Programação Linear

Programação Linear

Um Problema de Programação Linear (PPL) pode ser escrito em uma *forma padrão*, definida como:

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{minimizar} & z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n & & \\
\text{sujeito a} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\
 & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\
 & \vdots & & \vdots \\
 & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \\
\text{com} & x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0 & &
\end{array}
$$

Podemos reescrever ainda da seguinte forma:

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimizar} & z = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j \\
\text{sujeito a} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \;\; i = 1, 2, \ldots, m \\
 & x_j \geqslant 0, \;\; j = 1, 2, \ldots, n
\end{array}
$$

Programação Linear

Forma padrão de qualquer programa linear

- Função objetivo (Maximização e minimização)

$$z^\star = \max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = -\min \sum_{j=1}^{n} -c_j x_j.$$

- Variáveis de folga
  - Cada restrição de desigualdade pode ser substituída com o acréscimo de uma variável $y_i \geqslant 0$, por uma restrição de igualdade e uma restrição trivial.

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geqslant b_1 \iff a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n - y_i = b_1$$

ou

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leqslant b_1 \iff a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + y_i = b_1$$

Programação Linear

Exemplo: Considere o problema:

$$\begin{array}{lll}
\text{minimizar} & c_1x_1 + \ldots + c_nx_n & \\
\text{sujeito a} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & \leqslant & b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & \leqslant & b_2 \\
& \vdots & & \vdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & \leqslant & b_m \\
& x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0 & &
\end{array}$$

Adicionando um *variável de folga* a cada desigualdade, temos forma que:

$$\begin{array}{llllll}
\text{minimizar} & c_1x_1 + \ldots + c_nx_n + 0y_1 + \ldots + 0y_m & & & & \\
\text{sujeito a} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & +y_1 & & = & b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & & +y_2 & = & b_2 \\
& \vdots & & & & \vdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & & +y_m & = & b_m \\
& x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0, & & & & \\
& y_1 \geqslant 0, y_2 \geqslant 0, \ldots, y_m \geqslant 0 & & & &
\end{array}$$

Programação Linear

Exercício: Escreva o PPL a seguir na forma padrão:

$$
\begin{array}{lll}
\text{maximizar} & z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 & \\
\text{sujeito a} & x_1 + x_2 + x_3 & \leqslant 60 \\
 & x_1 + 2x_2 + 2x_3 & \leqslant 110 \\
 & x_1 + x_2 + 2x_3 & \leqslant 90 \\
 & x_1,\ x_2,\ x_3 \geqslant 0 &
\end{array}
$$

Programação Linear

Exercício: Escreva o PPL a seguir na forma padrão:

$$
\begin{array}{lll}
\text{maximizar} & z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 & \\
\text{sujeito a} & x_1 + x_2 + x_3 & \leqslant 60 \\
& x_1 + 2x_2 + 2x_3 & \leqslant 110 \\
& x_1 + x_2 + 2x_3 & \leqslant 90 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3 \geqslant 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
\text{maximizar} & z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 & \\
\text{sujeito a} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = 60 \\
& x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_5 & = 110 \\
& x_1 + x_2 + 2x_3 + x_6 & = 90 \\
& x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, 3, 4, 5, 6. &
\end{array}
$$

Programação Linear

Podemos reescrever o problema do programação linear em forma matricial:

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & cx \\ \text{sujeito a} \quad & Ax = b \\ & x \geqslant 0, \end{aligned}$$

Onde $c = (c_1\ c_2\ \dots\ c_n)$, $x^T = (x_1\ x_2\ \dots\ x_n)$, $b^T = (b_1\ b_2\ \dots\ b_m)$, $A = (a_1\ a_2\ \dots\ a_n)$ e $a_j^T = (a_{1j}\ a_{2j}\ \dots\ c_{mj})$, isto é $c \in \mathbb{R}^n$, $x^T \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $a_j \in \mathbb{R}^n$

Definição

Seja $X = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b,\ x \geqslant 0\}$. O conjunto X é denominado conjunto ou região viável do (PPL), e se $x \in X$, então x é uma solução viável do mesmo problema. Dado $x^* \in X$, x^* é denominado uma solução ótima do PPL se $cx^* \geqslant cx$, para todo $x \in X$

