

Resolução do Problema Estacionário
com Condições de Dirichlet
via o Método dos Elementos Finitos

João Victor Lopez Pereira

18 de novembro de 2024

Rio de Janeiro - RJ

Resumo:

Este documento apresenta a resolução de um sistema genérico de equações diferenciais ordinárias (problema estacionário) utilizando o Método dos Elementos Finitos, conforme abordado nas aulas da disciplina *Introdução ao Método dos Elementos Finitos*, ministradas pelo prof. Dr. Marcello Goulart Teixeira na Universidade Federal do Rio de Janeiro, durante o segundo semestre de 2024.

Abstract:

This document presents the solution of a generic system of ordinary differential equations (stationary problem) using the Finite Element Method, as covered in the course *Introduction to the Finite Element Method*, taught by professor Dr. Marcello Goulart Teixeira at the Federal University of Rio de Janeiro, during the second half of 2024.

Agradecimentos:

Agradeço ao professor Marcello Goulart, a Bruno Alves, Leonardo, Hashimoto e a vários outros colegas que me ajudaram no entendimento do conteúdo necessário para a realização das contas e do Método dos Elementos Finitos como um todo.

Thanks:

I would like to thank professor Marcello Goulart, Bruno Alves, Leonardo, Hashimoto, and several other colleagues who helped me understand the necessary content for carrying out the calculations and the Finite Element Method as a whole.

Sumário

1	Aproximando o Problema Estacionário	3
1.1	Definição da Formulação Forte	3
1.2	Transição da Formulação Fraca para o Problema Aproximado	3
1.3	Definição da Formulação Fraca	4
1.4	Definição do Problema Aproximado pelo Método de Galerkin	5
1.5	Transição do Problema Aproximado para a Forma Matriz-vetor	5
1.6	Definição do Problema na Forma Matriz-Vetor	6
1.7	Definindo uma Função Base	6
1.8	Teste Realizado	9
	Bibliografia	12

Capítulo 1

Aproximando o Problema Estacionário

1.1 Definição da Formulação Forte

Dado uma função $f(x)$ e constantes $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$ e $\gamma \geq 0$, queremos encontrar a função $u(x)$ tal que:

$$\begin{cases} -\alpha u_{xx}(x) + \beta u(x) + \gamma u_x(x) = f(x) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

1.2 Transição da Formulação Fraca para o Problema Aproximado

Visto que:

$$-\alpha u_{xx}(x) + \beta u(x) + \gamma u_x(x) = f(x)$$

Podemos multiplicar ambos os lados por uma função

$$v(x), \text{ tal que } v(1) = v(0) = 0$$

que nos ajude a eliminar a segunda derivada em u_{xx} :

$$\begin{aligned}
f(x) &= -\alpha u_{xx}(x) + \beta u(x) + \gamma u_x(x) \\
f(x)v(x) &= [-\alpha u_{xx}(x) + \beta u(x) + \gamma u_x(x)] v(x) \\
f(x)v(x) &= -\alpha u_{xx}(x)v(x) + \beta u(x)v(x) + \gamma u_x(x)v(x) \\
\int_0^1 f(x)v(x)dx &= \int_0^1 [-\alpha u_{xx}(x)v(x) + \beta u(x)v(x) + \gamma u_x(x)v(x)] dx \\
\int_0^1 f(x)v(x)dx &= \int_0^1 -\alpha u_{xx}(x)v(x)dx + \int_0^1 \beta u(x)v(x)dx + \int_0^1 \gamma u_x(x)v(x)dx
\end{aligned}$$

Sabemos que dado funções f e g :

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

Logo, realizando a integração por partes no primeiro termo na equação:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)v(x)dx &= -\alpha \left[u_x(x)v(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 u_x(x)v_x(x)dx \right] + \int_0^1 \beta u(x)v(x)dx + \int_0^1 \gamma u_x(x)v(x)dx \\
\int_0^1 f(x)v(x)dx &= -\alpha \left[(u_x(1)v(1) - u_x(0)v(0)) - \int_0^1 u_x(x)v_x(x)dx \right] + \int_0^1 \beta u(x)v(x)dx + \int_0^1 \gamma u_x(x)v(x)dx \\
\int_0^1 f(x)v(x)dx &= -\alpha \left[\cancel{(u_x(1)v(1) - u_x(0)v(0))} - \int_0^1 u_x(x)v_x(x)dx \right] + \int_0^1 \beta u(x)v(x)dx + \int_0^1 \gamma u_x(x)v(x)dx \\
\int_0^1 f(x)v(x)dx &= \alpha \int_0^1 u_x(x)v_x(x)dx + \beta \int_0^1 u(x)v(x)dx + \gamma \int_0^1 u_x(x)v(x)dx
\end{aligned}$$

