# Aproximando a Equação do Calor em uma Dimensão Espacial com Dependência Temporal pelo Método dos Elementos Finitos

João Victor Lopez Pereira

18 de setembro de 2024

Rio de Janeiro - RJ

**Resumo**

Este documento apresenta a resolução de um sistema genérico de equações diferenciais ordinárias utilizando o Método de Galerkin, conforme abordado nas aulas da disciplina *Introdução ao Método dos Elementos Finitos*, ministradas pelo prof. Dr. Marcello Goulart Teixeira na Universidade Federal do Rio de Janeiro, durante o segundo semestre de 2024. Neste documento, apresentamos a resolução de uma equação do calor em uma dimensão espacial, com dependência temporal.

This document presents the solution of a generic system of ordinary differential equations using the Galerkin Method, as covered in the course *Introduction to the Finite Element Method*, taught by professor Dr. Marcello Goulart Teixeira at the Federal University of Rio de Janeiro, during the second half of 2024. In this document, we present the solution of a heat equation in one spatial dimension, with temporal dependence.

# Sumário

# Capítulo 1

# Aproximando a equação do Calor

## 1.1 Formulação Forte

### Definição da Formulação Forte

Dado constantes $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$ e $T > 0$ e $f(x,t)$ tal que $x \in [0,1]$ e $t \in [0,T]$, queremos encontrar $u(x,t)$ tal que:

$$\begin{cases} f(x,t) = u_t(x,t) - \alpha u_{xx}(x,t) + \beta u(x,t) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

## 1.2 Formulação Fraca

Visto que:

$$f(x,t) = u_t(x,t) - \alpha u_{xx}(x,t) + \beta u(x,t)$$

Podemos multiplicar ambos por lados por uma função $v(x)$ tal que

$$v(1) = v(0) = 0$$

que nos ajude a eliminar a segunda derivada de $u$ em $x$:

$$f(x,t) = u_t(x,t) - \alpha u_{xx}(x,t) + \beta u(x,t)$$

$$f(x,t)v(x) = [u_t(x,t) - \alpha u_{xx}(x,t) + \beta u(x,t)]v(x)$$

$$f(x,t)v(x) = u_t(x,t)v(x) - \alpha u_{xx}(x,t)v(x) + \beta u(x,t)v(x)$$

$$\int_0^1 f(x,t)v(x)dx = \int_0^1 u_t(x,t)v(x)dx - \int_0^1 \alpha u_{xx}(x,t)v(x)dx + \int_0^1 \beta u(x,t)v(x)dx$$

$$\int_0^1 f(x,t)v(x)dx = \int_0^1 u_t(x,t)v(x)dx - \alpha \int_0^1 u_{xx}(x,t)v(x)dx + \beta \int_0^1 u(x,t)v(x)dx$$

Sabemos que dado funções $f$ e $g$:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

Logo, realizando a integração por partes para eliminar a segunda derivada em $x$ na equação:

$$\int_0^1 f(x,t)v(x)dx = \int_0^1 u_t(x,t)v(x)dx - \alpha \int_0^1 u_{xx}(x,t)v(x)dx + \beta \int_0^1 u(x,t)v(x)dx$$

$$\int_0^1 f(x,t)v(x)dx = \int_0^1 u_t(x,t)v(x)dx - \alpha [u_x(x,t)v(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 u_x(x,t)v_x(x)dx] + \beta \int_0^1 u(x,t)v(x)dx$$

$$\int_0^1 f(x,t)v(x)dx = \int_0^1 u_t(x,t)v(x)dx - \alpha [u_x(1,t)v(1) - u_x(0,t)v(0) - \int_0^1 u_x(x,t)v_x(x)dx] + \beta \int_0^1 u(x,t)v(x)dx$$

$$\int_0^1 f(x,t)v(x)dx = \int_0^1 u_t(x,t)v(x)dx - \alpha [\cancel{u_x(1,t)v(1) - u_x(0,t)v(0)} - \int_0^1 u_x(x,t)v_x(x)dx] + \beta \int_0^1 u(x,t)v(x)dx$$

$$\int_0^1 f(x,t)v(x)dx = \int_0^1 u_t(x,t)v(x)dx - \alpha [- \int_0^1 u_x(x,t)v_x(x)dx] + \beta \int_0^1 u(x,t)v(x)dx$$

$$\int_0^1 f(x,t)v(x)dx = \int_0^1 u_t(x,t)v(x)dx + \alpha \int_0^1 u_x(x,t)v_x(x)dx + \beta \int_0^1 u(x,t)v(x)dx$$

