CIÊNCIA da COMPUTAÇÃO

Universidade Federal do Tocantins

Pesquisa Operacional

24 de setembro de 2024

Prof. Warley Gramacho
wgramacho@uft.edu.br

Análise de sensibilidade

Análise de sensibilidade

- Alterando o lado direito das restrições;
- Alterando o vetor custo.

Alterando o lado direito das restrições

Suponhamos que o lado direito das restrições do (PPL) seja alterado de b para $b+\delta b$. Neste caso, a base ótima do (PPL) não deixa de ser dual viável, mas para que esta base continue sendo ótima, ela deverá manter-se também primal viável.

Desta forma, para que a base B continue sendo ótima para o problema modificado, devemos ter

$$B^{-1}(b+\delta b) \geqslant 0$$

Alterando o lado direito das restrições

Exemplo:
Consideremos o problema de PPL:

$$
\begin{array}{rl}
(\text{PPL}):\ \max & z = -4x_1 - 5x_2 \\
\text{s.a.:} & \\
& \begin{array}{llll} x_1 & +4x_2 & \geqslant & 5 \\ 3x_1 & +2x_2 & \geqslant & 7 \end{array} \\
& x_i \geqslant 0,\ \ i = 1, 2.
\end{array}
$$

Verifiquemos qual o intervalo em que o lado direito da primeira restrição pode se encontrar sem que a base ótima do problema seja alterada.

Alterando o lado direito das restrições

Exemplo:
Consideremos o problema de PPL:

$$
\begin{array}{rll}
(\text{PPL}): \text{max} & z = -4x_1 - 5x_2 & \\
\text{s.a.:} & & \\
& \begin{array}{lccc} x_1 & +4x_2 & \geqslant & 5 \\ 3x_1 & +2x_2 & \geqslant & 7 \end{array} & \\
& x_i \geqslant 0, \;\; i = 1, 2. &
\end{array}
$$

Verifiquemos qual o intervalo em que o lado direito da primeira restrição pode se encontrar sem que a base ótima do problema seja alterada.

Alterando o lado direito das restrições

Terceira base:

$$I_B = \{2,\ 1\},\quad I_N = \{4,\ 3\},$$

$$B(1) = 2,\ B(2) = 1$$

$$B = (a_2\ a_1) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},\ \text{logo } B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{2}{10} & \frac{4}{10} \end{pmatrix}$$

$$c_B = (-5\ \ -4),\ u = c_B B^{-1} = (-5\ \ -4)\begin{pmatrix} \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{2}{10} & \frac{4}{10} \end{pmatrix} = (-\frac{7}{10}\ \ -\frac{11}{10}),$$

$$\bar{x}_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} \bar{x}_{B(1)} \\ \bar{x}_{B(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}_2 \\ \bar{x}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{2}{10} & \frac{4}{10} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{10} \\ \frac{18}{10} \end{pmatrix} \geqslant 0,$$

$$\bar{z} = (-5\ \ -4) = \begin{pmatrix} \frac{8}{10} \\ \frac{18}{10} \end{pmatrix} = -\frac{112}{10}.$$

Alterando o lado direito das restrições

Para que a base ótima determinada por $I_B = \{2, 1\}$ não seja alterada, devemos ter:

$$B^{-1}\begin{pmatrix} b_1 + \delta b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \geqslant 0$$

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{2}{10} & \frac{4}{10} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 + \delta b_1 \\ 7 \end{pmatrix} \geqslant 0 \Longrightarrow$$

$$\frac{3}{10}(5 + \delta b_1) - \frac{7}{10} \geqslant 0 \Longrightarrow \delta b_1 \geqslant -\frac{8}{3}$$

$$-\frac{2}{10}(5 + \delta b_1) - \frac{28}{10} \geqslant 0 \Longrightarrow \delta b_1 \leqslant 9$$

Alterando o lado direito das restrições

Para que a base ótima determinada por $I_B = \{2, 1\}$ não seja alterada, devemos ter:

$$B^{-1}\begin{pmatrix} b_1 + \delta b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \geqslant 0$$

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{2}{10} & \frac{4}{10} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 + \delta b_1 \\ 7 \end{pmatrix} \geqslant 0 \Longrightarrow$$

$$\frac{3}{10}(5 + \delta b_1) - \frac{7}{10} \geqslant 0 \Longrightarrow \delta b_1 \geqslant -\frac{8}{3}$$

$$-\frac{2}{10}(5 + \delta b_1) - \frac{28}{10} \geqslant 0 \Longrightarrow \delta b_1 \leqslant 9$$

Alterando o vetor custo

Suponhamos agora que o vetor custo associado às variáveis do (PPL) seja alterado de c para $c + \delta c$. Neste caso, a base ótima do (PPL) não deixa de ser primal viável, mas para que esta base continue sendo ótima, ela deverá manter-se também dual viável. Desta forma, para que a base B continue sendo ótima para o problema modificado, devemos ter

$$(c_B + \delta c_B)B^{-1}N - (c_N + \delta c_N) \geqslant 0$$

.

