Resolução do Problema Bidimensional Estacionário com Condição de fronteira de Dirichlet Homogênea via o Método dos Elementos Finitos

João Victor Lopez Pereira

10 de março de 2025

Rio de Janeiro - RJ

Resumo:

Este documento apresenta a resolução de um sistema genérico de equações diferenciais parciais utilizando o Método dos Elementos Finitos, conforme abordado nas aulas da disciplina *Introdução ao Método dos Elementos Finitos*, ministradas pelos professores Marcello Goulart Teixeira e Bruno Alves do Carmo na Universidade Federal do Rio de Janeiro, durante o segundo semestre de 2024. Neste documento, apresentamos a resolução do problema estacionário em duas dimensões.

Abstract:

This document presents the solution of a generic system of ordinary differential equations using the Finite Elements Method, as covered in the course *Introduction to the Finite Element Method*, taught by professors Marcello Goulart Teixeira and Bruno Alves do Carmo at the Federal University of Rio de Janeiro, during the second half of 2024. In this document, we present the solution of the stationary problem in two dimensions.

Agradecimentos:

Agradeço ao professors Marcello Teixeira e Bruno Carmo e colegas Leonardo, Hashimoto e a vários outros que me ajudaram no entendimento do conteúdo necessário para a realização das contas e do Método dos Elementos Finitos como um todo.

Thanks:

I would like to thank professors Marcello Teixeira and Bruno Carmo and colleagues Leonardo, Hashimoto, and several other who helped me understand the necessary content for carrying out the calculations and the Finite Element Method as a whole.

Sumário

Capítulo 1

Aproximação do Problema Estacionário Bidimensional

Definição de Notação

Definição: $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

Definição: Γ é a fronteira de Ω

Definição: $\overline{\Omega} = \Gamma \cup \Omega$

Definição: $\Delta u(x) = u_{x_1 x_1}(x) + u_{x_2 x_2}(x)$ sendo $x = (x_1, x_2)$ ponto $\in \mathbb{R}^2$

1.1 Definição da Formulação Forte

Dada uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}$ e constantes $\alpha > 0$ e $\beta \geq 0$. Queremos determinar $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ tal que:

$$(S) = \begin{cases} -\alpha \Delta u(x) + \beta u(x) = f(x) & \forall x \in \Omega \\ \\ u(x) = 0 & \forall x \in \Gamma. \end{cases}$$

1.2 Transição entre a Formulação Forte e Fraca

Seja v uma função que satisfaça $v(x) = 0 \ \forall x \in \Gamma$. Multiplicando ambos os lados da equação por v:

$$-\alpha\Delta u(x)+\beta u(x)=f(x)$$

$$-\alpha\Delta u(x)v(x)+\beta u(x)v(x)=f(x)v(x)$$

$$\int_\Omega [-\alpha\Delta u(x)v(x)+\beta u(x)v(x)]\,d\Omega=\int_\Omega f(x)v(x)\,d\Omega$$

$$-\alpha\int_\Omega \Delta u(x)v(x)\,d\Omega+\beta\int_\Omega u(x)v(x)\,d\Omega=\int_\Omega f(x)v(x)\,d\Omega$$

$$-\alpha\int_\Omega u_{x_1x_1}(x)v(x)\,d\Omega-\alpha\int_\Omega u_{x_2x_2}v(x)\,d\Omega+\beta\int_\Omega u(x)v(x)\,d\Omega=\int_\Omega f(x)v(x)\,d\Omega$$

Semelhante aos casos unidimensionais, eliminaremos as segundas derivadas em x_1 e x_2:

Generalização da Integral por partes

Pela regra da cadeia:

$$[u_{x_i}(x)v(x)]_{x_i}=u_{x_ix_i}(x)v(x)+u_{x_i}(x)v_{x_i}(x)$$

Integrando dos dois lados:

$$\int_\Omega [u_{x_i}(x)v(x)]_{x_i}\,d\Omega=\int_\Omega u_{x_ix_i}(x)v(x)\,d\Omega+\int_\Omega u_{x_i}(x)v_{x_i}(x)\,d\Omega$$

Pelo teorema da divergência,

$$\int_\Omega [u_{x_i}(x)v(x)]_{x_i}\,d\Omega=\int_\Gamma u_{x_i}(x)v(x)\eta_i\,d\Gamma$$