## Definição da Formulação Fraca

Dado constantes $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$ e $T > 0$ e $f(x,t)$ tal que $x \in [0,1]$ e $t \in [0,T]$, queremos encontrar $u(x,t)$ tal que:

$$\int_0^1 f(x,t)v(x)dx = \int_0^1 u_t(x,t)v(x)dx + \alpha \int_0^1 u_x(x,t)v_x(x)dx + \beta \int_0^1 u(x,t)v(x)dx$$

## Definição de Notação

**Definição:** $(f,g) = \displaystyle\int_0^1 f(x)g(x)dx$

**Definição:** $k(f,g) = \alpha \int_0^1 f_x(x) g_x(x) dx + \beta \int_0^1 f(x)g(x)dx$

Ou seja, nosso problema:

$$\int_0^1 f(x,t)v(x)dx = \int_0^1 u_t(x,t)v(x)dx + \alpha \int_0^1 u_x(x,t)v_x(x)dx + \beta \int_0^1 u(x,t)v(x)dx$$

Pode ser escrito como:

$$(f(t), v) = (u_t(t), v) + k(u(t), v)$$

## 1.3 Problema Totalmente Discreto

### 1.3.1 Problema Variacional no Ponto Médio

Discretizaremos o intervalo $[0,T]$ em $t_0, t_1, ..., t_N$ tal que $t_n - t_{n-1} = \tau$, $\forall n \in [0, N]$.

$$(f(t_{n-\frac{1}{2}}), v) = (u_t(t_{n-\frac{1}{2}}), v) + k(u(t_{n-\frac{1}{2}}), v)$$

Sendo assim, seja:

$$t_{n-\frac{1}{2}} = \frac{t_n + t_{n-1}}{2}$$

o ponto médio do intervalo $[t_{n-1}, t_n]$.

### 1.3.2 Diferenças Finitas no Tempo

Seja:

$$u_t(t_{n-\frac{1}{2}}) = \frac{u(t_n) - u(t_{n-1})}{\tau} + O(\tau^2)$$

$$u(t_{n-\frac{1}{2}}) = \frac{u(t_n) + u(t_{n-1})}{2} + O(\tau^2)$$

Substituindo em nossa equação:

$$(f(t_{n-\frac{1}{2}}), v) \approx \left(\frac{u(t_n) - u(t_{n-1})}{\tau}, v\right) + k\left(\frac{u(t_n) + u(t_{n-1})}{2}, v\right)$$

$$(f(t_{n-\frac{1}{2}}), v) = \left(\frac{U^n - U^{n-1}}{\tau}, v\right) + k\left(\frac{U^n + U^{n-1}}{2}, v\right)$$

### 1.3.3 Problema Aproximado

Precisamos determinar $U^h \in V_m$ tal que:

$$\forall v_h \in V_m$$

$$(f(t_{n-\frac{1}{2}}), v_h) = \left(\frac{U_h^n - U_h^{n-1}}{\tau}, v_h\right) + k\left(\frac{U_h^n + U_h^{n-1}}{2}, v_h\right)$$

### 1.3.4 Definição do Problema Totalmente Discreto

Dado constantes $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$ e $T > 0$, $f(x,t)$ tal que $x \in [0,1]$ e $t \in [0,T]$ e $U_{0h} \in V_m$, queremos encontrar $U_h$ tal que:

$$\forall v_h \in V_m$$

$$(f(t_{n-\frac{1}{2}}), v_h) = \left(\frac{U_h^n - U_h^{n-1}}{\tau}, v_h\right) + k\left(\frac{U_h^n + U_h^{n-1}}{2}, v_h\right)$$

