Resolução do Problema Unidimensional Transiente com Condição de fronteira de Dirichlet Homogênea via o Método dos Elementos Finitos

João Victor Lopez Pereira

10 de março de 2025

Rio de Janeiro - RJ

Resumo:

Este documento apresenta a resolução de um sistema genérico de equações diferenciais ordinárias utilizando o Método dos Elementos Finitos, conforme abordado nas aulas da disciplina *Introdução ao Método dos Elementos Finitos*, ministradas pelos professores Marcello Goulart Teixeira e Bruno Alves do Carmo na Universidade Federal do Rio de Janeiro, durante o segundo semestre de 2024.

Abstract:

This document presents the solution of a generic system of ordinary differential equations using the Finite Element Method, as covered in the course *Introduction to the Finite Element Method*, taught by professors Marcello Goulart Teixeira and Bruno Alves do Carmo at the Federal University of Rio de Janeiro, during the second half of 2024.

Agradecimentos:

Agradeço aos professores Marcello Teixeira e a Bruno Carmo e aos colegas Leonardo, Hashimoto e a vários outros que me ajudaram no entendimento do conteúdo necessário para a realização das contas e do Método dos Elementos Finitos como um todo.

Thanks:

I would like to thank professors Marcello Teixeira, Bruno Carmo and colleagues Leonardo, Hashimoto and several others who helped me understand the necessary content for carrying out the calculations and the Finite Element Method as a whole.

Sumário

Capítulo 1

Resolução do Problema Transiente

1.1 Definição da Formulação Forte

Dada uma função $f(x,t) : [0,1] \times [0,T] \to \mathbb{R}$, uma função $u_0 : [0,1] \to \mathbb{R}$ e constantes $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$ e $T > 0$, queremos determinar a função $u : [0,1] \times [0,T] \to \mathbb{R}$ tal que:

$$(S) = \begin{cases} u_t(x,t) - \alpha u_{xx}(x,t) + \beta u(x,t) = f(x,t) \ \forall x \in (0,1) \\ \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \\ \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases}$$

1.2 Transição entre a Formulação Forte e Fraca

Visto que $u_t(x,t) - \alpha u_{xx}(x,t) + \beta u(x,t) = f(x,t)$, podemos multiplicar ambos por lados por uma função $v(x)$ tal que $v(1) = v(0) = 0$ que nos ajude a eliminar a segunda derivada u_{xx}:

$$u_t(x,t) - \alpha u_{xx}(x,t) + \beta u(x,t) = f(x,t)$$

$$[u_t(x,t) - \alpha u_{xx}(x,t) + \beta u(x,t)]v(x) = f(x,t)v(x)$$

$$u_t(x,t)v(x) - \alpha u_{xx}(x,t)v(x) + \beta u(x,t)v(x) = f(x,t)v(x)$$

$$\int_0^1 u_t(x,t)v(x)dx - \int_0^1 \alpha u_{xx}(x,t)v(x)dx + \int_0^1 \beta u(x,t)v(x)dx = \int_0^1 f(x,t)v(x)dx$$

$$\int_0^1 u_t(x,t)v(x)dx - \alpha \int_0^1 u_{xx}(x,t)v(x)dx + \beta \int_0^1 u(x,t)v(x)dx = \int_0^1 f(x,t)v(x)dx.$$

Sabemos que dadas funções f e g:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

Logo, realizando a integração por partes para eliminar a segunda derivada em x_{xx}:

$$\int_0^1 u_t(x,t)v(x)dx - \alpha \int_0^1 u_{xx}(x,t)v(x)dx + \beta \int_0^1 u(x,t)v(x)dx = \int_0^1 f(x,t)v(x)dx$$

$$\int_0^1 u_t(x,t)v(x)dx - \alpha[u_x(x,t)v(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 u_x(x,t)v_x(x)dx] + \beta \int_0^1 u(x,t)v(x)dx = \int_0^1 f(x,t)v(x)dx.$$

Visto que $v(1) = v(0) = 0$, então

$$-\alpha[u_x(1,t)v(1) - u_x(0,t)v(0) - \int_0^1 u_x(x,t)v_x(x)dx] = -\int_0^1 u_x(x,t)v_x(x)dx.$$

Substituindo na equação:

$$\int_0^1 u_t(x,t)v(x)dx - \alpha[-\int_0^1 u_x(x,t)v_x(x)dx] + \beta \int_0^1 u(x,t)v(x)dx = \int_0^1 f(x,t)v(x)dx$$

$$\int_0^1 u_t(x,t)v(x)dx + \alpha \int_0^1 u_x(x,t)v_x(x)dx + \beta \int_0^1 u(x,t)v(x)dx = \int_0^1 f(x,t)v(x)dx$$

