



**UNIVERSIDADE  
FEDERAL DO CEARÁ**

**CENTRO DE TECNOLOGIA**

**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA QUÍMICA**

**TRANSFERÊNCIA DE CALOR E MASSA 2024.1**

**Relatório Técnico: Projeto de Dissipador de Calor com Superfícies Aletadas**

**Professora:** Andréa Pereira

**Grupo:**

- Victor Gabriel Dias de Queiroz - 485388
- Marisa Queiroz Mendonça – 473829
- João Victor da Silva Coelho 475955
- Karlla C Silva Ferreira - 495338
- Ana Alice Amorim Mendonça - 495979
- Jessé Mendes Lima - 471271

## **1. Introdução**

O uso de superfícies estendidas como forma de otimizar ou simplesmente controlar a troca de calor existe antes da interferência humana na natureza. Assim, notando ampla necessidade de aperfeiçoar os processos de troca térmica em diversos objetos, a humanidade, a partir de observações da natureza passou a utilizar esse mecanismo para preservar e otimizar suas tecnologias. O controle térmico equivocado é a razão da falha de muitos processos e componentes industriais. Desse modo, a indústria investe fortemente no aprimoramento do controle térmico em seus sistemas.

Portanto, nesse relatório é apresentado o estudo sobre a distribuição térmica de aletas longitudinais com seção transversal constante e variável.

## **2. Objetivo**

O objetivo deste projeto é avaliar a eficiência de dissipação de calor de dois tipos de aletas: aletas de seção constante e aletas de seção variável. Será feita uma análise comparativa entre os resultados experimentais e a simulação computacional, com memorial de cálculo.

## **3. Metodologia**

### **3.1. Aparato Experimental**

Para a execução do experimento, o Laboratório de Escoamento em Meios Porosos (LEMP) cedeu o espaço e os equipamentos utilizados. O equipamento fundamental para a análise da dissipação de calor em nossos objetos de estudo foram: duas aletas (superfícies estendidas) de aço ASTM A36, uma de área de seção constante e outra de área de seção variável. As dimensões das aletas, bem como as suas estruturas, se encontram nas figuras 1 e 2, respectivamente.

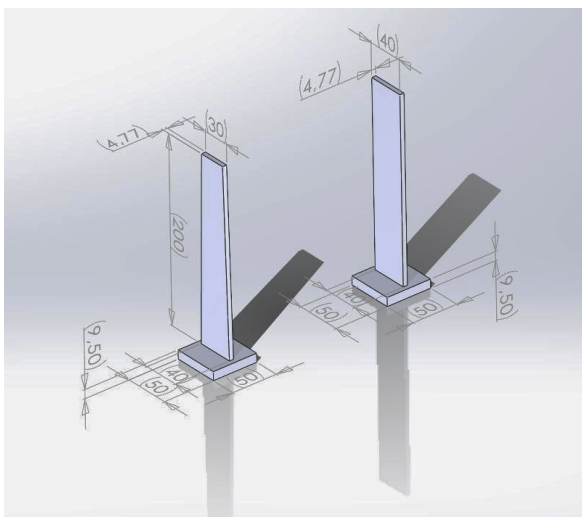


Figura 1



Figura 2

O material utilizado no procedimento foi:

- Pirômetro;
- Chapa de aquecimento;
- Pasta térmica;
- Caneta permanente;
- Computador munido do software Excel;
- Cronômetro;
- Ar-condicionado.



Figura 3

### 3.2. Procedimento Experimental

Inicialmente, foram demarcadas quatro linhas horizontais ao longo das aletas de área variável e constante, com espaçamento de 5 cm entre elas. Esses pontos foram definidos como as posições de medição da temperatura.

Em seguida, aplicou-se pasta térmica na base das aletas, com o objetivo de minimizar a resistência de contato durante o aquecimento pela chapa aquecida. Após a aplicação, a chapa foi ligada e aquecida até atingir uma temperatura estabilizada de 120°C. A temperatura ambiente estava em torno de 20°C, também estabilizada.

