Aproximação do Problema Estacionário Bidimensional pelo Método dos Elementos Finitos

João Victor Lopez Pereira

11 de outubro de 2024

Rio de Janeiro - RJ

Resumo:

Este documento apresenta a resolução de um sistema genérico de equações diferenciais ordinárias utilizando o Método dos Elementos Finitos, conforme abordado nas aulas da disciplina *Introdução ao Método dos Elementos Finitos*, ministradas pelo prof. Dr. Marcello Goulart Teixeira na Universidade Federal do Rio de Janeiro, durante o segundo semestre de 2024. Neste documento, apresentamos a resolução do problema estacionário em duas dimensões.

Abstract:

This document presents the solution of a generic system of ordinary differential equations using the Finite Elements Method, as covered in the course *Introduction to the Finite Element Method*, taught by professor Dr. Marcello Goulart Teixeira at the Federal University of Rio de Janeiro, during the second half of 2024. In this document, we present the solution of the stationary problem in two dimensions.

Agradecimentos:

Agradeço ao professor Marcello Goulart, a Bruno Alves, Leonardo, Hashimoto e a vários outros colegas que me ajudaram no entendimento do conteúdo necessário para a realização das contas e do Método dos Elementos Finitos como um todo.

Thanks:

I would like to thank professor Marcello Goulart, Bruno Alves, Leonardo, Hashimoto, and several other colleagues who helped me understand the necessary content for carrying out the calculations and the Finite Element Method as a whole.

Sumário

Capítulo 1

Aproximação do Problema Estacionário Bidimensional

Definição de Notação

Definição: $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

Definição: Γ é a fronteira de Ω

Definição: $\overline{\Omega} = \Gamma \cup \Omega$

Definição: $\Delta u(x) = u_{x_1x_1}(x) + u_{x_2x_2}(x)$ sendo $x = (x_1, x_2)$ ponto $\in \mathbb{R}^2$

1.1 Definição da Formulação Forte

Dado constantes $\alpha > 0$ e $\beta \geq 0$ e uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Queremos determinar $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ tal que:

$$\begin{cases} -\alpha \Delta u(x) + \beta u(x) = f(x) \quad \forall x \in \Omega \\ \\ u(x) = 0, \quad \forall x \in \Gamma \end{cases}$$

1.2 Transição entre a Formulação Forte e Fraca

Seja V o espaço formado por funções $v : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, com v suficientemente suave e satisfazendo $v(x) = 0$ $\forall x \in \Gamma$. Dado $v \in V$:

$$
\begin{aligned}
-\alpha\Delta u(x) + \beta u(x) &= f(x) \\
-\alpha\Delta u(x)v(x) + \beta u(x)v(x) &= f(x)v(x) \\
\int_\Omega [-\alpha\Delta u(x)v(x) + \beta u(x)v(x)]\, d\Omega &= \int_\Omega f(x)v(x)\, d\Omega \\
-\alpha\int_\Omega \Delta u(x)v(x)\, d\Omega + \beta\int_\Omega u(x)v(x)\, d\Omega &= \int_\Omega f(x)v(x)\, d\Omega \\
-\alpha\int_\Omega u_{x_1x_1}(x)v(x)\, d\Omega - \alpha\int_\Omega u_{x_2x_2}v(x)\, d\Omega + \beta\int_\Omega u(x)v(x)\, d\Omega &= \int_\Omega f(x)v(x)\, d\Omega
\end{aligned}
$$

Semelhante ao caso unidimensional, faremos a integral por partes para eliminar a segunda derivada em x_1 e x_2:

Generalização da Integral por partes

Pela regra da cadeia:

$$[u_{x_i}(x)v(x)]_{x_i} = u_{x_ix_i}(x)v(x) + u_{x_i}(x)v_{x_i}(x)$$

Integrando dos dois lados:

$$\int_\Omega [u_{x_i}(x)v(x)]_{x_i}\, d\Omega = \int_\Omega u_{x_ix_i}(x)v(x)\, d\Omega + \int_\Omega u_{x_i}(x)v_{x_i}(x)\, d\Omega$$

