

Aproximando Equações Diferencial Ordinárias pelo Método de Galerkin

João Victor Lopez Pereira

8 de setembro de 2024

Rio de Janeiro - RJ

Resumo

Este documento apresenta a resolução de um sistema genérico de equações diferenciais ordinárias utilizando o Método de Galerkin, conforme abordado nas aulas da disciplina *Introdução ao Método dos Elementos Finitos*, ministradas pelos professores Dr. Marcello Goulart Teixeira e Dr. Bruno Alves do Carmo na Universidade Federal do Rio de Janeiro, durante o segundo semestre de 2024.

This document presents the solution of a generic system of ordinary differential equations using the Galerkin Method, as covered in the course *Introduction to the Finite Element Method*, taught by professors Dr. Marcello Goulart Teixeira and Dr. Bruno Alves do Carmo at the Federal University of Rio de Janeiro, during the second half of 2024.

Sumário

1	Resolvendo uma EDO pelo Método de Galerkin	2
1.1	Formulação Forte	2
1.2	Formulação Fraca	2
1.3	Problema Aproximado pelo Método de Galerkin	4
1.4	Matriz e Vetor Locais	4
1.4.1	Cálculo da Matriz Local por Quadratura Gaussiana	5
1.4.2	Cálculo do Vetor Local por Quadratura Gaussiana	6
1.4.3	Inicialização da Matriz	7
1.5	Teste Realizado	8
	Bibliografia	11

Capítulo 1

Resolvendo uma EDO pelo Método de Galerkin

1.1 Formulação Forte

Dado uma função $f(x)$ e constantes α , β e γ , queremos encontrar a função $u(x)$ tal que:

$$\begin{cases} -\alpha u_{xx}(x) + \beta u(x) + \gamma u_x(x) = f(x) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

1.2 Formulação Fraca

Visto que:

$$-\alpha u_{xx}(x) + \beta u(x) + \gamma u_x(x) = f(x)$$

Podemos multiplicar ambos os lados por uma função

$$v(x), \text{ tal que } v(1) = v(0) = 0$$

que nos ajude a eliminar a segunda derivada em u_{xx} :

$$\begin{aligned}
f(x) &= -\alpha u_{xx}(x) + \beta u(x) + \gamma u_x(x) \\
f(x)v(x) &= [-\alpha u_{xx}(x) + \beta u(x) + \gamma u_x(x)]v(x) \\
f(x)v(x) &= -\alpha u_{xx}(x)v(x) + \beta u(x)v(x) + \gamma u_x(x)v(x) \\
\int_0^1 f(x)v(x)dx &= \int_0^1 [-\alpha u_{xx}(x)v(x) + \beta u(x)v(x) + \gamma u_x(x)v(x)]dx \\
\int_0^1 f(x)v(x)dx &= \int_0^1 -\alpha u_{xx}(x)v(x)dx + \int_0^1 \beta u(x)v(x)dx + \int_0^1 \gamma u_x(x)v(x)dx
\end{aligned}$$

Sabemos, por cálculo, que:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

Logo, realizando a integração por partes no primeiro termo na equação:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)v(x)dx &= -\alpha \left[u_x(x)v(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 u_x(x)v_x(x)dx \right] + \int_0^1 \beta u(x)v(x)dx + \int_0^1 \gamma u_x(x)v(x)dx \\
\int_0^1 f(x)v(x)dx &= -\alpha \left[(u_x(1)v(1) - u_x(0)v(0)) - \int_0^1 u_x(x)v_x(x)dx \right] + \int_0^1 \beta u(x)v(x)dx + \int_0^1 \gamma u_x(x)v(x)dx \\
\int_0^1 f(x)v(x)dx &= -\alpha \left[\cancel{(u_x(1)v(1) - u_x(0)v(0))} - \int_0^1 u_x(x)v_x(x)dx \right] + \int_0^1 \beta u(x)v(x)dx + \int_0^1 \gamma u_x(x)v(x)dx \\
\int_0^1 f(x)v(x)dx &= \alpha \int_0^1 u_x(x)v_x(x)dx + \beta \int_0^1 u(x)v(x)dx + \gamma \int_0^1 u_x(x)v(x)dx
\end{aligned}$$

Seja H um espaço tal que $\forall u \in H$ suficientemente suave, tal que $u(0) = u(1) = 0$, u é solução do sistema. Seja V um espaço finito tal que $\forall v \in V$ suficientemente suave, tal que $v(0) = v(1) = 0$ é espaço das funções de teste. Nesse caso em específico, $H = V$.