Com a chapa em 120°C, o experimento foi iniciado. Primeiramente, a aleta de área constante foi colocada sobre a chapa aquecida. A partir desse momento, as temperaturas nos cinco pontos demarcados foram medidas em intervalos de 1 minuto, utilizando um pirômetro. Todos os dados coletados foram registrados em uma planilha do Excel e, posteriormente, foi gerado um gráfico de Temperatura versus Tempo para analisar a variação da temperatura em cada ponto ao longo do tempo.

O mesmo procedimento foi repetido com a aleta de área variável. As medições foram realizadas nos mesmos intervalos de tempo e os resultados registrados para posterior análise.

Por fim, os gráficos gerados a partir dos dados experimentais foram analisados para caracterizar a dissipação de calor nas superfícies estendidas das aletas. Esses resultados experimentais foram comparados com as curvas teóricas obtidas por meio de cálculos numéricos realizados em Python.

### 3.3. Procedimento Numérico:

#### 3.3.1. Cálculos de Transferência de Calor

A equação de transferência de calor por convecção é baseada na equação:

$$Q = hA(T_s - T_\infty) \quad \text{Equação 1}$$

Onde:

- $q_G$  é a taxa de transferência de calor volumétrica,
- $h$  é o coeficiente de convecção,
- $S$  é a área da superfície da aleta, que é dada por  $S = P \cdot \Delta x$ ,
- $\Delta T$  é a diferença de temperatura entre a aleta e o meio ambiente.

### 3.3.2. Equacionamento de Energia

Para o nosso caso, a equação da energia que descreve a transferência de calor unidimensional em regime transiente é:

$$\rho c_v \frac{dT}{dt} = -hP(T - T_\infty) + k \frac{d^2T}{dx^2} \quad \text{Equação 2}$$

Onde:

- $\rho$  é a densidade do material,
- $c_v$  é o calor específico a volume constante,
- $T$  é a temperatura em função do tempo e da posição,
- $h$  é o coeficiente de transferência de calor por convecção,
- $P$  é o perímetro da aleta,
- $T_\infty$  é a temperatura ambiente,
- $k$  é a condutividade térmica do material.

### 3.3.3. Sobre os dados iniciais do modelo:

Os dados necessários para a realização do modelo numérica contemplam temperatura inicial da aleta antes do aquecimento ( $T_0$ ), temperatura ambiente ( $T_{amb}$ ), massa específica ( $esp\_weight$ ), condutividade térmica ( $k$ ), coeficiente de transferência de calor convectivo ( $h$ ), capacidade calorífica a pressão constante ( $c_p$ ), comprimento da aleta ( $L$ ), largura da aleta ( $w$ ), espessura da aleta ( $thick$ ), perímetro da aleta ( $P$ ) – uniforme ou variável –, área total da aleta ( $A_t$ ) – uniforme ou variável –, tempo de operação ( $time$ ).

Em relação às variáveis necessárias para o processo iterativo, considerando um sistema unidimensional e transiente, foram gerados dois arrays, sendo um vetor de espaço (*l\_vector*) e um vetor de tempo (*t\_vector*) que receberam o ponto inicial, final e a quantidade de valores, espaços igualmente pela função *linspace* da biblioteca *Numpy*. As Figuras 3 e 4 apresentam os dados iniciais para aleta de área constante e área variável, respectivamente.

Figura 3. Dados iniciais – Área constante.

```
#data
T0hip = 20.
T0 = [T0hip+273.15] #K
Tamb = 293.0
#physical properties:
esp_weight = 7850 # kg/m³
K = 43 #W/m.K
#50
h = 10 #W/m².K
cp = 486 #J/kg.K
alfa = K/(esp_weight*cp)
#geometric properties:
L = 0.2 #m
w = 0.04 #m
thick = 0.00477 #m
P = 2*(w+thick)
At = w*thick
#time properties:
time = 32 #min

#iteration
it_time = 401 #time
it_space = 201 #space

l_vector = np.linspace(0,L,it_space)
t_vector = np.linspace(0,time,it_time)
dx = L/(it_space-1)

#t = 0, T = 20°C p/ 0<=x<=L
initial_condition = np.concatenate([T0,293*np.ones(it_space-1)])
```

Fonte: Jupyter Notebook, 2024.