Alterando o vetor custo

Exemplo:

Consideremos novamente o problema de programação linear do exemplo anterior. Verifiquemos qual o intervalo em que o custo associado a variável x_2 pode se encontrar sem que a base ótima do problema seja alterada.

Para que a base ótima determinada por $I_B = \{2, 1\}$ não seja alterada, devemos ter:

$$(c_2 + \delta c_2 \;\; c_1) B^{-1} N - (c_4 \;\; c_3) \geqslant 0 \Longrightarrow$$

$$(-5 + \delta c_2 \;\; -4) \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{2}{10} & \frac{4}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - (0 \;\; 0) \geqslant 0 \Longrightarrow$$

$$(-5 + \delta c_2 \;\; -4) \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & -\frac{3}{10} \\ -\frac{4}{10} & \frac{4}{10} \end{pmatrix} - (0 \;\; 0) \geqslant 0 \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{10}(-5 + \delta c_2) + \frac{16}{10} \geqslant 0 \Longrightarrow \delta c_2 \geqslant -11,$$

$$-\frac{3}{10}(-5 + \delta c_2) - \frac{8}{10} \geqslant 0 \Longrightarrow \delta c_2 \leqslant \frac{7}{3}$$

Alterando o vetor custo

Portanto devemos ter $\delta c_2 \in [11, \frac{7}{3}]$, ou seja, para que a base ótima do problema não seja alterada, o custo associado à segunda variável deve satisfazer a

$$c_2 \in \left[-16, -\frac{8}{3}\right]$$

Pós-otimização

Pós-otimização

- Alterando o lado direito das restrições;
- Alterando o vetor custo;
- Acrescentando mais Restrições.

Alterando o lado direito das restrições

Suponhamos que o vetor b que define o lado direito das restrições no problema (PPL) seja alterado para $b + \delta b$ e consideremos

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & z = cx \\ \text{sujeito a} \quad & Ax = b + \delta b \\ & x \geqslant 0, \end{aligned}$$

Como já visto anteriormente, a base B associada a uma solução ótima de (PPL) não deixa de ser dual viável para o problema (PPL). Suponhamos, no entanto que $B^{-1}(b + \delta b) \ngeqslant 0$, ou seja, que B deixa de ser uma base primal viável. Neste caso, para obter a solução ótima do problema modificado, podemos aplicar o método dual do simplex, tomando B como base inicial.

Alterando o lado direito das restrições

Exemplo:
Consideremos o problema de PPL:

$$
\begin{array}{lll}
(\text{PPL}): & \max & z = -4x_1 - 5x_2 \\
& \text{s.a.:} & \\
& & \begin{array}{llcl} x_1 & +4x_2 & \geqslant & 5 \\ 3x_1 & +2x_2 & \geqslant & 7 \end{array} \\
& & x_i \geqslant 0, \ \ i = 1, 2.
\end{array}
$$

Alterando o lado direito das restrições

Suponhamos que o lado direito da primeira restrição seja alterado de 5 para 15.

$$
\begin{array}{rll}
(\text{PPL}): \max & z = -4x_1 - 5x_2 & \\
\text{s.a.:} & & \\
& x_1 \quad +4x_2 \quad \geqslant \quad 15 & \\
& 3x_1 \quad +2x_2 \quad \geqslant \quad 7 & \\
& x_i \geqslant 0, \ \ i = 1, 2. &
\end{array}
$$

$$
\overline{x}_B = \begin{pmatrix} \overline{x}_{B(1)} \\ \overline{x}_{B(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{x}_2 \\ \overline{x}_1 \end{pmatrix} = \overline{B}^{-1} b = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{2}{10} & \frac{4}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{38}{10} \\ -\frac{2}{10} \end{pmatrix}
$$

ou seja, $\overline{x}_B \not\geqslant 0$.

B não deixa de ser dual viável!

