

Resolução do Problema Estacionário
com Condições de Dirichlet
via o Método dos Elementos Finitos

João Victor Lopez Pereira

20 de dezembro de 2024

Rio de Janeiro - RJ

Resumo:

Este documento apresenta a resolução de um sistema genérico de equações diferenciais ordinárias (problema estacionário) utilizando o Método dos Elementos Finitos, conforme abordado nas aulas da disciplina *Introdução ao Método dos Elementos Finitos*, ministradas pelos professores Marcello Goulart Teixeira e Bruno Alves do Carmo na Universidade Federal do Rio de Janeiro, durante o segundo semestre de 2024.

Abstract:

This document presents the solution of a generic system of ordinary differential equations (stationary problem) using the Finite Element Method, as covered in the course *Introduction to the Finite Element Method*, taught by professors Marcello Goulart Teixeira and Bruno Alves do Carmo at the Federal University of Rio de Janeiro, during the second half of 2024.

Agradecimentos:

Agradeço ao professores Marcello Teixeira e Bruno Carmo e meus colegas Leonardo, Hashimoto e a vários outros que me ajudaram no entendimento do conteúdo necessário para a realização das contas e do Método dos Elementos Finitos como um todo.

Thanks:

I would like to thank professors Marcello Teixeira and Bruno Carmo and colleagues Leonardo, Hashimoto and several others who helped me understand the necessary content for carrying out the calculations and the Finite Element Method as a whole.

Sumário

1	Resolução do Problema Estacionário	3
1.1	Definição da Formulação Forte	3
1.2	Transição da Formulação Fraca para o Problema Aproximado	3
1.3	Definição da Formulação Fraca	4
1.4	Definição do Problema Aproximado pelo Método de Galerkin	5
1.5	Transição do Problema Aproximado para a Forma Matriz-vetor	5
1.6	Definição do Problema na Forma Matriz-Vetor	6
1.7	Definindo uma Função Base	7
2	Cálculo das Locais	8
2.1	Matriz Local	8
2.2	Vetor Local	9
3	Alguns dos Testes Realizados	10
	Bibliografia	13

Capítulo 1

Resolução do Problema Estacionário

1.1 Definição da Formulação Forte

Dada uma função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ e constantes $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$ e $\gamma \geq 0$, queremos encontrar a função $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$(S) = \begin{cases} -\alpha u_{xx}(x) + \beta u(x) + \gamma u_x(x) = f(x) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Sendo (S) conhecido como a formulação forte do problema.

1.2 Transição da Formulação Fraca para o Problema Aproximado

Nesse momento iremos realizar uma série de manipulações algébricas para deixar a primeira equação em um formato mais próximo de uma formulação fraca, que é mais adequada para análise teórica e para implementação numérica.

Visto que $-\alpha u_{xx}(x) + \beta u(x) + \gamma u_x(x) = f(x)$

Podemos multiplicar ambos os lados por uma função $v(x)$ tal que $v(1) = v(0) = 0$ que nos ajude a eliminar a segunda derivada u_{xx} :

$$-\alpha u_{xx}(x) + \beta u(x) + \gamma u_x(x) = f(x)$$

$$\left[-\alpha u_{xx}(x) + \beta u(x) + \gamma u_x(x) \right] v(x) = f(x)v(x)$$

$$-\alpha u_{xx}(x)v(x) + \beta u(x)v(x) + \gamma u_x(x)v(x) = f(x)v(x)$$

$$\int_0^1 \left[-\alpha u_{xx}(x)v(x) + \beta u(x)v(x) + \gamma u_x(x)v(x) \right] dx = \int_0^1 f(x)v(x) dx$$

$$\int_0^1 -\alpha u_{xx}(x)v(x) dx + \int_0^1 \beta u(x)v(x) dx + \int_0^1 \gamma u_x(x)v(x) dx = \int_0^1 f(x)v(x) dx$$

Sabemos que dadas funções f e g :

