Resolvendo EDOs com Sistemas Matriz-vetor utilizando Métodos Iterativos

Trabalho Final de Computação Científica e Análise de Dados

João Victor Lopez Pereira

Instituto de Computação – UFRJ

21 de dezembro de 2024

Objetivo do Trabalho

1. Transformar uma EDO em um sistema matriz-vetor
2. Resolver o sistema matriz-vetor usando métodos Iterativos

Formulação Forte

Dada uma função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ e constantes $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$ e $\gamma \geq 0$, queremos encontrar a função $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que:

$$(S) = \begin{cases} -\alpha u_{xx}(x) + \beta u(x) + \gamma u_x(x) = f(x) \\ \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Sendo (S) conhecido como a formulação forte do problema.

Visto que $-\alpha u_{xx}(x) + \beta u(x) + \gamma u_x(x) = f(x)$, podemos multiplicar ambos os lados por uma função $v(x)$ tal que $v(1) = v(0) = 0$ que nos ajude a eliminar a segunda derivada u_{xx}:

$$-\alpha u_{xx}(x)v(x) + \beta u(x)v(x) + \gamma u_x(x)v(x) = f(x)v(x)$$

e Integrar:

$$\int_0^1 -\alpha u_{xx}(x)v(x) + \beta u(x)v(x) + \gamma u_x(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx$$

Utilizando integração por partes na parcela da esquerda, temos:

$$-\alpha\left[u_x(x)v(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 u_x(x)v_x(x)dx\right] + \int_0^1 \beta u(x)v(x)dx + \int_0^1 \gamma u_x(x)v(x)dx$$

$$-\alpha\left[-\int_0^1 u_x(x)v_x(x)dx\right] + \int_0^1 \beta u(x)v(x)dx + \int_0^1 \gamma u_x(x)v(x)dx$$

$$\int_0^1 \alpha u_x(x)v_x(x) + \beta u(x)v(x) + \gamma u_x(x)v(x)dx$$

Definição da Formulação Fraca

Seja H um espaço de funções formado por funções u suficientemente suaves que satisfazem (W). Seja V um espaço das funções de teste, composto por funções v suficientemente suaves e que satisfazem as condições de contorno $v(0) = v(1) = 0$.

Dados $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$, $\gamma \geq 0$ e uma função $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, precisamos determinar $u : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $u \in H$, tal que, $\forall v \in V$,

$$(W) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 \alpha u_x(x) v_x(x) + \beta u(x) v(x) + \gamma u_x(x) v(x) dx = \int_0^1 f(x) v(x) dx. \\ \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Definição do Problema Aproximado via o Método de Galerkin

O método de Galerkin consiste em aproximar o espaço das soluções por um espaço de dimensão finita para encontrarmos uma solução aproximada que satisfaça a formulação fraca do problema dentro de um espaço apropriado.

Seja H^h um espaço de funções finito-dimensional composto por funções u^h suficientemente suaves que satisfazem (W). Analogamente, seja V^h um espaço de funções finito-dimensional das funções de teste, formado por funções v^h suficientemente suaves que atendem às condições de contorno $v^h(0) = v^h(1) = 0$. Precisamos determinar $u^h \in H^h$ tal que, $\forall v^h \in V^h$,

$$\begin{cases} \int_0^1 \alpha u_x^h(x) v_x^h(x) + \beta u^h(x) v^h(x) + \gamma u_x^h(x) v^h(x) dx = \int_0^1 f(x) v^h(x) dx \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Visto que $u^h \in H^h$, podemos tomar u^h como combinação linear das funções da base de H^h. Seja

$$u^h(x) = \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(x) c_j.$$

Logo, temos que:

$$u_x^h(x) = \sum_{j=1}^{m} \varphi_{xj}(x) c_j$$

Substituindo ambos em nossa equação:

$$\int_0^1 \alpha \sum_{j=1}^{m} \varphi_{xj}(x) c_j v_x^h(x) + \beta \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(x) c_j v^h(x) + \gamma \sum_{j=1}^{m} \varphi_{xj}(x) c_j v^h(x) dx$$

$$= \int_0^1 f(x) v^h(x) dx$$

$$\sum_{j=1}^{m} c_j \int_0^1 \alpha\varphi_{xj}(x)v_x^h(x) + \beta\varphi_j(x)v^h(x)dx + \gamma\varphi_{xj}(x)v^h(x)dx = \int_0^1 f(x)v^h(x)dx$$

