, dr \, d\theta \Rightarrow \left[ -\frac{r^4}{4} \sin^2 \theta \right]_0^{2\pi} \Rightarrow \frac{-16}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \, d\theta$$

$$\Rightarrow -\frac{16}{4} \left[ \frac{1}{2} - \frac{\cos 2\theta}{2} \right]_0^{2\pi} = -\frac{8}{4} \int_0^{2\pi} 1 - \cos 2\theta \, d\theta = \frac{-8}{4} \left( 2\pi - \left[ \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_0^{2\pi} \right) = -4\pi$$

$$\Rightarrow \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = 16\pi - (-4\pi) = 20\pi$$

O Campo  $\frac{\vec{r}}{r^3}$ ;  $\vec{r}$  = vetor radial =  $(x, y, z)$

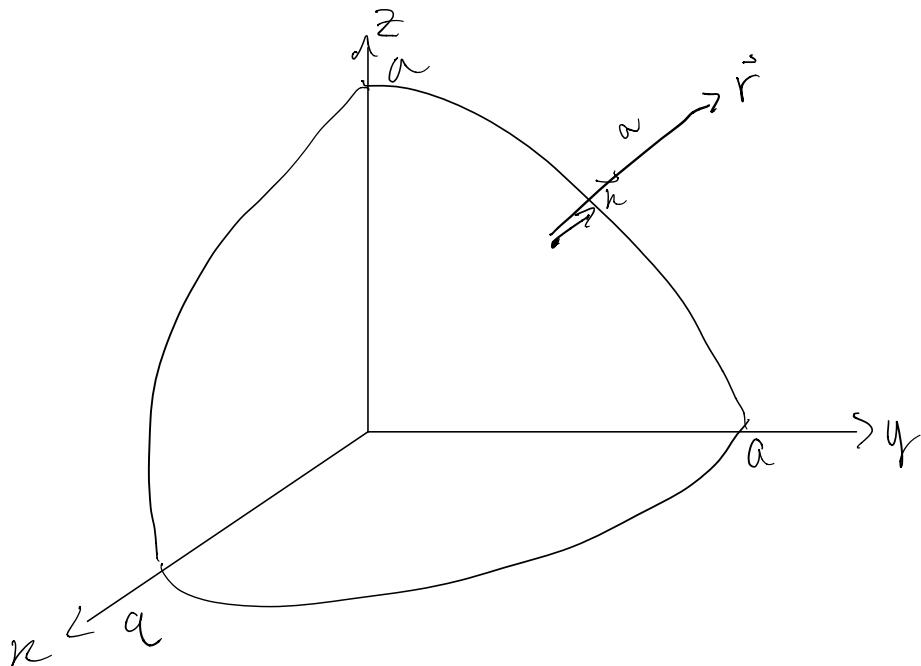
$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{k\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^3} \rightsquigarrow$$

A menos de constantes  $\rightsquigarrow$  Campo Elétrico.

$S: x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ; normal exterior

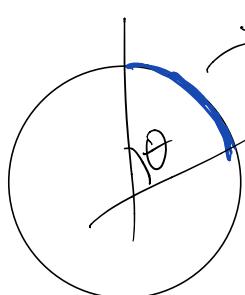
$$\iint_S \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \vec{n} dS$$



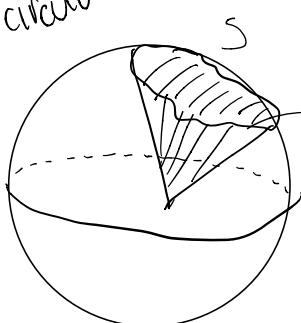
$$\vec{r} \cdot \vec{n} = a$$

$$\frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \vec{n} = \frac{1}{a^2}$$

$$\iint_S \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \vec{n} dS = \iint_S \frac{1}{a^2} dS = \frac{1}{a^2} \text{Área}(S) = \frac{4\pi a^2}{a^2} = \frac{4\pi}{1}$$



Um pedaço do círculo  
determina  
um ângulo



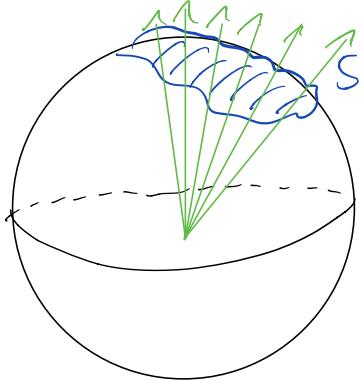
$\rightsquigarrow$  ângulo sólido  
Concomitantemente em dim=3  
uma região determina um  
ângulo sólido

$\rightsquigarrow$  ângulo  
sólido da esfera

## Ângulo Sólido

S contido na esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

O ângulo sólido determinado por S é a reunião das semi retas que saem da origem e passam por S.



Medida do ângulo sólido ( $\Omega$ )

$$\Omega = \iint_S \frac{\vec{r} \cdot \hat{n}}{r^3} dS$$

→ No caso da esfera,  $\Omega = 4\pi$

Voltando ao campo  $\frac{\vec{r}}{r^3}$ :  $\nabla \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = 0 \rightarrow$  Incompressível

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{\sqrt{r^3}} \right) = \frac{1 \cdot \cancel{\sqrt{r^3}}^3 - \kappa \cdot 3 \cdot \cancel{\sqrt{r^3}}^2 \cdot \frac{x}{\cancel{\sqrt{r^3}}}}{\cancel{\sqrt{r^3}}^6}$$

$$= \frac{\cancel{\sqrt{r^3}}^3 - 3x^2 \cancel{\sqrt{r^3}}}{\cancel{\sqrt{r^3}}^6}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\cancel{\sqrt{r^3}}^3 - 3y^2 \cancel{\sqrt{r^3}}}{\cancel{\sqrt{r^3}}^6} ; \quad \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\cancel{\sqrt{r^3}}^3 - 3z^2 \cancel{\sqrt{r^3}}}{\cancel{\sqrt{r^3}}^6}$$

domínio de  $\frac{\vec{r}}{r^3}$   
 $= \mathbb{R}^3 - (0,0,0)$

$$\nabla \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{3\sqrt[3]{-3(x^2+y^2+z^2)}\sqrt[3]{1}}{\sqrt[6]{16}} = \frac{3\sqrt[3]{-3}\sqrt[3]{1}}{\sqrt[16]{16}} = 0$$

$$\iint_S \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{r^3} ds \quad S: S_1 \cup S_2$$