Programação Linear

Podemos reescrever o problema do programação linear em forma matricial:

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & cx \\ \text{sujeito a} \quad & Ax = b \\ & x \geqslant 0, \end{aligned}$$

Onde $c = (c_1\ c_2\ \ldots\ c_n)$, $x^T = (x_1\ x_2\ \ldots\ x_n)$, $b^T = (b_1\ b_2\ \ldots\ b_m)$, $A = (a_1\ a_2\ \ldots\ a_n)$ e $a_j^T = (a_{1j}\ a_{2j}\ \ldots\ c_{mj})$, isto é $c \in \mathbb{R}^n$, $x^T \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $a_j \in \mathbb{R}^n$

Definição

Seja $X = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b,\ x \geqslant 0\}$. O conjunto X é denominado conjunto ou região viável do (PPL), e se $x \in X$, então x é uma solução viável do mesmo problema. Dado $x^* \in X$, x^* é denominado uma solução ótima do PPL se $cx^* \geqslant cx$, para todo $x \in X$

PL - Resolução pelo Método Gráfica

- O método gráfico pode ser utilizado para duas ou três variáveis. Entretanto, na prática, ele é usado apenas para duas variáveis;
- Método simples e de fácil compreensão;
- Útil para melhorar nossa intuição sobre um problema em estudo;
- Permite-nos intuir várias propriedades teóricas e delinear um método de solução.

PL - Resolução pelo Método Gráfica

Exemplo: Observe a situação a seguir, onde há uma empresa que pretende otimizar a produção mensal de dois produtos A e B:

- Recursos disponíveis:

Madeira	300 metros
Hora de Trabalho	110 horas

- Consumos unitários previstos:

	Madeira (metros)	Horas de trabalho (h)
Produto A	30	5
Produto B	20	10

- Lucro unitário da venda

Produto A	Produto B
6	8

PL - Resolução pelo Método Gráfica

Nesta situação é necessária entender que:

- O objetivo é maximizar o lucro total da venda da produção;
- A produção está superiormente limitada pelos 300 metros de madeira e 110 horas de trabalho disponíveis;
- São possíveis vários níveis de produção;
- Dos possíveis níveis de produção é necessário conhecer qual ou quais podem classificar-se de ótimos.

PL - Resolução pelo Método Gráfica

Definir as duas variáveis de decisão:

- x_1 como o número de unidades do produto A;
- x_2 como o número de unidades do produto B.

Que valores podemos admitir para as variáveis de decisão?

- Em x_1 unidades de A consomem-se $30x_1$ metros de madeira e em x_2 unidades de B consomem-se $20x_2$ metros de madeira.
- Não ultrapassando o limite de $300m$ de madeira disponíveis $(30x_1 + 20x_2 \leqslant 300)$.
- Em x_1 unidades de A consomem-se $5x_1$ horas de trabalho e em x_2 unidades de B consomem-se $10x_2$ horas de trabalho.
- Não ultrapassando o limite de $110h$ de trabalho disponíveis $(5x_1 + 10x_2 \leqslant 110)$
- E a restrição de não negatividade do problema $x_1 \geqslant 0$ e $x_2 \geqslant 0$.

Qual o objetivo a ser alcançado com a produção de A e B?

- O lucro da venda de 1 unidade de A é de \$ 6;
- O lucro da venda de 1 unidade de B é de \$ 8;
- O lucro total da venda de x_1 unidades de A e de x_2 unidades de B é de $6x_1 + 8x_2$.