Definição de Notação

Definição: $(f,g) = \displaystyle\int_0^1 f(x)g(x)dx$

Definição: $\kappa(f,g) = \alpha \displaystyle\int_0^1 f_x(x)g_x(x)dx + \beta \int_0^1 f(x)g(x)dx$

Ou seja, a equação:

$$\int_0^1 u_t(x,t)v(x)dx + \alpha \int_0^1 u_x(x,t)v_x(x)dx + \beta \int_0^1 u(x,t)v(x)dx = \int_0^1 f(x,t)v(x)dx$$

pode ser reescrita como:

$$(u_t(t), v) + \kappa(u(t), v) = (f(t), v).$$

1.3 Definição da Formulação Fraca

Definição: Pelo restante do documento, considere que uma função g é "suficientemente suave" se ela respeitar:

- g é contínua em todo o domínio;
- g possui derivadas contínuas até a ordem necessária.

Seja H um espaço de funções formado por funções u suficientemente suaves que satisfazem (W) e as condições de contorno $u(0,t) = u(1,t) = 0$. Seja V um espaço das funções de teste, composto por funções v suficientemente suaves e que satisfazem as condições de contorno $v(0) = v(1) = 0$.

Dada uma função $f(x,t) : [0,1] \times [0,T] \to \mathbb{R}$, uma função $u_0 : [0,1] \to \mathbb{R}$ e constantes $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$ e $T > 0$, queremos determinar a função $u : [0,1] \times [0,T] \to \mathbb{R}$, $u \in H$, tal que, $\forall v \in V$:

$$(W) = \begin{cases} (u_t(t), v) + \kappa(u(t), v) = (f(t), v) \\ \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \\ \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases}$$

1.4 Problema Totalmente Discreto

1.4.1 Problema Variacional no Ponto Médio

Discretizaremos o intervalo $[0,T]$ em $t_0, t_1, ..., t_N$ tal que $t_n - t_{n-1} = \tau$, $\forall n \in [0,N]$. Temos então que:

$$(u_t(t_{n-\frac{1}{2}}), v) + \kappa(u(t_{n-\frac{1}{2}}), v) = (f(t_{n-\frac{1}{2}}), v)$$

tal que:

$$t_{n-\frac{1}{2}} = \frac{t_n + t_{n-1}}{2}$$

é o ponto médio do intervalo $[t_{n-1}, t_n]$.

1.4.2 Diferenças Finitas no Tempo

Temos que uma possível aproximação para a derivada u_t é

$$u_t(t_{n-\frac{1}{2}}) = \frac{u(t_n) - u(t_{n-1})}{\tau} + O(\tau^2).$$

Também temos que uma possível aproximação para u no ponto médio é

$$u(t_{n-\frac{1}{2}}) = \frac{u(t_n) + u(t_{n-1})}{2} + O(\tau^2).$$

Substituindo essas aproximações na equação:

$$\left(\frac{u(t_n) - u(t_{n-1})}{\tau}, v\right) + \kappa\left(\frac{u(t_n) + u(t_{n-1})}{2}, v\right) \approx (f(t_{n-\frac{1}{2}}), v).$$

Visto que o sistema agora não é exato — por conta das parcelas $O(\tau^2)$ que foram desprezadas — queremos determinar $U^n \in V$ tal que $U^n \approx u(t_n)$ e seja solução da equação:

$$\left(\frac{U^n - U^{n-1}}{\tau}, v\right) + \kappa\left(\frac{U^n + U^{n-1}}{2}, v\right) = (f(t_{n-\frac{1}{2}}), v).$$

1.4.3 Definição do Problema Totalmente Discreto

O método de Galerkin consiste em aproximar o espaço das soluções por um subespaço de dimensão ?nita para encontrarmos uma solução aproximada que satisfaça a formulação fraca do problema dentro de um subespaço apropriado, permitindo a construção de uma solução computacionalmente viável. Sendo assim:

Seja H^m um espaço de funções finito-dimensional composto por funções U^h suficientemente suaves que satisfazem (A) e as condições de contorno $U^h(0) = U^h(1) = 0$. Analogamente, seja V^m um espaço de funções finito-dimensional das funções de teste, formado por funções v^h suficientemente suaves que também atendem às condições de contorno $v^h(0) = v^h(1) = 0$.

Precisamos determinar $U_h^n \in H_m$ tal que, $\forall v_h \in V_m$:

$$(A) = \begin{cases} \left(\frac{U_h^n - U_h^{n-1}}{\tau}, v_h\right) + \kappa\left(\frac{U_h^n + U_h^{n-1}}{2}, v_h\right) = (f(t_{n-\frac{1}{2}}), v_h) \\ U(0,t) = U(1,t) = 0 \\ U(x,0) = u_0(x). \end{cases}$$

1.5 Transição entre o Problema Aproximado e a Forma Matriz-vetor

Tomando U_h^n como combinação linear das funções da base do espaço H^m: $U_h^n(x) = \sum_{j=1}^m c_j^n \varphi_j(x)$.