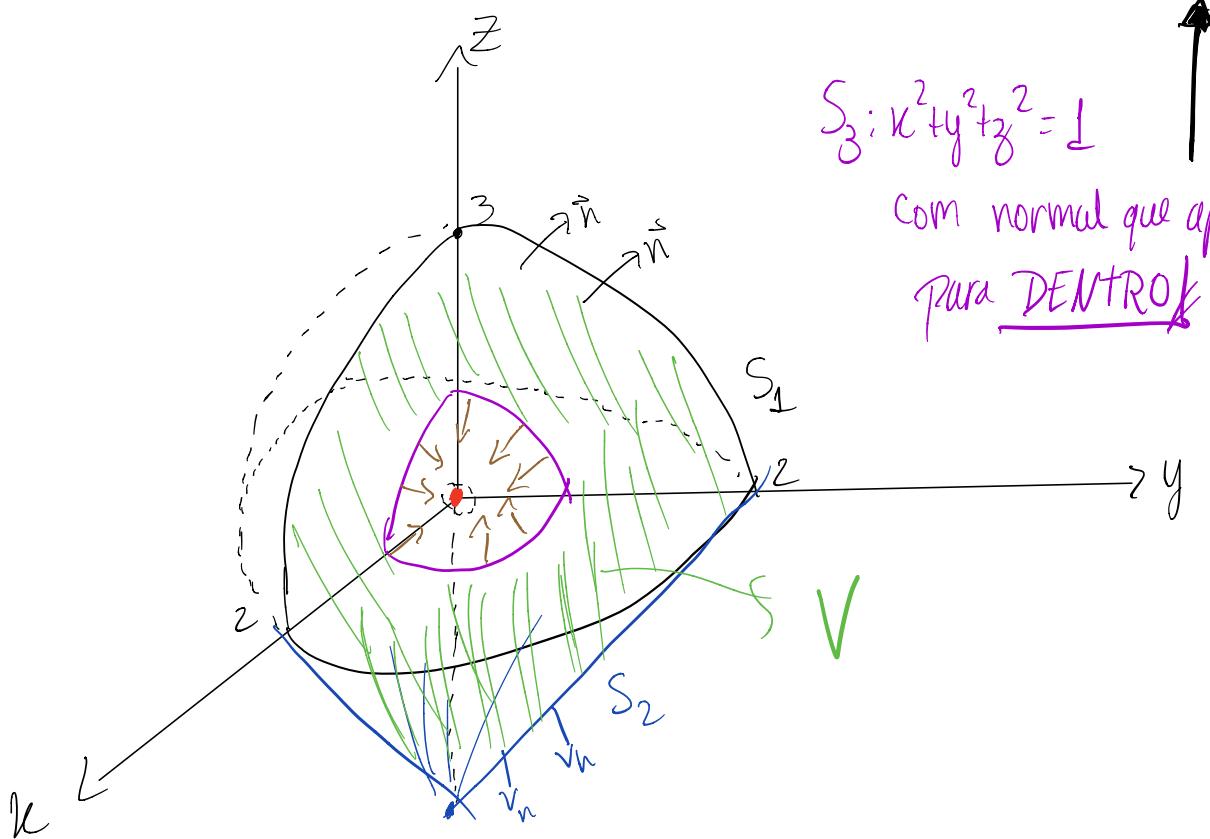
$$S_1: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1, \quad \vec{n}_1 \text{ de cota} \geq 0$$

$$S_2: z = \sqrt{x^2 + y^2} - 2$$

$$z \leq 0$$

$$\vec{n}_2 \text{ de cota} \leq 0$$

É a normal externa  
a região de integração



Isolar a singularidade para poder aplicar o teorema de Gauss.

$V \subset \mathbb{R}^3$  cujo fronteira:  $\partial V = S_1 \cup S_2 \cup S_3$

Pelo Teorema de Gauss temos:

$$\iiint \vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} dV = \iint \frac{\vec{r}}{r^3} d\vec{s} \Rightarrow \text{Como } \vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = 0 \text{ temos:}$$

$\nabla \underbrace{S_1 S_2 U_{S_3}}_{\partial V}$

$$0 = \iint_{S_1 \cup S_2} \frac{\vec{r}}{r^3} d\vec{s} + \iint_{S_3} \frac{\vec{r}}{r^3} d\vec{s}$$

$S_3$   
 $\underbrace{-4\pi}_{\text{normal aponta p/ lado contrário ao calculado anteriormente}}$

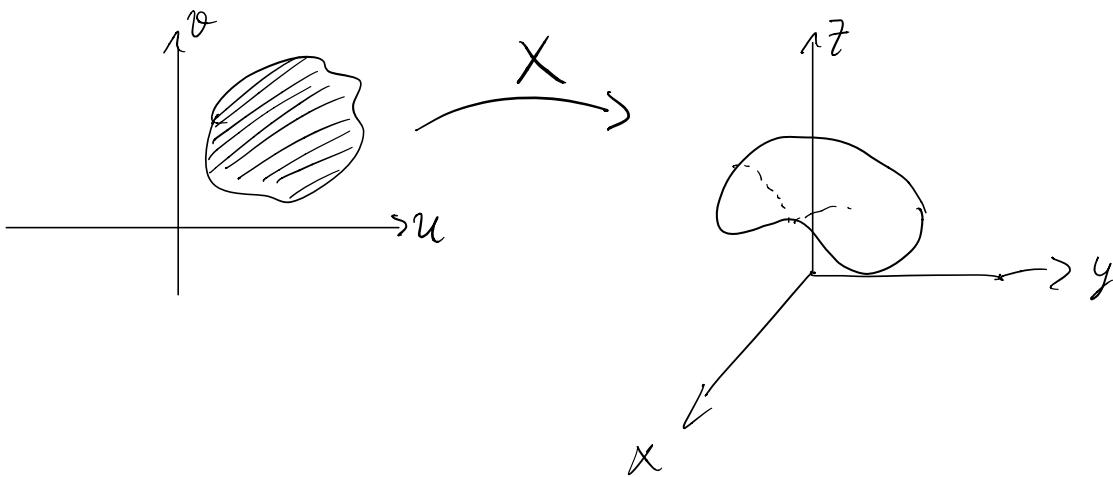
↳ normal aponta p/ lado contrário ao calculado anteriormente

$$\Rightarrow \iint_{S_1 \cup S_2} \frac{\vec{r}}{r^3} d\vec{s} - 4\pi = 0 \Rightarrow \iint_{S_1 \cup S_2} \frac{\vec{r}}{r^3} d\vec{s} = 4\pi$$

### Bordo:

Noção intuitiva do bordo de uma superfície.