PL - Resolução pelo Método Gráfica

Considere o PPL:

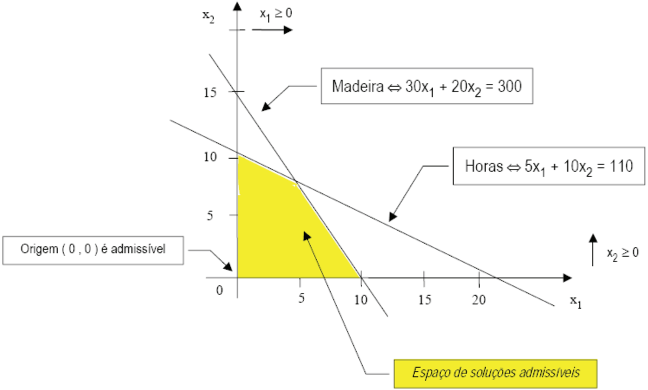
$$\begin{array}{lll} \text{maximizar} & z = 6x_1 + 8x_2 & \\ \text{sujeito a} & 30x_1 + 20x_2 & \leqslant \quad 300 \\ & 5x_1 + 10x_2 & \leqslant \quad 110 \\ & x_1,\ x_2 \geqslant 0 & \end{array}$$

- Resolver um PPL consiste em encontrar uma solução ótima, isto é, para um problema de maximização, consiste em determinar uma solução viável x^* tal que $f(x^*) \geqslant f(x)$, para todo x viável.
- Denominamos região viável:

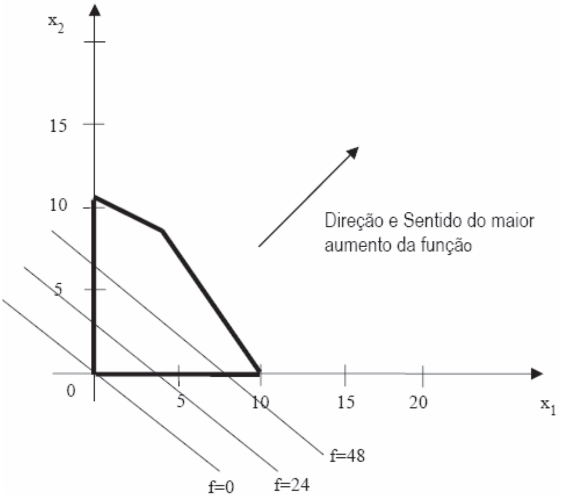
$$X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | 30x_1 + 20x_2 \leqslant 300,\ 5x_1 + 10x_2 \leqslant 110,\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0\}$$

PL - Resolução pelo Método Gráfica

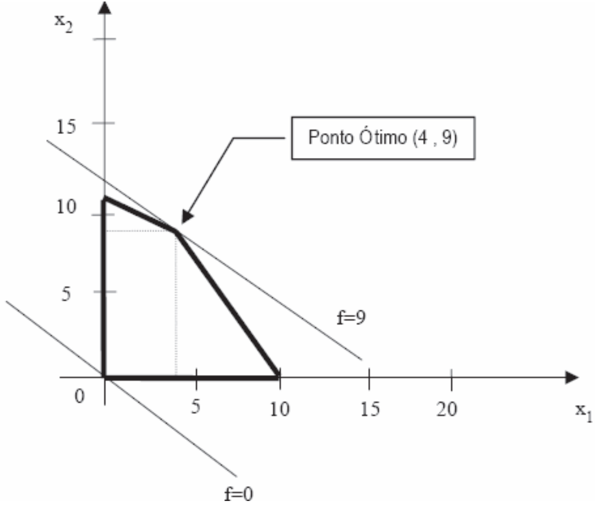
Desenhando a região viável (X):



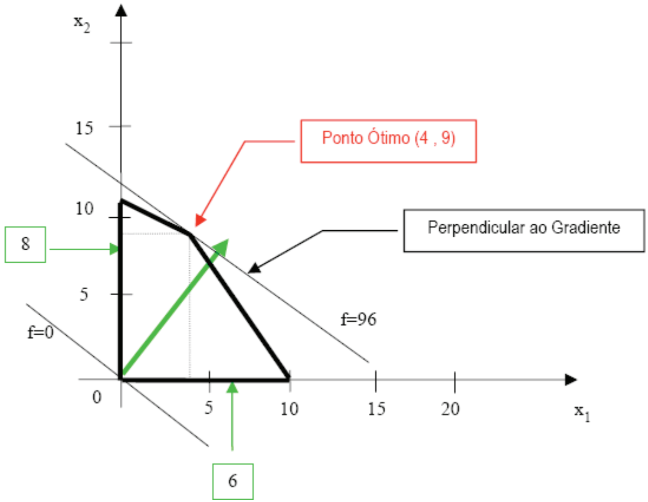
PL - Resolução pelo Método Gráfica



PL - Resolução pelo Método Gráfica



PL - Resolução pelo Método Gráfica



Programação Linear

Podemos reescrever o problema do programação linear em forma matricial:

$$
\begin{aligned}
\text{maximizar} \quad & cx \\
\text{sujeito a} \quad & Ax = b \\
& x \geqslant 0,
\end{aligned}
$$

