Atividades

Simplex

1. Seja o Problema de Programação Linear a seguir:

$$
\begin{array}{llcccccc}
(PPL): & \text{Maximizar} & x_1 & + & x_2 & & \\
 & \text{sujeito a:} & x_1 & + & 4x_2 & \leq & 4 \\
 & & 3x_1 & + & x_2 & = & 1 \\
 & & x_1 & , & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Resolva o PPL pelo método do simplex.

Solução:

$$
\begin{array}{llcccccc}
(PPL): & \text{Maximizar} & x_1 & + & x_2 & & \\
 & \text{sujeito a:} & x_1 & + & 4x_2 & \leq & 4 \\
 & & 3x_1 & + & x_2 & = & 1 \\
 & & & & \multicolumn{3}{l}{x_1,\ x_2 \geq 0}
\end{array}
$$

Adicionando variável de folga:

$$
\begin{array}{llcccccccc}
(PPL): & \text{Maximizar} & x_1 & + & x_2 & + & 0x_3 & & \\
 & \text{sujeito a:} & x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & = & 4 \\
 & & 3x_1 & + & x_2 & & & = & 1 \\
 & & & & \multicolumn{5}{l}{x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0}
\end{array}
$$

Resolvendo o PPL:

$$A = (a_1\ a_2\ a_3) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix},\ c = (1\ 1\ 0).$$

$$I_B = \{1,\ 3\},\quad I_N = \{2\},$$

$$B(1) = 1,\ B(2) = 3$$

$$B = (a_1\ a_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},\ \text{logo } B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix},\ c_B = (1\ 0),$$

$$u = c_B B^{-1} = (1\ 0) \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = (0\ \frac{1}{3}),$$

$$\overline{x}_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{11}{3} \end{pmatrix}$$

$$\overline{z} = c_B B^{-1} b = ub = (0\ \frac{1}{3}) \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}$$

$$z_2 = ua_2 = (0\ \frac{1}{3}) \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad z_2 - c_2 = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3} \leq 0$$

$$y_2 = B^{-1} a_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{11}{3} \end{pmatrix}$$

Tomemos, x_2 para ter seu valor aumentado, isto é, faremos a coluna a_2 entrar na nova base. Como $L_1 = \{1, 2\}$, pois $y_{12} = \frac{1}{3}$, $y_{22} = \frac{11}{3}$, passaremos a calcular α_2:

$$\alpha_2 = \min \left\{ \frac{\overline{x}_{B(1)}}{y_{12}}, \frac{\overline{x}_{B(2)}}{y_{22}} \right\} = \min \left\{ \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}}, \frac{\frac{11}{3}}{\frac{11}{3}} \right\} = \frac{1}{3} = \frac{\overline{x}_{B(2)}}{y_{22}},$$

logo $a_{B(2)}$ deixará a base, sendo substituída pela coluna a_2.

2ª Solução básica:

$$I_B = \{1,\ 2,\},\quad I_N = \{3\},$$

$$B(1) = 1,\ B(2) = 2$$

$$B = (a_1\ a_2) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},\ \text{logo}\ B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{11} & \frac{4}{11} \\ \frac{3}{11} & -\frac{1}{11} \end{pmatrix},\ c_B = (1\ 0),$$

$$u = c_B B^{-1} = (1\ 1) \begin{pmatrix} -\frac{1}{11} & \frac{4}{11} \\ \frac{3}{11} & -\frac{1}{11} \end{pmatrix} = (\frac{2}{11}\ \frac{3}{11}),$$

$$\overline{x}_B = B^{-1} b = \begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{11} & \frac{4}{11} \\ \frac{3}{11} & -\frac{1}{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{z} = c_B B^{-1} b = ub = (\frac{2}{11}\ \frac{3}{11}) \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$z_3 = ua_3 = (\frac{2}{11}\ \frac{3}{11}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{2}{11} \quad \Rightarrow \quad z_3 - c_3 = \frac{2}{11} - 0 = \frac{2}{11} \geq 0$$

Como $z_j - c_j \geq 0$, $\forall j \in I_N$, esta solução básica (2ª solução) é ótima para o PLL. Então $x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 0$ é uma solução ótima, fornecendo $z^* = 1$.