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

Logo, realizando a integração por partes no primeiro termo na equação:

$$\int_0^1 f(x)v(x)dx = -\alpha \left[u_x(x)v(x) \right]_0^1 - \int_0^1 u_x(x)v_x(x)dx + \int_0^1 \beta u(x)v(x)dx + \int_0^1 \gamma u_x(x)v(x)dx$$

$$\int_0^1 f(x)v(x)dx = -\alpha \left[(u_x(1)v(1) - u_x(0)v(0)) - \int_0^1 u_x(x)v_x(x)dx \right] + \int_0^1 \beta u(x)v(x)dx + \int_0^1 \gamma u_x(x)v(x)dx$$

$$\int_0^1 f(x)v(x)dx = -\alpha \left[\cancel{(u_x(1)v(1) - u_x(0)v(0))} - \int_0^1 u_x(x)v_x(x)dx \right] + \int_0^1 \beta u(x)v(x)dx + \int_0^1 \gamma u_x(x)v(x)dx$$

$$\int_0^1 f(x)v(x)dx = \alpha \int_0^1 u_x(x)v_x(x)dx + \beta \int_0^1 u(x)v(x)dx + \gamma \int_0^1 u_x(x)v(x)dx$$

1.3 Definição da Formulação Fraca

Definição: Pelo restante do documento, considere que uma função g é “suficientemente suave” se ela respeitar:

- g é contínua em todo o domínio;
- g possui derivadas contínuas até a ordem necessária.

Seja H um espaço de funções formado por funções u suficientemente suaves que satisfazem (W) e as condições de contorno $u(0) = u(1) = 0$. Seja V um espaço das funções de teste, composto por funções v suficientemente suaves e que satisfazem as condições de contorno $v(0) = v(1) = 0$.

Dados $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$, $\gamma \geq 0$ e uma função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, precisamos determinar $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $u \in H$, tal que, $\forall v \in V$:

$$(W) = \begin{cases} \alpha \int_0^1 u_x(x)v_x(x)dx + \beta \int_0^1 u(x)v(x)dx + \gamma \int_0^1 u_x(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

1.4 Definição do Problema Aproximado pelo Método de Galerkin

O método de Galerkin consiste em aproximar o espaço das soluções por um subespaço de dimensão finita para encontrarmos uma solução aproximada que satisfaça a formulação fraca do problema dentro de um subespaço apropriado, permitindo a construção de uma solução computacionalmente viável. Sendo assim:

Seja H^h um espaço de funções finito-dimensional composto por funções u^h suficientemente suaves que satisfazem (A) e as condições de contorno $u^h(0) = u^h(1) = 0$. Analogamente, seja V^h um espaço de funções finito-dimensional das funções de teste, formado por funções v^h suficientemente suaves que também atendem às condições de contorno $v^h(0) = v^h(1) = 0$.

Dada uma função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ e constantes $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$ e $\gamma \geq 0$, queremos determinar $u^h \in H^h$ tal que, $\forall v^h \in V^h$:

$$(A) = \begin{cases} \int_0^1 f(x)v^h(x)dx = \alpha \int_0^1 u_x^h(x)v_x^h(x)dx + \beta \int_0^1 u^h(x)v^h(x)dx + \gamma \int_0^1 u_x^h(x)v^h(x)dx \\ u^h(0) = u^h(1) = 0 \end{cases}$$

1.5 Transição do Problema Aproximado para a Forma Matriz-vetor

Visto que $u^h \in H^h$, podemos tomar u^h como combinação linear das funções da base de H^h

Seja

$$u^h(x) = \sum_{j=1}^m \varphi_j(x)c_j \quad \text{e} \quad u_x^h(x) = \sum_{j=1}^m \varphi_{xj}(x)c_j$$

Substituindo ambos na equação:

$$\begin{aligned} \alpha \int_0^1 \sum_{j=1}^m \varphi_{xj}(x)c_j v_x^h(x)dx + \beta \int_0^1 \sum_{j=1}^m \varphi_j(x)c_j v^h(x)dx + \gamma \int_0^1 \sum_{j=1}^m \varphi_{xj}(x)c_j v^h(x)dx &= \int_0^1 f(x)v^h(x)dx \\ \sum_{j=1}^m \left[\alpha \int_0^1 \varphi_{xj}(x)c_j v_x^h(x)dx + \beta \int_0^1 \varphi_j(x)c_j v^h(x)dx + \gamma \int_0^1 \varphi_{xj}(x)c_j v^h(x)dx \right] &= \int_0^1 f(x)v^h(x)dx \end{aligned}$$

Veja que podemos tomar $v^h(x)$ como sendo qualquer função da base de V^h .