- Suporemos, sem perda de generalidade, que a matriz A tenha posto igual a m, isto é, existem m colunas de A linearmente independentes.
- Uma variável x_j irrestrita em sinal será expressa: $x_j = x_j^+ - x_j^-$, $x_j^+ \geqslant 0$ e $x_j^- \geqslant 0$, deixando sempre o problema na forma (PPL).

Programação Linear

- Particionaremos a matriz A da seguinte maneira: $A = (B \; N)$, onde B é uma matriz quadrada $m \times m$ e inversível.
- Analogamente particionaremos os vetores x e c: $x^T = (x_B^T \; x_N^T)$, $c = (c_B \; c_N)$, x_B e c_B possuirão m componentes associadas à matriz B.

  Dessa maneira o (PPL) poderá ser escrito:

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & z = c_B x_B + c_N x_N \\ \text{sujeito a:} \quad & \\ & B x_B + N x_N = b \\ & x_B \geqslant 0, \;\; x_N \geqslant 0 \end{aligned}$$

Explicitaremos x_B em função de x_N:

$$x_B = B^{-1} b - B^{-1} N x_N$$

Façamos $x_N = 0$ e $\bar{x}_B = B^{-1} b$.

Definição

$\overline{x}$ é uma **solução básica** se $\overline{x}^T = (\overline{x}_B^T \; 0)$. As variáveis associadas às componentes de $\overline{x}_B$ são denominadas básicas e as demais não básicas. Quando $\overline{x}_B$ possuir ao menos uma componente nula diremos que $\overline{x}$ é uma solução básica degenerada.

Sejam I_B o conjunto dos índices das colunas de A pertencendo à matriz B e I_N o conjunto dos demais índices de A. Lembremos que $I_B \cap I_N = \varnothing$ e $I_B \cup I_N = \{1, 2, \ldots, n\}$.
x_B em função de x_N temos:

$$\begin{aligned}
\text{maximizar} \quad & z = c_B B^{-1} b - (c_B B^{-1} N - c_N) x_N \\
\text{sujeito a:} \quad & \\
& x_B = B^{-1} b - B^{-1} N x_N \\
& x_B \geqslant 0, \;\; x_N \geqslant 0
\end{aligned}$$

Por comodidade, definiremos seguindo alguns autores clássicos dos textos de programação linear, por exemplo, Dantzig, novos parâmetros para o último (PPL):

$$u = c_B B^{-1}, \qquad u^T \in \mathbb{R}^m,$$

$$\bar{x}_B = B^{-1} b, \qquad \bar{x}_B \in \mathbb{R}^m,$$

$$z_j = u a_j, \qquad (j \in I_B \cup I_N), \qquad z_j \in \mathbb{R},$$

$$y_j = B^{-1} a_j, \qquad (j \in I_B \cup I_N), \qquad y_j \in \mathbb{R}^m,$$

$$\bar{z} = c_B B^{-1} b = u b = c_B \bar{x}_B$$

Assim poderemos escrever $(c_B B^{-1} N - c_N) x_N = \sum_{j \in I_N} (z_j - c_j) x_j$ e o (PPL) se tornará:

$$\text{maximizar} \quad z = \bar{z} - \sum_{j \in I_N} (z_j - c_j) x_j$$

$$\text{sujeito a:}$$

$$x_B = \bar{x}_B - \sum_{j \in I_N} y_j x_j$$

$$x_B \geqslant 0, \;\; x_j \geqslant 0, \;\; j \in I_n$$

Definindo $y_j^T = (y_{1j} \; y_{2j} \; \ldots \; y_{mj})$, $x_B^T = (x_{B(1)} \; x_{B(2)} \; \ldots \; x_{B(m)})$ e $\bar{x}_B^T = (\bar{x}_{B(1)} \; \bar{x}_{B(2)} \; \ldots \; \bar{x}_{B(m)})$ então as restrições poderão ainda ser escrito como:

$$x_{B(i)} = \bar{x}_{B(i)} - \sum_{j \in I_N} y_{ij} x_j, \;\; i = 1, 2, \ldots, m.$$