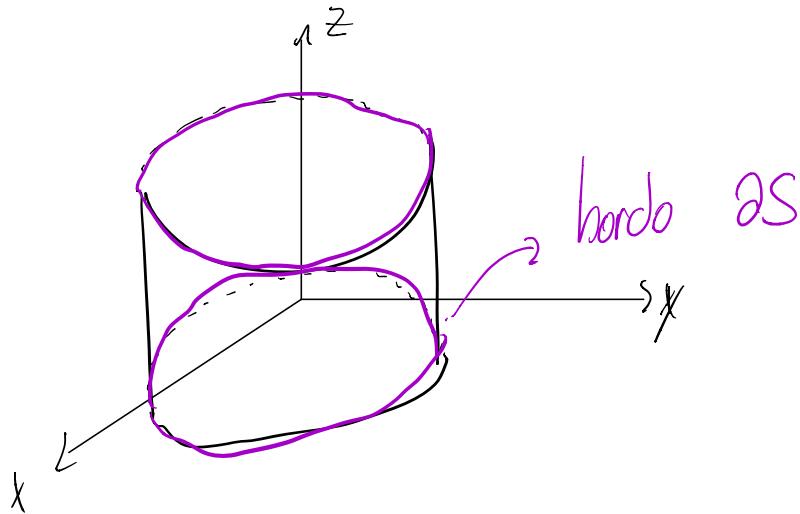
$$X: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad S = X(D)$$



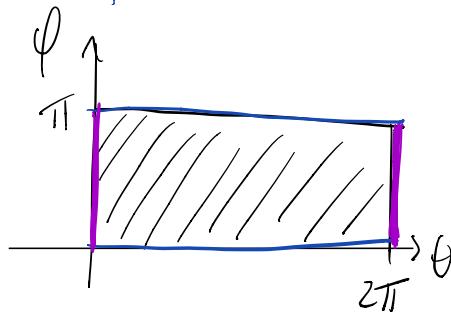
- b  
ordo de  $S$  é formado por curvas regulares por partes
- as curvas do b  
ordo são percorridas uma única vez.

$$\partial S \subset X(\partial D) \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

1)



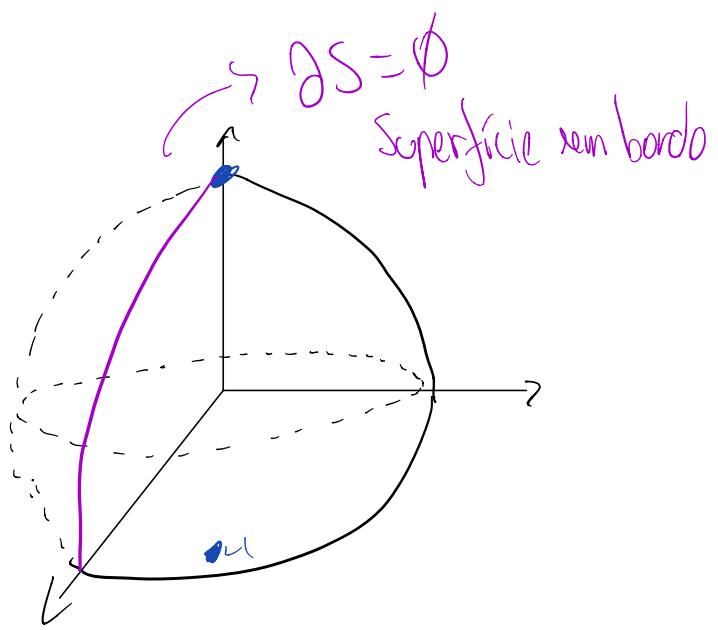
2) Esfera



$$x = a \cdot \cos \theta \sin \phi$$

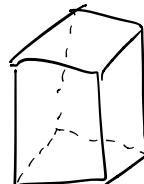
$$y = a \cdot \sin \theta \sin \phi$$

$$z = a \cdot \cos \phi$$



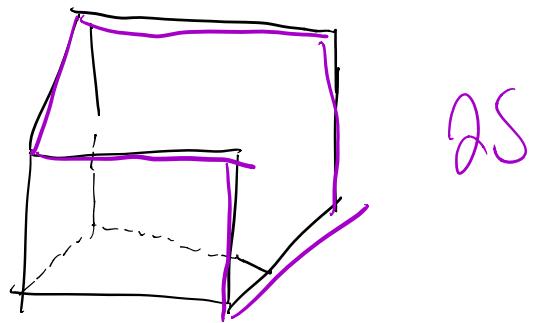
↳ Superfícies fechadas geralmente não possuem b  
ordo.