Veja que podemos tomar $v^h(x)$ como sendo qualquer função da base V^h.
$v^h(x) = \varphi_i(x)$, $i \in \{1, \dots, m\}$, e $v_x^h(x) = \varphi_{xi}(x)$

$$\sum_{j=1}^{m} c_j \int_0^1 \alpha\varphi_{xj}(x)\varphi_{xi}(x) + \beta\varphi_j(x)\varphi_i(x)dx + \gamma\varphi_{xj}(x)\varphi_i(x)dx = \int_0^1 f(x)\varphi_i(x)dx$$

Veja que essa equação vale para $i \in \{1, \dots, m\}$. Dessa forma, podemos expressar nosso problema na forma matriz-vetor.

$$\sum_{j=1}^{m} c_j \int_0^1 \alpha\varphi_{xj}(x)\varphi_{x1}(x) + \beta\varphi_j(x)\varphi_1(x) + \gamma\varphi_{xj}(x)\varphi_1(x)dx = \int_0^1 f(x)\varphi_1(x)dx$$

$$\vdots$$

$$\sum_{j=1}^{m} c_j \int_0^1 \alpha\varphi_{xj}(x)\varphi_{xi}(x) + \beta\varphi_j(x)\varphi_i(x) + \gamma\varphi_{xj}(x)\varphi_i(x)dx = \int_0^1 f(x)\varphi_i(x)dx$$

$$\vdots$$

$$\sum_{j=1}^{m} c_j \int_0^1 \alpha\varphi_{xj}(x)\varphi_{xm}(x) + \beta\varphi_j(x)\varphi_m(x) + \gamma\varphi_{xj}(x)\varphi_m(x)dx = \int_0^1 f(x)\varphi_m(x)dx$$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{K}_{1,1} & \dots & \mathcal{K}_{1,j} & \dots & \mathcal{K}_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{K}_{i,1} & \dots & \mathcal{K}_{i,j} & \dots & \mathcal{K}_{i,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{K}_{m,1} & \dots & \mathcal{K}_{m,j} & \dots & \mathcal{K}_{m,m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{C}_1 \\ \vdots \\ \mathcal{C}_i \\ \vdots \\ \mathcal{C}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_1 \\ \vdots \\ \mathcal{F}_i \\ \vdots \\ \mathcal{F}_m \end{pmatrix}$$

Para $i, j \in \{1, \ldots, m\}$, tais que i e j correspondam aos índices da matriz, sejam:

$$\mathcal{K}_{i,j} = \int_0^1 \alpha\varphi_{xi}(x)\varphi_{xj}(x) + \beta\varphi_i(x)\varphi_j(x) + \gamma\varphi_i(x)\varphi_{xj}(x)dx$$

$$\mathcal{F}_i = \int_0^1 f(x)\varphi_i(x)dx$$

Forma Matriz-vetor

Dado uma matriz $\mathcal{K}$ e um vetor $\mathcal{F}$, queremos encontrar $\mathcal{C}$ tal que:

$$\mathcal{K}\mathcal{C} = \mathcal{F}$$

Escolha das Funções da Base

Seja $x_1, \ldots, x_m$ uma discretização do intervalo $[0, 1]$ tal que $\forall i \in \{1, \ldots, m\}$, $x_{i+1} - x_i = h$. Além disso, considere $x_0 = 0$ e $x_{m+1} = 1$ como sendo os extremos do intervalo tal que $x_{m+1} - x_m = h$ e $x_1 - x_0 = h$.
Definiremos $\varphi_i(x)$ como:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{h}, & \forall x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{h}, & \forall x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0, & \forall x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}] \end{cases}$$

Observe que a função base $\varphi_i(x)$ é definida como uma função linear por partes intencionalmente de forma que a sua integração e derivação sejam simples. Além disso, $\varphi_i(x)$ é projetada para ser zero fora do intervalo $[x_{i-1}, x_{i+1}]$, o que significa que cada função base afeta apenas dois ou três pontos consecutivos.