Programação Linear

Proposição

Se $\overline{x}_B \geqslant 0$ e $z_j - c_j \geqslant 0$, $\forall j \in I_N$ então o vetor $x^* \in \mathcal{R}^n$, onde $x_{B(i)} = \overline{x}_{B(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, m$ e $x_j = 0$, $j \in I_N$, será uma solução ótima do (PPL).

Demonstração

Como $z_j - c_j \geqslant 0$ e $x_j \geqslant 0$, $\forall j \in I_N$, então temos $z \leqslant \overline{z} = cx$. O máximo de z não ultrapassará $\overline{z} = cx$, mas x é um solução viável do (PPL), logo x é uma solução ótima do (PPL) $\blacksquare$

Programação Linear

Suponhamos agora que $\widehat{x} \in \mathcal{R}^n$ seja uma solução viável, então podemos reescrever as restrições como:

$$\widehat{x}_{B(i)} = \overline{x}_{B(i)} - \sum_{j \in I_N} y_{ij}\widehat{x}_j, \;\; i = 1, 2, \ldots, m.$$

e $\widehat{x} \geqslant 0$, $j \in I_B \cup I_N$, fornecendo um valor $\widehat{z}$ à função objetivo:

$$\widehat{z} = \overline{z} - \sum_{j \in I_N} (z_j - c_j)\widehat{x}_j = c\widehat{x}$$

Programação Linear

Suporemos também que $\hat{x} \in \mathcal{R}^n$ não seja uma solução básica, isto quer dizer que haverá ao menos uma componente $\hat{x}_j > 0$, $j \in I_N$.

Como passar da solução $\hat{x}$ a uma solução básica viável x do (PPL) tal que $cx \geqslant \hat{z} = c\hat{x}$?

Variar o valor de uma variável x_k , $k \in I_N$ enquanto que o valor das outras variáveis cujos índices pertencem a I_N não se modificam, isto é, $x_j = \hat{x}_j$ para $j \in I_N - \{k\}$. Deste modo, podemos reescrever as restrições como:

$$x_{B(i)} = \bar{x}_{B(i)} - \sum_{j \in I_N - \{k\}} y_{ij}\hat{x}_j - y_{ik}x_k, \;\; i = 1, 2, \ldots, m.$$

onde x_k poderá variar (aumentar ou diminuir).

Sabemos que $x_k \geqslant 0$, $x_{B(i)} \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, e que os outros valores associados a x_j, $j \in I_N - \{k\}$, não serão modificados. Assim sendo: $x_{B(i)} \geqslant 0$ implica que

$$\bar{x}_{B(i)} - \sum_{j \in I_N - \{k\}} y_{ij}\widehat{x}_j - y_{ik}x_k \geqslant 0, \ \ i = 1, 2, \ldots, m.$$

Consideremos L_0, L_1, L_2 uma partição de $\{1, 2, \ \ldots \ , m\}$, tal que

$$L_0 = \{i \mid y_{ik} = 0\}, \ \ L_1 = \{i \mid y_{ik} > 0\}, \ \ L_2 = \{i \mid y_{ik} < 0\}.$$

Busquemos os limites de variação para x_k pois sabemos que:

$$y_{ik}x_k \leqslant \bar{x}_{B(i)} - \sum_{j \in I_N - \{k\}} y_{ij}\widehat{x}_j, \ \ i = 1, 2, \ldots, m.$$

Programação Linear

- Para $i \in L_0$ basta que o valor de x_k seja não-negativo.
- Para $i \in L_1$

$$x_k \leqslant \frac{1}{y_{ik}}\left(\bar{x}_{B(i)} - \sum_{j \in I_N - \{k\}} y_{ij}\widehat{x}_j\right).$$