Logo, $\forall i \in \{1, \dots, m\}$, $v^h(x) = \varphi_i(x)$ e $v_x^h = \varphi_{xi}(x)$. Substituindo na equação:

$$\sum_{j=1}^m \left[\alpha \int_0^1 \varphi_{xj}(x) c_j \varphi_{xi}(x) dx + \beta \int_0^1 \varphi_j(x) c_j \varphi_i(x) dx + \gamma \int_0^1 \varphi_{xj}(x) c_j \varphi_i(x) dx = \int_0^1 f(x) \varphi_i(x) dx \right]$$

$$\sum_{j=1}^m c_j \left[\alpha \int_0^1 \varphi_{xj}(x) \varphi_{xi}(x) dx + \beta \int_0^1 \varphi_j(x) \varphi_i(x) dx + \gamma \int_0^1 \varphi_{xj}(x) \varphi_i(x) dx = \int_0^1 f(x) \varphi_i(x) dx \right]$$

Veja que essa equação vale $\forall i \in \{1, \dots, m\}$, dessa forma, podemos expressar o problema na forma matriz-vetor:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^m c_j \left[\alpha \int_0^1 \varphi_{xj}(x) \varphi_{x1}(x) dx + \beta \int_0^1 \varphi_j(x) \varphi_1(x) dx + \gamma \int_0^1 \varphi_{xj}(x) \varphi_1(x) dx \right] = \int_0^1 f(x) \varphi_1(x) dx \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m c_j \left[\alpha \int_0^1 \varphi_{xj}(x) \varphi_{xi}(x) dx + \beta \int_0^1 \varphi_j(x) \varphi_i(x) dx + \gamma \int_0^1 \varphi_{xj}(x) \varphi_i(x) dx \right] = \int_0^1 f(x) \varphi_i(x) dx \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m c_j \left[\alpha \int_0^1 \varphi_{xj}(x) \varphi_{xm}(x) dx + \beta \int_0^1 \varphi_j(x) \varphi_m(x) dx + \gamma \int_0^1 \varphi_{xj}(x) \varphi_m(x) dx \right] = \int_0^1 f(x) \varphi_m(x) dx \end{cases}$$

1.6 Definição do Problema na Forma Matriz-Vetor

Dado uma matriz K e um vetor F , queremos determinar C tal que:

$$(M) = \left\{ \mathcal{K}C = \mathcal{F} \right.$$

$$\begin{bmatrix} K_{1,1} & \dots & K_{1,j} & \dots & K_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{i,1} & \dots & K_{i,j} & \dots & K_{i,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{m,1} & \dots & K_{m,j} & \dots & K_{m,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_i \\ \vdots \\ C_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_i \\ \vdots \\ F_m \end{bmatrix}$$

$\forall i, j \in \{1, \dots, m\}$ tais que i e j correspondam aos índices da matriz e i corresponda ao índice do vetor F , sejam:

$$K_{i,j} = \alpha \int_0^1 \frac{d\varphi_i(x)}{dx} \frac{d\varphi_j(x)}{dx} dx + \beta \int_0^1 \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx + \gamma \int_0^1 \varphi_i(x) \frac{d\varphi_j(x)}{dx} dx$$

$$F_i = \int_0^1 f(x) \varphi_i(x) dx$$

1.7 Definindo uma Função Base

Seja x_1, \dots, x_m uma discretização do intervalo $[0, 1]$ tal que $\forall i \in 1, \dots, m, x_{i+1} - x_i = h$. Além disso, considere $x_0 = 0$ e $x_{m+1} = 1$ como sendo os extremos do intervalo tal que $x_{m+1} - x_m = h$ e $x_1 - x_0 = h$.