Mas visto que $v(x)=0\forall x\in\Gamma$, então:

$$\int_\Gamma u_{x_i}(x)v(x)\eta_i\,d\Gamma=0$$

Então:

$$0=\int_\Omega u_{x_ix_i}(x)v(x)\,d\Omega+\int_\Omega u_{x_i}(x)v_{x_i}(x)\,d\Omega$$

$$\int_\Omega u_{x_i}(x)v_{x_i}(x)\,d\Omega = -\int_\Omega u_{x_ix_i}(x)v(x)\,d\Omega$$

Substituindo na equação principal:

$$\alpha\int_\Omega u_{x_1x_1}(x)v_{x_i}(x)\,d\Omega + \alpha\int_\Omega u_{x_2x_2}v_{x_i}(x)\,d\Omega + \beta\int_\Omega u(x)v(x)\,d\Omega = \int_\Omega f(x)v(x)\,d\Omega$$

Que pode ser reescrito como:

$$\alpha\int_\Omega \Delta u(x)\Delta v(x)\,d\Omega + \beta\int_\Omega u(x)v(x)\,d\Omega = \int_\Omega f(x)v(x)\,d\Omega$$

Definição de Notação

Definição: $(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$

Definição: $\kappa(f,g) = \alpha\int_\Omega \Delta f(x)\Delta g(x)\,dx + \beta\int_\Omega f(x)g(x)\,dx$

Ou seja, nosso problema:

$$\alpha\int_\Omega \Delta u(x)\Delta v(x)\,d\Omega + \beta\int_\Omega u(x)v(x)\,d\Omega = \int_\Omega f(x)v(x)\,d\Omega$$

Pode ser escrito como:

$$\kappa(u,v) = (f,v)$$

1.3 Definição da Formulação Fraca

Definição: Pelo restante do documento, considere que uma função g é "suficientemente suave" se ela respeitar:

- g é contínua em todo o domínio;
- g possui derivadas contínuas até a ordem necessária.

Seja H um espaço de funções formado por funções u suficientemente suaves que satisfazem (W) e as condições de contorno $u(x) = 0\ \forall x \in \Gamma$. Seja V um espaço das funções de teste, composto por funções v suficientemente suaves e que satisfazem as condições de contorno $v(x) = 0\ \forall x \in \Gamma$.

Dada uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}$ e constantes $\alpha > 0$ e $\beta \geq 0$, queremos determinar $u \in H$, $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ tal que, $\forall v \in V$:

$$(W) = \begin{cases} \kappa(u,v) = (f,v) & \forall x \in \Omega \\ \\ u(x) = 0, & \forall x \in \Gamma. \end{cases}$$

1.4 Definição do Problema Aproximado

Seja H^m um espaço de funções formado por funções u_h suficientemente suaves que satisfazem (A) e as condições de contorno $u_h(x) = 0 \; \forall x \in \Gamma$. Seja V^m um espaço das funções de teste, composto por funções v_h suficientemente suaves e que satisfazem as condições de contorno $v_h(x) = 0 \; \forall x \in \Gamma$.

Dada uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}$ e constantes $\alpha > 0$ e $\beta \geq 0$, queremos determinar $u_h \in H^m$, $u_h : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ tal que, $\forall v_h \in V^m$:

$$(A) = \begin{cases} \kappa(u_h,v_h) = (f,v_h) & \forall x \in \Omega \\ \\ u_h(x) = 0, & \forall x \in \Gamma. \end{cases}$$

1.5 Transição entre o Problema Aproximado e a Forma Matriz Vetor

Tomando $u_h(x)$ como combinação linear das funções da base de H^m:

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^{m} c_j \varphi_j(x).$$

Assim, temos:

$$\begin{aligned} \kappa(u_h, v_h) &= (f, v_h) \\ \kappa(\sum_{j=1}^{m} c_j \varphi_j(x), v_h) &= (f, v_h) \\ \sum_{j=1}^{m} \kappa(c_j \varphi_j(x), v_h) &= (f, v_h) \\ \sum_{j=1}^{m} \kappa(\varphi_j(x), v_h) c_j &= (f, v_h). \end{aligned}$$

Tomando $v_h = \varphi_i$, $\forall i \in \{1, \dots, m\}$:

$$\begin{cases} \kappa(\varphi_1,\varphi_1)c_1 + \dots + \kappa(\varphi_j,\varphi_1)c_j + \dots + \kappa(\varphi_m,\varphi_1)c_m = (f,\varphi_1) \\ \vdots \\ \kappa(\varphi_1,\varphi_i)c_1 + \dots + \kappa(\varphi_j,\varphi_i)c_j + \dots + \kappa(\varphi_m,\varphi_i)c_m = (f,\varphi_i) \\ \vdots \\ \kappa(\varphi_1,\varphi_m)c_1 + \dots + \kappa(\varphi_j,\varphi_m)c_j + \dots + \kappa(\varphi_m,\varphi_m)c_m = (f,\varphi_m) \end{cases}$$