- Para $i \in L_2$

$$x_k \geqslant \frac{1}{y_{ik}}\left(\bar{x}_{B(i)} - \sum_{j \in I_N - \{k\}} y_{ij}\widehat{x}_j\right).$$

Sejam

$$\alpha_k = \frac{1}{y_{sk}}\left(\bar{x}_{B(s)} - \sum_{j \in I_N - \{k\}} y_{sj}\widehat{x}_j\right) = \min_{i \in L_1}\left\{\frac{1}{y_{ik}}\left(\bar{x}_{B(i)} - \sum_{j \in I_N - \{k\}} y_{ij}\widehat{x}_j\right)\right\}$$

$$\beta_k = \frac{1}{y_{lk}}\left(\bar{x}_{B(l)} - \sum_{j \in I_N - \{k\}} y_{lj}\widehat{x}_j\right) = \max_{i \in L_2}\left\{\frac{1}{y_{ik}}\left(\bar{x}_{B(i)} - \sum_{j \in I_N - \{k\}} y_{ij}\widehat{x}_j\right)\right\}$$

e $\gamma_k = \max\{0, \beta_k\}$.

Logo $\gamma_k \leqslant x_k \leqslant \alpha_k$. Quando $L_1 = \emptyset \Rightarrow \alpha_k = \infty$ e quando $L_2 = \emptyset \Rightarrow \beta_k = -\infty$.

Tomemos x_k tal que $x_k = \widehat{x}_k > 0$ e $k \in I_N$.

1 caso: $z_k - c_k > 0$, decresceremos o valor de x_k até alcançar λ_k;

se $\lambda_k = 0$, faremos $x_k = 0$ e utilizaremos (2.19) para atualizar os valores de $x_{B(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, m$;

se $\lambda_k = \beta_k$, faremos $x_k = \beta_k$ que ocasionará $x_{B(l)} = 0$ em

$$x_{B(i)} = \bar{x}_{B(i)} - \sum_{j \in I_N - \{k\}} y_{ij}\widehat{x}_j - y_{ik}x_k, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

, como $y_{lk} \neq 0$ então poderemos fazer

$$I_B := (I_B - \{B(l)\}) \cup \{k\},$$

$$I_N := (I_N - \{k\}) \cup \{B(l)\},$$

isto é, teremos uma nova matriz B inversível, extraída de A, onde a coluna $a_{B(l)}$ será substituída por a_k;

2 caso: $z_k - c_k < 0$, aumentaremos o valor de x_k até alcançar α_k;

se $\alpha_k = +\infty$, a solução do (PPL) será ilimitada, pois $x_k \to +\infty$ implica $z \to +\infty$;

se $\lambda_k = \beta_k$, faremos $x_k = \alpha_k$ que ocasionará $x_{B(s)} = 0$ em

$$x_{B(i)} = \bar{x}_{B(i)} - \sum_{j \in I_N - \{k\}} y_{ij}\widehat{x}_j - y_{ik}x_k, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

, como $y_{sk} \neq 0$ então poderemos fazer

$$I_B := (I_B - \{B(s)\}) \cup \{k\},$$

$$I_N := (I_N - \{k\}) \cup \{B(s)\},$$

isto é, teremos uma nova matriz B inversível, extraída de A, onde a coluna $a_{B(s)}$ será substituída por a_k;

3 caso: $z_k - c_k = 0$, aplicaremos o que foi realizado no 1^o caso.

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximizar} & z = 3x_1 + 5x_2 \\
\text{sujeito a:} & \\
& \begin{array}{lcr}
x_1 & \leqslant & 4 \\
\quad + \ x_2 & \leqslant & 6 \\
3x_1 + 2x_2 & \leqslant & 18 \\
x_1,\ x_2 \geqslant 0 & &
\end{array}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximizar} & z = 3x_1 + 5x_2 \\
\text{sujeito a:} & \\
& \begin{array}{lcr}
x_1 & \leqslant & 4 \\
\quad + \; x_2 & \leqslant & 6 \\
3x_1 + 2x_2 & \leqslant & 18 \\
x_1, \; x_2 \geqslant 0 & &
\end{array}
\end{array}
$$

