Problema do Caminho Mais Curto

PESQUISA OPERACIONAL

Alunos: Daniel Nolêto e João Giani
Professor: Warley Gramacho
Universidade Federal do Tocantins

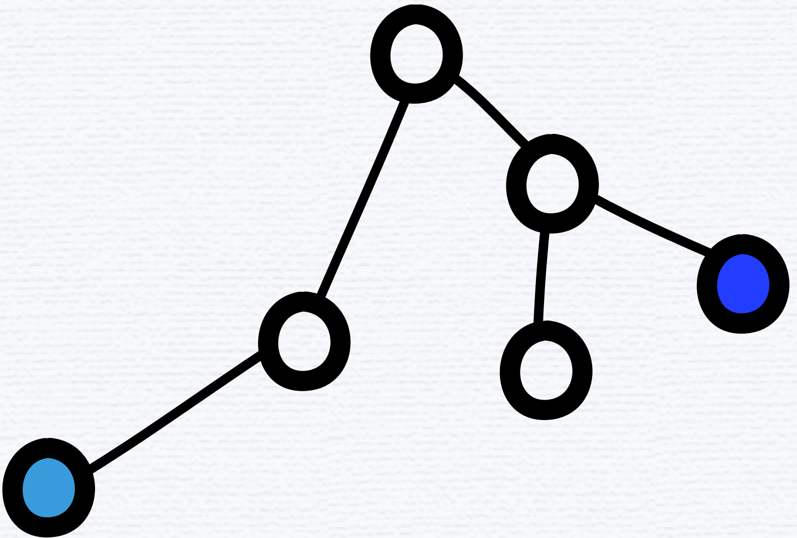
Introdução

DEFINIÇÃO

O problema do caminho mais curto consiste em encontrar o caminho de menor custo (ou distância) entre dois pontos em um grafo, onde as arestas possuem um peso, que pode representar tempo, distância, custo ou qualquer outro critério relevante.