Figura 4. Dados iniciais – Área variável.

```
#data
T0hip = 20.
T0 = [T0hip+273.15] #K
Tamb = 293.0
#physical properties:
esp_weight = 7850 # kg/m³
K = 45 #W/m.K
#50
h = 12 #W/m².K
cp = 486 #J/kg.K
alfa = K/(esp_weight*cp)
#geometric properties:
t0 = 0.02 #m
t1 = 0.01 #m
L = 0.2 #m
thick = 0.00477 #m
P0 = 2*(2*t0 + thick)
P1 = 2*(2*t1 + thick)
A0 = 2*t0*thick
A1 = 2*t1*thick

#time properties:
time = 40 #min

#iteration
it_time = 401 #time
it_space = 201 #space

l_vector = np.linspace(0,L,it_space)
t_vector = np.linspace(0,time,it_time)
dx = L/(it_space-1)

#Area and Perimeter
area_coef = (A1-A0)/L
peri_coef = (P1-P0)/L
Area = area_coef*l_vector[1:-1] + A0
Perimeter = peri_coef*l_vector[1:-1] + P0

#t = 0, T = 20°C p/ 0<=x<=L
initial_condition = np.concatenate([T0,294*np.ones(it_space-1)])
```

### 3.3.4. Sobre o equacionamento:

Os equacionamentos foram obtidos considerando algumas premissas iniciais:

1. Regime transiente;
2. Condução unidimensional ao longo do comprimento da aleta;
3. Convecção na superfície;
4. Condutividade térmica constante;
5. Para a aleta de área variável, a variação é linear.

### 3.3.5. Condição inicial e de contorno:

As condições inicial e de contorno foram bem definidas de modo a garantir uma boa aproximação numérica em relação aos dados experimentais. Diante disso, a condição inicial considerada foi de que, no tempo inicial e posição inicial, isto é, na base, a temperatura seria igual ao seu valor antes do aquecimento, ou seja:

- $t = 0$  e  $x = 0 \rightarrow T = T_{base} = 293 \text{ K}$ .

Já para as condições de contorno consideraram que em um tempo igual ou maior que zero, na extremidade da aleta, a temperatura seria constante. Além disso, de modo a otimizar a solução do modelo, para um tempo maior que zero, na posição da base utilizamos uma equação polinomial do quarto grau gerada a partir dos dados de temperatura em  $x_{base}$ .

- $t \geq 0 \rightarrow \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=L} = 0 \therefore x = L$
- $t > 0 \rightarrow T = T[0]$

As Equações X e X referem-se ao obtido a partir dos dados experimentais para ambas os tipos de área transversal. Isso permitiu que o modelo numérico se aproximasse ainda mais dos dados experimentais ao considerar o regime transiente ao invés de permanente na base da aleta, replicando o comportamento variável para as demais posições da aleta.

Isso foi realizado para que o comportamento da temperatura na base fosse replicado para os demais pontos escolhidos, de modo a representar com maior precisão a natureza física do processo.

#### Para área constante:

$$T[0] = -0,0008 * t_j^4 + 0,0569 * t_j^3 - 1,4061 * t_j^2 - 15,884 * t_j^1 + 26,874$$

Equação 3.

