# Resolução do Problema Estacionário Unidimensional com Dependência Temporal e Condições de Dirichlet via o Método dos Elementos Finitos

João Victor Lopez Pereira

18 de novembro de 2024

Rio de Janeiro - RJ

**Resumo:**

Este documento apresenta a resolução de um sistema genérico de equações diferenciais ordinárias utilizando o Método dos Elementos Finitos, conforme abordado nas aulas da disciplina *Introdução ao Método dos Elementos Finitos*, ministradas pelo prof. Dr. Marcello Goulart Teixeira na Universidade Federal do Rio de Janeiro, durante o segundo semestre de 2024. Neste documento, apresentamos a resolução de uma equação do calor em uma dimensão espacial, com dependência temporal.

**Abstract:**

This document presents the solution of a generic system of ordinary differential equations using the Finite Element Method, as covered in the course *Introduction to the Finite Element Method*, taught by professor Dr. Marcello Goulart Teixeira at the Federal University of Rio de Janeiro, during the second half of 2024. In this document, we present the solution of a heat equation in one spatial dimension, with temporal dependence.

**Agradecimentos:**

Agradeço ao professor Marcello Goulart, a Bruno Alves, Leonardo, Hashimoto e a vários outros colegas que me ajudaram no entendimento do conteúdo necessário para a realização das contas e do Método dos Elementos Finitos como um todo.

**Thanks:**

I would like to thank professor Marcello Goulart, Bruno Alves, Leonardo, Hashimoto, and several other colleagues who helped me understand the necessary content for carrying out the calculations and the Finite Element Method as a whole.

# Sumário

# Capítulo 1

# Aproximando a Equação Temporal do Calor

## 1.1 Definição da Formulação Forte

Dado constantes $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$ e $T > 0$ e $f(x,t)$ tal que $x \in [0,1]$ e $t \in [0,T]$, queremos encontrar $u(x,t)$ tal que:

$$\begin{cases} u_t(x,t) - \alpha u_{xx}(x,t) + \beta u(x,t) = f(x,t) \ \forall x \in ]0,1[ \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

## 1.2 Transição entre a Formulação Forte e Fraca

Visto que:

$$u_t(x,t) - \alpha u_{xx}(x,t) + \beta u(x,t) = f(x,t)$$

Podemos multiplicar ambos por lados por uma função $v(x) \in V$ tal que $V$ é o espaço

$$v(1) = v(0) = 0$$

que nos ajude a eliminar a segunda derivada de $u$ em $x$:

$$u_t(x,t) - \alpha u_{xx}(x,t) + \beta u(x,t) = f(x,t)$$

$$[u_t(x,t) - \alpha u_{xx}(x,t) + \beta u(x,t)]v(x) = f(x,t)v(x)$$

$$u_t(x,t)v(x) - \alpha u_{xx}(x,t)v(x) + \beta u(x,t)v(x) = f(x,t)v(x)$$

$$\int_0^1 u_t(x,t)v(x)dx - \int_0^1 \alpha u_{xx}(x,t)v(x)dx + \int_0^1 \beta u(x,t)v(x)dx = \int_0^1 f(x,t)v(x)dx$$

$$\int_0^1 u_t(x,t)v(x)dx - \alpha \int_0^1 u_{xx}(x,t)v(x)dx + \beta \int_0^1 u(x,t)v(x)dx = \int_0^1 f(x,t)v(x)dx$$

Sabemos que dado funções $f$ e $g$:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

Logo, realizando a integração por partes para eliminar a segunda derivada em $x$ na equação:

$$\int_0^1 u_t(x,t)v(x)dx - \alpha \int_0^1 u_{xx}(x,t)v(x)dx + \beta \int_0^1 u(x,t)v(x)dx = \int_0^1 f(x,t)v(x)dx$$

$$\int_0^1 u_t(x,t)v(x)dx - \alpha [u_x(x,t)v(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 u_x(x,t)v_x(x)dx] + \beta \int_0^1 u(x,t)v(x)dx = \int_0^1 f(x,t)v(x)dx$$

Visto que $v(1) = v(0) = 0$, então:

$$-\alpha[u_x(1,t)v(1) - u_x(0,t)v(0) - \int_0^1 u_x(x,t)v_x(x)dx] = -\int_0^1 u_x(x,t)v_x(x)dx$$