Pelo teorema da divergência,

$$\int_\Omega [u_{x_i}(x)v(x)]_{x_i}\, d\Omega = \int_\Gamma u_{x_i}(x)v(x)\eta_i\, d\Gamma$$

Mas visto que $v(x) = 0 \forall x \in \Gamma$, então:

$$\int_\Gamma u_{x_i}(x)v(x)\eta_i\, d\Gamma = 0$$

Então:

$$0 = \int_\Omega u_{x_ix_i}(x)v(x)\, d\Omega + \int_\Omega u_{x_i}(x)v_{x_i}(x)\, d\Omega$$

$$\int_\Omega u_{x_i}(x)v_{x_i}(x)\,d\Omega = -\int_\Omega u_{x_ix_i}(x)v(x)\,d\Omega$$

Substituindo na equação principal:

$$\alpha\int_\Omega u_{x_1x_1}(x)v_{x_i}(x)\,d\Omega + \alpha\int_\Omega u_{x_2x_2}v_{x_i}(x)\,d\Omega + \beta\int_\Omega u(x)v(x)\,d\Omega = \int_\Omega f(x)v(x)\,d\Omega$$

Que pode ser reescrito como:

$$\alpha\int_\Omega \Delta u(x)\Delta v(x)\,d\Omega + \beta\int_\Omega u(x)v(x)\,d\Omega = \int_\Omega f(x)v(x)\,d\Omega$$

Definição de Notação

Definição: $(f,g) = \displaystyle\int_0^1 f(x)g(x)\,dx$

Definição: $\kappa(f,g) = \alpha\displaystyle\int_\Omega \Delta f(x)\Delta g(x)\,dx + \beta\int_\Omega f(x)g(x)\,dx$

Ou seja, nosso problema:

$$\alpha\int_\Omega \Delta u(x)\Delta v(x)\,d\Omega + \beta\int_\Omega u(x)v(x)\,d\Omega = \int_\Omega f(x)v(x)\,d\Omega$$

Pode ser escrito como:

$$\kappa(u,v) = (f,v)$$

1.3 Definição da Formulação Fraca

Dado constantes $\alpha > 0$ e $\beta \geq 0$ e uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Queremos determinar $u \in V$, $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ tal que:

$$\kappa(u,v) = (f,v) \quad \forall v \in V$$

1.4 Definição do Problema Aproximado

Dado constantes $\alpha > 0$ e $\beta \geq 0$ e uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Queremos determinar $u_h \in V_m$, $u_h : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ tal que:

$$\kappa(u_h, v_h) = (f, v_h) \quad \forall v_h \in V_m$$

1.5 Transição entre o Problema Aproximado e a Forma Matriz Vetor

Sendo φ_j, $j \in [1, m]$, a base do espaço V_m, queremos $u_h \in V_m$ que, por estar em V_m, pode ser escrito como combinação linear dos vetores da base:

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^{m} c_j \varphi_j(x)$$

Sendo assim, temos:

$$\kappa(u_h, v_h) = (f, v_h)$$

$$\kappa(\sum_{j=1}^{m} c_j \varphi_j(x), v_h) = (f, v_h)$$

$$\sum_{j=1}^{m} \kappa(c_j \varphi_j(x), v_h) = (f, v_h)$$

$$\sum_{j=1}^{m} \kappa(\varphi_j(x), v_h) c_j = (f, v_h)$$

Tomando $v_h = \varphi_i$, $\forall i \in [1, m]$:

$$\begin{cases} \kappa(\varphi_1, \varphi_1)c_1 + \cdots + \kappa(\varphi_j, \varphi_1)c_j + \cdots + \kappa(\varphi_m, \varphi_1)c_m = (f, \varphi_1) \\ \vdots \\ \kappa(\varphi_1, \varphi_i)c_1 + \cdots + \kappa(\varphi_j, \varphi_i)c_j + \cdots + \kappa(\varphi_m, \varphi_i)c_m = (f, \varphi_i) \\ \vdots \\ \kappa(\varphi_1, \varphi_m)c_1 + \cdots + \kappa(\varphi_j, \varphi_m)c_j + \cdots + \kappa(\varphi_m, \varphi_m)c_m = (f, \varphi_m) \end{cases}$$

