CIÊNCIA da COMPUTAÇÃO
Universidade Federal do Tocantins

Pesquisa Operacional

17 de setembro de 2024

Prof. Warley Gramacho
wgramacho@uft.edu.br

Dualidade em Programação Linear

Associado a qualquer problema de programação linear existe outro problema chamado ***dual***. O problema original é chamado de ***primal***.

$$
\begin{aligned}
(P): \text{maximizar} \quad & z = \sum_{j=1}^{p} c_j x_j \\
\text{sujeito a:} \quad & \\
& \sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j = b_i, \;\; i = 1, 2, \ldots, q \\
& x_j \geqslant 0, \;\; j = 1, 2, \ldots, p
\end{aligned}
$$

Associemos a cada restrição de (P) a variável $u_i \geqslant, \;\; i = 1, 2, \ldots, q$ e definamos o seguinte problema

$$
\begin{aligned}
(D): \text{minimizar} \quad & d = \sum_{i=1}^{q} b_i u_i \\
\text{sujeito a:} \quad & \\
& \sum_{i=1}^{q} a_{ij} u_i = c_j, \;\; j = 1, 2, \ldots, q \\
& u_i \geqslant 0, \;\; i = 1, 2, \ldots, q
\end{aligned}
$$

Dualidade em Programação Linear

Proposição

O dual de (D) é (P).

Forma canônica da dualidade

Suponha que o problema primal seja dado na forma

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & z = cx \\ \text{sujeito a} \quad & Ax \leqslant b \\ & x \geqslant 0, \end{aligned}$$

Então, o problema dual associado é definido por

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & d = ub \\ \text{sujeito a} \quad & uA \geqslant c \\ & u \geqslant 0, \end{aligned}$$

Forma canônica da dualidade

Suponha que o problema primal seja dado na forma

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & z = cx \\ \text{sujeito a} \quad & Ax \leqslant b \\ & x \geqslant 0, \end{aligned}$$

Então, o problema dual associado é definido por

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & d = ub \\ \text{sujeito a} \quad & uA \geqslant c \\ & u \geqslant 0, \end{aligned}$$

Exemplo:

$$\begin{aligned}
(P): \text{maximizar} \quad & z = 3x_1 + 4x_2 \\
\text{sujeito a:} \quad & \\
& x_1 - x_2 \leqslant -1 \\
& -x_1 + x_2 \leqslant 0 \\
& x_i \geqslant 0, \;\; i = 1, 2.
\end{aligned}$$

cujo dual é

$$\begin{aligned}
(D): \text{minimizar} \quad & d = -u_1 \\
\text{sujeito a:} \quad & \\
& u_1 - u_2 \geqslant 3 \\
& -u_1 + u_2 \geqslant 4 \\
& u_i \geqslant 0, \;\; i = 1, 2.
\end{aligned}$$

Relação entre o problema dual e o problema primal

	Problema de Minimização		Problema de Maximização	
Variáveis	$\geqslant 0$	$\leftrightarrow$	$\leqslant$	Restrições
	$\leqslant 0$	$\leftrightarrow$	$\geqslant$	
	Irrestrito	$\leftrightarrow$	$=$	
Restrições	$\geqslant$	$\leftrightarrow$	$\geqslant 0$	Variáveis
	$\leqslant$	$\leftrightarrow$	$\leqslant 0$	
	$=$	$\leftrightarrow$	Irrestrito	

Relação entre o problema dual e o problema primal

O problema

$$\begin{aligned} \max \quad & 8x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a.} \quad & x_1 - 6x_2 \geqslant 2 \\ & 5x_1 + 7x_2 = -4 \\ & x_1 \leqslant 0 \\ & x_2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

tem dual

$$\begin{aligned} \min \quad & 2u_1 - 4u_2 \\ \text{s.a.} \quad & u_1 + 5u_2 \leqslant 8 \\ & -6u_1 + 7u_2 \geqslant 3 \\ & u_1 \leqslant 0 \\ & u_2 \text{ irrestrito} \end{aligned}$$

