Aproximando a Equação do Calor em uma Dimensão Espacial com Dependência Temporal pelo Método dos Elementos Finitos

João Victor Lopez Pereira

26 de setembro de 2024

Rio de Janeiro - RJ

Resumo

Este documento apresenta a resolução de um sistema genérico de equações diferenciais ordinárias utilizando o Método de Galerkin, conforme abordado nas aulas da disciplina *Introdução ao Método dos Elementos Finitos*, ministradas pelo prof. Dr. Marcello Goulart Teixeira na Universidade Federal do Rio de Janeiro, durante o segundo semestre de 2024. Neste documento, apresentamos a resolução de uma equação do calor em uma dimensão espacial, com dependência temporal.

This document presents the solution of a generic system of ordinary differential equations using the Galerkin Method, as covered in the course *Introduction to the Finite Element Method*, taught by professor Dr. Marcello Goulart Teixeira at the Federal University of Rio de Janeiro, during the second half of 2024. In this document, we present the solution of a heat equation in one spatial dimension, with temporal dependence.

Sumário

1 Aproximando a equação do Calor **2**

1.1 Definição da Formulação Forte . . . 2

1.2 Transição entre a Formulação Forte e Fraca . . . 2

1.3 Definição da Formulação Fraca . . . 4

1.4 Problema Totalmente Discreto . . . 4

1.4.1 Problema Variacional no Ponto Médio . . . 4

1.4.2 Diferenças Finitas no Tempo . . . 4

1.4.3 Problema Aproximado . . . 5

1.5 Definição do Problema Totalmente Discreto . . . 5

1.6 Transição entre o Problema Aproximado e a Forma Matriz-vetor . . . 5

1.7 Definição do Problema na Forma Matriz-vetor . . . 6

Bibliografia **8**

Capítulo 1

Aproximando a equação do Calor

1.1 Definição da Formulação Forte

Dado constantes $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$ e $T > 0$ e $f(x,t)$ tal que $x \in [0,1]$ e $t \in [0,T]$, queremos encontrar $u(x,t)$ tal que:

$$\begin{cases} u_t(x,t) - \alpha u_{xx}(x,t) + \beta u(x,t) = f(x,t) \ \forall x \in]0,1[\\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

1.2 Transição entre a Formulação Forte e Fraca

Visto que:

$$u_t(x,t) - \alpha u_{xx}(x,t) + \beta u(x,t) = f(x,t)$$

Podemos multiplicar ambos por lados por uma função $v(x) \in V$ tal que V é o espaço

$$v(1) = v(0) = 0$$

que nos ajude a eliminar a segunda derivada de u em x:

$$u_t(x,t) - \alpha u_{xx}(x,t) + \beta u(x,t) = f(x,t)$$

$$[u_t(x,t) - \alpha u_{xx}(x,t) + \beta u(x,t)]v(x) = f(x,t)v(x)$$

$$u_t(x,t)v(x) - \alpha u_{xx}(x,t)v(x) + \beta u(x,t)v(x) = f(x,t)v(x)$$

$$\int_0^1 u_t(x,t)v(x)dx - \int_0^1 \alpha u_{xx}(x,t)v(x)dx + \int_0^1 \beta u(x,t)v(x)dx = \int_0^1 f(x,t)v(x)dx$$

$$\int_0^1 u_t(x,t)v(x)dx - \alpha \int_0^1 u_{xx}(x,t)v(x)dx + \beta \int_0^1 u(x,t)v(x)dx = \int_0^1 f(x,t)v(x)dx$$

Sabemos que dado funções f e g:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

Logo, realizando a integração por partes para eliminar a segunda derivada em x na equação:

$$\int_0^1 u_t(x,t)v(x)dx - \alpha \int_0^1 u_{xx}(x,t)v(x)dx + \beta \int_0^1 u(x,t)v(x)dx = \int_0^1 f(x,t)v(x)dx$$

$$\int_0^1 u_t(x,t)v(x)dx - \alpha [u_x(x,t)v(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 u_x(x,t)v_x(x)dx] + \beta \int_0^1 u(x,t)v(x)dx = \int_0^1 f(x,t)v(x)dx$$

$$\int_0^1 u_t(x,t)v(x)dx - \alpha [u_x(1,t)v(1) - u_x(0,t)v(0) - \int_0^1 u_x(x,t)v_x(x)dx] + \beta \int_0^1 u(x,t)v(x)dx = \int_0^1 f(x,t)v(x)dx$$