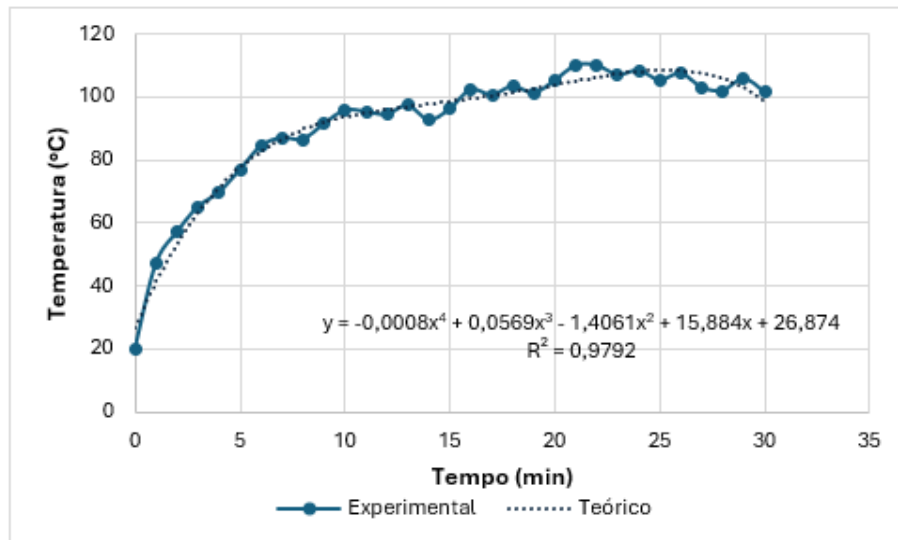
**Para área variável:**

$$T[0] = -0,0005 * t_j^4 + 0,0373 * t_j^3 - 1,0142 * t_j^2 - 13,437 * t_j^1 + 31,371$$

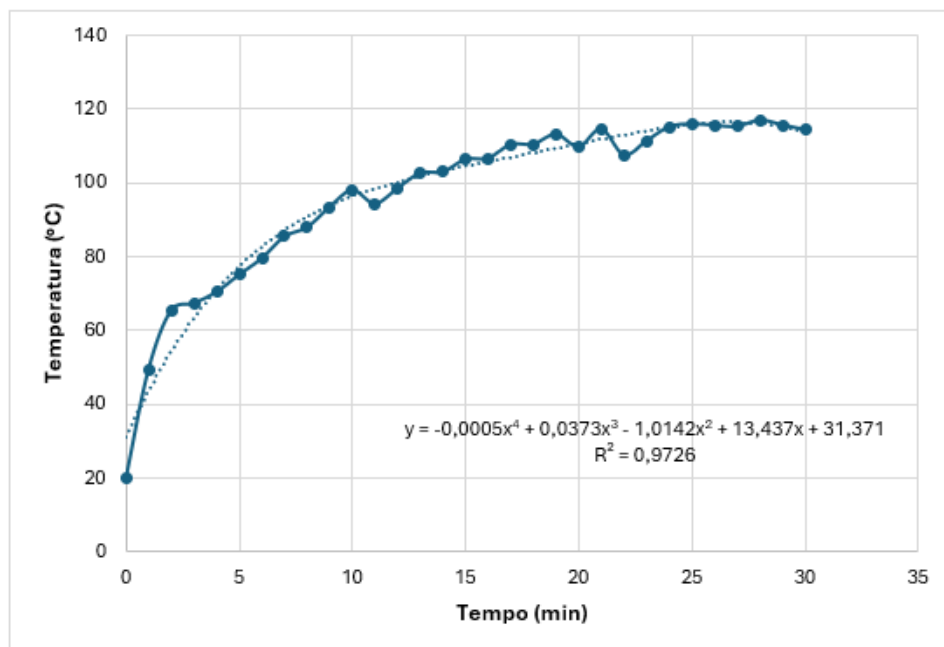
Equação 4.

A Figura 5 e 6 mostra a linha de tendência para os dados experimentais na posição da base.

Figura 5. Temperatura da base em regime transiente - Área constante.



Fonte: Autor, 2024.



Fonte: Autor, 2024.



### 3.3.6. Área constante:

A Equação 3 representa o desenvolvimento do equacionamento geral de energia aplicado a aleta retangular de seção transversal constante. O desenvolvimento completo encontra-se no Apêndice A.

$$\frac{dT}{dt} = \frac{h \cdot P \cdot (T - T_{\infty})}{A \cdot \rho \cdot c \cdot v} + \alpha \cdot \frac{d}{dx} \left( \frac{dT}{dx} \right) \text{ Equação 5.}$$

### 3.3.7. Área variável:

A Equação 6 representa o desenvolvimento do equacionamento geral de energia aplicado a aleta retangular de seção transversal variável. O desenvolvimento completo encontra-se no Apêndice B.

$$\frac{dT}{dt} = \frac{k \cdot \left( \frac{A_L - A_0}{l} \right) \frac{dT}{dx} + \left( \left( \frac{A_L - A_0}{l} \right) x + A_0 \right) \frac{d^2 T}{dx^2} - h \cdot \left( \frac{P_L - P_0}{l} x + P_0 \right) \cdot (T - T_{\infty})}{\left( \left( \frac{A_L - A_0}{l} \right) x + A_0 \right) \rho \cdot c \cdot v} \text{ Equação 6.}$$

### 3.3.7. Sobre a obtenção do coeficiente de transferência de calor por convecção:

### 3.3.8. Sobre a modelagem numérica:

A modelagem numérica foi realizada utilizando a linguagem Python por possuir ferramentas adequadas de análise de dados e bibliotecas para realização de cálculos diferenciais.