Que pode ser escrito na forma matriz-vetor:

$$\begin{bmatrix} \kappa(\varphi_1,\varphi_1) & \dots & \kappa(\varphi_j,\varphi_1) & \dots & \kappa(\varphi_m,\varphi_1) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \kappa(\varphi_1,\varphi_i) & \dots & \kappa(\varphi_j,\varphi_i) & \dots & \kappa(\varphi_m,\varphi_i) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \kappa(\varphi_1,\varphi_m) & \dots & \kappa(\varphi_j,\varphi_m) & \dots & \kappa(\varphi_m,\varphi_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_j \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (f,\varphi_1) \\ \vdots \\ (f,\varphi_i) \\ \vdots \\ (f,\varphi_m) \end{bmatrix}$$

Definição de Notação

Definição: $\mathcal{K} = \begin{bmatrix} \kappa(\varphi_1,\varphi_1) & \dots & \kappa(\varphi_j,\varphi_1) & \dots & \kappa(\varphi_m,\varphi_1) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \kappa(\varphi_1,\varphi_i) & \dots & \kappa(\varphi_j,\varphi_i) & \dots & \kappa(\varphi_m,\varphi_i) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \kappa(\varphi_1,\varphi_m) & \dots & \kappa(\varphi_j,\varphi_m) & \dots & \kappa(\varphi_m,\varphi_m) \end{bmatrix}$

Definição: $\mathcal{C} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_j \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}$

Definição: $\mathcal{F} = \begin{bmatrix} (f,\varphi_1) \\ \vdots \\ (f,\varphi_i) \\ \vdots \\ (f,\varphi_m) \end{bmatrix}$

1.6 Definição do Problema na Forma Matriz-vetor

Dado uma matriz $\mathcal{K}$ e um vetor $\mathcal{F}$, queremos determinar $\mathcal{C}$ tal que:

$$(M) = \begin{cases} \\ \mathcal{K}\mathcal{C} = \mathcal{F} \end{cases}$$

Capítulo 2

Detalhes de Implementação

2.1 Mudança de Intervalo e Funções Locais

Visto que queremos modificar nosso espaço para $[[-1,1],[-1,1]]$ para podermos usar a quadratura gaussiana como aproximação de integral, definiremos a função $x(\xi)$ tal que:

$$x(\xi) = (x_1(\xi), x_2(\xi)) \begin{cases} x_1(\xi) = \dfrac{h_1}{2}(\xi_1 + 1) + p_1^e \\ \\ x_2(\xi) = \dfrac{h_2}{2}(\xi_2 + 1) + p_2^e \end{cases}$$

Além disso, nossas funções de base locais $\varphi_a^e(x)$ terão seu domínio alterado tais que:

$$\varphi_a^e(x(\xi)) = \phi_a(\xi)$$

e sua derivada:

$$\varphi^e_{a\,x_i}(x(\xi)) = \frac{2}{h_i}\phi_{a\,\xi_i}(\xi)$$

O termo $\dfrac{2}{h_i}$ é a derivada de $x(\xi)$ que surge no momento de derivar o termo esquerdo da equação e realizar a regra da cadeia.

2.2 Cálculo do Vetor Local

Vimos que $\mathcal{F} = \begin{bmatrix} (f,\varphi_1) \\ \vdots \\ (f,\varphi_i) \\ \vdots \\ (f,\varphi_m) \end{bmatrix}$, sendo assim:

$$F_a^e = \int_{\Omega^e} f(x)\varphi_a^e(x)\, d\Omega$$
$$F_a^e = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x(\xi))\varphi_a^e(x(\xi))\, J\, d\xi_1\, d\xi_2$$

Tal que:

$$\begin{aligned} J &= \det\left(\begin{bmatrix} x_{1\,\xi_1}(\xi) & x_{1\,\xi_2}(\xi) \\ x_{2\,\xi_1}(\xi) & x_{2\,\xi_2}(\xi) \end{bmatrix}\right) \\ &= \det\left(\begin{bmatrix} \frac{h_1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{h_2}{2} \end{bmatrix}\right) \\ &= \frac{h_1 h_2}{4} \end{aligned}$$