Que pode ser escrito na forma matriz-vetor:

$$\begin{pmatrix} \kappa(\varphi_1, \varphi_1) & \dots & \kappa(\varphi_j, \varphi_1) & \dots & \kappa(\varphi_m, \varphi_1) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \kappa(\varphi_1, \varphi_i) & \dots & \kappa(\varphi_j, \varphi_i) & \dots & \kappa(\varphi_m, \varphi_i) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \kappa(\varphi_1, \varphi_m) & \dots & \kappa(\varphi_j, \varphi_m) & \dots & \kappa(\varphi_m, \varphi_m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_j \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f, \varphi_1) \\ \vdots \\ (f, \varphi_i) \\ \vdots \\ (f, \varphi_m) \end{pmatrix}$$

Definição de Notação

Definição: $\mathcal{K} = \begin{pmatrix} \kappa(\varphi_1, \varphi_1) & \dots & \kappa(\varphi_j, \varphi_1) & \dots & \kappa(\varphi_m, \varphi_1) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \kappa(\varphi_1, \varphi_i) & \dots & \kappa(\varphi_j, \varphi_i) & \dots & \kappa(\varphi_m, \varphi_i) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \kappa(\varphi_1, \varphi_m) & \dots & \kappa(\varphi_j, \varphi_m) & \dots & \kappa(\varphi_m, \varphi_m) \end{pmatrix}$

Definição: $\mathcal{C} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_j \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$

Definição: $\mathcal{F} = \begin{pmatrix} (f, \varphi_1) \\ \vdots \\ (f, \varphi_i) \\ \vdots \\ (f, \varphi_m) \end{pmatrix}$

1.6 Definição do Problema na Forma Matriz-vetor

Dado $\mathcal{K}$ e $\mathcal{F}$, queremos determinar $\mathcal{C}$ tal que:

$$\mathcal{K}\mathcal{C} = \mathcal{F}$$

Capítulo 2

Implementação

2.1 Mudança de Intervalo e Funções Locais

Visto que queremos modificar nosso espaço para $[[-1,1],[-1,1]]$ para podermos usar a quadratura gaussiana como aproximação de integral, definiremos a função $x(\xi)$ tal que:

$$x(\xi) = (x_1(\xi), x_2(\xi)) \begin{cases} x_1(\xi) = \dfrac{h_1}{2}(\xi_1 + 1) + p_1^e \\ \\ x_2(\xi) = \dfrac{h_2}{2}(\xi_2 + 1) + p_2^e \end{cases}$$

Além disso, nossas funções de base locais $\varphi_a^e(x)$ terão seu domínio alterado tais que:

$$\varphi_a^e(x(\xi)) = \phi_a(\xi)$$

e sua derivada:

$$\varphi^e_{a\,x_i}(x(\xi)) = \frac{2}{h_i}\phi_{a\,\xi_i}(\xi)$$

O termo $\dfrac{2}{h_i}$ é a derivada de $x(\xi)$ que surge no momento de derivar o termo esquerdo da equação e realizar a regra da cadeia.

2.2 Cálculo da F local

Vimos que $\mathcal{F} = \begin{pmatrix} (f,\varphi_1) \\ \vdots \\ (f,\varphi_i) \\ \vdots \\ (f,\varphi_m) \end{pmatrix}$, sendo assim:

$$F_a^e = \int_{\Omega^e} f(x)\varphi_a^e(x)\, d\Omega$$
$$F_a^e = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x(\xi))\varphi_a^e(x(\xi))\, J\, d\xi_1\, d\xi_2$$