Relação entre o problema dual e o problema primal

O problema

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 8x_1 + 3x_2 \\
\text{s.a.} \quad & x_1 - 6x_2 \geqslant 2 \\
& 5x_1 + 7x_2 = -4 \\
& x_1 \leqslant 0 \\
& x_2 \geqslant 0
\end{aligned}
$$

tem dual

$$
\begin{aligned}
\min \quad & 2u_1 - 4u_2 \\
\text{s.a.} \quad & u_1 + 5u_2 \leqslant 8 \\
& -6u_1 + 7u_2 \geqslant 3 \\
& u_1 \leqslant 0 \\
& u_2 \text{ irrestrito}
\end{aligned}
$$

Dualidade

Tal como foi feito no anteriormente, seja $A = (B\ N)$, tal que $det(B) \neq 0$. Se $\overline{u} = C_B B^{-1}$, tal que $\overline{u}A \geqslant c$ então, $\underline{u}$ é uma solução viável de (D): Neste caso diremos que $\overline{x} = (\overline{x}_B\ 0)^T$, onde $x_B = B^{-1}b$, é uma **solução básica dual viável**.

Dualidade

Teorema da Dualidade Fraca

se $\bar{x}$ *satisfazer* $Ax \leqslant b$ *e* $x \geqslant 0$ *e* $\bar{u}$ *satisfazer* $uA \geqslant c$ *e* $u \geqslant 0$ *então teremos* $c\bar{x} \leqslant \bar{u}b$.

Dualidade

Proposição:

Se $\bar{x}$ for uma solução viável de (P), $\bar{u}$ uma solução viável de (D) e $c\bar{x} = \bar{u}b$ então $\bar{x}$ será um ótimo de (P) e $\bar{u}$ será um ótimo de (D).

Relação entre o problema dual e o problema primal

Teorema da Dualidade (existência):

Dado um par de problemas (um primal e seu dual) uma e somente uma das três afirmações é verdadeira:

1. *Os dois problemas são vazios;*
2. *um é vazio e o outro é ilimitado;*
3. *ambos admitem soluções ótimas finitas* $x^\star$ *e* $u^\star$, *com* $c^T x^\star = b^T u^\star$ *(as respectivas funções objetivo no ótimo assumem o mesmo valor).*

Deste teorema podemos observar que a dualidade não é exatamente simétrica. Podemos resumir a situação abaixo:

P Ótimo	$\Leftrightarrow$	D Ótimo
P Ilimitado	$\Rightarrow$	D vazio
D Ilimitado	$\Rightarrow$	P vazios
P vazios	$\Rightarrow$	D Ilimitado ou vazios
D vazios	$\Rightarrow$	P Ilimitado ou vazios

Relação entre o problema dual e o problema primal

Teorema da Dualidade (existência):

Dado um par de problemas (um primal e seu dual) uma e somente uma das três afirmações é verdadeira:

1. *Os dois problemas são vazios;*
2. *um é vazio e o outro é ilimitado;*
3. *ambos admitem soluções ótimas finitas* $x^\star$ *e* $u^\star$, *com* $c^T x^\star = b^T u^\star$ *(as respectivas funções objetivo no ótimo assumem o mesmo valor).*

Deste teorema podemos observar que a dualidade não é exatamente simétrica. Podemos resumir a situação abaixo:

P Ótimo	$\Leftrightarrow$	D Ótimo
P Ilimitado	$\Rightarrow$	D vazio
D Ilimitado	$\Rightarrow$	P vazios
P vazios	$\Rightarrow$	D Ilimitado ou vazios
D vazios	$\Rightarrow$	P Ilimitado ou vazios

Relação entre o problema dual e o problema primal

Finalmente, apresentamos a seguir um resultado conhecido como

Teorema das Folgas Complementares:

Se $\hat{x}$ é ótimo de (P) e $\hat{u}$ é ótimo de (D) então

$$(\hat{u}A - c)\hat{x} = 0$$

e

$$\hat{u}(A\hat{x} - b) = 0$$

.