Substituindo na equação:

$$\int_0^1 u_t(x,t)v(x)dx - \alpha[-\int_0^1 u_x(x,t)v_x(x)dx] + \beta \int_0^1 u(x,t)v(x)dx = \int_0^1 f(x,t)v(x)dx$$

$$\int_0^1 u_t(x,t)v(x)dx + \alpha \int_0^1 u_x(x,t)v_x(x)dx + \beta \int_0^1 u(x,t)v(x)dx = \int_0^1 f(x,t)v(x)dx$$

**Definição de Notação**

**Definição:** $(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$

**Definição:** $k(f, g) = \alpha \int_0^1 f_x(x)g_x(x)dx + \beta \int_0^1 f(x)g(x)dx$

Ou seja, nosso problema:

$$\int_0^1 u_t(x,t)v(x)dx + \alpha \int_0^1 u_x(x,t)v_x(x)dx + \beta \int_0^1 u(x,t)v(x)dx = \int_0^1 f(x,t)v(x)dx$$

Pode ser escrito como:

$$(u_t(t), v) + k(u(t), v) = (f(t), v)$$

## 1.3 Definição da Formulação Fraca

Dado constantes $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$ e $T > 0$ e $f(x,t)$ tal que $x \in [0,1]$ e $t \in [0,T]$, queremos encontrar $u(x,t) \in V$ tal que, $\forall v \in V$:

$$(u_t(t), v) + k(u(t), v) = (f(t), v)$$

é válido.

## 1.4 Problema Totalmente Discreto

### 1.4.1 Problema Variacional no Ponto Médio

Discretizaremos o intervalo $[0,T]$ em $t_0, t_1, ..., t_N$ tal que $t_n - t_{n-1} = \tau$, $\forall n \in [0, N]$.

$$(u_t(t_{n-\frac{1}{2}}), v) + k(u(t_{n-\frac{1}{2}}), v) = (f(t_{n-\frac{1}{2}}), v)$$

Tal que:

$$t_{n-\frac{1}{2}} = \frac{t_n + t_{n-1}}{2}$$

é o ponto médio do intervalo $[t_{n-1}, t_n]$.

### 1.4.2 Diferenças Finitas no Tempo

Seja:

$$u_t(t_{n-\frac{1}{2}}) = \frac{u(t_n) - u(t_{n-1})}{\tau} + O(\tau^2)$$

$$u(t_{n-\frac{1}{2}}) = \frac{u(t_n) + u(t_{n-1})}{2} + O(\tau^2)$$

Substituindo em nossa equação:

$$\left(\frac{u(t_n) - u(t_{n-1})}{\tau}, v\right) + k\left(\frac{u(t_n) + u(t_{n-1})}{2}, v\right) \approx (f(t_{n-\frac{1}{2}}), v)$$

Visto que nosso sistema agora não é exato — por conta das parcelas $O(\tau^2)$ que foram desprezadas — queremos determinar $U^n \in V$ tal que $U^n \approx u(t_n)$ e seja solução da equação:

$$\left(\frac{U^n - U^{n-1}}{\tau}, v\right) + k\left(\frac{U^n + U^{n-1}}{2}, v\right) = (f(t_{n-\frac{1}{2}}), v)$$

### 1.4.3 Problema Aproximado

Precisamos determinar $U_h^n \in V_m$ tal que:

$$\forall v_h \in V_m$$

$$\left(\frac{U_h^n - U_h^{n-1}}{\tau}, v_h\right) + k\left(\frac{U_h^n + U_h^{n-1}}{2}, v_h\right) = (f(t_{n-\frac{1}{2}}), v_h)$$

## 1.5 Definição do Problema Totalmente Discreto

Dado constantes $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$ e $T > 0$, $f(x,t)$ tal que $x \in [0,1]$ e $t \in [0,T]$ e $U_{0h} \in V_m$, queremos encontrar $U_h$ tal que:

$$\forall v_h \in V_m$$

$$\left(\frac{U_h^n - U_h^{n-1}}{\tau}, v_h\right) + k\left(\frac{U_h^n + U_h^{n-1}}{2}, v_h\right) = f(t_{n-\frac{1}{2}}), v_h)$$