Precisamos determinar $u \in H$ tal que:

$$\alpha \int_0^1 u_x(x)v_x(x)dx + \beta \int_0^1 u(x)v(x)dx + \gamma \int_0^1 u_x(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx$$

$$\forall v \in V$$

1.3 Problema Aproximado pelo Método de Galerkin

O método de Galerkin consiste em aproximar o espaço das soluções por um subespaço de dimensão finita.[2] Sendo assim:

Seja H^h um espaço finito tal que $\forall u^h \in H^h$ suficientemente suave, tal que $u(0) = u(1) = 0$, u_h é solução do sistema. Seja V^h um espaço finito tal que $\forall v^h \in V^h$ suficientemente suave, tal que $v(0) = v(1) = 0$ é espaço das funções de teste. Nesse caso em específico, $H^h = V^h$.

Precisamos determinar $u^h \in H^h$ tal que:

$$\forall v^h \in V^h$$

$$\int_0^1 f(x)v^h(x)dx = \alpha \int_0^1 u_x^h(x)v_x^h(x)dx + \beta \int_0^1 u^h(x)v^h(x)dx + \gamma \int_0^1 u_x^h(x)v^h(x)dx$$

Seja

$$u^h(x) \approx \sum_{j=1}^m \varphi_j(x)c_j$$

Logo,

$$u_x^h(x) \approx \sum_{j=1}^m \frac{d(\varphi_j(x)c_j)}{dx} = \sum_{j=1}^m \frac{d\varphi_j(x)}{dx}c_j + \frac{dc_j}{dx}\varphi_j(x) = \sum_{j=1}^m \frac{d\varphi_j(x)}{dx}c_j + \cancel{\frac{dc_j}{dx}\varphi_j(x)} = \sum_{j=1}^m \frac{d\varphi_j(x)}{dx}c_j$$

Substituindo em nossa equação:

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)v^h(x)dx &= \alpha \int_0^1 \sum_{j=1}^m \frac{d\varphi_j(x)}{dx}c_j v_x^h(x)dx + \beta \int_0^1 \sum_{j=1}^m \varphi_j(x)c_j v^h(x)dx + \gamma \int_0^1 \sum_{j=1}^m \frac{d\varphi_j(x)}{dx}c_j v^h(x)dx \\ \int_0^1 f(x)v^h(x)dx &= \sum_{j=1}^m \left[\alpha \int_0^1 \frac{d\varphi_j(x)}{dx}c_j v_x^h(x)dx + \beta \int_0^1 \varphi_j(x)c_j v^h(x)dx + \gamma \int_0^1 \frac{d\varphi_j(x)}{dx}c_j v^h(x)dx \right] \end{aligned}$$

$\forall v^h(x) = \varphi_i(x)$, $i \in [1, m]$, obtemos um sistema linear tal que $\mathbb{K}\mathbb{C} = \mathbb{F}$ tal que $\mathbb{C} \in \mathbb{R}^m$.

1.4 Matriz e Vetor Locais

Para $i, j \in [1, m]$:

$$K_{i,j} = \alpha \int_0^1 \frac{d\varphi_i(x)}{dx} \frac{d\varphi_j(x)}{dx} dx + \beta \int_0^1 \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx + \gamma \int_0^1 \varphi_i(x) \frac{d\varphi_j(x)}{dx} dx$$

$$F_i = \int_0^1 f(x) \varphi_i(x) dx$$

Definiremos $\varphi_i(x)$ como:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{h}, & \forall x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{x_{i+1} - x}{h}, & \forall x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0, & \forall x \notin]x_{i-1}, x_{i+1}[\end{cases}$$