3) Cubo

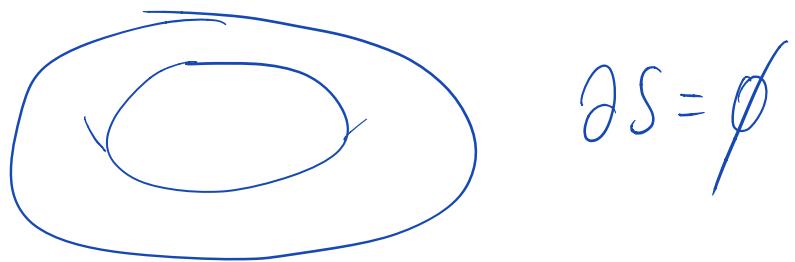


$$\partial S = \emptyset$$

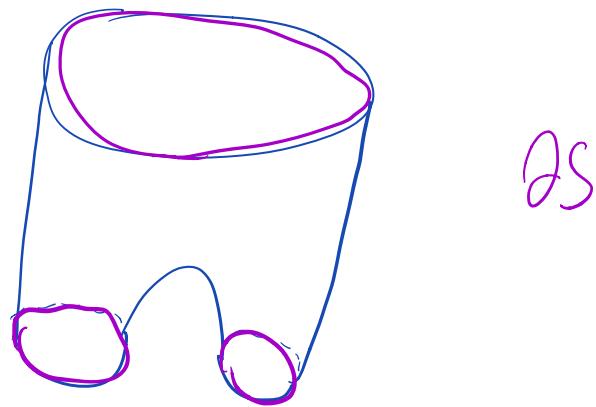
4-) Cubo sem 2 faces adjacentes:



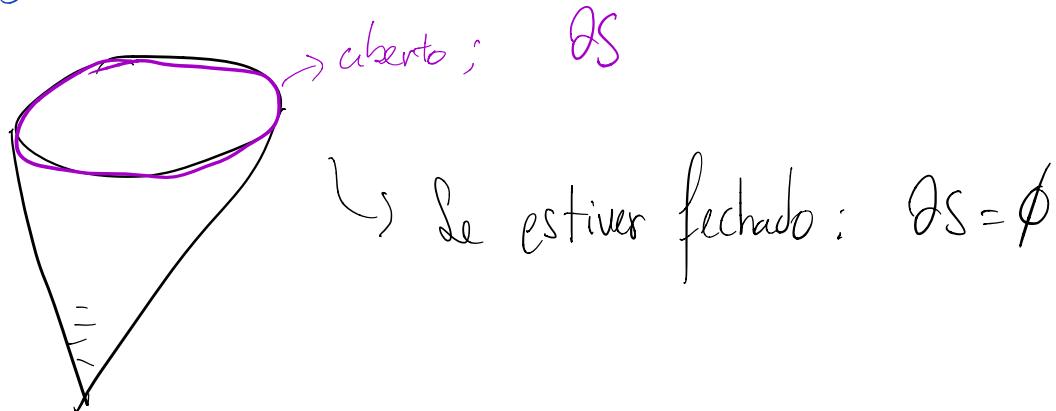
5-) Toro de Revolução



6-)

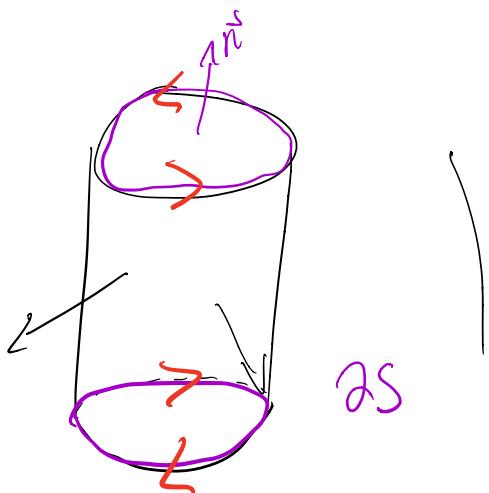


7-) Pedaço de Cone:



O orientação coerente  $\rightarrow$  regra da mão direita no vetor normal à superfície para determinar o sentido do bordo  $\partial S$ .

Ex-) Cilindro c/ normal para fora:



bordos com sentidos contrários dados pela regra da mão direita.

Teorema de Stokes:

$\vec{F}: D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  campo vetorial;  $C^n$

$S$ : Superfície parametrizada regular por partes orientável e  $S$  e  $\partial S$  orientados coerentemente. Então:

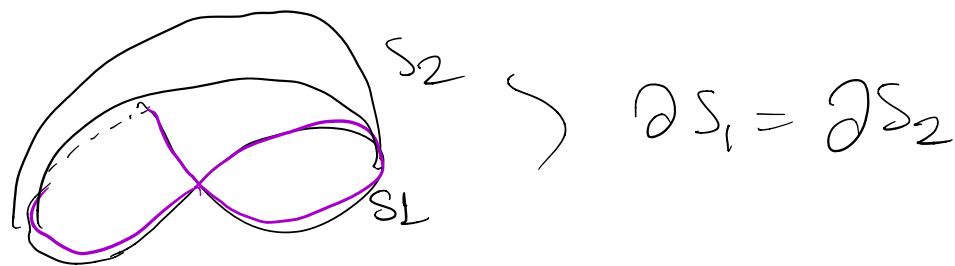
$$\iint_S \vec{\nabla} \times \vec{F} d\vec{S} = \int_{\partial S} \vec{F} d\vec{r}$$

Obs:

1-)  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0 \rightsquigarrow \text{se } \vec{F} \text{ é de classe } C^2$

2-)  $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \phi) = 0$

3-)



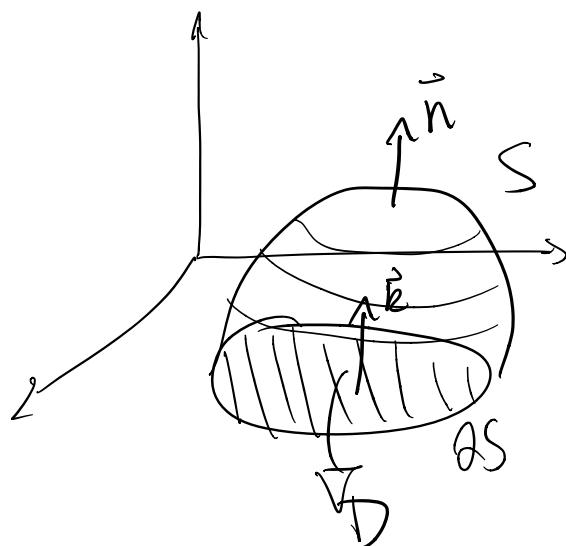
Ovar Superfícies que são ligeiramente diferentes mas possuem o mesmo bordo.

$$\iint_{S_2} \vec{\nabla}_1 \vec{F} \cdot \vec{n}_2 - \iint_{S_1} \vec{\nabla}_1 \vec{F} \cdot \vec{n}_1 = \iint_{S_2 \cup (-S_1)} \vec{\nabla}_1 \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_{\text{int}(S_2 \cup (-S_1))} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}_1 \vec{F}) \, dv = 0$$

$$\Rightarrow \iint_{S_2} \vec{\nabla}_1 \vec{F} = \iint_{S_1} \vec{\nabla}_1 \vec{F}$$

Logo, a integral não depende da superfície, mas sim do bordo da superfície.