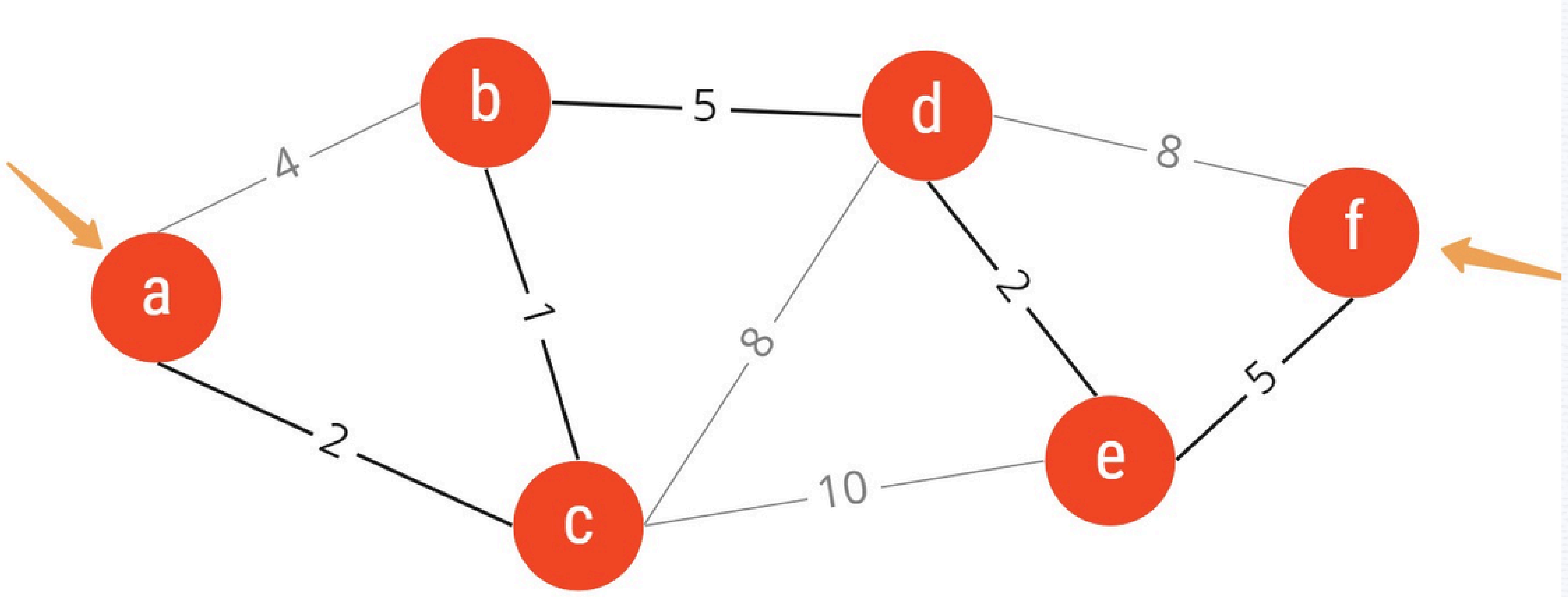
APLICAÇÃO REAL

O problema do caminho mais curto é usado para otimizar rotas em GPS, logística, redes de comunicação e jogos, reduzindo custos e tempos ao encontrar a rota mais eficiente entre dois pontos.