Veja que o problema (A) é válido para todo $v_h \in V$. Logo, tomando $v_h = \varphi_i$, $\forall i \in \{1, \ldots, m\}$:

$$\left(\frac{\left[\sum_{j=1}^{m} c_j^n - \sum_{j=1}^{m} c_j^{n-1}\right]\varphi_j}{\tau}, \varphi_i\right) + \kappa\left(\frac{\left[\sum_{j=1}^{m} c_j^n + \sum_{j=1}^{m} c_j^{n-1}\right]\varphi_j}{2}, \varphi_i\right) = (f(t_{n-\frac{1}{2}}), \varphi_i)$$

$$\sum_{j=1}^{m}\left[\left(\frac{[c_j^n - c_j^{n-1}]\varphi_j}{\tau}, \varphi_i\right) + \kappa\left(\frac{[c_j^n + c_j^{n-1}]\varphi_j}{2}, \varphi_i\right)\right] = (f(t_{n-\frac{1}{2}}), \varphi_i)$$

$$\sum_{j=1}^{m}\left[\frac{c_j^n - c_j^{n-1}}{\tau}(\varphi_j, \varphi_i) + \frac{c_j^n + c_j^{n-1}}{2}\kappa(\varphi_j, \varphi_i)\right] = (f(t_{n-\frac{1}{2}}), \varphi_i)$$

Como a equação é válida para $\forall i \in \{1, \dots, m\}$, temos que:

$$\begin{cases}
(f(t_{n-\frac{1}{2}}), \varphi_1) = (\varphi_1, \varphi_1)\dfrac{c_1^n - c_1^{n-1}}{\tau} + \kappa(\varphi_1, \varphi_1)\dfrac{c_1^n + c_1^{n-1}}{2} + \dots + (\varphi_m, \varphi_1)\dfrac{c_m^n - c_m^{n-1}}{\tau} + \kappa(\varphi_m, \varphi_1)\dfrac{c_m^n + c_m^{n-1}}{2} \\
\vdots \\
(f(t_{n-\frac{1}{2}}), \varphi_i) = (\varphi_1, \varphi_i)\dfrac{c_1^n - c_1^{n-1}}{\tau} + \kappa(\varphi_1, \varphi_i)\dfrac{c_1^n + c_1^{n-1}}{2} + \dots + (\varphi_m, \varphi_i)\dfrac{c_m^n - c_m^{n-1}}{\tau} + \kappa(\varphi_m, \varphi_i)\dfrac{c_m^n + c_m^{n-1}}{2} \\
\vdots \\
(f(t_{n-\frac{1}{2}}), \varphi_m) = (\varphi_1, \varphi_m)\dfrac{c_1^n - c_1^{n-1}}{\tau} + \kappa(\varphi_1, \varphi_m)\dfrac{c_1^n + c_1^{n-1}}{2} + \dots + (\varphi_m, \varphi_m)\dfrac{c_m^n - c_m^{n-1}}{\tau} + \kappa(\varphi_m, \varphi_m)\dfrac{c_m^n + c_m^{n-1}}{2}
\end{cases}$$

Perceba que podemos organizar essas equações em produtos matriz-vetor tal que:

$$\begin{bmatrix} (\varphi_1, \varphi_1) & \dots & (\varphi_m, \varphi_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\varphi_1, \varphi_m) & \dots & (\varphi_m, \varphi_m) \end{bmatrix} \frac{c^n - c^{n-1}}{\tau} + \begin{bmatrix} \kappa(\varphi_1, \varphi_1) & \dots & \kappa(\varphi_m, \varphi_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \kappa(\varphi_1, \varphi_m) & \dots & \kappa(\varphi_m, \varphi_m) \end{bmatrix} \frac{c^n + c^{n-1}}{2} = \begin{bmatrix} (f(t_{n-\frac{1}{2}}), \varphi_1) \\ \vdots \\ (f(t_{n-\frac{1}{2}}), \varphi_m) \end{bmatrix}$$

Seja $\mathcal{M} = \begin{bmatrix} (\varphi_1, \varphi_1) & \dots & (\varphi_m, \varphi_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\varphi_1, \varphi_m) & \dots & (\varphi_m, \varphi_m) \end{bmatrix}$