4) Se \$S\$ é plano



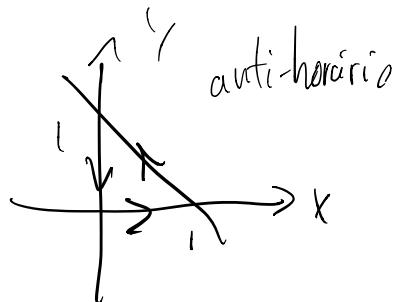
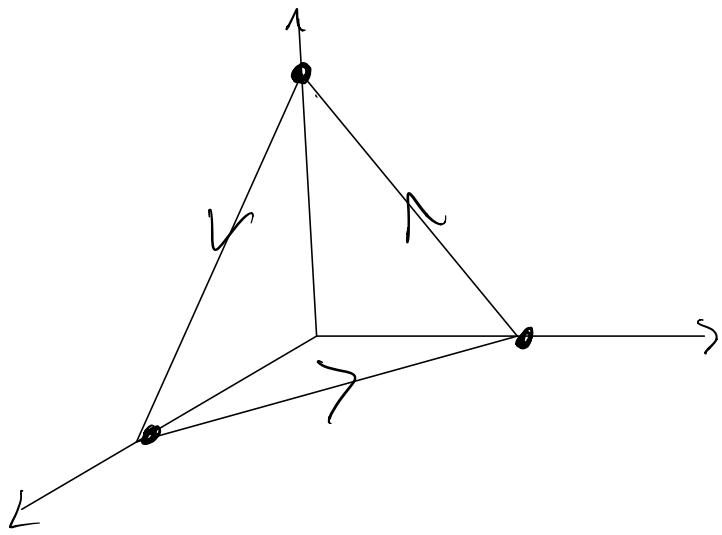
$$\iint_S \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_D \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \cdot \vec{k} = \underbrace{\int \vec{F} \cdot d\vec{r}}_{\partial D}$$

Teorema de Green

Ex-)  $\int \vec{F} \cdot d\vec{r}$  sendo

$$\vec{F} = (z^2 + e^{x^2})\vec{i} + (y^2 + \ln(1+y^2))\vec{j} + (xy + \sin^3 z)\vec{k}$$

e sendo  $\gamma$  a fronteira do triângulo de vértices  $(1,0,0)$ ;  $(0,1,0)$ ;  $(0,0,1)$  percorrida de modo que sua projeção no plano  $XY$  esteja no sentido anti-horário.



$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z^2 + e^{x^2} & y^2 + \ln(1+y^2) & xy + \sin^3 z \end{vmatrix}$$

$$= x\vec{i} + (-y+2z)\vec{j} + (0)\vec{k} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}$$

Eq. Plano:

$$0 = \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$2x-2+z+2y=0 \Rightarrow \underline{2x+2y+z-2=0} \quad \text{X}$$

S:  $\begin{cases} x=u & 0 \leq u \leq 1 \\ y=v & 0 \leq v \leq 1-u \\ z=2-2u-2v \end{cases}$

$$\begin{aligned} \vec{x}_u &= (1, 0, -2) & \vec{x}_v &= (0, 1, -2) \\ \vec{x}_u \wedge \vec{x}_v &= (2, 2, 1) \end{aligned}$$

Orientação coerente

$$\Rightarrow \int_0^1 \int_0^{1-u} 2u - 2v + 8 - 8v - 8u \, dv \, du = \frac{4}{3}$$

↳ Lembrando que no teorema de Stokes independe da Superfície mas depende unicamente do bordo da Superfície

↳ Muitas vezes para aplicar o Teorema de Stokes é conveniente Criar uma certa Superfície genérica  $S$ , tal que  $\partial S = \gamma$

↳ Curva  $\gamma$  do enunciado

Def:  $A \subset \mathbb{R}^3$  é um domínio simplesmente conexo se:

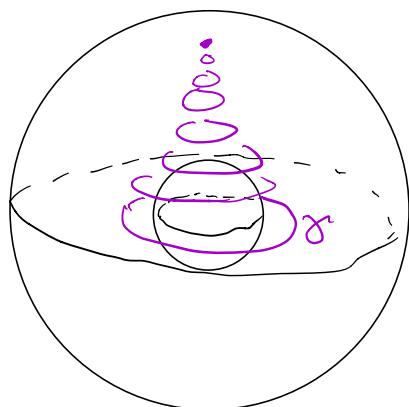
1-) Qualquer curva fechada simples pode ser contraiida até um ponto em A.

ou

2-) qualquer curva fechada é bordo de uma superfície em A.

→ A região pode ter buracos e ainda continuar sendo simplesmente conexo.

Ex: Coroa Esférica: é simplesmente conexo.



Ex:  $\mathbb{R}^3 - \{eixo z\}$

→ Não é simplesmente conexo.