1.4.1 Cálculo da Matriz Local por Quadratura Gaussiana

$$K = \sum_{e=1}^{m+1} K^e$$

Observe que, pela definição de $\varphi_i(x)$, $K_{i,j}^e \neq 0$ quando $i \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$ e $j \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$. Logo, podemos limitar nossa integral para esse intervalo visto que restante do intervalo resultará sempre em zero. Faremos isso utilizando a notação local para as funções da base.

$$K_{i,j}^e = \alpha \int_{x^{e-1}}^{x^e} \frac{d\varphi_i(x)}{dx} \frac{d\varphi_j(x)}{dx} dx + \beta \int_{x^{e-1}}^{x^e} \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx + \gamma \int_{x^{e-1}}^{x^e} \varphi_i(x) \frac{d\varphi_j(x)}{dx} dx$$

$$K_{a,b}^e = \alpha \int_{x_1^{e-1}}^{x_2^e} \frac{d\varphi_a^e(x)}{dx} \frac{d\varphi_b^e(x)}{dx} dx + \beta \int_{x_1^{e-1}}^{x_2^e} \varphi_a^e(x) \varphi_b^e(x) dx + \gamma \int_{x_1^{e-1}}^{x_2^e} \varphi_a^e(x) \frac{d\varphi_b^e(x)}{dx} dx$$

Seja $x(\xi, e)$ a função que converte de ξ para x tal que

$$x(\xi, e) = \frac{h}{2}(\xi + 1) + x_{e-1}$$

$$\text{Seja } \phi_n(\xi) = \begin{cases} \frac{1-\xi}{2} & , \text{ se } n == 1 \\ \frac{1+\xi}{2} & , \text{ se } n == 2 \end{cases} \quad \text{e seja} \quad \frac{d\phi_n}{d\xi}(\xi) = \begin{cases} \frac{-1}{2} & , \text{ se } n == 1 \\ \frac{1}{2} & , \text{ se } n == 2 \end{cases}$$

tal que:

$$\phi_n(\xi) = \varphi_n^e(x(\xi, e))$$

$$\begin{aligned}
K_{a,b}^e &= \alpha \int_{-1}^1 \frac{d\varphi_a^e(x(\xi, e))}{dx} \frac{d\varphi_b^e(x(\xi, e))}{dx} \frac{h}{2} d\xi + \beta \int_{-1}^1 \varphi_a^e(x(\xi, e)) \varphi_b^e(x(\xi, e)) \frac{h}{2} d\xi + \\
&\quad + \gamma \int_{-1}^1 \varphi_a^e(x(\xi, e)) \frac{d\varphi_b^e(x(\xi, e))}{dx} \frac{h}{2} d\xi \\
K_{a,b}^e &= \alpha \int_{-1}^1 \frac{d\phi_a}{d\xi}(\xi) \frac{d\phi_b}{d\xi}(\xi) \frac{h}{2} \frac{2}{h} \frac{2}{h} d\xi + \beta \int_{-1}^1 \phi_a(\xi) \phi_b(\xi) \frac{h}{2} d\xi + \gamma \int_{-1}^1 \phi_a(\xi) \frac{d\phi_b}{d\xi}(\xi) \frac{h}{2} \frac{2}{h} d\xi \\
K_{a,b}^e &= \alpha \int_{-1}^1 \frac{d\phi_a}{d\xi}(\xi) \frac{d\phi_b}{d\xi}(\xi) \frac{h}{2} \frac{2}{h} \frac{2}{h} d\xi + \beta \int_{-1}^1 \phi_a(\xi) \phi_b(\xi) \frac{h}{2} d\xi + \gamma \int_{-1}^1 \phi_a(\xi) \frac{d\phi_b}{d\xi}(\xi) \frac{h}{2} \frac{2}{h} d\xi \\
K_{a,b}^e &= \alpha \int_{-1}^1 \frac{d\phi_a}{d\xi}(\xi) \frac{d\phi_b}{d\xi}(\xi) \frac{2}{h} d\xi + \beta \int_{-1}^1 \phi_a(\xi) \phi_b(\xi) \frac{h}{2} d\xi + \gamma \int_{-1}^1 \phi_a(\xi) \frac{d\phi_b}{d\xi}(\xi) d\xi \\
K_{a,b}^e &= \frac{2\alpha}{h} \int_{-1}^1 \frac{d\phi_a}{d\xi}(\xi) \frac{d\phi_b}{d\xi}(\xi) d\xi + \frac{\beta h}{2} \int_{-1}^1 \phi_a(\xi) \phi_b(\xi) d\xi + \gamma \int_{-1}^1 \phi_a(\xi) \frac{d\phi_b}{d\xi}(\xi) d\xi
\end{aligned}$$