1.3 Definição da Formulação Fraca

Seja H um espaço tal que $\forall u \in H$ suficientemente suave, tal que $u(0) = u(1) = 0$, u seja solução do sistema. Seja V um espaço finito das funções de teste, tal que $\forall v \in V$ suficientemente suave, $v(0) = v(1) = 0$. Nesse caso em específico, $H = V$.

Dados $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$, $\gamma \geq 0$ e uma função $f(x)$, precisamos determinar $u \in H$ tal que:

$$\alpha \int_0^1 u_x(x)v_x(x)dx + \beta \int_0^1 u(x)v(x)dx + \gamma \int_0^1 u_x(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx$$

$$\forall v \in V$$

1.4 Definição do Problema Aproximado pelo Método de Galerkin

O método de Galerkin consiste em aproximar o espaço das soluções por um subespaço de dimensão finita.[2]
Sendo assim:

Seja H^h um espaço finito tal que $\forall u^h \in H^h$ suficientemente suave, tal que $u(0) = u(1) = 0$, u_h é solução do sistema. Seja V^h um espaço finito tal que $\forall v^h \in V^h$ suficientemente suave, tal que $v(0) = v(1) = 0$ é espaço das funções de teste. Nesse caso em específico, $H^h = V^h$.

Precisamos determinar $u^h \in H^h$ tal que:

$$\forall v^h \in V^h$$

$$\int_0^1 f(x)v^h(x)dx = \alpha \int_0^1 u_x^h(x)v_x^h(x)dx + \beta \int_0^1 u^h(x)v^h(x)dx + \gamma \int_0^1 u_x^h(x)v^h(x)dx$$

1.5 Transição do Problema Aproximado para a Forma Matriz-vetor

Seja

$$u^h(x) = \sum_{j=1}^m \varphi_j(x)c_j$$

Logo, a sua derivada será

$$u_x^h(x) = \sum_{j=1}^m \frac{d(\varphi_j(x)c_j)}{dx} = \sum_{j=1}^m \frac{d\varphi_j(x)}{dx}c_j + \frac{dc_j}{dx}\varphi_j(x) = \sum_{j=1}^m \frac{d\varphi_j(x)}{dx}c_j + \cancel{\frac{dc_j}{dx}\varphi_j(x)} = \sum_{j=1}^m \frac{d\varphi_j(x)}{dx}c_j$$

Veja que $\frac{dc_j}{dx}$ é cancelado pois c_j é uma constante.

Substituindo em nossa equação:

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)v^h(x)dx &= \alpha \int_0^1 \sum_{j=1}^m \frac{d\varphi_j(x)}{dx}c_jv_x^h(x)dx + \beta \int_0^1 \sum_{j=1}^m \varphi_j(x)c_jv^h(x)dx + \gamma \int_0^1 \sum_{j=1}^m \frac{d\varphi_j(x)}{dx}c_jv^h(x)dx \\ \int_0^1 f(x)v^h(x)dx &= \sum_{j=1}^m \left[\alpha \int_0^1 \frac{d\varphi_j(x)}{dx}c_jv_x^h(x)dx + \beta \int_0^1 \varphi_j(x)c_jv^h(x)dx + \gamma \int_0^1 \frac{d\varphi_j(x)}{dx}c_jv^h(x)dx \right] \end{aligned}$$

$$\forall v^h(x) = \varphi_i(x), i \in [1, m], \text{ temos: } v_x^h(x) = \frac{d\varphi_i(x)}{dx}$$

$$\int_0^1 f(x)\varphi_i(x)dx = \sum_{j=1}^m \left[\alpha \int_0^1 \frac{d\varphi_j(x)}{dx}c_j \frac{d\varphi_i(x)}{dx}dx + \beta \int_0^1 \varphi_j(x)c_j\varphi_i(x)dx + \gamma \int_0^1 \frac{d\varphi_j(x)}{dx}c_j\varphi_i(x)dx \right]$$

Veja que temos $j \in [1, m]$ e $i \in [1, m]$. Dessa forma, podemos expressar nosso problema na forma matriz-vetor tal que $\mathcal{K}\mathcal{C} = \mathcal{F}$ tal que $\mathcal{C} \in \mathbb{R}^m$.