Definiremos $\varphi_i(x)$ como:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{h}, & \forall x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{x_{i+1} - x}{h}, & \forall x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0, & \forall x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}] \end{cases}$$

Observe que a função base $\varphi_i(x)$ é definida como uma função linear por partes intencionalmente de forma que a sua integração e derivação sejam simples. Além disso, $\varphi_i(x)$ é projetada para ser zero fora do intervalo $[x_{i-1}, x_{i+1}]$, o que significa que cada função base afeta apenas dois ou três pontos consecutivos. Essa escolha reduz significativamente a complexidade do sistema linear, já que a matriz resultante terá muitas entradas nulas. Isso nos é benéfico pois então trabalharemos com matrizes esparsas, que são computacionalmente mais eficientes, tanto em termos de armazenamento quanto de tempo de processamento.

Perceba também que:

$$\varphi_i(x_i) = \frac{x_i - x_{i-1}}{h} = \frac{h}{h} = 1$$

Capítulo 2

Cálculo das Locais

2.1 Matriz Local

Observe que, pela definição de $\varphi_i(x)$, $K_{i,j} = 0$ quando $|i - j| < 2$. Logo, podemos limitar nossa o intervalo de integração visto que restante do intervalo resultará sempre em zero. Faremos no cálculo das matrizes K_{ij}^e locais de cada elemento e utilizando a notação local para as funções da base.

$$K_{i,j}^e = \alpha \int_{x^{e-1}}^{x^e} \varphi_{xi}(x) \varphi_{xj}(x) dx + \beta \int_{x^{e-1}}^{x^e} \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx + \gamma \int_{x^{e-1}}^{x^e} \varphi_i(x) \varphi_{xj}(x) dx$$
$$K_{a,b}^e = \alpha \int_{x_1^{e-1}}^{x_2^e} \varphi_{xa}^e(x) \varphi_{xb}^e(x) dx + \beta \int_{x_1^{e-1}}^{x_2^e} \varphi_a^e(x) \varphi_b^e(x) dx + \gamma \int_{x_1^{e-1}}^{x_2^e} \varphi_a^e(x) \varphi_{xb}^e(x) dx$$

Para podermos utilizar a quadratura gaussiana como técnica de integração, precisaremos modificar nosso intervalo de $[0, 1]$ para $[-1, 1]$ visto que essa é a condição para o uso dessa técnica.

Seja $x(\xi, e)$ a função que converte de ξ para x tal que $x(\xi, e) = \frac{h}{2}(\xi + 1) + x_{e-1}$.

$$\text{Seja } \phi_n(\xi) = \begin{cases} \frac{1-\xi}{2} & , \text{ se } n = 1 \\ \frac{1+\xi}{2} & , \text{ se } n = 2 \end{cases} \quad \text{e seja} \quad \frac{d\phi_n}{d\xi}(\xi) = \begin{cases} \frac{-1}{2} & , \text{ se } n = 1 \\ \frac{1}{2} & , \text{ se } n = 2 \end{cases}$$

tal que:

$$\phi_n(\xi) = \varphi_n^e(x(\xi, e))$$

$$K_{a,b}^e = \alpha \int_{-1}^1 \varphi_{xa}^e(x(\xi, e)) \varphi_{xb}^e(x(\xi, e)) \frac{h}{2} d\xi + \beta \int_{-1}^1 \varphi_a^e(x(\xi, e)) \varphi_b^e(x(\xi, e)) \frac{h}{2} d\xi \\ + \gamma \int_{-1}^1 \varphi_a^e(x(\xi, e)) \varphi_{xb}^e(x(\xi, e)) \frac{h}{2} d\xi$$

Como, por definição, $\phi_n(\xi) = \varphi_n^e(x(\xi, e))$, então:

$$K_{a,b}^e = \alpha \int_{-1}^1 \phi_{\xi a}(\xi) d\phi_{\xi b}(\xi) \frac{h}{2} \frac{2}{h} \frac{2}{h} d\xi + \beta \int_{-1}^1 \phi_a(\xi) \phi_b(\xi) \frac{h}{2} d\xi + \gamma \int_{-1}^1 \phi_a(\xi) \phi_{\xi b}(\xi) \frac{h}{2} \frac{2}{h} d\xi \\ K_{a,b}^e = \alpha \int_{-1}^1 \phi_{\xi a}(\xi) \phi_{\xi b}(\xi) \frac{2}{h} d\xi + \beta \int_{-1}^1 \phi_a(\xi) \phi_b(\xi) \frac{h}{2} d\xi + \gamma \int_{-1}^1 \phi_a(\xi) \phi_{\xi b}(\xi) d\xi \\ K_{a,b}^e = \frac{2\alpha}{h} \int_{-1}^1 d\phi_{\xi a}(\xi) \phi_{\xi b}(\xi) d\xi + \frac{\beta h}{2} \int_{-1}^1 \phi_a(\xi) \phi_b(\xi) d\xi + \gamma \int_{-1}^1 \phi_a(\xi) \phi_{\xi b}(\xi) d\xi$$