"Se uma variável em um dos problemas é positiva, então a restrição correspondente no outro problema deve estar ativa; Se uma restrição em um dos problemas não está ativa, então a variável correspondente no outro problema deve ser nula."

Relação entre o problema dual e o problema primal

CIÊNCIA da COMPUTAÇÃO
Universidade Federal do Tocantins

Finalmente, apresentamos a seguir um resultado conhecido como

Teorema das Folgas Complementares:

Se $\widehat{x}$ é ótimo de (P) e $\widehat{u}$ é ótimo de (D) então

$$(\widehat{u}A - c)\widehat{x} = 0$$

e

$$\widehat{u}(A\widehat{x} - b) = 0$$

.

"Se uma variável em um dos problemas é positiva, então a restrição correspondente no outro problema deve estar ativa; Se uma restrição em um dos problemas não está ativa, então a variável correspondente no outro problema deve ser nula."

Usando o Dual para resolver o Primal

Considere o problema primal

$$
\begin{aligned}
\min \quad & 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 \\
\text{s.a.} \quad & x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 \geqslant 4 \\
& 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 \geqslant 3 \\
& x_i \geqslant 0, \; i = 1, \ldots, 5.
\end{aligned}
$$

e o dual associado

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 4u_1 + 3u_2 \\
\text{s.a.} \quad & u_1 + 2u_2 \leqslant 2 \\
& u_1 - 2u_2 \leqslant 3 \\
& 2u_1 + 3u_2 \leqslant 5 \\
& u_1 + u_2 \leqslant 2 \\
& 3u_1 + u_2 \leqslant 3 \\
& u_1, u_2 \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

Usando o Dual para resolver o Primal

Considere o problema primal

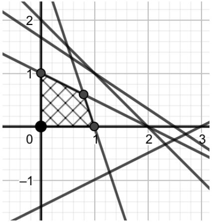
$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 \\ \text{s.a.} \quad & x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 \geqslant 4 \\ & 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 \geqslant 3 \\ & x_i \geqslant 0, \;\; i = 1, \dots, 5. \end{aligned}$$

e o dual associado

$$\begin{aligned} \max \quad & 4u_1 + 3u_2 \\ \text{s.a.} \quad & u_1 + 2u_2 \leqslant 2 \\ & u_1 - 2u_2 \leqslant 3 \\ & 2u_1 + 3u_2 \leqslant 5 \\ & u_1 + u_2 \leqslant 2 \\ & 3u_1 + u_2 \leqslant 3 \\ & u_1, u_2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

Usando o Dual para resolver o Primal

Como o dual só tem duas variáveis, podemos resolvê-lo graficamente. A solução ótima do dual é $w^\star = (4/5, 3/5)$, com valor de função objetivo 5.



Desta forma, já sabemos que o valor ótimo para o primal é $z^\star = 5$. Usando o teorema fraco da folga complementar, sabemos também que $x_2^\star = x_3^\star = x_4^\star = 0$, já que as restrições complementares no dual não estão ativas. Como $w_1^\star, w_2^\star > 0$, então $x_1^\star + 3x_5^\star = 4$ e $2x_1^\star + x_5^\star = 3$. Destas duas equações obtemos que $x_1^\star = 1$ e $x_5^\star = 1$.

Método dual do simplex

Dada uma base B dual viável .

Se $\widehat{x}B \geqslant 0$, a base B está associada a uma solução primal e dual viável. PARE.

Caso contrário ($\widehat{x}B \ngeqslant 0$) escolhe-se um k para o qual $\widehat{x}_{B(k)} < 0$,

se $L_k = \varnothing$, o (PPL) é vazio. PARE.

se $L_k \neq \varnothing$, toma-se a coluna a_p, $p \in I_N$, tal que

$$\frac{y_{0p}}{y_{kp}} = \max_{j \in L_k} = \left\{ \frac{y_{0j}}{y_{kj}} \right\}$$

a coluna a_p ocupará o lugar da coluna $a_{B(k)}$ em B.