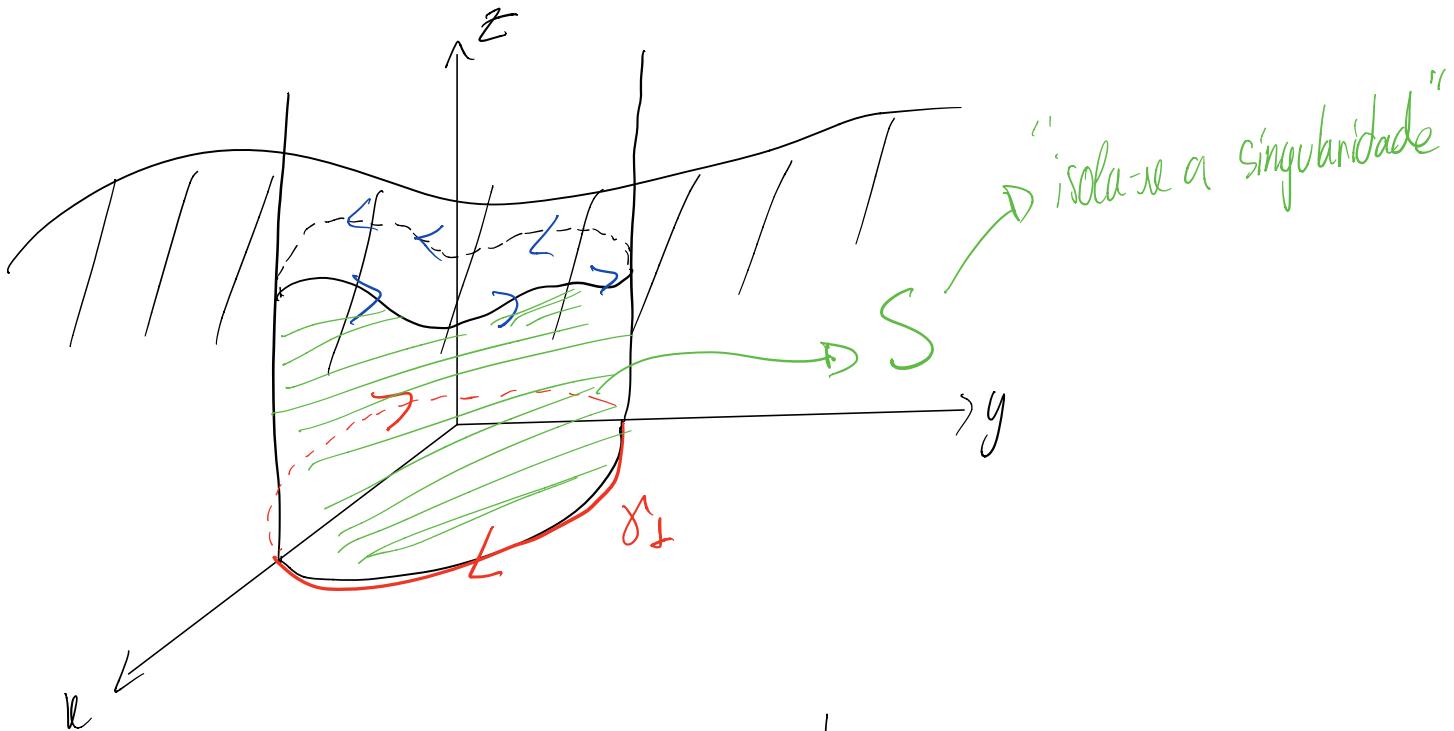
Teorema:  $\vec{F}: D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  campo  $C^r$ , Se  $\text{dom}(\vec{F})$  é simplesmente conexo (em  $\mathbb{R}^3$ ) e  $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0$ . Então  $\vec{F}$  é conservativo.

EX-5

$$\left\{ \begin{array}{l} -y \frac{\partial}{\partial x} + \frac{k}{x^2+y^2} \frac{\partial}{\partial y} + \sin(1+z^0) \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 \end{array} \right.$$

$\gamma: \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=\sin y + s \end{cases}$  em  $Oxy$  no sentido anti-horário.

↪ curva senoidal (telhas)



$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{k}{x^2+y^2} & \sin(1+z^0) \end{vmatrix} = 0$$

↪ Dom  $\vec{F} = \mathbb{R}^3 \setminus \{eixo z\}$

Seja  $\gamma: \begin{cases} x^2+y^2=1 \text{ no sentido horário} \\ z=0 \end{cases}$

E Seja  $S$  o pedaço do cilindro  $x^2+y^2=1$ , entre  $y=1$  e  $y=2$ , com normal  $\vec{n}$  "para dentro". Aplicar o teorema de Stokes na superfície  $S$ :

$$\oint_S \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \hat{n} = \int_C \vec{F} d\vec{r} \Rightarrow \int_C \vec{F} d\vec{r} = - \int_C \vec{F} d\vec{r} = -(-2\pi) = \underline{2\pi}$$

$$Y_1: \begin{cases} X = \sin \theta \\ Y = \cos \theta \\ Z = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \int y = 0$$

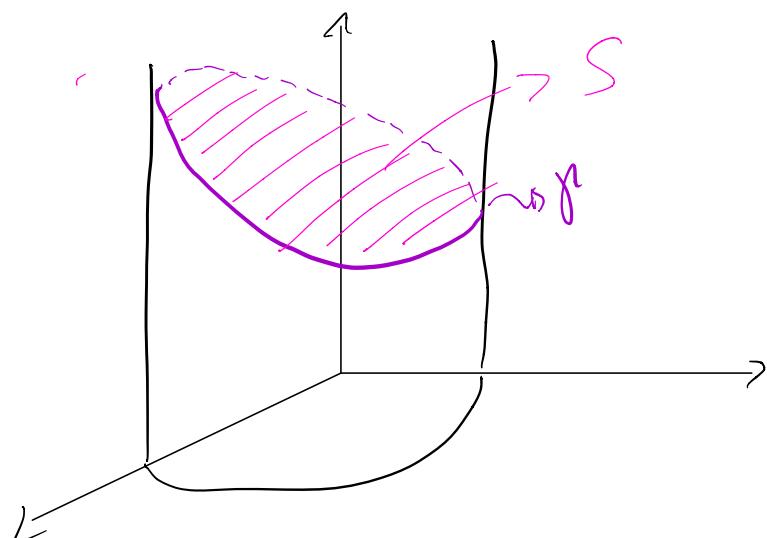
Ex-7  $\int_C (z+y^2)dx + (y^2+1)dy + [\ln(z^2+1) + y]dz$

on  $x^2+y^2=4 \rightarrow z=10-y$

$\gamma(t) = (2\cos t, 2\sin t, 10-2\sin t)$

$0 \leq t \leq 2\pi$

$$\overrightarrow{V_1F} = (0, 0, +2y)$$



Definimos una superficie  $S$  tal que  $\partial S = \gamma$   
 ↳ o que permite utilizar o teorema de Stokes. ↳ pedazo de plano.

