Atividades

Simplex

1. Seja o Problema de Programação Linear a seguir:

$$\begin{array}{llcccccc} (PPL): & \text{Maximizar} & x_1 & + & x_2 & & \\ & \text{sujeito a:} & x_1 & + & 4x_2 & \geq & 4 \\ & & 3x_1 & + & x_2 & = & 1 \\ & & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Resolva o PPL pelo método do simplex.

Solução:

$$\begin{array}{llcccccc} (PPL): & \text{Maximizar} & x_1 & + & x_2 & & \\ & \text{sujeito a:} & x_1 & + & 4x_2 & \geq & 4 \\ & & 3x_1 & + & x_2 & = & 1 \\ & & & & x_1,\ x_2 \geq 0 & & \end{array}$$

Adicionando variável de folga:

$$\begin{array}{llcccccccc} (PPL): & \text{Maximizar} & x_1 & + & x_2 & + & 0x_3 & & \\ & \text{sujeito a:} & x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ & & 3x_1 & + & x_2 & & & = & 1 \\ & & & & x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 & & & & \end{array}$$

Criando o problema artificial (PA):

$$\begin{array}{llcccccccccc} (PA): & \text{Minimizar} & x_4 & & & & & & & & \\ & \text{sujeito a:} & x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & & & = & 4 \\ & & 3x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 1 \\ & & & & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0 & & & & & & \end{array}$$

$$A = (a_1\ a_2\ a_3\ a_4) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix},\ c = (0\ 0\ 0\ 1).$$

Tomemos

$$I_B = \{3,\ 4\},\quad I_N = \{1,\ 2\},$$

$$B(1) = 3,\ B(2) = 4$$

$$B = (a_3\ a_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I,\ \text{logo}\ B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c_B = (0\ 1),\ u = c_B B^{-1} = (0\ 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (0\ 1),$$

$$\overline{x}_B = B^{-1} b = \begin{pmatrix} \overline{x}_3 \\ \overline{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{z} = c_B B^{-1} b = ub = (0\ 1) \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$z_1 = ua_1 = (0\ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow z_1 - c_1 = 3 - 0 = 3,$$

$$z_2 = ua_2 = (0\ 1) \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow z_2 - c_2 = 1 - 0 = 1,$$

$$y_1 = B^{-1} a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$y_2 = B^{-1} a_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tomemos, x_1 para ter seu valor aumentado, isto é, faremos a coluna a_1 entrar na nova base. Como $L_1 = \{1, 2\}$, pois $y_{11} = 1$, $y_{21} = 3$, passaremos a calcular α_1:

$$\alpha_1 = \min \left\{ \frac{\overline{x}_{B(1)}}{y_{11}}, \frac{\overline{x}_{B(2)}}{y_{21}} \right\} = \min \left\{ \frac{4}{1}, \frac{1}{3} \right\} = \frac{1}{3} = \frac{\overline{x}_{B(2)}}{y_{21}},$$

logo $a_{B(2)}$ deixará a base, sendo substituída pela coluna a_1.

2ª Solução básica:

$$I_B = \{1,\ 3,\},\quad I_N = \{2,\ 4\},$$

$$B(1) = 1,\ B(2) = 3$$

$$B = (a_1\ a_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},\ \text{logo}\ B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$c_B = (0\ 0),\ u = c_B B^{-1} = (0\ 0) \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = (0\ 0),$$

$$\overline{x}_B = B^{-1} b = \begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{11}{3} \end{pmatrix}$$

$$\overline{z} = c_B B^{-1} b = ub = (0\ 0) \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$z_2 = ua_2 = (0\ 0)\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow z_2 - c_2 = 0 - 0 = 0,$$

$$z_4 = ua_4 = (0\ 0)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow z_4 - c_4 = 0 - 1 = -1,$$

Como $z_j - c_j \leq 0, \forall j \in I_N$, esta solução básica (2ª solução) é ótima para o PA. Então $x_1 = \frac{1}{3},\ x_3 = \frac{11}{3},\ x_2 = x_4 = 0$ é uma solução ótima, fornecendo $z = 0$. Desta forma, a base $I_B = \{1, 3\}$ será usada como base inicial para o PPL.