$$\int_0^1 u_t(x,t)v(x)dx - \alpha [\cancel{u_x(1,t)v(1) - u_x(0,t)v(0)} - \int_0^1 u_x(x,t)v_x(x)dx] + \beta \int_0^1 u(x,t)v(x)dx = \int_0^1 f(x,t)v(x)dx$$

$$\int_0^1 u_t(x,t)v(x)dx - \alpha [- \int_0^1 u_x(x,t)v_x(x)dx] + \beta \int_0^1 u(x,t)v(x)dx = \int_0^1 f(x,t)v(x)dx$$

$$\int_0^1 u_t(x,t)v(x)dx + \alpha \int_0^1 u_x(x,t)v_x(x)dx + \beta \int_0^1 u(x,t)v(x)dx = \int_0^1 f(x,t)v(x)dx$$

Definição de Notação

Definição: $(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$

Definição: $k(f,g) = \alpha \int_0^1 f_x(x)g_x(x)dx + \beta \int_0^1 f(x)g(x)dx$

Ou seja, nosso problema:

$$\int_0^1 u_t(x,t)v(x)dx + \alpha \int_0^1 u_x(x,t)v_x(x)dx + \beta \int_0^1 u(x,t)v(x)dx = \int_0^1 f(x,t)v(x)dx$$

Pode ser escrito como:

$$(u_t(t), v) + k(u(t), v) = (f(t), v)$$

1.3 Definição da Formulação Fraca

Dado constantes $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$ e $T > 0$ e $f(x,t)$ tal que $x \in [0,1]$ e $t \in [0,T]$, queremos encontrar $u(x,t) \in V$ tal que, $\forall v \in V$:

$$(u_t(t), v) + k(u(t), v) = (f(t), v)$$

é válido.

1.4 Problema Totalmente Discreto

1.4.1 Problema Variacional no Ponto Médio

Discretizaremos o intervalo $[0,T]$ em $t_0, t_1, ..., t_N$ tal que $t_n - t_{n-1} = \tau$, $\forall n \in [0,N]$.

$$(u_t(t_{n-\frac{1}{2}}), v) + k(u(t_{n-\frac{1}{2}}), v) = (f(t_{n-\frac{1}{2}}), v)$$

Tal que:

$$t_{n-\frac{1}{2}} = \frac{t_n + t_{n-1}}{2}$$

é o ponto médio do intervalo $[t_{n-1}, t_n]$.

1.4.2 Diferenças Finitas no Tempo

Seja:

$$u_t(t_{n-\frac{1}{2}}) = \frac{u(t_n) - u(t_{n-1})}{\tau} + O(\tau^2)$$

$$u(t_{n-\frac{1}{2}}) = \frac{u(t_n) + u(t_{n-1})}{2} + O(\tau^2)$$

Substituindo em nossa equação:

$$\left(\frac{u(t_n) - u(t_{n-1})}{\tau}, v\right) + k\left(\frac{u(t_n) + u(t_{n-1})}{2}, v\right) \approx (f(t_{n-\frac{1}{2}}), v)$$

Visto que nosso sistema agora não é exato — por conta das parcelas $O(\tau^2)$ que foram desprezadas — queremos determinar $U^n \in V$ tal que $U^n \approx u(t_n)$ e seja solução da equação:

$$\left(\frac{U^n - U^{n-1}}{\tau}, v\right) + k\left(\frac{U^n + U^{n-1}}{2}, v\right) = (f(t_{n-\frac{1}{2}}), v)$$

1.4.3 Problema Aproximado

Precisamos determinar $U_h^n \in V_m$ tal que:

$$\forall v_h \in V_m$$

$$\left(\frac{U_h^n - U_h^{n-1}}{\tau}, v_h\right) + k\left(\frac{U_h^n + U_h^{n-1}}{2}, v_h\right) = (f(t_{n-\frac{1}{2}}), v_h)$$

1.5 Definição do Problema Totalmente Discreto

Dado constantes $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$ e $T > 0$, $f(x,t)$ tal que $x \in [0,1]$ e $t \in [0,T]$ e $U_{0h} \in V_m$, queremos encontrar U_h tal que:

$$\forall v_h \in V_m$$

$$\left(\frac{U_h^n - U_h^{n-1}}{\tau}, v_h\right) + k\left(\frac{U_h^n + U_h^{n-1}}{2}, v_h\right) = f(t_{n-\frac{1}{2}}), v_h)$$