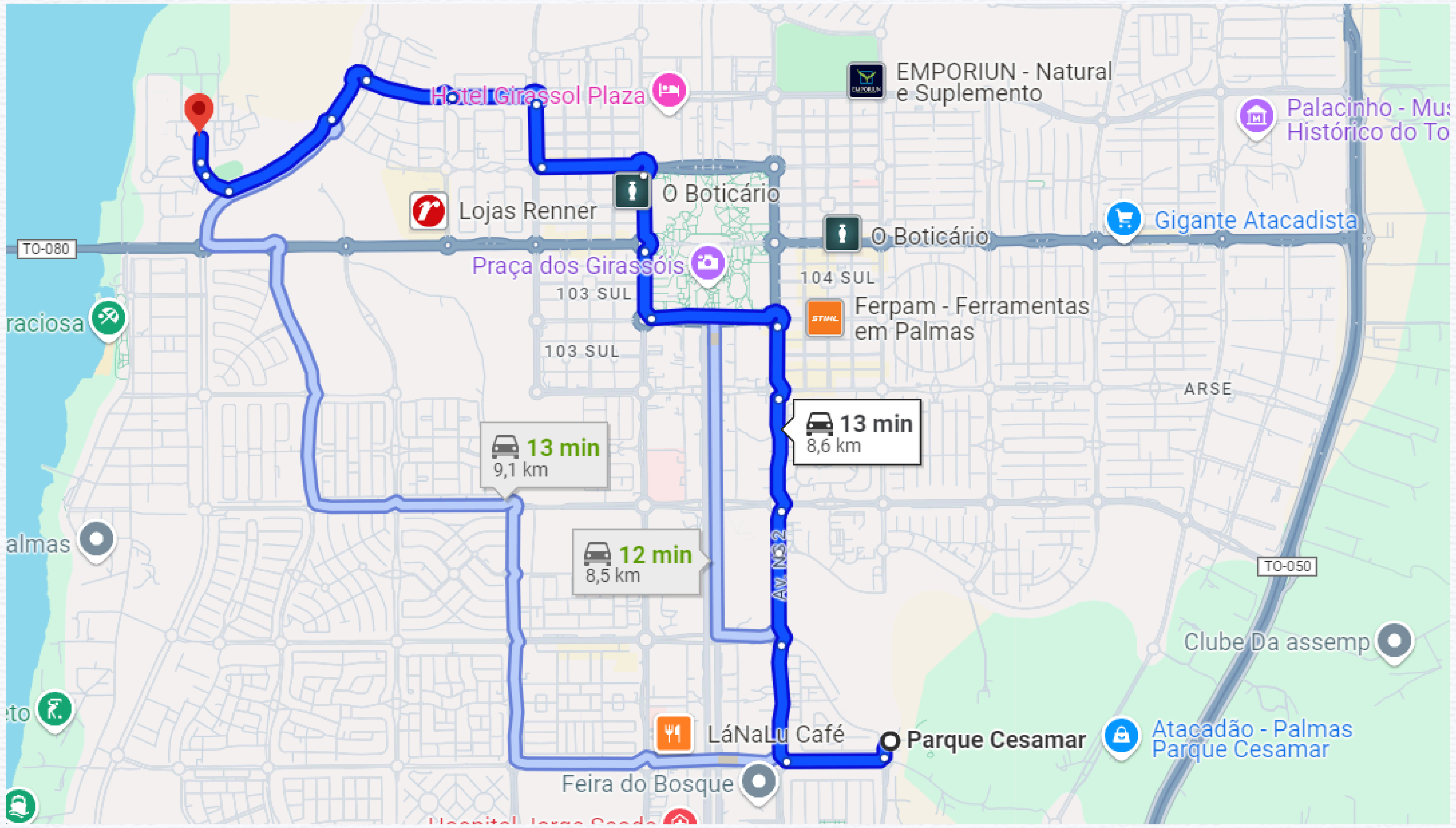


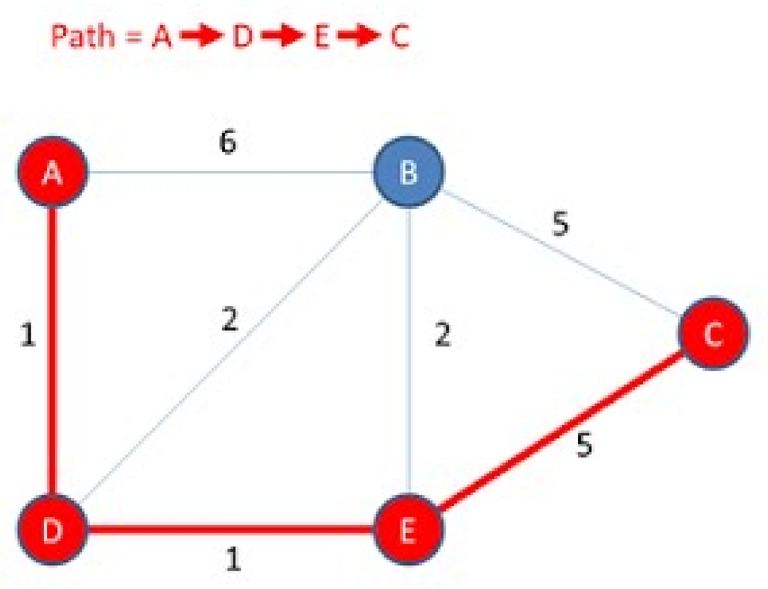
EXEMPLO GRÁFICO

- **Objetivo**: O objetivo é encontrar o menor caminho entre dois pontos no grafo, minimizando o custo total.
- **Algoritmo de Dijkstra**: Encontrar o caminho mais curto de um único ponto a todos os outros.



$$2 + 1 + 5 + 2 + 5 = 15$$





Vertex	Shortest distance from A	Previous vertex
A	0	
B	3	D
C	7	E
D	1	A
E	2	D

Modelagem Matemática

01 DEFINIÇÃO DAS VARIÁVEIS

- Para modelar o problema do caminho mais curto em programação matemática, definimos:
- V = conjunto de vértices (cidades, pontos de entrega, etc.).
- E = conjunto de arestas (estradas, conexões, etc.).
- w_{ij} = distância (ou custo) da aresta que conecta o vértice i ao vértice j.
- x_{ij} = variável binária que indica se a aresta (i,j)(i,j)(i,j) faz parte do caminho (1) ou não (0).
- s,t: Vértices de origem (s) e destino (t).

Modelagem Matemática

02 FUNÇÃO OBJETIVO

O objetivo é minimizar a soma das distâncias/custos das arestas selecionadas no caminho entre dois pontos:

$$\text{Minimizar: } \sum_{(i,j)\in E} w[i,j]\cdot x[i,j]$$

Modelagem Matemática

03 RESTRIÇÕES

- **Balanço de Fluxo** garante que o fluxo entra e sai corretamente dos vértices:

$$\sum_{(i,v)\in E} x[i,v] - \sum_{(v,j)\in E} x[v,j] = \begin{cases} -1 & \text{se } v = s \\ 1 & \text{se } v = t \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

  - No vértice s, o fluxo é de saída (−1).
  - No vértice t, o fluxo é de entrada (+1).
  - Em outros vértices, o fluxo é neutro (0).
- Binárias: As variáveis x[i,j] são binárias ($x[i,j] \in \{0,1\}$), assegurando que uma aresta seja escolhida ou não no caminho.

Funcionamento do GLPK

01 LEITURA E INTERPRETAÇÃO

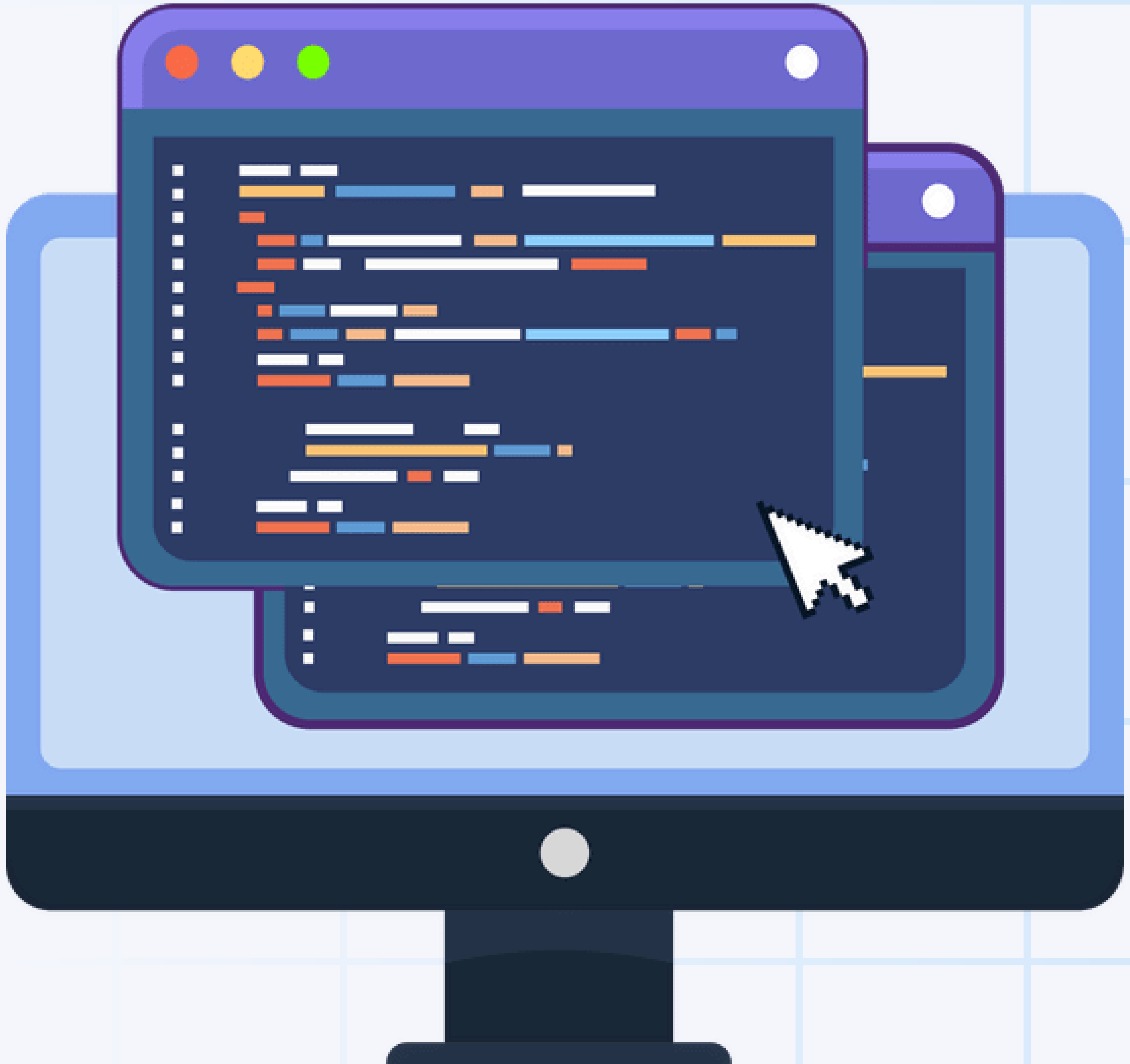
- O GLPK converte o problema em um modelo matemático de Programação Linear Inteira Binária (PLIB).
- As variáveis x[i,j] indicam se uma aresta (i,j) está no caminho (1) ou não (0).
- A função objetivo minimiza a soma dos pesos (w[i,j]) das arestas selecionadas.