1.6 Definição do Problema na Forma Matriz-Vetor

Para $i, j \in [1, m]$ tais que i e j correspondam aos índices da matriz, sejam:

$$K_{i,j} = \alpha \int_0^1 \frac{d\varphi_i(x)}{dx} \frac{d\varphi_j(x)}{dx} dx + \beta \int_0^1 \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx + \gamma \int_0^1 \varphi_i(x) \frac{d\varphi_j(x)}{dx} dx$$

$$F_i = \int_0^1 f(x) \varphi_i(x) dx$$

Dessa forma:

$$\mathcal{K}\mathcal{C} = \mathcal{F}$$

$$\begin{pmatrix} K_{1,1} & \dots & K_{1,j} & \dots & K_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{i,1} & \dots & K_{i,j} & \dots & K_{i,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{m,1} & \dots & K_{m,j} & \dots & K_{m,m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_i \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_i \\ \vdots \\ F_m \end{pmatrix}$$

1.7 Definindo uma Função Base

Definiremos $\varphi_i(x)$ como:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{h}, & \forall x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{x_{i+1} - x}{h}, & \forall x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0, & \forall x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}] \end{cases}$$

Observe que a função base $\varphi_i(x)$ é escolhida intencionalmente para facilitar os cálculos. Em particular, utilizamos funções lineares por partes, pois elas são suficientemente simples para nos permitir calcular as integrais de maneira eficiente e precisa, especialmente com métodos numéricos como a quadratura gaussiana.

Além disso, $\varphi_i(x)$ é projetada para ser zero fora do intervalo $[x_{i-1}, x_{i+1}]$, o que significa que cada função base afeta apenas dois ou três pontos consecutivos. Essa escolha reduz significativamente a complexidade do sistema linear, já que a matriz resultante terá muitas entradas nulas. Isso nos ajuda a trabalhar com matrizes esparsas, que são computacionalmente mais eficientes, tanto em termos de armazenamento quanto de tempo de processamento.

Perceba também que:

$$x = x_i \implies \varphi_i(x_i) = \frac{x_i - x_{i-1}}{h} \varphi_i(x_i) = \frac{h}{h} \varphi_i(x_i) = 1$$

Dessa forma, visto que

$$u^h(x) = \sum_{j=1}^m \varphi_j(x) c_j$$

e também que $\varphi_i(x) = 0$ quando $x \neq [x_i]$, teremos que:

$$\forall x_i \in [0, 1], u^h(x_i) = \sum_{j=1}^m \varphi_j(x) c_j \implies u^h(x_i) = c_j \text{ quando } i = j \text{ e } 0 \text{ para } i \neq j$$

$$K = \sum_{e=1}^{m+1} K^e$$

Observe que, pela definição de $\varphi_i(x)$, $K_{i,j}^e \neq 0$ quando $i \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$ e $j \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$. Logo, podemos limitar nossa integral para esse intervalo visto que restante do intervalo resultará sempre em zero. Faremos isso utilizando a notação local para as funções da base.

$$K_{i,j}^e = \alpha \int_{x^{e-1}}^{x^e} \frac{d\varphi_i(x)}{dx} \frac{d\varphi_j(x)}{dx} dx + \beta \int_{x^{e-1}}^{x^e} \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx + \gamma \int_{x^{e-1}}^{x^e} \varphi_i(x) \frac{d\varphi_j(x)}{dx} dx$$

$$K_{a,b}^e = \alpha \int_{x_1^{e-1}}^{x_2^e} \frac{d\varphi_a^e(x)}{dx} \frac{d\varphi_b^e(x)}{dx} dx + \beta \int_{x_1^{e-1}}^{x_2^e} \varphi_a^e(x) \varphi_b^e(x) dx + \gamma \int_{x_1^{e-1}}^{x_2^e} \varphi_a^e(x) \frac{d\varphi_b^e(x)}{dx} dx$$

Para podermos utilizar a Quadratura Gaussiana, precisaremos modificar nosso intervalo de $[0, 1]$ para $[-1, 1]$ visto que essa é a condição para o uso dessa técnica.