$$S = \begin{cases} x = r \cdot \cos \theta & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ y = r \cdot \sin \theta & 0 \leq r \leq 2 \\ z = 10 - r \cdot \sin \theta \end{cases} \quad \underline{\partial S = \gamma}$$

$$\vec{x}_\theta = (-r \cdot \sin \theta, r \cdot \cos \theta, -r \cdot \cos \theta)$$

$$\vec{x}_r = (\cos \theta, \sin \theta, -\sin \theta)$$

$$\vec{x}_\theta \wedge \vec{x}_r = (0, -r, -r) \rightsquigarrow \text{sentido contrário}$$

$$\vec{x}_r \wedge \vec{x}_\theta = (0, r, r) \rightsquigarrow \text{normal coerente}$$

Pelo Teorema de Stokes:

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \iint_S \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 r - 2r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta = \cancel{4\pi f} \end{aligned}$$

## Significado Físico do Rotacional

→ dado  $\vec{F}$ , o que é  $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$  num ponto?

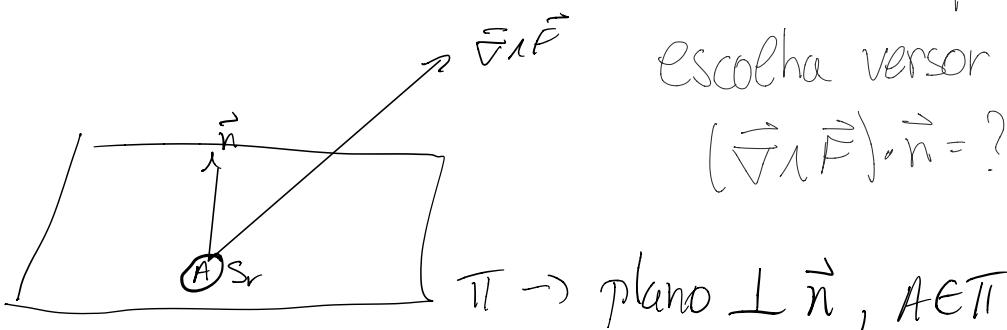
escolha vedor  $\vec{n}$  arbitrário em  $\mathbb{R}^3$

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) \cdot \vec{n} = ?$$

dado  $\vec{F}$ , o que é  $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$  num ponto?

escolha vedor  $\vec{n}$  arbitrário em  $\mathbb{R}^3$

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) \cdot \vec{n} = ?$$



$\pi \rightarrow$  plano  $\perp \vec{n}$ ,  $A \in \pi$

$S_r$  = circunferência de centro  $A$  e raio  $r$ .

Teorema de Stokes:  $\iint_{\text{int}(S_r)} \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \oint_{S_r} \vec{F} dr$

$\text{rot } \vec{F}(A) \cdot \vec{n} \cdot \text{área}(S_r) \approx \oint_{S_r} \vec{F} dr$  ( visto que  $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$  é contínuo e não deve variar muito para  $S_r$  pequeno)

$$\text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\oint_{S_r} \vec{F} dr}{\pi r^2}$$

↳ Rotacional em cada ponto mede a relação entre a circulação na região e a área circunscrita.

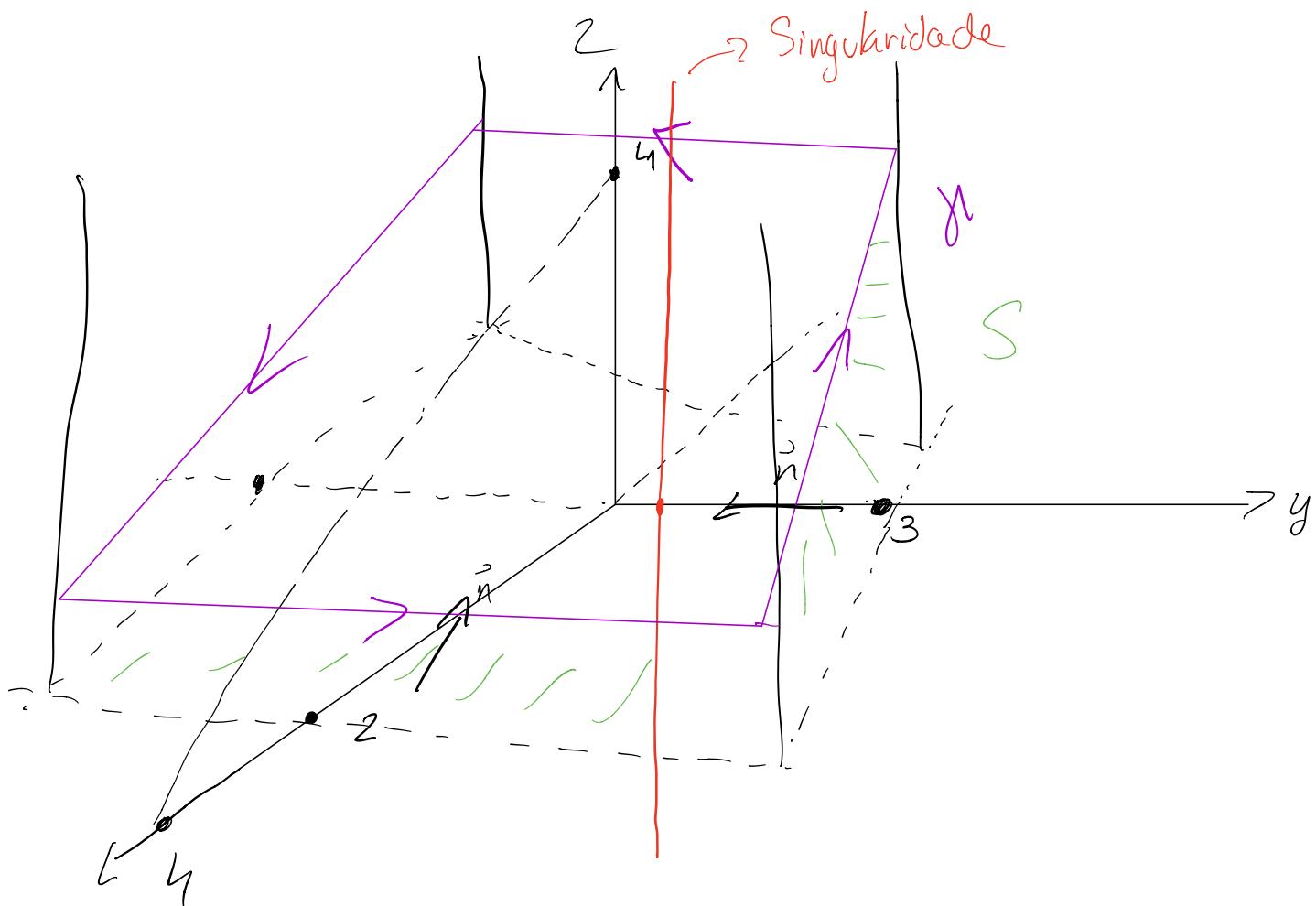
Ex-)  $\int \frac{-(y-z)}{x^2 + (y-1)^2} dx + \frac{x}{x^2 + (y-1)^2} dy + \sin z dz = \textcircled{X}$