2.2 Vetor Local

Assim como fizemos com $K_{i,j}^e$, podemos fazemos o mesmo com a F_i^e local de cada elemento.

$$F_a^e = \int_0^1 f(x) \varphi_i(x) dx \\ F_a^e = \int_{x_1^e}^{x_2^e} f(x) \varphi_a^e(x) dx \\ F_a^e = \int_{-1}^1 f(x(\xi, e)) \varphi_a^e(x(\xi, e)) \frac{h}{2} d\xi \\ F_a^e = \frac{h}{2} \int_{-1}^1 f(x(\xi, e)) \phi_a(\xi) d\xi$$

Visto que sabemos montar a matriz K a partir de $K_{a,b}^e$ e o vetor F a partir de F_a^e , os coeficientes do vetor C podem finalmente ser calculados.

Capítulo 3

Alguns dos Testes Realizados

Para testarmos o procedimento, precisamos primeiro escolher uma função $u(x)$ que satisfaça $u(0) = u(1) = 0$. Também precisamos definir valores para α , β e γ . Nesse caso em específico, selecionamos valores arbitrários somente para testes:

```
alpha = 1          # constant value
beta = 1           # constant value
gamma = 1          # constant value
u = (x) -> sin(pi * x)
```

Em seguida, podemos calcular o valor esperado para a função $f(x)$ para que possamos calcular o erro do nosso método. $f(x)$ precisa necessariamente satisfazer:

$$f(x) = -\alpha u_{xx}(x) + \beta u(x) + \gamma u_x(x)$$

Sendo assim:

$$\begin{aligned} f(x) &= -\alpha u_{xx}(x) + \beta u(x) + \gamma u_x(x) \\ f(x) &= -\alpha(\sin(\pi x))_{xx} + \beta \sin(\pi x) + \gamma(\sin(\pi x))_x \\ f(x) &= -\alpha(\pi \cos(\pi x))_x + \beta \sin(\pi x) + \gamma \pi \cos(\pi x) \\ f(x) &= -\alpha \pi^2(-\sin(\pi x)) + \beta \sin(\pi x) + \gamma \pi \cos(\pi x) \\ f(x) &= \alpha \pi^2 \sin(\pi x) + \beta \sin(\pi x) + \gamma \pi \cos(\pi x) \end{aligned}$$

Logo:

```
f = (x) -> alpha*pi^2 * sin(pi*x) + beta*sin(pi*x) + gamma*pi*cos(pi*x)
```

Sendo assim, ao rodarmos como código com o número de elementos variando de 1 até 131071 ($2^1 - 1$ até

$2^{17} - 1$), obtemos os seguintes gráficos:

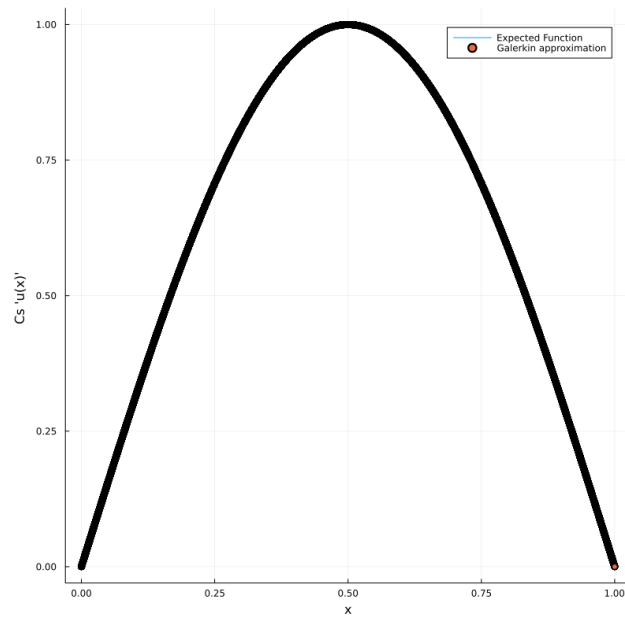


Figura 3.1: Gráfico que mostra a função original e nossos pontos aproximados por cima (Não é possível ver ambos muito bem pois o número de pontos está bem alto).