## 1.6 Transição entre o Problema Aproximado e a Forma Matriz-vetor

Seja

$$U_h^n(x) = \sum_{j=1}^{m} c_j^n \varphi_j(x)$$

Tomando $v_h = \varphi_i$, $i \in [1, m]$:

$$\left( \frac{\left[ \sum_{j=1}^{m} c_j^n - \sum_{j=1}^{m} c_j^{n-1} \right] \varphi_j}{\tau}, \varphi_i \right) + k \left( \frac{\left[ \sum_{j=1}^{m} c_j^n + \sum_{j=1}^{m} c_j^{n-1} \right] \varphi_j}{2}, \varphi_i \right) = (f(t_{n-\frac{1}{2}}), \varphi_i)$$

$$\sum_{j=1}^{m} \left[ \left( \frac{[c_j^n - c_j^{n-1}]\varphi_j}{\tau}, \varphi_i \right) + k \left( \frac{[c_j^n + c_j^{n-1}]\varphi_j}{2}, \varphi_i \right) \right] = (f(t_{n-\frac{1}{2}}), \varphi_i)$$

$$\sum_{j=1}^{m} \left[ \frac{c_j^n - c_j^{n-1}}{\tau} (\varphi_j, \varphi_i) + \frac{c_j^n + c_j^{n-1}}{2} k(\varphi_j, \varphi_i) \right] = (f(t_{n-\frac{1}{2}}), \varphi_i)$$

Perceba que, ao variarmos $i$ e $j$ temos:

$$\begin{cases} (f(t_{n-\frac{1}{2}}), \varphi_1) = (\varphi_1, \varphi_1) \frac{c_1^n - c_1^{n-1}}{\tau} + k(\varphi_1, \varphi_1) \frac{c_1^n + c_1^{n-1}}{2} + \cdots + (\varphi_m, \varphi_1) \frac{c_m^n - c_m^{n-1}}{\tau} + k(\varphi_m, \varphi_1) \frac{c_m^n + c_m^{n-1}}{2} \\ \vdots \\ (f(t_{n-\frac{1}{2}}), \varphi_k) = (\varphi_1, \varphi_k) \frac{c_1^n - c_1^{n-1}}{\tau} + k(\varphi_1, \varphi_k) \frac{c_1^n + c_1^{n-1}}{2} + \cdots + (\varphi_m, \varphi_k) \frac{c_m^n - c_m^{n-1}}{\tau} + k(\varphi_m, \varphi_k) \frac{c_m^n + c_m^{n-1}}{2} \\ \vdots \\ (f(t_{n-\frac{1}{2}}), \varphi_m) = (\varphi_1, \varphi_m) \frac{c_1^n - c_1^{n-1}}{\tau} + k(\varphi_1, \varphi_m) \frac{c_1^n + c_1^{n-1}}{2} + \cdots + (\varphi_m, \varphi_m) \frac{c_m^n - c_m^{n-1}}{\tau} + k(\varphi_m, \varphi_m) \frac{c_m^n + c_m^{n-1}}{2} \end{cases}$$

Perceba que podemos organizar essas equações em produtos matriz-vetor tal que:

$$\begin{pmatrix} (\varphi_1, \varphi_1) & \dots & (\varphi_m, \varphi_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\varphi_1, \varphi_m) & \dots & (\varphi_m, \varphi_m) \end{pmatrix} \frac{c^n - c^{n-1}}{\tau} + \begin{pmatrix} k(\varphi_1, \varphi_1) & \dots & k(\varphi_m, \varphi_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k(\varphi_1, \varphi_m) & \dots & k(\varphi_m, \varphi_m) \end{pmatrix} \frac{c^n + c^{n-1}}{2} = \begin{pmatrix} (f(t_{n-\frac{1}{2}}), \varphi_1) \\ \vdots \\ (f(t_{n-\frac{1}{2}}), \varphi_m) \end{pmatrix}$$

**Definição de Notação**

**Definição:** $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} (\varphi_1, \varphi_1) & ... & (\varphi_m, \varphi_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\varphi_1, \varphi_m) & ... & (\varphi_m, \varphi_m) \end{pmatrix}$

**Definição:** $\mathcal{K} = \begin{pmatrix} k(\varphi_1, \varphi_1) & ... & k(\varphi_m, \varphi_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k(\varphi_1, \varphi_m) & ... & k(\varphi_m, \varphi_m) \end{pmatrix}$