Seja $\mathcal{K} = \begin{bmatrix} \kappa(\varphi_1, \varphi_1) & \dots & \kappa(\varphi_m, \varphi_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \kappa(\varphi_1, \varphi_m) & \dots & \kappa(\varphi_m, \varphi_m) \end{bmatrix}$

Seja $\mathcal{F}^{n-\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} (f(t_{n-\frac{1}{2}}), \varphi_1) \\ \vdots \\ (f(t_{n-\frac{1}{2}}), \varphi_m) \end{bmatrix}$

1.6 Definição do Problema na Forma Matriz-vetor

Dado matrizes $\mathcal{M}$, $\mathcal{K}$ e um vetor $\mathcal{F}^{n-\frac{1}{2}}$, queremos encontrar C^n tal que:

$$(M) = \begin{cases} \mathcal{M}\dfrac{C^n - C^{n-1}}{\tau} + \mathcal{K}\dfrac{C^n + C^{n-1}}{2} = \mathcal{F}^{n-\frac{1}{2}} \\ \\ C^0 = \begin{bmatrix} u_0(h) \\ \vdots \\ u_0(1-h) \end{bmatrix} \end{cases}$$

1.7 Solução da Forma Matriz-vetor

$$\mathcal{M}\frac{C^n - C^{n-1}}{\tau} + \mathcal{K}\frac{C^n + C^{n-1}}{2} = \mathcal{F}^{n-\frac{1}{2}}$$

$$\mathcal{M}2\tau\frac{C^n - C^{n-1}}{\tau} + \mathcal{K}2\tau\frac{C^n + C^{n-1}}{2} = 2\tau\mathcal{F}^{n-\frac{1}{2}}$$

$$\mathcal{M}2\cancel{\tau}\frac{C^n - C^{n-1}}{\cancel{\tau}} + \mathcal{K}\cancel{2}\tau\frac{C^n + C^{n-1}}{\cancel{2}} = 2\tau\mathcal{F}^{n-\frac{1}{2}}$$

$$\mathcal{M}2[C^n - C^{n-1}] + \mathcal{K}\tau[C^n + C^{n-1}] = 2\tau\mathcal{F}^{n-\frac{1}{2}}$$

$$2\mathcal{M}C^n - 2\mathcal{M}C^{n-1} + \tau\mathcal{K}C^n + \tau\mathcal{K}C^{n-1} = 2\tau\mathcal{F}^{n-\frac{1}{2}}$$

$$2\mathcal{M}C^n + \tau\mathcal{K}C^n = 2\tau\mathcal{F}^{n-\frac{1}{2}} + 2\mathcal{M}C^{n-1} - \tau\mathcal{K}C^{n-1}$$

$$[2\mathcal{M} + \tau\mathcal{K}]\, C^n = 2\tau\mathcal{F}^{n-\frac{1}{2}} + [2\mathcal{M} - \tau\mathcal{K}]\, C^{n-1}$$

$$\left[\mathcal{M} + \left(\frac{\tau}{2}\right)\mathcal{K}\right] C^n = \left(\frac{2}{2}\right)\tau\mathcal{F}^{n-\frac{1}{2}} + \left[\mathcal{M} - \left(\frac{\tau}{2}\right)\mathcal{K}\right] C^{n-1}$$

$$\left[\mathcal{M} + \left(\frac{\tau}{2}\right)\mathcal{K}\right] C^n = \tau\mathcal{F}^{n-\frac{1}{2}} + \left[\mathcal{M} - \left(\frac{\tau}{2}\right)\mathcal{K}\right] C^{n-1}$$

Seja $\mathcal{A} = \left[\mathcal{M} + \left(\frac{\tau}{2}\right)\mathcal{K}\right]$.

Seja $\mathcal{B} = \left[\mathcal{M} - \left(\frac{\tau}{2}\right)\mathcal{K}\right]$.

Sendo assim, temos:

$$\mathcal{A}C^n = \mathcal{B}C^{n-1} + \tau\mathcal{F}^{n-\frac{1}{2}}$$

$$C^n = \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}C^{n-1} + \tau\mathcal{F}^{n-\frac{1}{2}}$$

Bibliografia

[1] Bruno Alves do Carmo. *Elementos Finitos*. Acessado em 20 de Dezembro de 2024. URL: https://github.com/bacarmo/Elementos_Finitos.

[2] Thomas J. R. Hughes. *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Dover Civil and Mechanical Engineering. Dover Publications, 2000. ISBN: 0486411818; 9780486411811. URL: libgen.li/file.php?md5=6ccd7300b50cdf2ec244ba5c248c4bc1.

[3] João Victor Lopez Pereira. *Finite-Elements-Method*. Acessado em 20 de Outubro de 2024. URL: https://github.com/joaovictorlopezpereira/Finite-Elements-Method.