Seja $x(\xi, e)$ a função que converte de ξ para x tal que

$$x(\xi, e) = \frac{h}{2}(\xi + 1) + x_{e-1}$$

$$\text{Seja } \phi_n(\xi) = \begin{cases} \frac{1-\xi}{2} & , \text{ se } n == 1 \\ \frac{1+\xi}{2} & , \text{ se } n == 2 \end{cases} \quad \text{e seja} \quad \frac{d\phi_n}{d\xi}(\xi) = \begin{cases} \frac{-1}{2} & , \text{ se } n == 1 \\ \frac{1}{2} & , \text{ se } n == 2 \end{cases}$$

tal que:

$$\phi_n(\xi) = \varphi_n^e(x(\xi, e))$$

$$K_{a,b}^e = \alpha \int_{-1}^1 \frac{d\varphi_a^e(x(\xi, e))}{dx} \frac{d\varphi_b^e(x(\xi, e))}{dx} \frac{h}{2} d\xi + \beta \int_{-1}^1 \varphi_a^e(x(\xi, e)) \varphi_b^e(x(\xi, e)) \frac{h}{2} d\xi \\ + \gamma \int_{-1}^1 \varphi_a^e(x(\xi, e)) \frac{d\varphi_b^e(x(\xi, e))}{dx} \frac{h}{2} d\xi$$

Como $\phi_n(\xi) = \varphi_n^e(x(\xi, e))$, então:

$$K_{a,b}^e = \alpha \int_{-1}^1 \frac{d\phi_a}{d\xi}(\xi) \frac{d\phi_b}{d\xi}(\xi) \frac{h}{2} \frac{2}{h} \frac{2}{h} d\xi + \beta \int_{-1}^1 \phi_a(\xi) \phi_b(\xi) \frac{h}{2} d\xi + \gamma \int_{-1}^1 \phi_a(\xi) \frac{d\phi_b}{d\xi}(\xi) \frac{h}{2} \frac{2}{h} d\xi \\ K_{a,b}^e = \alpha \int_{-1}^1 \frac{d\phi_a}{d\xi}(\xi) \frac{d\phi_b}{d\xi}(\xi) \frac{h}{2} \frac{2}{h} \frac{2}{h} d\xi + \beta \int_{-1}^1 \phi_a(\xi) \phi_b(\xi) \frac{h}{2} d\xi + \gamma \int_{-1}^1 \phi_a(\xi) \frac{d\phi_b}{d\xi}(\xi) \frac{h}{2} \frac{2}{h} d\xi \\ K_{a,b}^e = \alpha \int_{-1}^1 \frac{d\phi_a}{d\xi}(\xi) \frac{d\phi_b}{d\xi}(\xi) \frac{2}{h} d\xi + \beta \int_{-1}^1 \phi_a(\xi) \phi_b(\xi) \frac{h}{2} d\xi + \gamma \int_{-1}^1 \phi_a(\xi) \frac{d\phi_b}{d\xi}(\xi) d\xi \\ K_{a,b}^e = \frac{2\alpha}{h} \int_{-1}^1 \frac{d\phi_a}{d\xi}(\xi) \frac{d\phi_b}{d\xi}(\xi) d\xi + \frac{\beta h}{2} \int_{-1}^1 \phi_a(\xi) \phi_b(\xi) d\xi + \gamma \int_{-1}^1 \phi_a(\xi) \frac{d\phi_b}{d\xi}(\xi) d\xi$$

Por termos definido ϕ como uma função de primeiro grau, sabemos que o produto das ϕ s será necessariamente uma função de segundo grau. Por isso, podemos usar a Quadratura Gaussiana como técnica de integração para calcular a integral com 2 pontos visto que dado n pontos, essa técnica consegue integrar polinômios de grau $2n - 1$ sem erros:

$$K_{a,b}^e = \frac{2\alpha}{h} \int_{-1}^1 \frac{d\phi_a}{d\xi}(\xi) \frac{d\phi_b}{d\xi}(\xi) d\xi + \frac{\beta h}{2} \int_{-1}^1 \phi_a(\xi) \phi_b(\xi) d\xi + \gamma \int_{-1}^1 \phi_a(\xi) \frac{d\phi_b}{d\xi}(\xi) d\xi \\ K_{a,b}^e = \frac{2\alpha}{h} \sum_{j=1}^2 w_j \frac{d\phi_a}{d\xi}(p_j) \frac{d\phi_b}{d\xi}(p_j) + \frac{\beta h}{2} \sum_{j=1}^2 w_j \phi_a(p_j) \phi_b(p_j) + \gamma \sum_{j=1}^2 w_j \phi_a(p_j) \frac{d\phi_b}{d\xi}(p_j)$$