### 3.3.9. Obtenção da derivada da temperatura em relação à posição:

O método das diferenças finitas centradas foi utilizado para solucionar a derivada segunda. A ideia principal consiste em garantir uma solução ao usar dados de ambos os lados do ponto onde a derivada está sendo avaliada, possibilitando a obtenção de um erro menor do que as aproximações unilaterais além de estabelecer uma simetria que garante um menor erro em regiões de alta variação ao levar em conta valores da função antes e após o ponto em observação. Para a aleta de área constante foi utilizado apenas a derivada segunda e a de área variável foram utilizadas ambas derivadas primeira e segunda.

A seguir uma breve demonstração do método DFC:

1. Seja a derivada segunda da temperatura em relação à posição:

$$\text{Derivada primeira: } \frac{dT}{dx} = T'(x)$$

$$\text{Derivada segunda: } \frac{d^2T}{dx^2} = T''(x)$$

2. Ao discretizar usando diferenças finitas centradas, teremos as Equação 7 para derivada primeira e a Equação 8 para derivada segunda:

$$T'(x) = \frac{T(x+h) - T(x-h)}{2\Delta x} \quad \text{Equação 7.}$$

$$T''(x) = \frac{T(x+h) - 2T(x) + T(x-h)}{\Delta x^2} \quad \text{Equação 8.}$$

A Figura 7 apresenta a disposição do método da DFC no modelo numérico. Além disso, sabendo-se que a indexação no Python inicia-se em zero e que para a temperatura inicial definimos uma condição inicial, ou seja,  $Temperature[0] = \text{valor de condição inicial}$ , é importante destacar que o método é aplicado partir do terceiro elemento (indexação igual 2 no Python), isto é,  $Temperature[2:]$ . Por outro lado, caso iniciássemos a partir da temperatura inicial, utilizamos  $Temperature[1:]$  referente a  $T(x[0] + h) = (T[1])$ . Outrossim, a consideração de uma condição de contorno de  $\frac{dT}{dx} = 0$  em  $x = L$  e  $t \geq 0$  também foi considerada de modo que  $Temperature[:-2]$ , ou seja, considerando que o vetor  $Temperature$  tem 201 elementos ou 200 índices ( $Temperature[0:200]$ ) e o método exige  $T(x - h)$ , logo  $Temperature[:-2]$  considera os valores até o índice 199.

Figura 7. Método das diferenças finitas centradas.

```
def dTdx(Temperature,dx):
    dT_dx = (Temperature[2:] - Temperature[:-2]) / (2 * dx)
    return dT_dx

def d2Tdx2(Temperature,dx):
    #Temperature vector minus 2 elements = eq1 vector
    d2T_dx2 = (Temperature[2:] + Temperature[:-2] - 2*Temperature[1:-1])/(dx**2)
    return d2T_dx2
```

Fonte: Jupyter Notebook, 2024.

### 3.3.10. Obtenção da derivada da temperatura em relação ao tempo:

Como o regime é transiente, foi necessário obter numericamente as variações de temperatura ao longo da aleta em diferentes tempos. Para isso, consideramos o método de Runge-Kutta de 4º ordem, sendo bastante aplicado em modelagem de sistemas dinâmicos que envolvem condições iniciais bem definidas a partir de um ponto específico no tempo para obter soluções de equações diferenciais ordinárias. Além disso, esse método, especialmente em 4º ordem, oferece uma boa combinação de estabilidade e precisão, tornando-o eficaz para resolver problemas numéricos

influenciados por pequenas variações, como é o caso no presente trabalho. Outrossim, sua aplicação na linguagem Python foi otimizada ao utilizar a função denominada *odeint(função(t,y), condição inicial (y0), array de tempo)* da biblioteca *Scipy*.