Por termos definido ϕ como uma função de primeiro grau, sabemos que o produto das ϕ s será necessariamente uma função de segundo grau. Por isso, podemos usar a Quadratura Gaussiana como técnica de integração para calcular a integral com 2 pontos:

$$\begin{aligned}
K_{a,b}^e &= \frac{2\alpha}{h} \int_{-1}^1 \frac{d\phi_a}{d\xi}(\xi) \frac{d\phi_b}{d\xi}(\xi) d\xi + \frac{\beta h}{2} \int_{-1}^1 \phi_a(\xi) \phi_b(\xi) d\xi + \gamma \int_{-1}^1 \phi_a(\xi) \frac{d\phi_b}{d\xi}(\xi) d\xi \\
K_{a,b}^e &= \frac{2\alpha}{h} \sum_{j=1}^2 w_j \frac{d\phi_a}{d\xi}(p_j) \frac{d\phi_b}{d\xi}(p_j) + \frac{\beta h}{2} \sum_{j=1}^2 w_j \phi_a(p_j) \phi_b(p_j) + \gamma \sum_{j=1}^2 w_j \phi_a(p_j) \frac{d\phi_b}{d\xi}(p_j)
\end{aligned}$$

Para simplificar, podemos definir

$$QG(h, N_{PG}) = \sum_{j=1}^{N_{PG}} w_j h(p_j)$$

Com isso:

$$K_{a,b}^e = \left(\frac{2\alpha}{h} QG \left(\frac{d\phi_a}{d\xi} \frac{d\phi_b}{d\xi}, 2 \right) \right) + \left(\frac{\beta h}{2} QG(\phi_a \phi_b, 2) \right) + \left(\gamma QG \left(\phi_a \frac{d\phi_b}{d\xi}, 2 \right) \right)$$

1.4.2 Cálculo do Vetor Local por Quadratura Gaussiana

$$F = \sum_{e=1}^{m+1} F^e$$

Observe que, pela definição de φ , $F_i^e \neq 0$ quando $i \in [e-1, e]$. Logo, assim como fizemos com $K_{i,j}^e$, podemos limitar nossa integral para esse intervalo visto que restante do intervalo resultará sempre em zero. Faremos isso utilizando a notação local para as funções da base.

$$F_a^e = \int_0^1 f(x) \varphi_i(x) dx$$

$$F_a^e = \int_{x_1^e}^{x_2^e} f(x) \varphi_a^e(x) dx$$

$$F_a^e = \int_{-1}^1 f(x(\xi, e)) \varphi_a^e(x(\xi, e)) \frac{h}{2} d\xi$$

$$F_a^e = \frac{h}{2} \int_{-1}^1 f(x(\xi, e)) \phi_a(\xi) d\xi$$

Por fim, podemos aproximar essa integral a partir da Quadratura Gaussiana. Diferente da última vez, não sabemos a definição da função f . Sendo assim, usaremos 5 pontos como aproximação:

$$F_a^e = \frac{h}{2} \sum_{j=1}^5 w_j f(x(p_j, e)) \phi_a(p_j)$$

$$F_a^e = \frac{h}{2} QG(f(x(\xi, e)) \phi_a(\xi), 5)$$

1.4.3 Inicialização da Matriz

Visto que sabemos montar a matriz K a partir de $K_{a,b}^e$ e o vetor F a partir de F_a^e , podemos calcular os coeficientes. Tínhamos um código para resolver o sistema:

$$-\alpha u_{xx}(x) + \beta u(x) = f(x)$$

Portanto, com a mudança desse sistema para:

$$-\alpha u_{xx}(x) + \beta u(x) + \gamma u_x(x) = f(x)$$

A única coisa que precisamos fazer é inicializar uma variável **gamma** e também inserir $\left(\gamma QG\left(\phi_a \frac{d\phi_b}{d\xi}, 2\right)\right)$ na inicialização de nossa matrix K_e :

```
function init_Ke_matrix(ne)
    h = 1 / ne
    Ke = zeros(2,2)
```

```

for a in 1:2
  for b in 1:2
    Ke[a,b] = (alpha * 2 / h) * gaussian_quadrature((qsi) -> d_phi(a, qsi) *
      d_phi(b, qsi), 2) + (beta * h / 2) * gaussian_quadrature((qsi) ->
      phi(a, qsi) * phi(b, qsi), 2) + gamma * gaussian_quadrature((qsi) ->
      d_phi(b, qsi) * phi(a, qsi), 2)
  end
end

return Ke
end

```

1.5 Teste Realizado

Para testarmos o procedimento, precisamos primeiro escolher uma função $u(x)$ que satisfaça $u(0) = u(1) = 0$. Também precisamos definir valores para α , β e γ :

```

# Variables
alpha = 1                # constant value
beta = 1                  # constant value
gamma = 1                 # constant value
u = (x) -> sin(pi * x)

```

Em seguida, podemos calcular o valor esperado para a função $f(x)$ para que possamos calcular o erro do nosso método. $f(x)$ precisa necessariamente satisfazer:

$$f(x) = -\alpha u_{xx}(x) + \beta u(x) + \gamma u_x(x)$$

Sendo assim:

$$f(x) = -\alpha u_{xx}(x) + \beta u(x) + \gamma u_x(x)$$

$$f(x) = -\alpha(\sin(\pi x))_{xx} + \beta \sin(\pi x) + \gamma(\sin(\pi x))_x$$

$$f(x) = -\alpha(\pi \cos(\pi x))_x + \beta \sin(\pi x) + \gamma \pi \cos(\pi x)$$

$$f(x) = -\alpha \pi^2(-\sin(\pi x)) + \beta \sin(\pi x) + \gamma \pi \cos(\pi x)$$

$$f(x) = \alpha \pi^2 \sin(\pi x) + \beta \sin(\pi x) + \gamma \pi \cos(\pi x)$$

Logo:

```

f = (x) -> alpha*pi^2 * sin(pi*x) + beta*sin(pi*x) + gamma*pi*cos(pi*x)

```

Sendo assim, ao rodarmos como código com o número de elementos variando de 1 até 131071 ($2^1 - 1$ até $2^{17} - 1$), obtemos os seguintes gráficos:

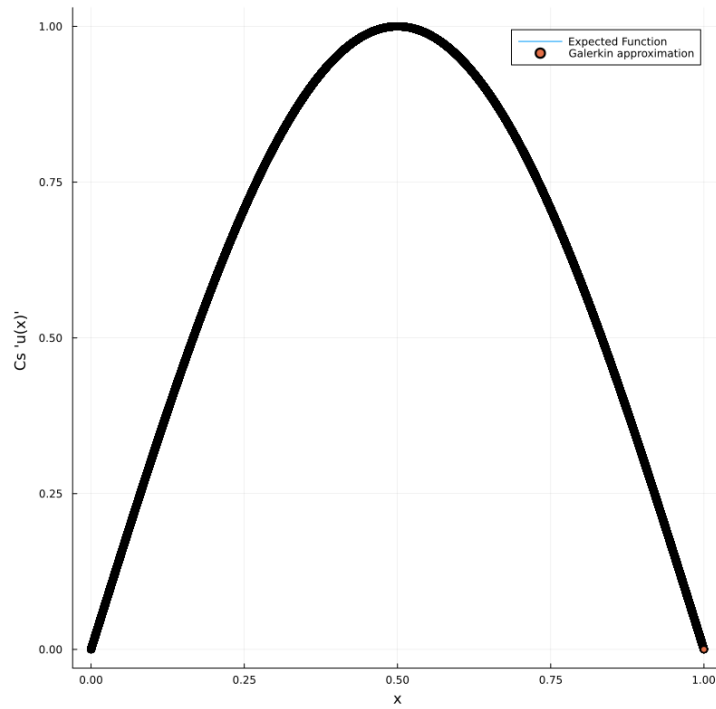


Figura 1.1: Gráfico que mostra a função original e nossos pontos aproximados por cima (Não é possível ver ambos muito bem pois o número de pontos está bem alto).