Tal que:

$$\begin{aligned} J &= \det\left(\begin{pmatrix} x_{1\,\xi_1}(\xi) & x_{1\,\xi_2}(\xi) \\ x_{2\,\xi_1}(\xi) & x_{2\,\xi_2}(\xi) \end{pmatrix}\right) \\ &= \det\left(\begin{pmatrix} \frac{h_1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{h_2}{2} \end{pmatrix}\right) \\ &= \frac{h_1 h_2}{4} \end{aligned}$$

Sendo assim:

$$\begin{aligned} F_a^e &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x(\xi))\varphi_a^e(x(\xi))\frac{h_1 h_2}{4}\, d\xi_1\, d\xi_2 \\ &= \frac{h_1 h_2}{4}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x(\xi))\varphi_a^e(x(\xi))\, d\xi_1\, d\xi_2 \\ &= \frac{h_1 h_2}{4}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x_1(\xi_1,\xi_2), x_2(\xi_1,\xi_2))\phi_a(\xi_1,\xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2 \end{aligned}$$

2.3 Cálculo da K local

Visto que $\mathcal{K} = \begin{pmatrix} \kappa(\varphi_1,\varphi_1) & \dots & \kappa(\varphi_j,\varphi_1) & \dots & \kappa(\varphi_m,\varphi_1) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \kappa(\varphi_1,\varphi_i) & \dots & \kappa(\varphi_j,\varphi_i) & \dots & \kappa(\varphi_m,\varphi_i) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \kappa(\varphi_1,\varphi_m) & \dots & \kappa(\varphi_j,\varphi_m) & \dots & \kappa(\varphi_m,\varphi_m) \end{pmatrix}$, sendo assim:

$$
\begin{aligned}
K^e_{a,b} &= \alpha \int_{\Omega^e} \varphi^e_{b\,x_1}(x)\varphi^e_{a\,x_1}(x)\,d\Omega + \alpha \int_{\Omega^e} \varphi^e_{b\,x_2}(x)\varphi^e_{a\,x_2}(x)\,d\Omega + \beta \int_{\Omega^e} \varphi^e_{b}(x)\varphi^e_{a}(x)\,d\Omega \\
&= \alpha \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \varphi^e_{b\,x_1}(x(\xi))\varphi^e_{a\,x_1}(x(\xi))J\,d\xi_1\,d\xi_2 + \alpha \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \varphi^e_{b\,x_2}(x(\xi))\varphi^e_{a\,x_2}(x(\xi))J\,d\xi_1\,d\xi_2 \\
&\quad + \beta \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \varphi^e_{b}(x(\xi))\varphi^e_{a}(x(\xi))J\,d\xi_1\,d\xi_2 \\
&= \alpha \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \phi_{b\,x_1}(\xi)\frac{2}{h_1}\phi_{a\,x_1}(\xi)\frac{2}{h_1}\frac{h_1h_2}{4}\,d\xi_1\,d\xi_2 + \alpha \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \phi_{b\,x_2}(\xi)\frac{2}{h_2}\phi_{a\,x_2}(\xi)\frac{2}{h_2}\frac{h_1h_2}{4}\,d\xi_1\,d\xi_2 \\
&\quad + \beta \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \phi_{b}(\xi)\phi_{a}(\xi)\frac{h_1h_2}{4}\,d\xi_1\,d\xi_2 \\
&= \alpha\frac{h_2}{h_1} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \phi_{b\,x_1}(\xi)\phi_{a\,x_1}(\xi)\,d\xi_1\,d\xi_2 + \alpha\frac{h_1}{h_2} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \phi_{b\,x_2}(\xi)\phi_{a\,x_2}(\xi)\,d\xi_1\,d\xi_2 \\
&\quad + \beta\frac{h_1h_2}{4} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \phi_{b}(\xi)\phi_{a}(\xi)\,d\xi_1\,d\xi_2
\end{aligned}
$$

Bibliografia

[1] Bruno Alves do Carmo. *Elementos Finitos*. Acessado em 11 de Outubro de 2024. URL: https://github.com/bacarmo/Elementos_Finitos.