A seguir uma breve demonstração do método RK4:

1. Dado um problema de valor inicial:

$$T' = T(t), \quad T(t_0) = T_{inicial} \quad \text{Equação 9.}$$

2. O RK4 para solucionar o seguinte problema é:

$$T_{n+1} = T_n + \frac{h}{6} * (k_1 + 2 * k_2 + 2 * k_3 + k_4) \quad \text{Equação 10.}$$

$$t_{n+1} = t_n + h \quad \text{Equação 9.}$$

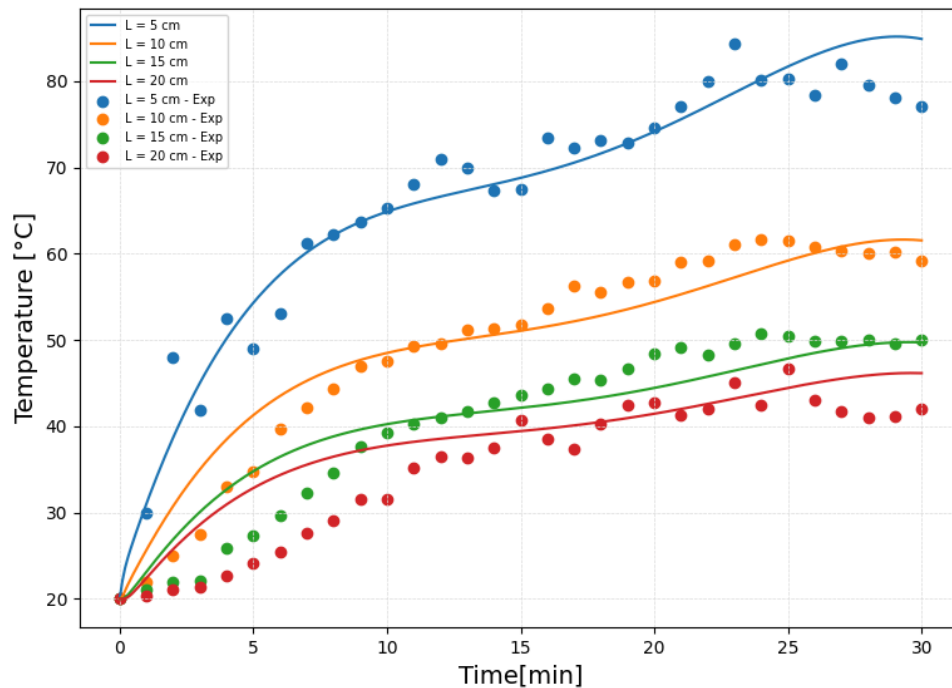
O  $y_{n+1}$  será a aproximação por RK4 de  $y(t_{n+1})$ . Dessa forma, o próximo valor de  $y_{n+1}$  é determinado pelo valor atual de  $y_n$  somado com o produto do tamanho do intervalo ( $h$ ) e uma inclinação estimada a partir da média ponderada das inclinações  $k_1, k_2, k_3, k_4$ .

Em suma, a função *odeint* solucionou as equações diferenciais de forma numérica, utilizando um método iterativo como Runge-Kutta, avançando em pequenos intervalos de tempo ao longo do vetor  $t$  para calcular os valores futuros das variáveis. Em seguida, a função retornou uma matriz onde cada linha corresponde aos valores das variáveis em cada ponto de tempo especificado em  $t$ .

## 4. Resultados e Discussão:

### 4.1. Aletas de Seção Transversal Constante

Figura 8. Comparativo experimental-numérico da aleta de área constante.

