

# Atividades

## Simplex

1. Seja o Problema de Programação Linear a seguir:

$$\begin{aligned} (PPL) : \quad & \text{Maximizar} && x_1 & + & x_2 \\ & \text{sujeito a:} && x_1 & + & 4x_2 & \leq & 4 \\ & && 3x_1 & + & x_2 & = & 1 \\ & && x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{aligned}$$

Resolva o PPL pelo método do simplex.

### Solução:

$$\begin{aligned} (PPL) : \quad & \text{Maximizar} && x_1 & + & x_2 \\ & \text{sujeito a:} && x_1 & + & 4x_2 & \leq & 4 \\ & && 3x_1 & + & x_2 & = & 1 \\ & && x_1, x_2 & \geq & 0 \end{aligned}$$

Adicionando variável de folga:

$$\begin{aligned} (PPL) : \quad & \text{Maximizar} && x_1 & + & x_2 & + & 0x_3 \\ & \text{sujeito a:} && x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ & && 3x_1 & + & x_2 & & & = & 1 \\ & && x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{aligned}$$

Criando o problema artificial (PA):

$$\begin{aligned} (PA) : \quad & \text{Minimizar} && x_4 \\ & \text{sujeito a:} && x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & & = & 4 \\ & && 3x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 1 \\ & && x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0 \end{aligned}$$

$$A = (a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = (0 \ 0 \ 0 \ 1).$$

Tomemos

$$I_B = \{3, 4\}, \quad I_N = \{1, 2\},$$

$$B(1) = 3, \quad B(2) = 4$$

$$B = (a_3 \ a_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I, \text{ logo } B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c_B = (0 \ 1), \ u = c_B B^{-1} = (0 \ 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (0 \ 1),$$

$$\bar{x}_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} \bar{x}_3 \\ \bar{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{z} = c_B B^{-1}b = ub = (0 \ 1) \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$z_1 = ua_1 = (0 \ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow z_1 - c_1 = 3 - 0 = 3,$$

$$z_2 = ua_2 = (0 \ 1) \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow z_2 - c_2 = 1 - 0 = 1,$$

$$y_1 = B^{-1}a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$y_2 = B^{-1}a_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tomemos,  $x_1$  para ter seu valor aumentado, isto é, faremos a coluna  $a_1$  entrar na nova base. Como  $L_1 = \{1, 2\}$ , pois  $y_{11} = 1$ ,  $y_{21} = 3$ , passaremos a calcular  $\alpha_1$ :

$$\alpha_1 = \min \left\{ \frac{\bar{x}_{B(1)}}{y_{11}}, \frac{\bar{x}_{B(2)}}{y_{21}} \right\} = \min \left\{ \frac{4}{1}, \frac{1}{3} \right\} = \frac{1}{3} = \frac{\bar{x}_{B(2)}}{y_{21}},$$

logo  $a_{B(2)}$  deixará a base, sendo substituída pela coluna  $a_1$ .

2ª Solução básica:

$$I_B = \{1, \ 3, \}, \ I_N = \{2, \ 4\},$$

$$B(1) = 1, \ B(2) = 3$$

$$B = (a_1 \ a_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \text{ logo } B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$c_B = (0 \ 0), \ u = c_B B^{-1} = (0 \ 0) \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = (0 \ 0),$$

$$\bar{x}_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{11}{3} \end{pmatrix}$$

$$\bar{z} = c_B B^{-1}b = ub = (0 \ 0) \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$z_2 = ua_2 = (0 \ 0) \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow z_2 - c_2 = 0 - 0 = 0,$$

$$z_4 = ua_4 = (0 \ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow z_4 - c_4 = 0 - 1 = -1,$$

Como  $z_j - c_j \leq 0, \forall j \in I_N$ , esta solução básica (2ª solução) é ótima para o PA. Então  $x_1 = \frac{1}{3}$ ,  $x_3 = \frac{11}{3}$ ,  $x_2 = x_4 = 0$  é uma solução ótima, fornecendo  $z = 0$ . Desta forma, a base  $I_B = \{1, 3\}$  será usada como base inicial para o PPL.

Resolvendo o PPL:

$$I_B = \{1, 3\}, \quad I_N = \{2\},$$

$$B(1) = 1, \quad B(2) = 3$$

$$B = (a_1 \ a_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{logo } B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad c_B = (1 \ 0),$$

$$u = c_B B^{-1} = (1 \ 0) \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = (0 \ \frac{1}{3}),$$

$$\bar{x}_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{11}{3} \end{pmatrix}$$

$$\bar{z} = c_B B^{-1}b = ub = (0 \ \frac{1}{3}) \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}$$

$$z_2 = ua_2 = (0 \ \frac{1}{3}) \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad z_2 - c_2 = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3} \leq 0$$

$$y_2 = B^{-1}a_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{11}{3} \end{pmatrix}$$

Tomemos,  $x_2$  para ter seu valor aumentado, isto é, faremos a coluna  $a_2$  entrar na nova base. Como  $L_1 = \{1, 2\}$ , pois  $y_{12} = \frac{1}{3}$ ,  $y_{22} = \frac{11}{3}$ , passaremos a calcular  $\alpha_2$ :

$$\alpha_2 = \min \left\{ \frac{\bar{x}_{B(1)}}{y_{12}}, \frac{\bar{x}_{B(2)}}{y_{22}} \right\} = \min \left\{ \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}}, \frac{\frac{11}{3}}{\frac{11}{3}} \right\} = \frac{1}{3} = \frac{\bar{x}_{B(2)}}{y_{22}},$$

logo  $a_{B(2)}$  deixará a base, sendo substituída pela coluna  $a_2$ .

2ª Solução básica:

$$I_B = \{1, 2\}, \quad I_N = \{3\},$$

$$B(1) = 1, \quad B(2) = 2$$

$$B = (a_1 \ a_2) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{logo } B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{11} \\ \frac{3}{11} & -\frac{1}{11} \end{pmatrix}, \quad c_B = (1 \ 0),$$

$$u = c_B B^{-1} = (1 \ 1) \begin{pmatrix} -\frac{1}{11} & \frac{4}{11} \\ \frac{3}{11} & -\frac{1}{11} \end{pmatrix} = (\frac{2}{11} \ \frac{3}{11}),$$

$$\bar{x}_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{11} & \frac{4}{11} \\ \frac{3}{11} & -\frac{1}{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{z} = c_B B^{-1}b = ub = (\frac{2}{11} \ \frac{3}{11}) \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$z_3 = ua_3 = (\frac{2}{11} \ \frac{3}{11}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{2}{11} \quad \Rightarrow \quad z_3 - c_3 = \frac{2}{11} - 0 = \frac{2}{11} \geq 0$$

Como  $z_j - c_j \geq 0, \forall j \in I_N$ , esta solução básica (2ª solução) é ótima para o PLL. Então  $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 0$  é uma solução ótima, fornecendo  $z^* = 1$ .

## Dualidade

1. Seja

(P): Minimizar  $6x_1 + 9x_2 + 42x_3 + 36x_4$   
 sujeito a:

$$\begin{aligned} x_1 &+ 3x_3 + 5x_4 \geq 2 \\ x_2 &+ 4x_3 + 2x_4 \geq 3 \\ x_i &\geq 0, \ i = 1, \dots, 4. \end{aligned}$$

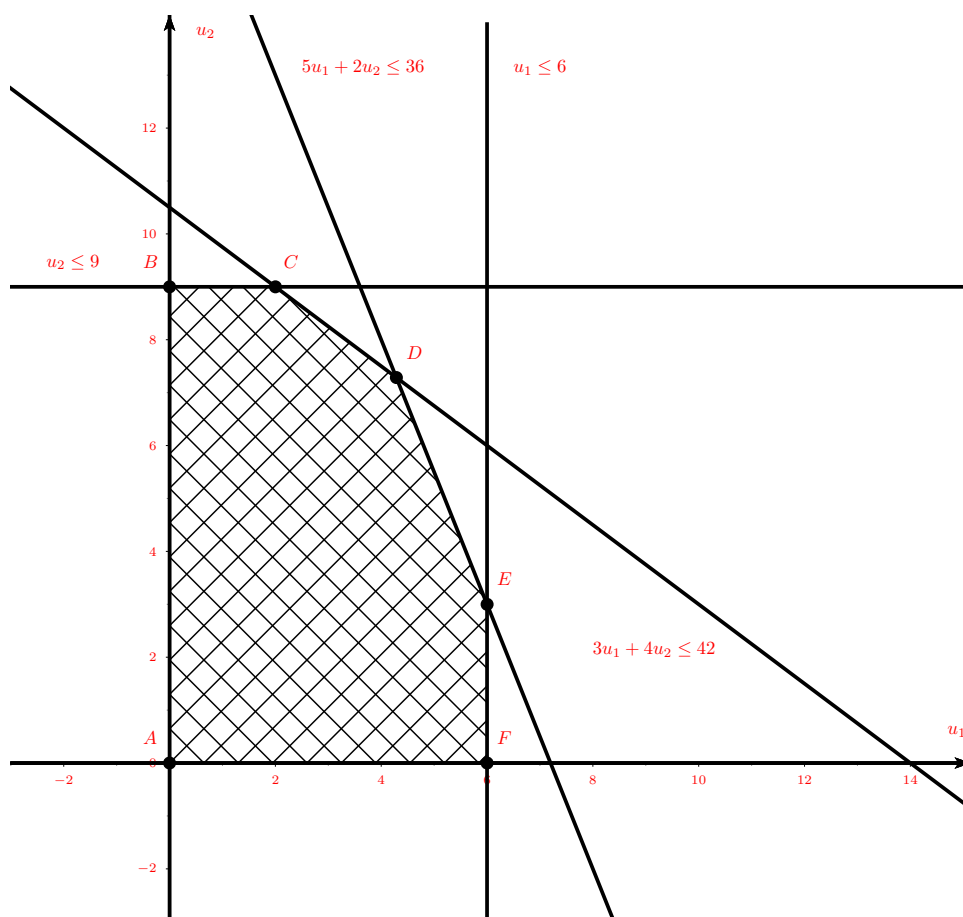
Escrever (D) o problema dual de (P). Resolver graficamente (D). A partir da solução ótima de (D) encontrar a solução ótima de (P) utilizando as relações das folgas complementares.