Associaremos às restrições não triviais as variáveis de folga $x_3 \geqslant 0$, $x_4 \geqslant 0$, $x_5 \geqslant 0$ tais que o (PPL) fique sob a seguinte forma:

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximizar} & z = 3x_1 + 5x_2 \\
\text{sujeito a:} & \\
& \begin{array}{rcl}
x_1 & \leqslant & 4 \\
+ \; x_2 & \leqslant & 6 \\
3x_1 + 2x_2 & \leqslant & 18 \\
\end{array} \\
& x_1,\ x_2 \geqslant 0
\end{array}
$$

Associaremos às restrições não triviais as variáveis de folga $x_3 \geqslant 0$, $x_4 \geqslant 0$, $x_5 \geqslant 0$ tais que o (PPL) fique sob a seguinte forma:

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximizar} & z = 3x_1 + 5x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \\
\text{sujeito a:} & \\
& \begin{array}{lcl}
x_1 + x_3 & = & 4 \\
x_2 + x_4 & = & 6 \\
3x_1 + 2x_2 + x_5 & = & 18 \\
\end{array} \\
& \\
& x_j \geqslant 0,\ j = 1, 2, 3, 4, 5.
\end{array}
$$

$$A = (a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 18 \end{pmatrix}, c = (3\ 5\ 0\ 0\ 0).$$

Tomemos

$$I_B = \{3,\ 2,\ 5\},\quad I_N = \{1,\ 4\},$$

$$B(1) = 3,\ B(2) = 2,\ B(3) = 5,$$

$$B = (a_3\ a_2\ a_5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ \text{logo } B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c_B = (0\ 5\ 0),\ u = c_B B^{-1} = (0\ 5\ 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = (0\ 5\ 0),$$

$$\bar{x}_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} \bar{x}_3 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\bar{z} = c_B B^{-1} b = ub = (0\ 5\ 0) \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 18 \end{pmatrix} = 30$$

$$z_1 = ua_1 = (0\ 5\ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow z_1 - c_1 = 0 - 3 = -3,$$

$$z_4 = ua_4 = (0\ 5\ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 5 \Rightarrow z_4 - c_4 = 5 - 0 = 5,$$

$$y_1 = B^{-1}a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$y_4 = B^{-1}a_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

maximizar

$$z = 30 + 3x_1 - 5x_4$$

sujeito a:

$$\begin{aligned} x_3 &= 4 - x_1 \\ x_2 &= 6 \qquad\; - x_4 \\ x_5 &= 6 - 3x_1 + 2x_4 \end{aligned}$$

$$x_j \geqslant 0, j = 1, \ \ldots, 5$$

Tomemos $\widehat{x}_1 = 1$, $\widehat{x}_2 = 4$, $\widehat{x}_3 = 3$, $\widehat{x}_4 = 2$, $\widehat{x}_5 = 7$ uma solução viável deste problema, facilmente verificada, fornecendo $\widehat{z} = 30 + 3x_1 - 5x_2 = 23$. A partir da solução $\widehat{x}$ objetivamos encontrar uma solução básica viável que forneça um valor z^* para z, tal que $z^* \geqslant c\widehat{x}$.

A seguir usaremos o algoritmo. Como $z_4 - c_4 = 5 > 0$, estamos no 1^o caso, portanto faremos x_4 decrescer de valor:

$4 - \widehat{x}_1 \geqslant 0$ qualquer que seja x_4,

$6 - x_4 \geqslant \Rightarrow x_4 \leqslant 6$,

$6 - 3\widehat{x}_1 + 2x_4 \geqslant 0 \Rightarrow 2x_4 \geqslant 3\widehat{x}_1 - 6 \Rightarrow x_4 \geqslant \frac{3\times 1-6}{2} = -\frac{3}{2}$, $\beta_4 = -\frac{3}{2}$,

logo $\gamma_4 = \max\{0, -\frac{3}{2}\} = 0$.

Basta fazermos $x_4 = 0$ e teremos a nova solução viável: $\widehat{x}_1 = 1$, $\widehat{x}_4 = 0$ fornecendo $\widehat{x}_3 = 3$, $\widehat{x}_2 = 6$, $\widehat{x}_5 = 3$ e $\widehat{z} = 30 + 3x_1 = 33$.