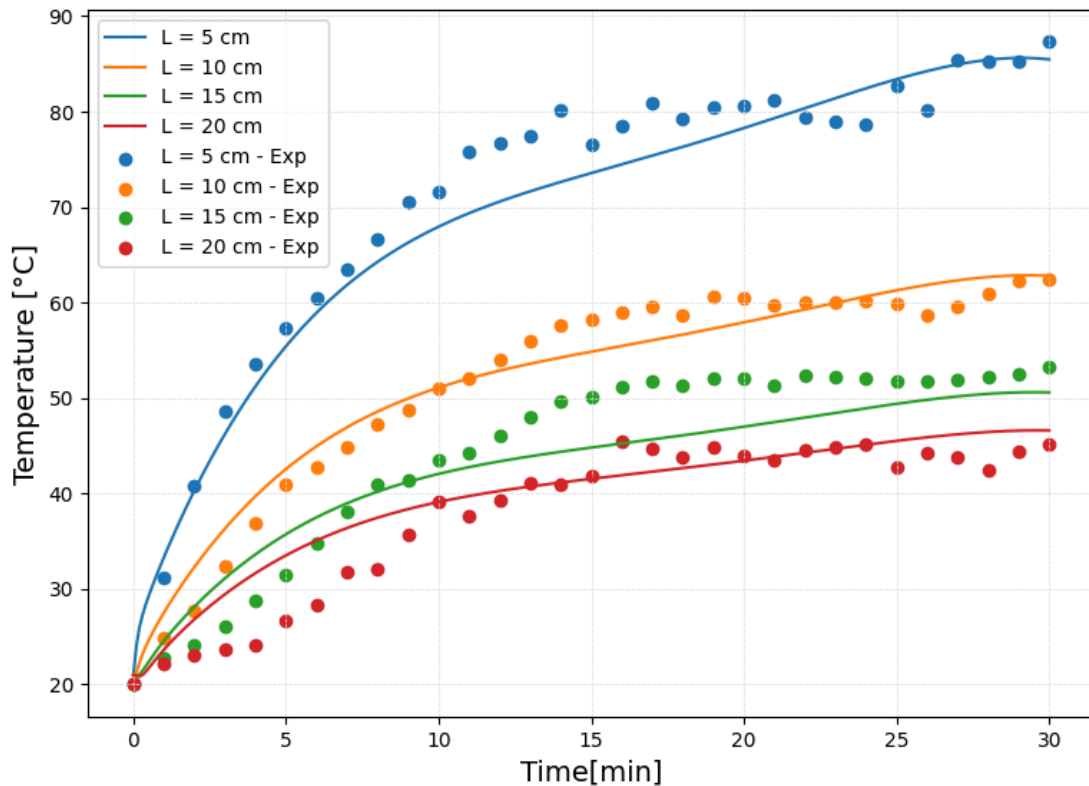


Fonte: Jupyter Notebook, 2024.

A Figura 8 apresenta o resultado obtido da comparação experimental-numérica para aleta retangular de área constante. Analisando, podemos observar que a modelagem numérica apresentou consistência em relação aos dados experimentais, principalmente após os 10 minutos devido a maior quantidade de pontos e uma menor variação da temperatura. Além disso, percebeu-se que antes dos 5 minutos, a modelagem numérica apresentou uma discrepância considerável em relação aos dados experimentais, devendo-se ao fato de que na posição da base na qual tivemos uma equação polinomial gerada, temos poucos dados nesse período do tempo e, dessa forma, o formato da curva foi replicado para as outras posições. Outrossim, é notório que quanto mais afastado da posição da base, maior a diferença numérica e experimental. Por último, a divergência geral está totalmente associada ao coeficiente de transferência de calor por convecção  $h$  que foi obtido a partir de correlações considerando escoamento laminar ou ainda por erros experimentais nas medições utilizando o pirômetro.

## 4.2. Aletas de Seção Transversal Variável

Figura 9. Comparativo experimental-numérico da aleta de área variável.



Fonte: Jupyter Notebook, 2024.

A Figura 9 apresenta o resultado obtido da comparação experimental-numérica para aleta retangular de área variável. Analisando, podemos observar que a modelagem numérica apresentou consistência em relação aos dados experimentais. Em comparação ao de área constante, os primeiros cinco minutos apresentaram menor divergência, principalmente para  $L = 5$  cm e  $L = 10$  cm, podendo estar relacionado a uma melhor obtenção dos dados experimentais nessa região, já que a quantidade de pontos obtida também é pequena assim como no experimento de aleta área constante. Outrossim, é notório uma certa discrepância após os 10 minutos em  $L = 15$  cm, também podendo estar relacionado a erros experimentais, uma vez que para as outras posições, a partir desse tempo, temos um ajuste consideravelmente adequado.

## 5. Conclusão

Concluimos que as análises experimentais e numéricas apresentaram uma afinidade ao compararmos os resultados obtidos, garantindo uma certa confiabilidade em expandir as análises numéricas a partir do experimental. No geral, a aleta de seção variável apresentou melhor convergência em relação ao obtido experimental.