1.6 Transição entre o Problema Aproximado e a Forma Matriz-vetor

Seja

$$U_h^n(x) = \sum_{j=1}^{m} c_j^n \varphi_j(x)$$

Tomando $v_h = \varphi_i$, $i \in [1,m]$:

$$\left(\frac{\left[\sum_{j=1}^{m} c_j^n - \sum_{j=1}^{m} c_j^{n-1}\right]\varphi_j}{\tau}, \varphi_i\right) + k\left(\frac{\left[\sum_{j=1}^{m} c_j^n + \sum_{j=1}^{m} c_j^{n-1}\right]\varphi_j}{2}, \varphi_i\right) = (f(t_{n-\frac{1}{2}}), \varphi_i)$$

$$\sum_{j=1}^{m}\left[\left(\frac{[c_j^n - c_j^{n-1}]\varphi_j}{\tau}, \varphi_i\right) + k\left(\frac{[c_j^n + c_j^{n-1}]\varphi_j}{2}, \varphi_i\right)\right] = (f(t_{n-\frac{1}{2}}), \varphi_i)$$

$$\sum_{j=1}^{m}\left[\frac{c_j^n - c_j^{n-1}}{\tau}(\varphi_j, \varphi_i) + \frac{c_j^n + c_j^{n-1}}{2}k(\varphi_j, \varphi_i)\right] = (f(t_{n-\frac{1}{2}}), \varphi_i)$$

Perceba que, ao variarmos i e j temos:

$$\begin{cases} (f(t_{n-\frac{1}{2}}), \varphi_1) & = (\varphi_1, \varphi_1)\dfrac{c_1^n - c_1^{n-1}}{\tau} + k(\varphi_1, \varphi_1)\dfrac{c_1^n + c_1^{n-1}}{2} + ... + (\varphi_m, \varphi_1)\dfrac{c_m^n - c_m^{n-1}}{\tau} + k(\varphi_m, \varphi_1)\dfrac{c_m^n + c_m^{n-1}}{2} \\ \vdots & \\ (f(t_{n-\frac{1}{2}}), \varphi_k) & = (\varphi_1, \varphi_k)\dfrac{c_1^n - c_1^{n-1}}{\tau} + k(\varphi_1, \varphi_k)\dfrac{c_1^n + c_1^{n-1}}{2} + ... + (\varphi_m, \varphi_k)\dfrac{c_m^n - c_m^{n-1}}{\tau} + k(\varphi_m, \varphi_k)\dfrac{c_m^n + c_m^{n-1}}{2} \\ \vdots & \\ (f(t_{n-\frac{1}{2}}), \varphi_m) & = (\varphi_1, \varphi_m)\dfrac{c_1^n - c_1^{n-1}}{\tau} + k(\varphi_1, \varphi_m)\dfrac{c_1^n + c_1^{n-1}}{2} + ... + (\varphi_m, \varphi_m)\dfrac{c_m^n - c_m^{n-1}}{\tau} + k(\varphi_m, \varphi_m)\dfrac{c_m^n + c_m^{n-1}}{2} \end{cases}$$

Perceba que podemos organizar essas equações em produtos matrix-vetor tal que:

$$\begin{pmatrix} (\varphi_1, \varphi_1) & ... & (\varphi_m, \varphi_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\varphi_1, \varphi_m) & ... & (\varphi_m, \varphi_m) \end{pmatrix} \frac{c^n - c^{n-1}}{\tau} + \begin{pmatrix} k(\varphi_1, \varphi_1) & ... & k(\varphi_m, \varphi_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k(\varphi_1, \varphi_m) & ... & k(\varphi_m, \varphi_m) \end{pmatrix} \frac{c^n + c^{n-1}}{2} = \begin{pmatrix} (f(t_{n-\frac{1}{2}}), \varphi_1) \\ \vdots \\ (f(t_{n-\frac{1}{2}}), \varphi_m) \end{pmatrix}$$

Definição de Notação

Definição: $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} (\varphi_1, \varphi_1) & ... & (\varphi_m, \varphi_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\varphi_1, \varphi_m) & ... & (\varphi_m, \varphi_m) \end{pmatrix}$