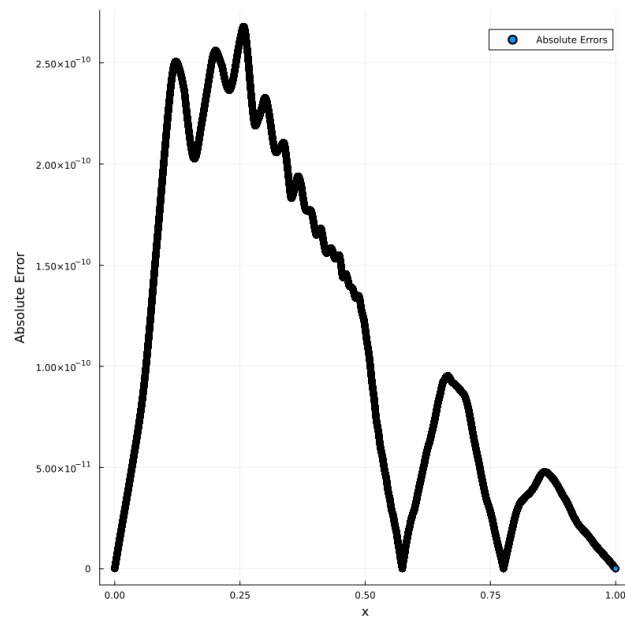


Figura 3.2: Gráfico que mostra a distância no eixo y para cada ponto encontrado pelo nosso método em comparação com a função original.

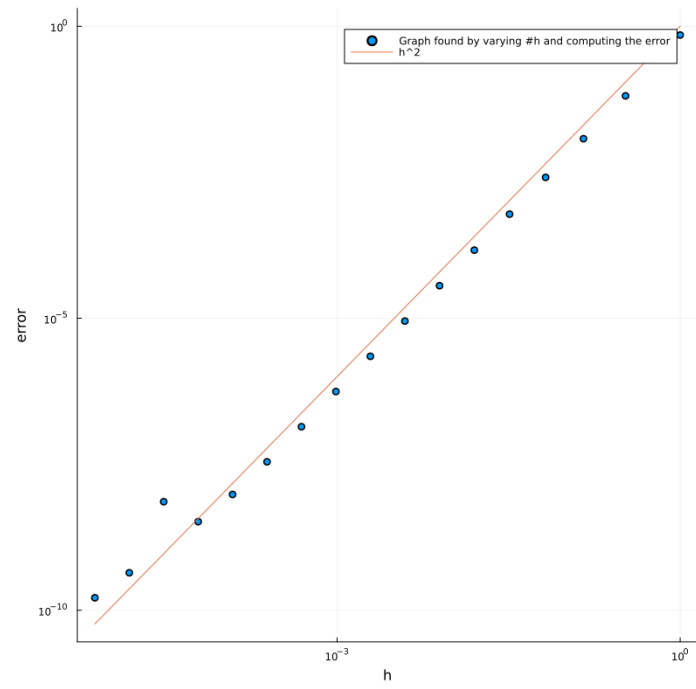


Figura 3.3: Gráfico que mostra os erros conforme o espaçamento entre cada elemento varia.

Veja que o gráfico da convergência do erro apresenta inclinação 2 na escala logarítmica, o que significa que o erro está na ordem de h^2 , que é o esperado.

Bibliografia

- [1] Bruno Alves do Carmo. *Elementos Finitos*. Acessado em 20 de Dezembro de 2024. URL: https://github.com/bacarmo/Elementos_Finitos.
- [2] João Victor Lopez Pereira. *Finite-Elements-Method*. Acessado em 20 de Outubro de 2024. URL: <https://github.com/joaovictorlopezpereira/Finite-Elements-Method>.