Resolvendo o PPL:

$$I_B = \{1,\ 3,\},\quad I_N = \{2\},$$

$$B(1) = 1,\ B(2) = 3$$

$$B = (a_1\ a_3) = \begin{pmatrix}1 & 1\\3 & 0\end{pmatrix},\ \text{logo } B^{-1} = \begin{pmatrix}0 & \frac{1}{3}\\1 & -\frac{1}{3}\end{pmatrix},\ c_B = (1\ 0),$$

$$u = c_B B^{-1} = (1\ 0)\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{3}\\1 & -\frac{1}{3}\end{pmatrix} = (0\ \frac{1}{3}),$$

$$\overline{x}_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix}\overline{x}_1\\\overline{x}_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \frac{1}{3}\\1 & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{11}{3}\end{pmatrix}$$

$$\overline{z} = c_B B^{-1} b = ub = (0\ \frac{1}{3})\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}$$

$$z_2 = ua_2 = (0\ \frac{1}{3})\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad z_2 - c_2 = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3} \leq 0$$

$$y_2 = B^{-1}a_2 = \begin{pmatrix}0 & \frac{1}{3}\\1 & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{11}{3}\end{pmatrix}$$

Tomemos, x_2 para ter seu valor aumentado, isto é, faremos a coluna a_2 entrar na nova base. Como $L_1 = \{1, 2\}$, pois $y_{12} = \frac{1}{3}$, $y_{22} = \frac{11}{3}$, passaremos a calcular α_2:

$$\alpha_2 = \min\left\{\frac{\overline{x}_{B(1)}}{y_{12}}, \frac{\overline{x}_{B(2)}}{y_{22}}\right\} = \min\left\{\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}}, \frac{\frac{11}{3}}{\frac{11}{3}}\right\} = \frac{1}{3} = \frac{\overline{x}_{B(2)}}{y_{22}},$$

logo $a_{B(2)}$ deixará a base, sendo substituída pela coluna a_2.

2ª Solução básica:

$$I_B = \{1,\ 2,\},\quad I_N = \{3\},$$

$$B(1) = 1,\ B(2) = 2$$

$$B = (a_1\ a_2) = \begin{pmatrix}1 & 4\\3 & 1\end{pmatrix},\ \text{logo } B^{-1} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{11} & \frac{4}{11}\\\frac{3}{11} & -\frac{1}{11}\end{pmatrix},\ c_B = (1\ 0),$$

$$u = c_B B^{-1} = (1\ 1)\begin{pmatrix} -\frac{1}{11} & \frac{4}{11} \\ \frac{3}{11} & -\frac{1}{11} \end{pmatrix} = (\frac{2}{11}\ \frac{3}{11}),$$

$$\overline{x}_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{11} & \frac{4}{11} \\ \frac{3}{11} & -\frac{1}{11} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{z} = c_B B^{-1}b = ub = (\frac{2}{11}\ \frac{3}{11})\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$z_3 = ua_3 = (\frac{2}{11}\ \frac{3}{11})\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{2}{11} \quad \Rightarrow \quad z_3 - c_3 = \frac{2}{11} - 0 = \frac{2}{11} \geq 0$$

Como $z_j - c_j \geq 0$, $\forall j \in I_N$, esta solução básica (2ª solução) é ótima para o PLL.
Então $x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 0$ é uma solução ótima, fornecendo $z^* = 1$.

Dualidade

1. Seja

$$\begin{array}{llrrrrrrrl} \text{(P):} & \text{Minimizar} & 6x_1 & + & 9x_2 & + & 42x_3 & + & 36x_4 & \\ & \text{sujeito a:} & & & & & & & & \\ & & x_1 & & & + & 3x_3 & + & 5x_4 & \geq 2 \\ & & & & x_2 & + & 4x_3 & + & 2x_4 & \geq 3 \\ & & & & \multicolumn{5}{l}{x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, 4.} \end{array}$$

Escrever (D) o problema dual de (P). Resolver graficamente (D). A partir da solução ótima de (D) encontrar a solução ótima de (P) utilizando as relações das folgas complementares.