$$K_{i,j} = \int_0^1 \alpha\varphi_{xi}(x)\varphi_{xj}(x) + \beta\varphi_i(x)\varphi_j(x) + \gamma\varphi_i(x)\varphi_{xj}(x)dx$$

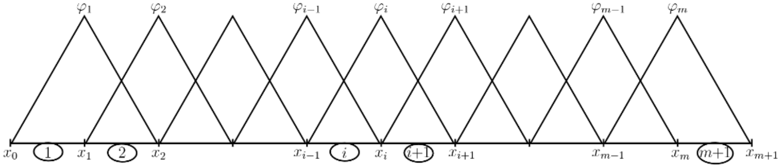

Figura: Definição das funções da base. Imagem de Bruno Alves do Carmo[1].

$\mathcal{K}$ é tri-diagonal!

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} K_{1,1} & K_{1,2} & 0 & 0 & 0 \\ K_{2,1} & K_{2,2} & K_{2,3} & 0 & 0 \\ 0 & K_{3,2} & K_{3,3} & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & K_{m-1,m} \\ 0 & 0 & 0 & K_{m,m-1} & K_{m,m} \end{pmatrix}$$

- Contra-barra do Julia
- Gauss Jacobi
- Gauss Jacobi Tri-diagonal
- Gauss Jacobi Paralelo
- Gauss Jacobi Tri-diagonal Paralelo
- Gauss Seidel
- Gauss Seidel Tri-diagonal

Testamos a convergência do erro para todos os métodos.

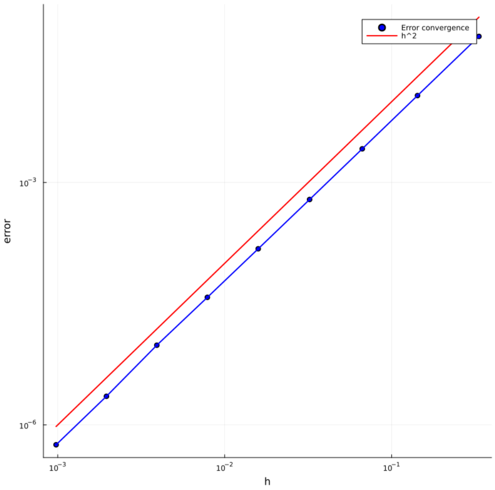

Figura: Convergência do Erro.

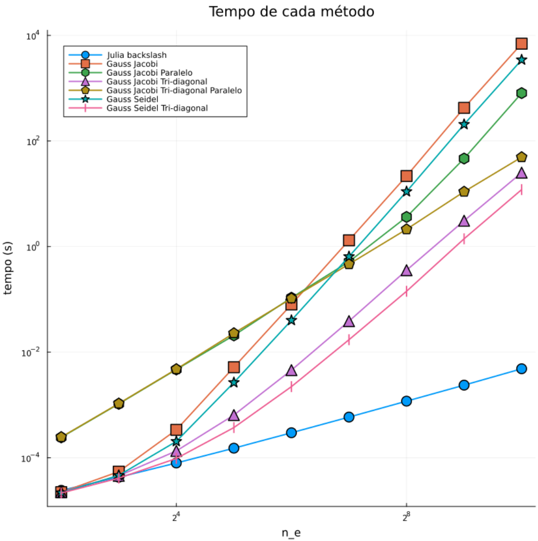

Figura: Comparação do tempo tomado por cada método.

Referências

[1] Bruno Alves do Carmo. *Elementos Finitos*. Acessado em 7 de Setembro de 2024. URL: https://github.com/bacarmo/Elementos_Finitos.

[2] I-Shih Liu, Mauro A. Rincon e Waldecir Bianchini. *Introdução ao Método de Elementos Finitos*. Instituto de Matemática, UFRJ, p. 183. ISBN: 978-65-86502-00-8.

[3] João Victor Lopez Pereira. *Finite-Elements-Method*. Acessado em 20 de Outubro de 2024. URL: https://github.com/joaovictorlopezpereira/Finite-Elements-Method.

[4] João Victor Lopez Pereira. *Notas de Aula de Computação Científica e Análise de Dados*. Acessado em 19 de Novembro de 2024. URL: https://github.com/joaovictorlopezpereira/Notas-de-Aula-CoCADa.