Funcionamento do GLPK

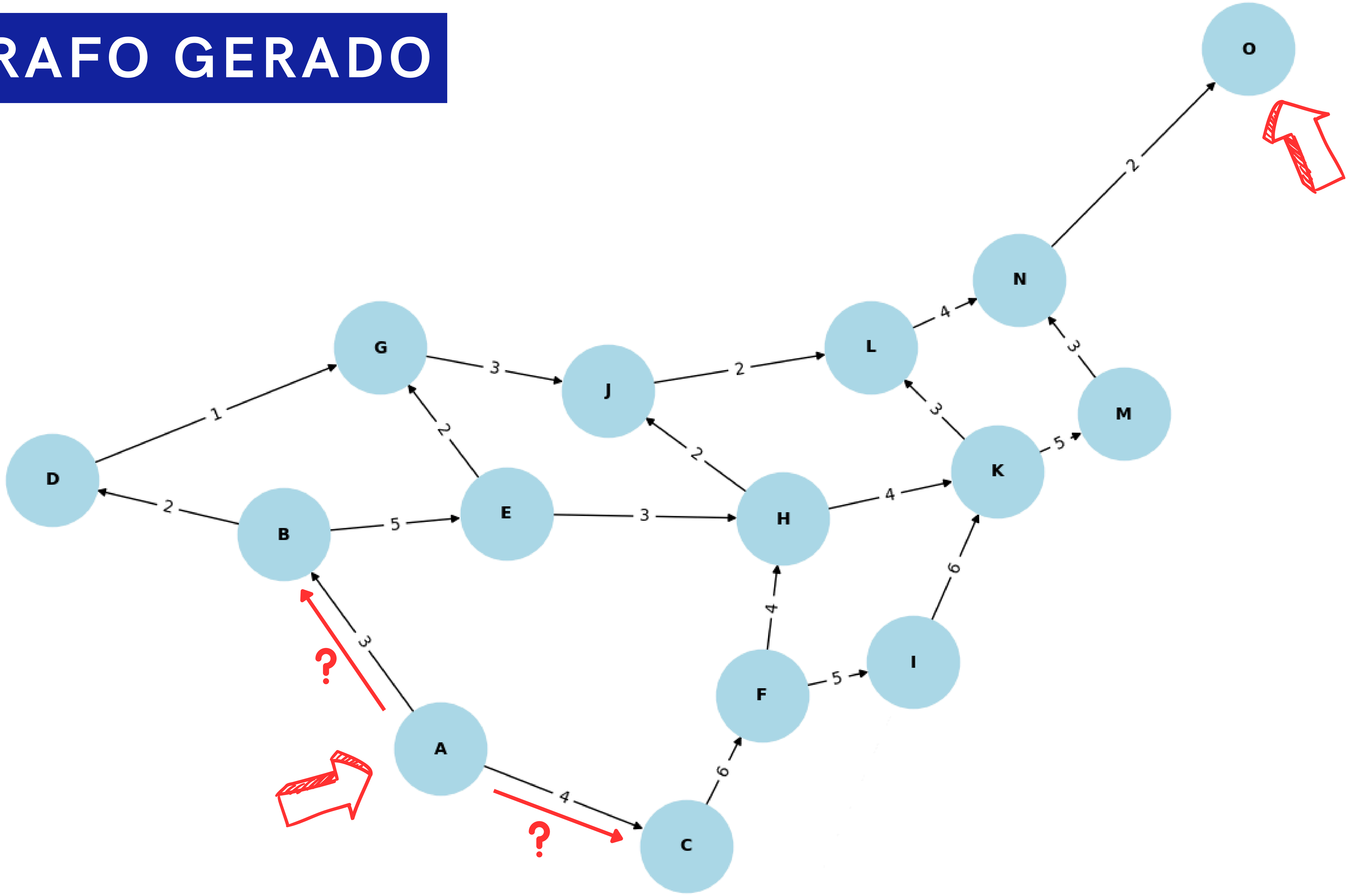
02 RESOLUÇÃO

- Utiliza Branch-and-Bound (B&B):
    - Resolve uma versão relaxada do problema (com x[i,j] contínuas).
    - Explora possibilidades fixando valores inteiros (0 ou 1).
    - Descarta soluções inviáveis (poda por limite).
- Garante que todas as variáveis x[i,j] sejam binárias e que o fluxo satisfaça as condições do problema (fluxo líquido -1 em s, +1 em t, e 0 nos demais vértices).