Sendo  $\gamma$  a intersecção de  $x=2$ ,  $x=-2$ ,  $y=3$ ,  $y=-3$ ,  $z=4-x$  com projeções no  $xy$  no sentido anti-horário.

$$\text{dom } \vec{F} = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 1, z), z \in \mathbb{R}\}$$

$$\vec{\nabla} \lambda F = (-1, 0, 0)$$

$F$  não é conservativo.



Seja  $\gamma_1$  o retângulo:  $z=0$ ,  $x=2$ ,  $x=-2$ ,  $y=3$ ,  $y=-3$  percorrido no sentido horário.

Seja  $S$  o pedaço do prisma entre  $\mathcal{F}_1$  e  $\mathcal{F}$  com  
 $\vec{n}$  normal que aponta p/ eixo  $\vec{z}$ .  
 Aplicando Teorema de Stokes:

$$\iint_S \vec{\nabla} \cdot \vec{F} d\vec{s} = \int_{\mathcal{P}} \vec{F} d\vec{r} + \int_{\mathcal{F}_1} \vec{F} d\vec{r}$$

$\underbrace{S}_{(I)}$

$$(I) \quad S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$$

$$\iint_{S_1} \vec{\nabla} \cdot \vec{F} d\vec{s} = \iint_{S_1} (-i)(-i) = 1 \cdot \text{área}(S_1) = \underline{12}$$

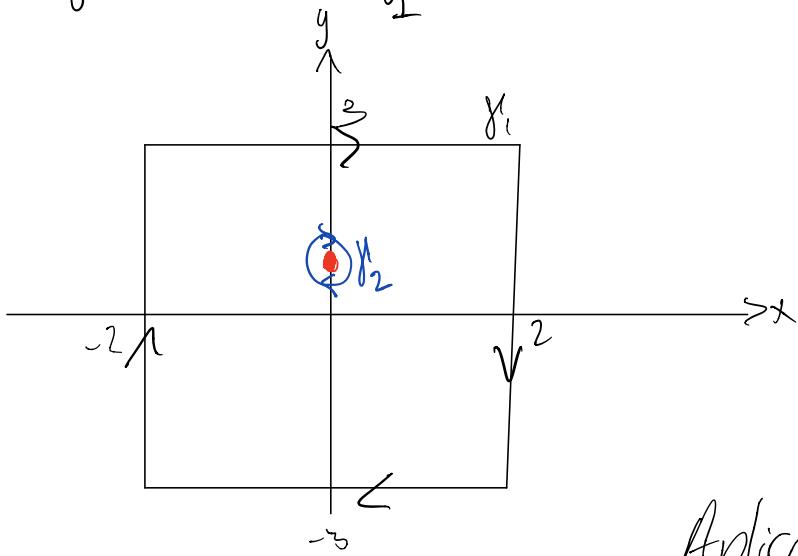
$$\iint_{S_2} \vec{\nabla} \cdot \vec{F} d\vec{s} = \iint_{S_2} (-i)(j) = \underline{0}$$

$$\iint_{S_3} \vec{\nabla} \cdot \vec{F} d\vec{s} = \iint_{S_3} (-i)(i) d\vec{s} = -\text{área}(S_3) = \underline{-36}$$

$$\iint_{S_4} \vec{\nabla} \cdot \vec{F} d\vec{s} = \iint_{S_4} (-i)(j) d\vec{s} = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \iint_S \vec{\nabla} \cdot \vec{F} d\vec{s} = 12 - 36 = \underline{-24}$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma} \vec{F} d\vec{r} = -24 - \int_{\gamma} \vec{F} dr$$



$$y_2 : k = \sin \theta$$

$$y = 1 + \cos \theta \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$z = 0$$

DCIR<sup>2</sup>, com

$$\partial D = -y_1 \cup y_2$$

Aplicando Stokes:

$$\iint_S \vec{\nabla} \cdot \vec{F} d\vec{S} = \int_{y_1} \vec{F} dr + \int_{y_2} \vec{F} dr$$

$$\iint_S (\vec{k}) (-i) dS = - \int_{y_1} \vec{F} dr + \int_{y_2} \vec{F} dr - \int_{y_2} \vec{F} dr + \int_{y_1} \vec{F} dr$$

$$0 = - \int_{y_1} \vec{F} dr - 2\pi \Rightarrow \int_{y_1} \vec{F} dr = -2\pi \quad \cancel{-2\pi}$$

Finalmente:

$$\int_{\gamma} \vec{F} d\vec{r} = 2\pi - 24$$

FIM

OBS: Alguns apontamentos devem ser feitos em relação a teoria de campos conservativos, como por exemplo o Teorema de Helmholtz: