CIÊNCIA da COMPUTAÇÃO
Universidade Federal do Tocantins

Pesquisa Operacional

20 de agosto de 2024

Prof. Warley Gramacho
wgramacho@uft.edu.br

Modelos de Programação Linear

Programação Linear

- Teoria matemática: Kantorovich, 1939 (lhe rendeu um Nobel)
- 1940: Algoritmo Simplex desenvolvido por Dantzig
- Técnica poderosa (capaz de modelar muitos problemas)

Programação Linear

Função Objetivo

Minimizar custo,tempo,risco,poluição, . . . ou
Maximizar lucro,qualidade,segurança, . . . ou
Encontrar qualquer solução viável (que atenda alguns requisitos)

Restrições

Disponibilidade de recursos, . . .
Operacionais horários de trabalho, tempo de máquina, . . .
Limites venda em escala, . . .

Problema da Mistura

- Materiais disponíveis são combinados para gerar novos produtos com características convenientes;
- Um dos primeiros problemas de otimização linear implementados com sucesso na prática.
- Abordagens:
  - Ração;
  - Ligas metálicas;
  - Composição de filtros de areia.

O Problema da Mistura de Ligas Metálicas

Uma metalúrgica deseja maximizar sua receita bruta. A Tabela abaixo ilustra a proporção de cada material na mistura para a obtenção das ligas passíveis de fabricação. O preço está cotado em Reais por tonelada da liga fabricada. Também em toneladas estão expressas as restrições de disponibilidade de matéria-prima.

	Liga Especial de Baixa Resistência	Liga Especial de Alta Resistência	Disponibilidade de Matéria-prima
Cobre	0,5	0,2	16 Ton
Zinco	0,25	0,3	11 Ton
Chumbo	0,25	0,5	15 Ton
Preço de Venda (R$ por Ton)	R$ 3.000	R$ 5.000	$\frac{\text{Ton minério}}{\text{Ton liga}}$

Problema da mistura - Pergunta-se

- Como misturar (as quantidades) dos materiais para produzir a liga de menor custo possível?
- A mistura atende as disponibilidade de matéria-prima?

O Problema da Mistura de Ligas Metálicas

- Escolha da variável de decisão
  x_i o quantidade em toneladas produzidas da liga especial de baixa resistência ($i = 1$) e especial de alta resistência ($i = 2$).

- Elaboração da função objetivo
  $z = Maximizar \{f(x) = 3.000x_1 + 5.000x_2\}$ Receita bruta em Reais em função da quantidade produzida em toneladas de ligas especiais de baixa e alta resistência.

- Formulação das restrições tecnológicas
  a) Restrição associada à disponibilidade do cobre:
     $0,5x_1 + 0,2x_2 \leqslant 16$
  b) Restrição associada à disponibilidade do zinco:
     $0,25x_1 + 0,3x_2 \leqslant 11$
  c) Restrição associada à disponibilidade do chumbo:
     $0,25x_1 + 0,5x_2 \leqslant 15$
  d) Restrições de não negatividade:
     $x_1 \geqslant 0, \ \ x_2 \geqslant 0$

O Problema da Mistura de Ligas Metálicas

CIÊNCIA da COMPUTAÇÃO
Universidade Federal do Tocantins

Modelo Matemático

$$
\begin{aligned}
\textit{Maximizar} \quad & z = 3.000x_1 + 5.000x_2 \\
\textit{sujeito a}: \quad & \\
& 0,5x_1 + 0,2x_2 \leqslant 16 \\
& 0,25x_1 + 0,3x_2 \leqslant 11 \\
& 0,25x_1 + 0,5x_2 \leqslant 15 \\
& x_1 \geqslant 0, \;\; x_2 \geqslant 0
\end{aligned}
$$

Problema da Dieta

Para uma boa alimentação, o corpo necessita de vitaminas e proteínas. A necessidade mínima de vitaminas é de 32 unidades por dia e a de proteínas de 36 unidades por dia. Uma pessoa tem disponível carne e ovos para se alimentar. Cada unidade de carne contém 8 unidades de vitamina e 6 unidades de proteínas. Cada unidade de ovo contém 4 unidades de vitamina e 6 unidades de proteínas. Cada unidade de carne custa 3 unidades monetárias e cada unidade de ovo custo 2,5 unidades monetárias. Qual a quantidade diária de carne e ovos que deve ser consumida para suprir as necessidades de vitaminas e proteínas com menor custo possível ?

Problema da dieta

Variáveis de Decisão

x_1 quantidade que será comprada de carne

x_2 quantidade que será comprada de ovos

Custo de uma solução

Preço da carne: 3

Preço dos ovos: 2,5

$$3x_1 + 2,5x_2$$

Problema da dieta

Variáveis de Decisão

x_1 quantidade que será comprada de carne
x_2 quantidade que será comprada de ovos

Custo de uma solução

Preço da carne: 3
Preço dos ovos: 2,5

$$3x_1 + 2,5x_2$$

Problema da dieta

A solução tem que satisfazer os requerimentos nutricionais:

Nutriente	Quantidade Mínima
Vitaminas	32
Proteínas	36

restrições

	Carne	Ovos	
vitaminas	$8x_1$	$4x_2$	$\geqslant 32$
proteínas	$6x_1$	$6x_2$	$\geqslant 36$

Modelo Matemático

$$
\begin{aligned}
&\textit{Minimizar} \quad z = 3x_1 + 2.5x_2 \\
&\textit{sujeito a}: \\
&\qquad 8x_1 + 4x_2 \geqslant 32 \\
&\qquad 6x_1 + 6x_2 \geqslant 36 \\
&\qquad x_1 \geqslant 0, \;\; x_2 \geqslant 0
\end{aligned}
$$

Referências I

- P. Belfiore and L.P. Fávero, *Pesquisa operacional para cursos de engenharia*, Elsevier Editora Ltda., 2013.
- Maristela Oliveira dos Santos, *Notas de aula de introdução à pesquisa operacional*, Agosto 2010.
- M.C. Goldbarg and H.P.L. Luna, *Otimização combinatória e programação linear: modelos e algoritmos*, CAMPUS - RJ, 2005.
- N. MACULAN and M.H.C. Fampa, *Otimização linear*, EdUnB, 2006.