(MUDANÇA DE BASE)

Exemplo

$$
\begin{aligned}
(\text{PPL}):\ \max \quad & z = -4x_1 - 5x_2 \\
\text{s.a.:} \quad & \\
& \begin{array}{llcl} x_1 & +4x_2 & \geqslant & 5 \\ 3x_1 & +2x_2 & \geqslant & 7 \end{array} \\
& x_i \geqslant 0,\ \ i = 1, 2.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\text{PPL}):\ \max \quad & z = -4x_1 - 5x_2 + 0x_3 + 0x_4 \\
\text{s.a.:} \quad & \\
& \begin{array}{llllcl} x_1 & +4x_2 & -x_3 & & = & 5 \\ 3x_1 & +2x_2 & & -x_4 & = & 7 \end{array} \\
& x_i \geqslant 0,\ \ i = 1, \ldots, 4.
\end{aligned}
$$

Exemplo

$$
\begin{array}{lllll}
(\text{PPL}): \max & z = -4x_1 - 5x_2 & & & \\
\text{s.a.:} & & & & \\
& x_1 & +4x_2 & \geqslant & 5 \\
& 3x_1 & +2x_2 & \geqslant & 7 \\
& x_i \geqslant 0, \ \ i = 1, 2. & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllllll}
(\text{PPL}): \max & z = -4x_1 - 5x_2 + 0x_3 + 0x_4 & & & & & \\
\text{s.a.:} & & & & & & \\
& x_1 & +4x_2 & -x_3 & & = & 5 \\
& 3x_1 & +2x_2 & & -x_4 & = & 7 \\
& x_i \geqslant 0, \ \ i = 1, \ldots, 4. & & & & &
\end{array}
$$

Exemplo

$$A = (a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}, c = (-4 \ -5 \ 0 \ 0).$$

Tomemos

$$I_B = \{3, \ 4\}, \quad I_N = \{1, \ 2\},$$

$$B(1) = 3, \ B(2) = 4$$

$$B = (a_3 \ a_4) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ logo } B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$c_B = (0 \ 0), \ u = c_B B^{-1} = (0 \ 0) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (0 \ 0),$$

Exemplo

$$\overline{x}_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} \overline{x}_{B(1)} \\ \overline{x}_{B(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{x}_3 \\ \overline{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Verificamos que $\overline{x} = (\overline{x}_B\ 0)^T \ngeq 0$ (B não é primal viável). No entanto,

$$z_1 = ua_1 = (0\ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow z_1 - c_1 = 0 - (-4) = 4 > 0$$

e

$$z_2 = ua_2 = (0\ 0) \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow z_2 - c_2 = 0 - (-5) = 5 > 0,$$

logo B é dual viável.

Exemplo

Tomemos $B(2) = 4$ pois $\bar{x}_4 < 0$, procedendo assim estamos escolhendo a_4 para deixar a base.
Calculemos y_{2j}, $j \in I_N$, obtendo:

$$y_{21} = (0 \quad -1) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = -3 \text{ e } y_{22} = (0 \quad -1) \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = -2$$

onde $(0 \quad -1)$ é a segunda linha de B^{-1}. Verificamos que $L_2 = \{1, 2\}$.

$$\max = \left\{ \frac{4}{-3}, \frac{5}{-2} \right\} = \frac{4}{-3} = \frac{z_1 - c_1}{y_{21}},$$

logo a coluna a_1 substituirá a coluna a_4 na próxima base.