**Definição:** $\mathcal{F}^{n-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} (f(t_{n-\frac{1}{2}}), \varphi_1) \\ \vdots \\ (f(t_{n-\frac{1}{2}}), \varphi_m) \end{pmatrix}$

## 1.7 Definição do Problema na Forma Matriz-vetor

Dado matrizes $\mathcal{M}$, $\mathcal{K}$ e um vetor $\mathcal{F}^{n-frac12}$, queremos encontrar $C^n$ tal que:

$$\begin{cases} \mathcal{M}\dfrac{C^n - C^{n-1}}{\tau} + \mathcal{K}\dfrac{C^n + C^{n-1}}{2} = \mathcal{F}^{n-\frac{1}{2}} \\ C^0 = \begin{pmatrix} u_0(h) \\ \vdots \\ u_0(1-h) \end{pmatrix} \end{cases}$$

**Continuando as contas**

$$\mathcal{M}\frac{C^n - C^{n-1}}{\tau} + \mathcal{K}\frac{C^n + C^{n-1}}{2} = \mathcal{F}^{n-\frac{1}{2}}$$

$$\mathcal{M}2\tau\frac{C^n - C^{n-1}}{\tau} + \mathcal{K}2\tau\frac{C^n + C^{n-1}}{2} = 2\tau\mathcal{F}^{n-\frac{1}{2}}$$

$$\mathcal{M}2\cancel{\tau}\frac{C^n - C^{n-1}}{\cancel{\tau}} + \mathcal{K}\cancel{2}\tau\frac{C^n + C^{n-1}}{\cancel{2}} = 2\tau\mathcal{F}^{n-\frac{1}{2}}$$

$$\mathcal{M}2[C^n - C^{n-1}] + \mathcal{K}\tau[C^n + C^{n-1}] = 2\tau\mathcal{F}^{n-\frac{1}{2}}$$

$$2\mathcal{M}C^n - 2\mathcal{M}C^{n-1} + \tau\mathcal{K}C^n + \tau\mathcal{K}C^{n-1} = 2\tau\mathcal{F}^{n-\frac{1}{2}}$$

$$2\mathcal{M}C^n + \tau\mathcal{K}C^n = 2\tau\mathcal{F}^{n-\frac{1}{2}} + 2\mathcal{M}C^{n-1} - \tau\mathcal{K}C^{n-1}$$

$$[2\mathcal{M} + \tau\mathcal{K}]\,C^n = 2\tau\mathcal{F}^{n-\frac{1}{2}} + [2\mathcal{M} - \tau\mathcal{K}]\,C^{n-1}$$

$$\left[\mathcal{M} + \left(\frac{\tau}{2}\right)\mathcal{K}\right]C^n = \left(\frac{2}{2}\right)\tau\mathcal{F}^{n-\frac{1}{2}} + \left[\mathcal{M} - \left(\frac{\tau}{2}\right)\mathcal{K}\right]C^{n-1}$$

$$\left[\mathcal{M} + \left(\frac{\tau}{2}\right)\mathcal{K}\right]C^n = \tau\mathcal{F}^{n-\frac{1}{2}} + \left[\mathcal{M} - \left(\frac{\tau}{2}\right)\mathcal{K}\right]C^{n-1}$$

Seja $\mathcal{A} = \left[\mathcal{M} + \left(\frac{\tau}{2}\right)\mathcal{K}\right]$.

Seja $\mathcal{B} = \left[\mathcal{M} - \left(\frac{\tau}{2}\right)\mathcal{K}\right]$.

Sendo assim, temos:

$$\mathcal{A}C^n = \mathcal{B}C^{n-1} + \tau\mathcal{F}^{n-\frac{1}{2}}$$

$$C^n = \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}C^{n-1} + \tau\mathcal{F}^{n-\frac{1}{2}}$$

# Bibliografia


[1] Bruno Alves do Carmo. *Problema Estacionario Unidimensional*. Acessado em 7 de Setembro de 2024. URL: https://github.com/bacarmo/Problema-estacionario-unidimensional.

[2] Thomas J. R. Hughes. *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Dover Civil and Mechanical Engineering. Dover Publications, 2000. ISBN: 0486411818; 9780486411811. URL: libgen.li/file.php?md5=6ccd7300b50cdf2ec244ba5c248c4bc1.