Definição: $\mathcal{K} = \begin{pmatrix} k(\varphi_1, \varphi_1) & ... & k(\varphi_m, \varphi_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k(\varphi_1, \varphi_m) & ... & k(\varphi_m, \varphi_m) \end{pmatrix}$

Definição: $\mathcal{F}^{n-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} (f(t_{n-\frac{1}{2}}), \varphi_1) \\ \vdots \\ (f(t_{n-\frac{1}{2}}), \varphi_m) \end{pmatrix}$

1.7 Definição do Problema na Forma Matriz-vetor

Dado matrizes $\mathcal{M}$, $\mathcal{K}$ e um vetor $\mathcal{F}^{n-frac12}$, queremos encontrar C^n tal que:

$$\begin{cases} \mathcal{M}\dfrac{C^n - C^{n-1}}{\tau} + \mathcal{K}\dfrac{C^n + C^{n-1}}{2} = \mathcal{F}^{n-\frac{1}{2}} \\ \\ C^0 = \begin{pmatrix} u_0(h) \\ \vdots \\ u_0(1-h) \end{pmatrix} \end{cases}$$

Continuando as contas

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}\frac{C^n - C^{n-1}}{\tau} + \mathcal{K}\frac{C^n + C^{n-1}}{2} &= \mathcal{F}^{n-\frac{1}{2}} \\
\mathcal{M}2\tau\frac{C^n - C^{n-1}}{\tau} + \mathcal{K}2\tau\frac{C^n + C^{n-1}}{2} &= 2\tau\mathcal{F}^{n-\frac{1}{2}} \\
\mathcal{M}2\cancel{\tau}\frac{C^n - C^{n-1}}{\cancel{\tau}} + \mathcal{K}\cancel{2}\tau\frac{C^n + C^{n-1}}{\cancel{2}} &= 2\tau\mathcal{F}^{n-\frac{1}{2}} \\
\mathcal{M}2[C^n - C^{n-1}] + \mathcal{K}\tau[C^n + C^{n-1}] &= 2\tau\mathcal{F}^{n-\frac{1}{2}} \\
2\mathcal{M}C^n - 2\mathcal{M}C^{n-1} + \tau\mathcal{K}C^n + \tau\mathcal{K}C^{n-1} &= 2\tau\mathcal{F}^{n-\frac{1}{2}} \\
2\mathcal{M}C^n + \tau\mathcal{K}C^n &= 2\tau\mathcal{F}^{n-\frac{1}{2}} + 2\mathcal{M}C^{n-1} - \tau\mathcal{K}C^{n-1} \\
[2\mathcal{M} + \tau\mathcal{K}]\,C^n &= 2\tau\mathcal{F}^{n-\frac{1}{2}} + [2\mathcal{M} - \tau\mathcal{K}]\,C^{n-1} \\
\left[\mathcal{M} + \left(\frac{\tau}{2}\right)\mathcal{K}\right]C^n &= \left(\frac{2}{2}\right)\tau\mathcal{F}^{n-\frac{1}{2}} + \left[\mathcal{M} - \left(\frac{\tau}{2}\right)\mathcal{K}\right]C^{n-1} \\
\left[\mathcal{M} + \left(\frac{\tau}{2}\right)\mathcal{K}\right]C^n &= \tau\mathcal{F}^{n-\frac{1}{2}} + \left[\mathcal{M} - \left(\frac{\tau}{2}\right)\mathcal{K}\right]C^{n-1}
\end{aligned}
$$

Seja $\mathcal{A} = \left[\mathcal{M} + \left(\frac{\tau}{2}\right)\mathcal{K}\right]$.

Seja $\mathcal{B} = \left[\mathcal{M} - \left(\frac{\tau}{2}\right)\mathcal{K}\right]$.

Sendo assim, temos:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}C^n &= \mathcal{B}C^{n-1} + \tau\mathcal{F}^{n-\frac{1}{2}} \\
C^n &= \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}C^{n-1} + \tau\mathcal{F}^{n-\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

Bibliografia

[1] Bruno Alves do Carmo. *Problema Estacionario Unidimensional*. Acessado em 7 de Setembro de 2024. URL: `https://github.com/bacarmo/Problema-estacionario-unidimensional`.

[2] Thomas J. R. Hughes. *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Dover Civil and Mechanical Engineering. Dover Publications, 2000. ISBN: 0486411818; 9780486411811. URL: `libgen.li/file.php?md5=6ccd7300b50cdf2ec244ba5c248c4bc1`.