## 1.4 Problema na Forma Matriz-vetor

Seja

$$U_h^n(x) = \sum_{j=1}^{m} c_j^n \varphi_j(x)$$

Tomando $v_h = \varphi_i$, $i \in [1, m]$:

$$(f(t_{n-\frac{1}{2}}), \varphi_i) = \left(\frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{m} c_j^n - \sum_{j=1}^{m} c_j^{n-1}}{\tau}, \varphi_i\right) + k\left(\frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{m} c_j^n + \sum_{j=1}^{m} c_j^{n-1}}{2}, \varphi_i\right)$$

$$(f(t_{n-\frac{1}{2}}), \varphi_i) = \sum_{j=1}^{m}\left[\left(\frac{[c_j^n - c_j^{n-1}]\varphi_j}{\tau}, \varphi_i\right) + k\left(\frac{[c_j^n + c_j^{n-1}]\varphi_j}{2}, \varphi_i\right)\right]$$

$$(f(t_{n-\frac{1}{2}}), \varphi_i) = \sum_{j=1}^{m}\left[\frac{c_j^n - c_j^{n-1}}{\tau}(\varphi_j, \varphi_i) + \frac{c_j^n + c_j^{n-1}}{2}k(\varphi_j, \varphi_i)\right]$$

Perceba que, ao variarmos $i$ e $j$ temos:

$$\begin{cases} (f(t_{n-\frac{1}{2}}), \varphi_1) & = (\varphi_1, \varphi_1)\dfrac{c_1^n - c_1^{n-1}}{\tau} + k(\varphi_1, \varphi_1)\dfrac{c_1^n + c_1^{n-1}}{2} + ... + (\varphi_m, \varphi_1)\dfrac{c_m^n - c_m^{n-1}}{\tau} + k(\varphi_m, \varphi_1)\dfrac{c_m^n + c_m^{n-1}}{2} \\ \vdots \\ (f(t_{n-\frac{1}{2}}), \varphi_k) & = (\varphi_1, \varphi_k)\dfrac{c_1^n - c_1^{n-1}}{\tau} + k(\varphi_1, \varphi_k)\dfrac{c_1^n + c_1^{n-1}}{2} + ... + (\varphi_m, \varphi_k)\dfrac{c_m^n - c_m^{n-1}}{\tau} + k(\varphi_m, \varphi_k)\dfrac{c_m^n + c_m^{n-1}}{2} \\ \vdots \\ (f(t_{n-\frac{1}{2}}), \varphi_m) & = (\varphi_1, \varphi_m)\dfrac{c_1^n - c_1^{n-1}}{\tau} + k(\varphi_1, \varphi_m)\dfrac{c_1^n + c_1^{n-1}}{2} + ... + (\varphi_m, \varphi_m)\dfrac{c_m^n - c_m^{n-1}}{\tau} + k(\varphi_m, \varphi_m)\dfrac{c_m^n + c_m^{n-1}}{2} \end{cases}$$

Perceba que podemos organizar essas equações em produtos matrix-vetor tal que:

$$\begin{pmatrix} (f(t_{n-\frac{1}{2}}), \varphi_1) \\ \vdots \\ (f(t_{n-\frac{1}{2}}), \varphi_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\varphi_1, \varphi_1) & ... & (\varphi_m, \varphi_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\varphi_1, \varphi_m) & ... & (\varphi_m, \varphi_m) \end{pmatrix} \frac{c^n - c^{n-1}}{\tau} + \begin{pmatrix} k(\varphi_1, \varphi_1) & ... & k(\varphi_m, \varphi_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k(\varphi_1, \varphi_m) & ... & k(\varphi_m, \varphi_m) \end{pmatrix} \frac{c^n + c^{n-1}}{2}$$

### Definição de Notação

**Definição:** $\mathcal{F} = \begin{pmatrix} (f(t_{n-\frac{1}{2}}), \varphi_1) \\ \vdots \\ (f(t_{n-\frac{1}{2}}), \varphi_m) \end{pmatrix}$

**Definição:** $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} (\varphi_1, \varphi_1) & ... & (\varphi_m, \varphi_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\varphi_1, \varphi_m) & ... & (\varphi_m, \varphi_m) \end{pmatrix}$