Examinaremos agora x_1 . Como $z_1 - c_1 = -3$ estamos no 2^o caso, portanto faremos x_1 aumentar de valor:

$x_3 = 4 - x_1 \geqslant 0 \Rightarrow x_1 \leqslant 4,$

$x_2 = 6 - \widehat{x}_4 \geqslant,$ qualquer que seja x_1

$x_5 = 6 - 3\widehat{x}_1 + 2x_4 \geqslant 0 \Rightarrow 3x_1 \leqslant 6 + 2\widehat{x}_4 \Rightarrow x_1 \leqslant \frac{6+2\times 0}{3} = 2,$

logo $\alpha_1 = \min\{2, 4\} = 2,$
$s = 3, B(s) = 5$

A nova base será definida por

$$I_B = \{3,\ 2,\ 1\}, \qquad I_N = \{4,\ 5\}.$$

$$I_B = \{3,\ 2,\ 1\}, \quad I_N = \{4,\ 5\},$$

$$B(1) = 3,\ B(2) = 2,\ B(3) = 1,$$

$$B = (a_3\ a_2\ a_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ \text{logo } B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$c_B = (0\ 5\ 3),\ u = c_B B^{-1} = (0\ 5\ 3) \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = (0\ 3\ 1),$$

$$\bar{x}_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} \bar{x}_3 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{z} = c_B B^{-1} b = ub = (0\ 3\ 1) \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 18 \end{pmatrix} = 36$$

$$z_4 = ua_4 = (0\ 3\ 1)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = 3 \Rightarrow z_4 - c_4 = 3 - 0 = 3,$$

$$z_5 = ua_5 = (0\ 3\ 1)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = 1 \Rightarrow z_5 - c_5 = 1 - 0 = 1,$$

$$y_4 = B^{-1}a_4 = \begin{pmatrix}1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\1\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

$$y_5 = B^{-1}a_5 = \begin{pmatrix}1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\1\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&\text{maximizar} && \\
& & z &= 36 + 3x_4 - x_5 \\
&\text{sujeito a:} && \\
& & x_3 &= 2 - \tfrac{2}{3}x_4 + \tfrac{1}{3}x_5 \\
& & x_2 &= 6 - x_4 - x_5 \\
& & x_5 &= 2 + \tfrac{2}{3}x_4 - \tfrac{1}{3}x_5
\end{aligned}
$$

$$x_j \geqslant 0, j = 1, \ldots, 5$$

A solução obtida será $\widehat{x}_1 = 2$, $\widehat{x}_2 = 6$, $\widehat{x}_3 = 2$, $\widehat{x}_4 = 0$, $\widehat{x}_5 = 0$, que é uma solução básica

primal viável. Neste caso obtivemos $z_j - c_j \geqslant 0$, $\forall j \in I_N$, assim sendo, pela definição, esta última solução é também ótima, fornecendo $z = 36$.

Atividade

Sendo dado o problema de programação linear

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximizar} & z = 3x_1 + 5x_2 \\
\text{sujeito a:} & \\
& \begin{array}{rcrcrcrcrcl}
x_1 & & & + & x_3 & & & & & = & 4 \\
& & x_2 & & & + & x_4 & & & = & 6 \\
3x_1 & + & 2x_2 & & & & & + & x_5 & = & 18
\end{array} \\
& \\
& x_j \geqslant 0, \;\; j = 1, 2, 3, 4, 5.
\end{array}
$$

Verificar que as colunas associadas às variáveis x_1, x_2, x_3 formam um base ótima do (P).

Referências I

- P. Belfiore and L.P. Fávero, *Pesquisa operacional para cursos de engenharia*, Elsevier Editora Ltda., 2013.
- Maristela Oliveira dos Santos, *Notas de aula de introdução à pesquisa operacional*, Agosto 2010.
- M.C. Goldbarg and H.P.L. Luna, *Otimização combinatória e programação linear: modelos e algoritmos*, CAMPUS - RJ, 2005.
- N. MACULAN and M.H.C. Fampa, *Otimização linear*, EdUnB, 2006.