Exemplo

Segunda base:

$$I_B = \{3,\ 1\}, \quad I_N = \{4,\ 2\},$$

$$B(1) = 3,\ B(2) = 1$$

$$B = (a_3\ a_1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},\ \text{logo}\ B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$c_B = (0\ \ -4),\ u = c_B B^{-1} = (0\ \ -4) \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = (0\ \ -\frac{4}{3}),$$

$$\bar{x}_B = B^{-1} b = \begin{pmatrix} \bar{x}_{B(1)} \\ \bar{x}_{B(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}_3 \\ \bar{x}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{8}{3} \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix} \ngeq 0,$$

$$\bar{z} = (0\ \ -\frac{4}{3}) = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} = -\frac{28}{3}.$$

Exemplo

Como $\bar{x}_{B(1)} = \bar{x}_3 = -\frac{8}{3} < 0$, a_3 sairá da base na próxima iteração. Calculemos $y_{1j},\ j \in I_N$:

$$y_{14} = (-1\ \ \frac{1}{3}) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \text{ e } y_{12} = (-1\ \ \frac{1}{3}) \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{10}{3}$$

onde $(1\ 1)$ é a primeira linha de B^{-1} e $L_1 = \{4, 2\}$.

$$z_4 = ua_4 = (0\ \ -\frac{4}{3}) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{4}{3} \Longrightarrow z_4 - c_4 = \frac{4}{3} - 0 = \frac{4}{3} > 0$$

e

$$z_2 = ua_2 = (0\ \ -\frac{4}{3}) \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{8}{3} \Longrightarrow z_2 - c_2 = -\frac{8}{3} - (-5) = -\frac{7}{3} > 0,$$

$$\max = \left\{ \frac{\frac{3}{4}}{-\frac{1}{3}}, \frac{\frac{7}{3}}{-\frac{10}{3}} \right\} = \frac{\frac{7}{3}}{-\frac{10}{3}} = -\frac{7}{10} = \frac{z_2 - c_2}{y_{12}},$$

logo a coluna a_2 substituirá a coluna a_3 na próxima base.

Exemplo

Terceira base:

$$I_B = \{2,\ 1\},\quad I_N = \{4,\ 3\},$$

$$B(1) = 2,\ B(2) = 1$$

$$B = (a_2\ a_1) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},\ \text{logo}\ B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{2}{10} & \frac{4}{10} \end{pmatrix}$$

$$c_B = (-5\ \ -4),\ u = c_B B^{-1} = (-5\ \ -4) \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{2}{10} & \frac{4}{10} \end{pmatrix} = (-\frac{7}{10}\ \ -\frac{11}{10}),$$

$$\bar{x}_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} \bar{x}_{B(1)} \\ \bar{x}_{B(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}_2 \\ \bar{x}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{2}{10} & \frac{4}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{10} \\ \frac{18}{10} \end{pmatrix} \geqslant 0,$$

$$\bar{z} = (-5\ \ -4) = \begin{pmatrix} \frac{8}{10} \\ \frac{18}{10} \end{pmatrix} = -\frac{112}{10}.$$

Exercícios

Mostre o dual dos problemas a seguir:

(i)

$$
\begin{array}{lll}
\max & z = x_1 + x_2 + 3x_3 & \\
\text{s.a.:} & x_1 - 2x_2 & = \quad 5 \\
 & x_1 + x_3 & \leqslant \quad 10 \\
 & 3x_2 + 4x_3 & \geqslant \quad 9 \\
 & x_1,\ x_2,\ x_3 \geqslant 0 &
\end{array}
$$

(ii)

$$
\begin{array}{lll}
\min & z = 3x_1 + 2x_2 & \\
\text{s.a.:} & x_1 + x_2 & \geqslant \quad 1 \\
 & x_1 - x_2 & \leqslant \quad 2 \\
 & x_1,\ x_2 \geqslant 0 &
\end{array}
$$

(iii)

Referências I

- P. Belfiore and L.P. Fávero, *Pesquisa operacional para cursos de engenharia*, Elsevier Editora Ltda., 2013.
- Maristela Oliveira dos Santos, *Notas de aula de introdução à pesquisa operacional*, Agosto 2010.
- M.C. Goldbarg and H.P.L. Luna, *Otimização combinatória e programação linear: modelos e algoritmos*, CAMPUS - RJ, 2005.
- N. MACULAN and M.H.C. Fampa, *Otimização linear*, EdUnB, 2006.