Solução:
Problema dual (D):

$$\begin{array}{llrcrcl} (D): & \text{Maximizar} & 2u_1 & + & 3u_2 & & \\ & \text{sujeito a:} & u_1 & & & \leq & 6 \\ & & & & u_2 & \leq & 9 \\ & & 3u_1 & + & 4u_2 & \leq & 42 \\ & & 5u_1 & + & 2u_2 & \leq & 36 \\ & & & & u_1,\ u_2 \geq 0 & & \end{array}$$

Resolvendo graficamente (D):

Solução ótima $u = (2, 9)$

Encontrar solução ótima de (P) utilizando as relações das folgas complementares: Das folgas complementares, se $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ é viável no primal, $u = (u_1, u_2)$ é viável no dual e ambos satisfazem as equações:

$$(c_j - u^T A_j)x_j = 0 \quad \forall j$$

$$u_i(a_i^T x - b_i) = 0 \quad \forall i$$

então $\overline{x}$ é ótimo no primal e $\overline{u}$ no dual. Tem que:

$$\begin{array}{rcccccc}
(u_1 - 6)x_1 & = & 0 & \Rightarrow & (2-6)x_1 = 0 & \Rightarrow & x_1 = 0 \\
(u_2 - 9)x_2 & = & 0 & \Rightarrow & (9-9)x_2 = 0 & \Rightarrow & x_2 = \ ? \\
(3u_1 + 4u_2 - 42)x_3 & = & 0 & \Rightarrow & (42-42)x_3 = 0 & \Rightarrow & x_3 = \ ? \\
(5u_1 + 2u_2 - 36)x_4 & = & 0 & \Rightarrow & (28-36)x_4 = 0 & \Rightarrow & x_4 = 0
\end{array}$$

Tem-se que $x_1 = 0$ e $x_4 = 0$.

$$\begin{array}{rcccl}
2(3x_3 + 5x_4 - 2) & = & 0 & \Rightarrow & 3x_3 = 2 \Rightarrow x_3 = \frac{2}{3} \\
9(x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 3) & = & 0 & \Rightarrow & x_2 + 4 \times \frac{2}{3} - 3 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{3}
\end{array}$$

Portanto, temos que

$$z = 6 \times 0 + 9 \times \frac{1}{3} + 42 \times \frac{2}{3} + 36 \times 0 = 31,$$

o que confirma que $x_1 = 0,\ x_2 = \frac{1}{3},\ x_3 = \frac{2}{3}$ e $x_4 = 0$ é solução ótima de (P)

2. Seja

$$\begin{array}{llccccccccccc}
\text{(P):} & \text{Minimizar} & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & + & 3x_5 & & \\
 & \text{sujeito a:} & & & & & & & & & & & \\
 & & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & + & 3x_5 & \geq & 4 \\
 & & 2x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & + & x_5 & \geq & 3 \\
 & & & & & & x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, 5. & & & & & &
\end{array}$$

a) Escrever (D) o problema dual de (P).

Solução:

$$\begin{array}{llccccc}
(D): & \text{Maximizar} & 4u_1 & + & 3u_2 & & \\
 & \text{sujeito a:} & u_1 & + & 2u_2 & \leq & 2 \\
 & & u_1 & - & 2u_2 & \leq & 3 \\
 & & 2u_1 & + & 3u_2 & \leq & 5 \\
 & & u_1 & + & u_2 & \leq & 2 \\
 & & 3u_1 & + & u_2 & \leq & 3 \\
 & & & u_1,\ u_2 \geq 0 & & &
\end{array}$$

b) Resolver graficamente (D).

Solução:

A solução ótima do dual é $u^\star = (\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$, com valor de função objetivo 5.

Dual Simplex