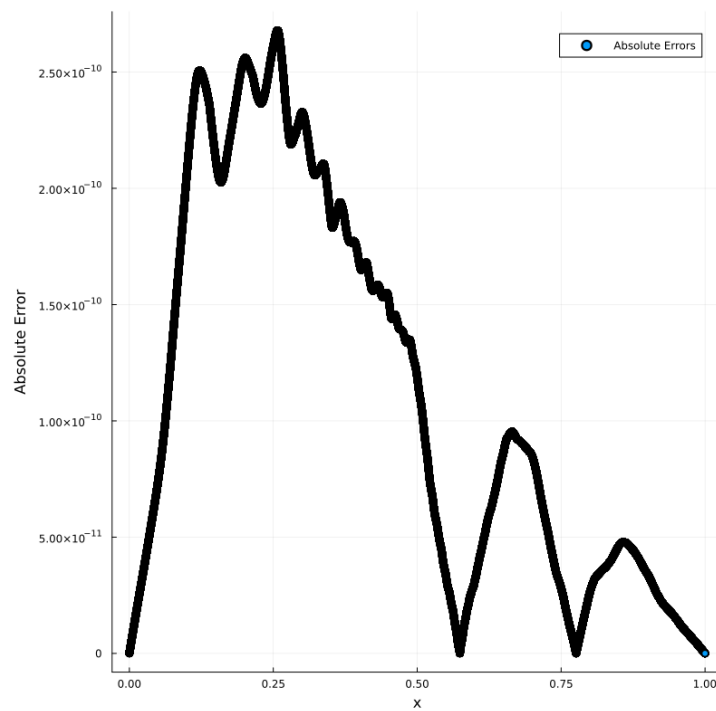


Figura 1.2: Gráfico que mostra a distância no eixo y para cada ponto encontrado pelo nosso método em comparação com a função original.

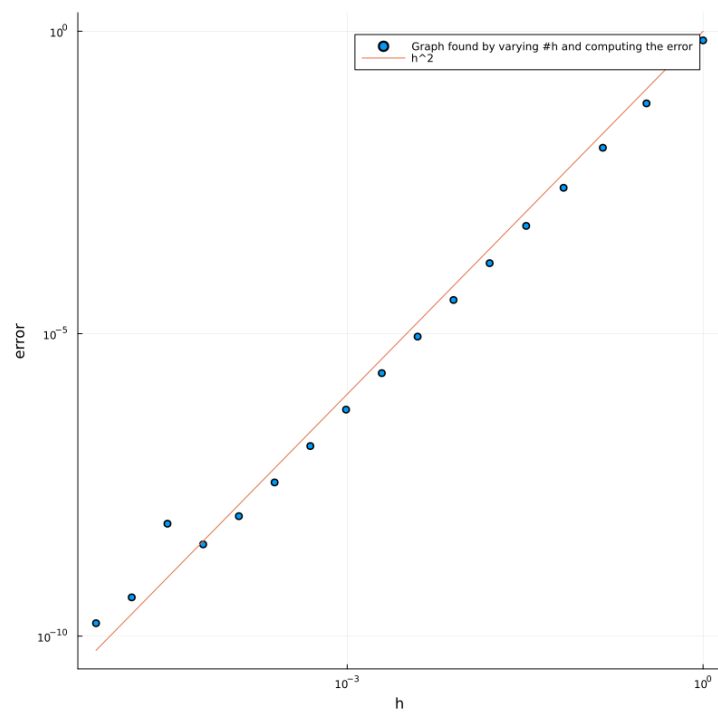


Figura 1.3: Gráfico que mostra os erros conforme o número de elementos varia.

Bibliografia

- [1] Bruno Alves do Carmo. *Problema Estacionario Unidimensional*. Acessado em 7 de Setembro de 2024. URL: <https://github.com/bacarmo/Problema-estacionario-unidimensional>.
- [2] Mauro A. Rincon e Waldecir Bianchini I-Shih Liu. *Introdução ao Método de Elementos Finitos*. Instituto de Matemática, UFRJ, p. 183. ISBN: 978-65-86502-00-8.