### Solução:

Problema dual (D):

$$\begin{aligned} (D) : \text{ Maximizar } & 2u_1 + 3u_2 \\ \text{sujeito a: } & u_1 \leq 6 \\ & u_2 \leq 9 \\ & 3u_1 + 4u_2 \leq 42 \\ & 5u_1 + 2u_2 \leq 36 \\ & u_1, u_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Resolvendo graficamente (D):



Solução ótima  $u = (2, 9)$

Encontrar solução ótima de (P) utilizando as relações das folgas complementares:  
Das folgas complementares, se  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$  é viável no primal,  $u = (u_1, u_2)$  é viável no dual e ambos satisfazem as equações:

$$(c_j - u^T A_j)x_j = 0 \quad \forall j$$

$$u_i(a_i^T x - b_i) = 0 \quad \forall i$$

então  $\bar{x}$  é ótimo no primal e  $\bar{u}$  no dual. Tem que:

$$\begin{aligned} (u_1 - 6)x_1 &= 0 \Rightarrow (2 - 6)x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \\ (u_2 - 9)x_2 &= 0 \Rightarrow (9 - 9)x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = ? \\ (3u_1 + 4u_2 - 42)x_3 &= 0 \Rightarrow (42 - 42)x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = ? \\ (5u_1 + 2u_2 - 36)x_4 &= 0 \Rightarrow (28 - 36)x_4 = 0 \Rightarrow x_4 = 0 \end{aligned}$$

Tem-se que  $x_1 = 0$  e  $x_4 = 0$ .

$$\begin{aligned} 2(3x_3 + 5x_4 - 2) &= 0 \Rightarrow 3x_3 = 2 \Rightarrow x_3 = \frac{2}{3} \\ 9(x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 3) &= 0 \Rightarrow x_2 + 4 \times \frac{2}{3} - 3 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Portanto, temos que

$$z = 6 \times 0 + 9 \times \frac{1}{3} + 42 \times \frac{2}{3} + 36 \times 0 = 31,$$

o que confirma que  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = \frac{1}{3}$ ,  $x_3 = \frac{2}{3}$  e  $x_4 = 0$  é solução ótima de (P)

2. Seja

(P): Minimizar  $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5$   
sujeito a:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 &\geq 4 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 &\geq 3 \\ x_i &\geq 0, \quad i = 1, \dots, 5. \end{aligned}$$

a) Escrever (D) o problema dual de (P).

**Solução:**

$$\begin{aligned} (D): \text{ Maximizar } & 4u_1 + 3u_2 \\ \text{sujeito a: } & u_1 + 2u_2 \leq 2 \\ & u_1 - 2u_2 \leq 3 \\ & 2u_1 + 3u_2 \leq 5 \\ & u_1 + u_2 \leq 2 \\ & 3u_1 + u_2 \leq 3 \\ & u_1, u_2 \geq 0 \end{aligned}$$

b) Resolver graficamente (D).

**Solução:**

A solução ótima do dual é  $u^* = (\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ , com valor de função objetivo 5.

## Dual Simplex