Para simplificar, podemos definir

$$QG(h, N_{PG}) = \sum_{j=1}^{N_{PG}} w_j h(p_j)$$

Com isso:

$$K_{a,b}^e = \frac{2\alpha}{h} QG\left(\frac{d\phi_a}{d\xi} \frac{d\phi_b}{d\xi}, 2\right) + \frac{\beta h}{2} QG(\phi_a \phi_b, 2) + \gamma QG\left(\phi_a \frac{d\phi_b}{d\xi}, 2\right)$$

$$F = \sum_{e=1}^{m+1} F^e$$

Observe que, pela definição de φ , $F_i^e \neq 0$ quando $i \in [e-1, e]$. Logo, assim como fizemos com $K_{i,j}^e$, podemos limitar nossa integral para esse intervalo visto que restante do intervalo resultará sempre em zero. Faremos isso utilizando a notação local para as funções da base.

$$F_a^e = \int_0^1 f(x) \varphi_i(x) dx$$

$$F_a^e = \int_{x_1^e}^{x_2^e} f(x) \varphi_a^e(x) dx$$

$$F_a^e = \int_{-1}^1 f(x(\xi, e)) \varphi_a^e(x(\xi, e)) \frac{h}{2} d\xi$$

$$F_a^e = \frac{h}{2} \int_{-1}^1 f(x(\xi, e)) \phi_a(\xi) d\xi$$

Por fim, podemos aproximar essa integral a partir da Quadratura Gaussiana. Diferente da última vez, não sabemos a definição da função f . Sendo assim, usaremos 5 pontos como aproximação:

$$F_a^e = \frac{h}{2} \sum_{j=1}^5 w_j f(x(p_j, e)) \phi_a(p_j)$$

$$F_a^e = \frac{h}{2} QG(f(x(\xi, e)) \phi_a(\xi), 5)$$

Visto que sabemos montar a matriz K a partir de $K_{a,b}^e$ e o vetor F a partir de F_a^e , podemos calcular os coeficientes.

1.8 Teste Realizado

Para testarmos o procedimento, precisamos primeiro escolher uma função $u(x)$ que satisfaça $u(0) = u(1) = 0$. Também precisamos definir valores para α , β e γ . Nesse caso em específico, selecionamos valores arbitrários somente para testes:

```
# Variables
alpha = 1                                # constant value
beta = 1                                 # constant value
gamma = 1                                # constant value
u = (x) -> sin(pi * x)
```

Em seguida, podemos calcular o valor esperado para a função $f(x)$ para que possamos calcular o erro do nosso método. $f(x)$ precisa necessariamente satisfazer:

$$f(x) = -\alpha u_{xx}(x) + \beta u(x) + \gamma u_x(x)$$

Sendo assim:

$$f(x) = -\alpha u_{xx}(x) + \beta u(x) + \gamma u_x(x)$$

$$f(x) = -\alpha(\sin(\pi x))_{xx} + \beta \sin(\pi x) + \gamma(\sin(\pi x))_x$$

$$f(x) = -\alpha(\pi \cos(\pi x))_x + \beta \sin(\pi x) + \gamma \pi \cos(\pi x)$$

$$f(x) = -\alpha \pi^2(-\sin(\pi x)) + \beta \sin(\pi x) + \gamma \pi \cos(\pi x)$$

$$f(x) = \alpha \pi^2 \sin(\pi x) + \beta \sin(\pi x) + \gamma \pi \cos(\pi x)$$

Logo:

```
f = (x) -> alpha*pi^2 * sin(pi*x) + beta*sin(pi*x) + gamma*pi*cos(pi*x)
```

Sendo assim, ao rodarmos como código com o número de elementos variando de 1 até 131071 ($2^1 - 1$ até $2^{17} - 1$), obtemos os seguintes gráficos:

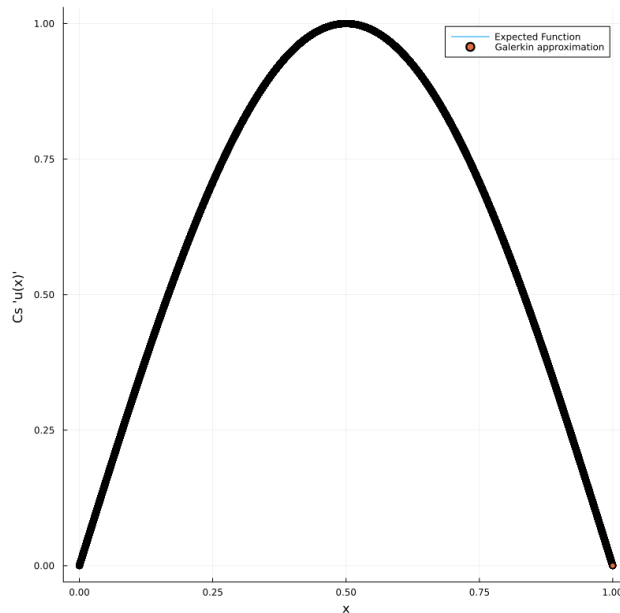


Figura 1.1: Gráfico que mostra a função original e nossos pontos aproximados por cima (Não é possível ver ambos muito bem pois o número de pontos está bem alto).

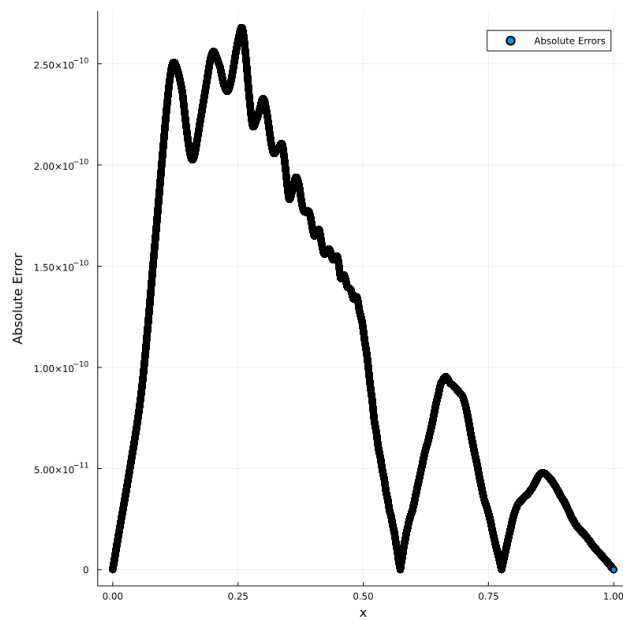


Figura 1.2: Gráfico que mostra a distância no eixo y para cada ponto encontrado pelo nosso método em comparação com a função original.

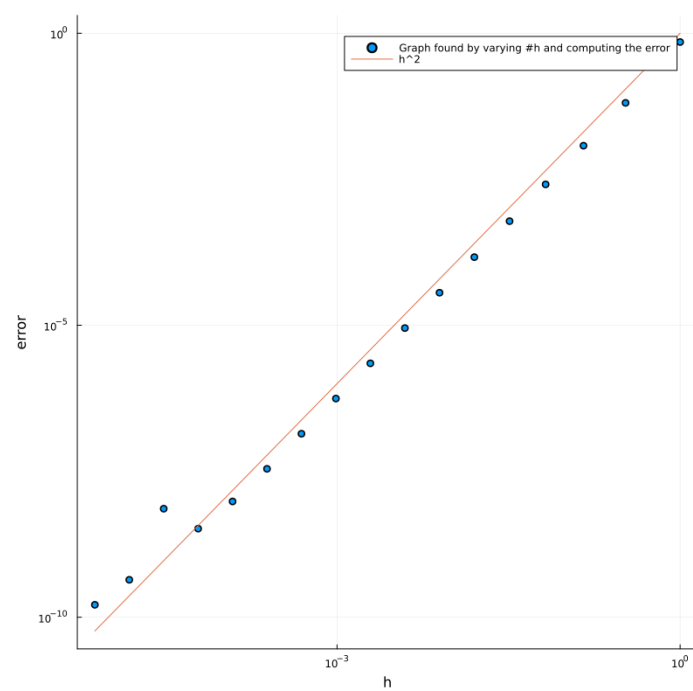


Figura 1.3: Gráfico que mostra os erros conforme o espaçamento entre cada elemento varia.

Bibliografia

- [1] Bruno Alves do Carmo. *Problema Estacionario Unidimensional*. Acessado em 7 de Setembro de 2024. URL: <https://github.com/bacarmo/Problema-estacionario-unidimensional>.
- [2] I-Shih Liu, Mauro A. Rincon e Waldecir Bianchini. *Introdução ao Método de Elementos Finitos*. Instituto de Matemática, UFRJ, p. 183. ISBN: 978-65-86502-00-8.