Implementação



GRAFO GERADO



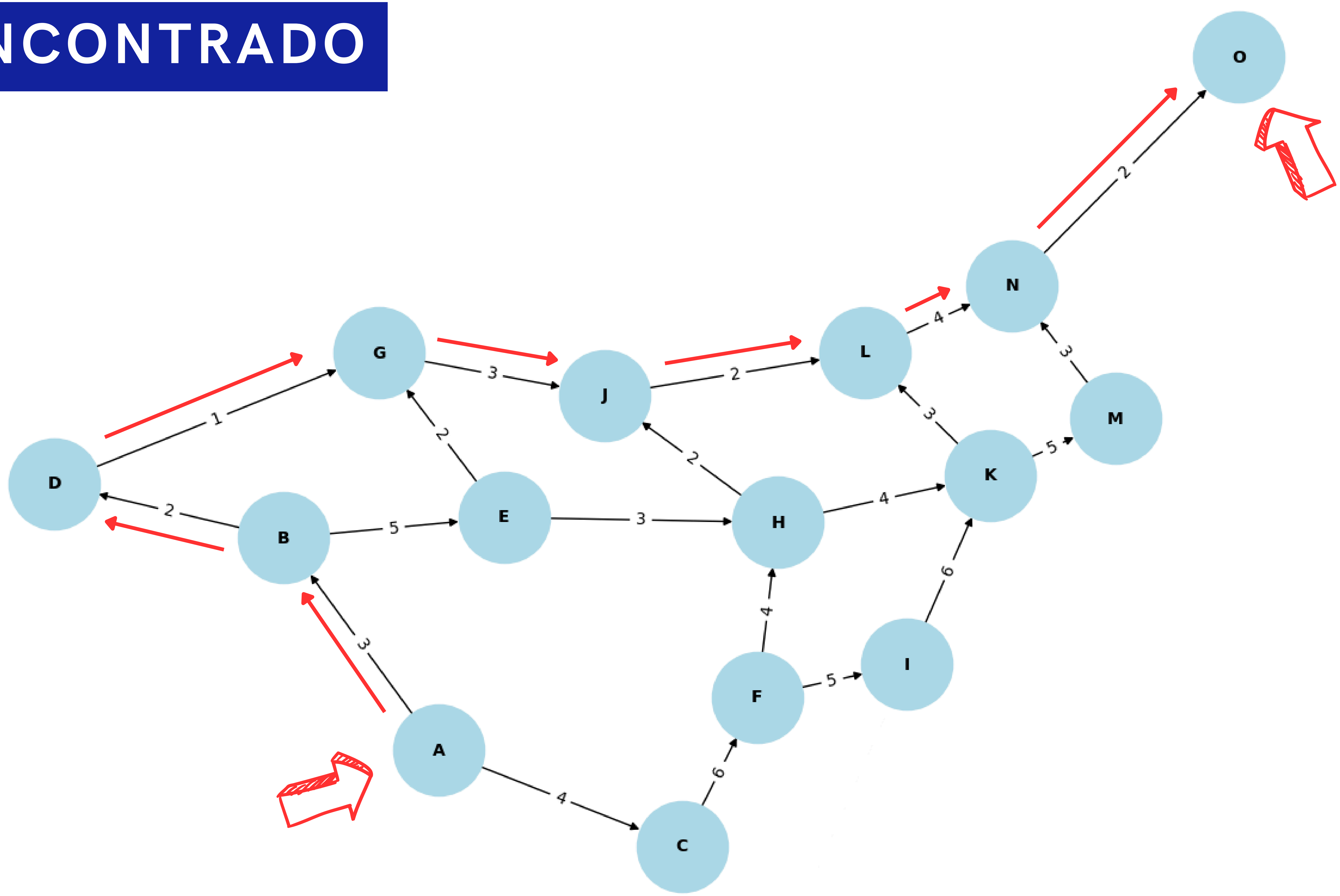
CAMINHO ENCONTRADO

Arestas Visitadas:

- X[A,B].VAL = 1
- X[B,D].VAL = 1
- X[D,G].VAL = 1
- X[G,J].VAL = 1
- X[J,L].VAL = 1
- X[L,N].VAL = 1
- X[N,O].VAL = 1

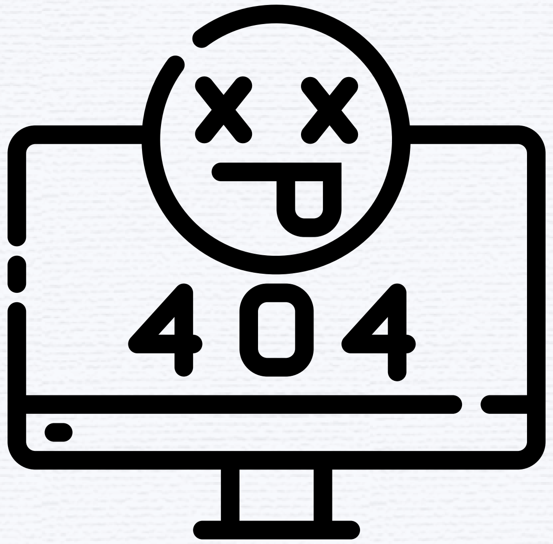
Vértices Visitados:
A, B, D, G, J, L, N, O

Custo Total: 17



Dificuldades enfrentadas

- Modelagem:
  - Dificuldades ao construir as restrições de fluxo.
- Implementação:
  - Erros ao definir o conjunto de arestas e pesos.
- Nova Linguagem:
  - Tivemos dificuldades ao implementar o problema em MathProg, por ser nosso primeiro contato.



Conclusão

Neste trabalho, exploramos o Problema do Caminho Mais Curto, modelado e resolvido utilizando o MathProg e o GLPK. Com base em um grafo representado por vértices e arestas ponderadas, formulamos o problema como um modelo de Programação Linear Inteira Binária. A função objetivo minimiza o custo total do caminho, enquanto as restrições de fluxo garantem que o caminho seja válido, conectando a origem ao destino.

O GLPK utilizou técnicas como Branch-and-Bound para resolver o problema de forma eficiente, identificando o conjunto de arestas que compõem o caminho mais curto e calculando o custo associado. Durante o processo, destacamos a importância da modelagem matemática precisa e do uso de ferramentas computacionais robustas.

Por fim, este estudo mostrou como a pesquisa operacional e ferramentas como o GLPK podem ser aplicadas na resolução de problemas clássicos de otimização, com potencial de aplicação prática em redes de transporte, logística e comunicação.

Referências

PESQUISAS BIBLIOGRÁFICAS

https://gusek.sourceforge.net/gmpl.pdf

https://www.sciencedirect.com/topics/computer-science/shortest-path-problem

PESQUISA EM SITES

https://www.w3schools.com/dsa/dsa_theory_graphs_shortestpath.php