Sendo assim:

$$\begin{aligned} F_a^e &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x(\xi))\varphi_a^e(x(\xi))\frac{h_1 h_2}{4}\, d\xi_1\, d\xi_2 \\ &= \frac{h_1 h_2}{4}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x(\xi))\varphi_a^e(x(\xi))\, d\xi_1\, d\xi_2 \\ &= \frac{h_1 h_2}{4}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x_1(\xi_1,\xi_2), x_2(\xi_1,\xi_2))\phi_a(\xi_1,\xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2 \end{aligned}$$

2.3 Cálculo da Matriz local

Visto que $\mathcal{K} = \begin{bmatrix} \kappa(\varphi_1,\varphi_1) & \dots & \kappa(\varphi_j,\varphi_1) & \dots & \kappa(\varphi_m,\varphi_1) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \kappa(\varphi_1,\varphi_i) & \dots & \kappa(\varphi_j,\varphi_i) & \dots & \kappa(\varphi_m,\varphi_i) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \kappa(\varphi_1,\varphi_m) & \dots & \kappa(\varphi_j,\varphi_m) & \dots & \kappa(\varphi_m,\varphi_m) \end{bmatrix}$, sendo assim:

$$
\begin{aligned}
K^e_{a,b} &= \alpha \int_{\Omega^e} \varphi^e_{b\,x_1}(x)\varphi^e_{a\,x_1}(x)\, d\Omega + \alpha \int_{\Omega^e} \varphi^e_{b\,x_2}(x)\varphi^e_{a\,x_2}(x)\, d\Omega + \beta \int_{\Omega^e} \varphi^e_{b}(x)\varphi^e_{a}(x)\, d\Omega \\
&= \alpha \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \varphi^e_{b\,x_1}(x(\xi))\varphi^e_{a\,x_1}(x(\xi)) J\, d\xi_1\, d\xi_2 + \alpha \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \varphi^e_{b\,x_2}(x(\xi))\varphi^e_{a\,x_2}(x(\xi)) J\, d\xi_1\, d\xi_2 \\
&\quad + \beta \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \varphi^e_{b}(x(\xi))\varphi^e_{a}(x(\xi)) J\, d\xi_1\, d\xi_2 \\
&= \alpha \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \phi_{b\,x_1}(\xi)\frac{2}{h_1}\phi_{a\,x_1}(\xi)\frac{2}{h_1}\frac{h_1 h_2}{4}\, d\xi_1\, d\xi_2 + \alpha \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \phi_{b\,x_2}(\xi)\frac{2}{h_2}\phi_{a\,x_2}(\xi)\frac{2}{h_2}\frac{h_1 h_2}{4}\, d\xi_1\, d\xi_2 \\
&\quad + \beta \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \phi_{b}(\xi)\phi_{a}(\xi)\frac{h_1 h_2}{4}\, d\xi_1\, d\xi_2 \\
&= \alpha \frac{h_2}{h_1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \phi_{b\,x_1}(\xi)\phi_{a\,x_1}(\xi)\, d\xi_1\, d\xi_2 + \alpha \frac{h_1}{h_2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \phi_{b\,x_2}(\xi)\phi_{a\,x_2}(\xi)\, d\xi_1\, d\xi_2 \\
&\quad + \beta \frac{h_1 h_2}{4}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \phi_{b}(\xi)\phi_{a}(\xi)\, d\xi_1\, d\xi_2
\end{aligned}
$$

2.4 Cálculo do Erro

Temos que:

$$E^2 = ||u - u_h||^2$$

Logo:

$$
\begin{aligned}
E^2 &= ||u(x,y) - u_h(x,y)||^2 \\
&= \int_{\Omega} (u(x,y) - u_h(x,y))^2\, d\Omega \\
&= \int_0^1 \int_0^1 (u(x,y) - u_h(x,y))^2\, dx\, dy \\
&= \sum_{e=1}^{ne} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} (u(x(\xi_1,\xi_2)) - \sum_{a=1}^{4} C_{EQ[LG[a,e]]}\phi_a(\xi))^2 det(J)\, dx\, dy \\
E &= \sqrt{\sum_{e=1}^{ne} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} (u(x(\xi_1,\xi_2)) - \sum_{a=1}^{4} C_{EQ[LG[a,e]]}\phi_a(\xi))^2 det(J)\, dx\, dy}
\end{aligned}
$$

Bibliografia

[1] Bruno Alves do Carmo. *Elementos Finitos*. Acessado em 11 de Outubro de 2024. URL: https://github.com/bacarmo/Elementos_Finitos.

[2] João Victor Lopez Pereira. *Finite-Elements-Method*. Acessado em 20 de Outubro de 2024. URL: https://github.com/joaovictorlopezpereira/Finite-Elements-Method.