**Definição:** $\mathcal{K} = \begin{pmatrix} k(\varphi_1, \varphi_1) & ... & k(\varphi_m, \varphi_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k(\varphi_1, \varphi_m) & ... & k(\varphi_m, \varphi_m) \end{pmatrix}$

## 1.4.1 Definição do Problema na Forma Matriz-vetor

Dado matrizes $\mathcal{M}$, $\mathcal{K}$ e um vetor $\mathcal{F}$, queremos encontrar $C^n$ tal que:

$$\begin{cases} \mathcal{F}^{n-\frac{1}{2}} = \mathcal{M}\dfrac{C^n - C^{n-1}}{\tau} + \mathcal{K}\dfrac{C^n + C^{n-1}}{2} \\ \\ C^0 = \begin{pmatrix} u_0\left(\dfrac{1}{ne}\right) \\ \vdots \\ u_0\left(1 - \dfrac{1}{ne}\right) \end{pmatrix} \end{cases}$$

**Continuando as contas**

$$\mathcal{F}^{n-\frac{1}{2}} = \mathcal{M}\frac{C^n - C^{n-1}}{\tau} + \mathcal{K}\frac{C^n + C^{n-1}}{2}$$

$$2\tau\mathcal{F}^{n-\frac{1}{2}} = \mathcal{M}2\tau\frac{C^n - C^{n-1}}{\tau} + \mathcal{K}2\tau\frac{C^n + C^{n-1}}{2}$$

$$2\tau\mathcal{F}^{n-\frac{1}{2}} = \mathcal{M}2\cancel{\tau}\frac{C^n - C^{n-1}}{\cancel{\tau}} + \mathcal{K}\cancel{2}\tau\frac{C^n + C^{n-1}}{\cancel{2}}$$

$$2\tau\mathcal{F}^{n-\frac{1}{2}} = \mathcal{M}2[C^n - C^{n-1}] + \mathcal{K}\tau[C^n + C^{n-1}]$$

$$2\tau\mathcal{F}^{n-\frac{1}{2}} = 2\mathcal{M}C^n - 2\mathcal{M}C^{n-1} + \tau\mathcal{K}C^n + \tau\mathcal{K}C^{n-1}$$

$$2\tau\mathcal{F}^{n-\frac{1}{2}} + 2\mathcal{M}C^{n-1} - \tau\mathcal{K}C^{n-1} = 2\mathcal{M}C^n + \tau\mathcal{K}C^n$$

$$2\tau\mathcal{F}^{n-\frac{1}{2}} + [2\mathcal{M} - \tau\mathcal{K}]\,C^{n-1} = [2\mathcal{M} + \tau\mathcal{K}]\,C^n$$

$$\left(\frac{2}{2}\right)\tau\mathcal{F}^{n-\frac{1}{2}} + \left[\mathcal{M} - \left(\frac{\tau}{2}\right)\mathcal{K}\right]C^{n-1} = \left[\mathcal{M} + \left(\frac{\tau}{2}\right)\mathcal{K}\right]C^n$$

$$\tau\mathcal{F}^{n-\frac{1}{2}} + \left[\mathcal{M} - \left(\frac{\tau}{2}\right)\mathcal{K}\right]C^{n-1} = \left[\mathcal{M} + \left(\frac{\tau}{2}\right)\mathcal{K}\right]C^n$$

**Definição de Notação**

**Definição:** $\mathcal{A} = \left[\mathcal{M} + \left(\frac{\tau}{2}\right)\mathcal{K}\right]$

**Definição:** $\mathcal{B} = \left[\mathcal{M} - \left(\frac{\tau}{2}\right)\mathcal{K}\right]$

**Continuando as Contas**

Sendo assim, temos:

$$\mathcal{A}C^n = \mathcal{B}C^{n-1} + \tau\mathcal{F}^{n-\frac{1}{2}}$$

$$C^n = \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}C^{n-1} + \tau\mathcal{F}^{n-\frac{1}{2}}$$

# Bibliografia

[1] Bruno Alves do Carmo. *Problema Estacionario Unidimensional.* Acessado em 7 de Setembro de 2024. URL: https://github.com/bacarmo/Problema-estacionario-unidimensional.