Em suma, a escolha entre aletas de área constante ou variável deve considerar as especificidades da aplicação, visando maximizar a eficiência térmica. Este estudo

contribui para a compreensão e desenvolvimento de soluções de dissipação de calor em diversas áreas da engenharia.

## 6. Referências:

- Perry, R. H., Green, D. W., \*Perry's Chemical Engineers' Handbook\*, 8th Edition, McGraw-Hill, 2007.
- Incropera, F. P., DeWitt, D. P., \*Fundamentals of Heat and Mass Transfer\*, 7th Edition, Wiley, 2011.
- WELTY, James R.; WICKS, Charles E.; WILSON, Robert E.; RORRER, Gregory L. **Fundamentos de Transferência de Momento, Calor e Massa** . 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009.
- QUIRINO, Jonatas Motta. **Transferência de calor com interação de aletas e condutividade térmica variável**. 2018. 90 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2018. Disponível em:  
<https://www.bdt.d.uerj.br:8443/bitstream/1/17135/2/Disserta%c3%a7%c3%a3o%20-%20Jonatas%20Motta%20Quirino%20-%202018%20-%20Completo.pdf>. Acesso em: 20 set. 2024

## Apêndice A

Equação da Energia

$$\rho c v \frac{dT}{dt} = q_G + \nabla k \nabla T$$

$$\rho c v \frac{dT}{dt} = \frac{-h * S * (T - T_{\infty})}{v} + k \frac{d^2 T}{dx^2}$$

$$\rho c v \frac{dT}{dt} = \frac{-h * P * \cancel{\Delta x} * (T - T_{\infty})}{A * \cancel{\Delta x}} + k \frac{d^2 T}{dx^2}$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{-h * P * (T - T_{\infty})}{A * \rho c v} + \left( \frac{k}{\rho c v} \right) * \frac{d^2 T}{dx^2}$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{-h * P * (T - T_{\infty})}{A * \rho c v} + \alpha * \frac{d^2 T}{dx^2}$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{h * P * (T - T_{\infty})}{A * \rho c v} + \alpha * \frac{d}{dx} \left( \frac{dT}{dx} \right)$$

EDP linear 2° ordem  
 Não homogênea

## Apêndice B

$$\rho * c v \frac{dT}{dt} = \frac{-h * P * \Delta x * (T - T_{\infty})}{A * \Delta x} + k \frac{d^2 T}{dx^2}$$

$$A * \rho * c v \frac{dT}{dt} = -h * P * (T - T_{\infty}) + k \frac{d}{dx} \left( A \frac{dT}{dx} \right)$$

$$A * \rho * c v \frac{dT}{dt} = -h * P * (T - T_{\infty}) + k \left( \frac{dA}{dx} * \frac{dT}{dx} + A \frac{d^2 T}{dx^2} \right)$$

$$A_0 = 2t_0 W \quad \text{e} \quad A_L = 2t_L W$$

$$P_0 = 2 * (2t_0 + W) \quad \text{e} \quad P_L = 2 * (2t_L + W)$$

$$A = \left( \frac{A_L - A_0}{l} \right) x + A_0 \quad \text{e} \quad P = \left( \frac{P_L - P_0}{l} \right) x + P_0$$

$$\frac{dA}{dx} = \left( \frac{A_L - A_0}{l} \right)$$

$$\left( \left( \frac{A_L - A_0}{l} \right) x + A_0 \right) * \rho * c v * \frac{dT}{dt} = k * \left( \left( \frac{A_L - A_0}{l} \right) \frac{dT}{dx} + \left( \left( \frac{A_L - A_0}{l} \right) x + A_0 \right) \frac{d^2 T}{dx^2} \right) - h * \left( \left( \frac{P_L - P_0}{l} \right) x + P_0 \right) * (T - T_{\infty})$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{k * \left( \left( \frac{A_L - A_0}{l} \right) \frac{dT}{dx} + \left( \left( \frac{A_L - A_0}{l} \right) x + A_0 \right) \frac{d^2 T}{dx^2} \right) - h * \left( \left( \frac{P_L - P_0}{l} \right) x + P_0 \right) * (T - T_{\infty})}{\left( \left( \frac{A_L - A_0}{l} \right) x + A_0 \right) \rho * c v}$$