Método dual simplex

Alterando o lado direito das restrições

Suponhamos que o lado direito da primeira restrição seja alterado de 5 para 15.

$$
\begin{array}{rl}
\text{(PPL): max} & z = -4x_1 - 5x_2 \\
\text{s.a.:} & \\
& \begin{array}{llcr} x_1 & +4x_2 & \geqslant & 15 \\ 3x_1 & +2x_2 & \geqslant & 7 \end{array} \\
& x_i \geqslant 0, \;\; i = 1, 2.
\end{array}
$$

$$\bar{x}_B = \begin{pmatrix} \bar{x}_{B(1)} \\ \bar{x}_{B(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}_2 \\ \bar{x}_1 \end{pmatrix} = \overline{B}^{-1} b = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{2}{10} & \frac{4}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{38}{10} \\ -\frac{2}{10} \end{pmatrix}$$

ou seja, $\bar{x}_B \ngeqslant 0$.

B não deixa de ser dual viável!

Método dual simplex

Alterando o lado direito das restrições

Suponhamos que o lado direito da primeira restrição seja alterado de 5 para 15.

$$
\begin{aligned}
(\text{PPL}):\ \max\quad & z = -4x_1 - 5x_2 \\
\text{s.a.:}\quad & \\
& \begin{array}{llcr} x_1 & +4x_2 & \geqslant & 15 \\ 3x_1 & +2x_2 & \geqslant & 7 \end{array} \\
& x_i \geqslant 0,\ \ i = 1, 2.
\end{aligned}
$$

$$
\overline{x}_B = \begin{pmatrix} \overline{x}_{B(1)} \\ \overline{x}_{B(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{x}_2 \\ \overline{x}_1 \end{pmatrix} = \overline{B}^{-1} b = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{2}{10} & \frac{4}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{38}{10} \\ -\frac{2}{10} \end{pmatrix}
$$

ou seja, $\overline{x}_B \not\geqslant 0$.

B não deixa de ser dual viável!

Método dual simplex

Alterando o lado direito das restrições

Suponhamos que o lado direito da primeira restrição seja alterado de 5 para 15.

$$
\begin{array}{rl}
(\mathrm{PPL}): \max & z = -4x_1 - 5x_2 \\
\text{s.a.:} & \\
& \begin{array}{llcr} x_1 & +4x_2 & \geqslant & 15 \\ 3x_1 & +2x_2 & \geqslant & 7 \end{array} \\
& x_i \geqslant 0, \;\; i = 1, 2.
\end{array}
$$

$$
\overline{x}_B = \begin{pmatrix} \overline{x}_{B(1)} \\ \overline{x}_{B(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{x}_2 \\ \overline{x}_1 \end{pmatrix} = \overline{B}^{-1} b = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{2}{10} & \frac{4}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{38}{10} \\ -\frac{2}{10} \end{pmatrix}
$$

ou seja, $\overline{x}_B \not\geqslant 0$.

B não deixa de ser dual viável!

Método dual simplex

Alterando o lado direito das restrições

Suponhamos que o lado direito da primeira restrição seja alterado de 5 para 15.

$$
\begin{aligned}
(\text{PPL}):\ \max \quad & z = -4x_1 - 5x_2 \\
\text{s.a.:} \quad & \\
& \begin{array}{llcr} x_1 & +4x_2 & \geqslant & 15 \\ 3x_1 & +2x_2 & \geqslant & 7 \end{array} \\
& x_i \geqslant 0, \ \ i = 1, 2.
\end{aligned}
$$

$$
\bar{x}_B = \begin{pmatrix} \bar{x}_{B(1)} \\ \bar{x}_{B(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}_2 \\ \bar{x}_1 \end{pmatrix} = \overline{B}^{-1} b = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{2}{10} & \frac{4}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{38}{10} \\ -\frac{2}{10} \end{pmatrix}
$$

ou seja, $\bar{x}_B \not\geqslant 0$.

B não deixa de ser dual viável!

Método dual simplex

Alterando o lado direito das restrições

Base inicial:

$$I_B = \{2, 1\},\ \ I_N = \{4,\ \ 3\}$$

Alterando o vetor custo

Suponhamos agora que o vetor c, que define o custo associado às variáveis do problema (PPL), seja alterado para $c + \delta c$ e consideremos e que a base B deixa de ser dual viável para o problema modificado:

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & z = (c + \delta c)x \\ \text{sujeito a} \quad & Ax = b \\ & x \geqslant 0, \end{aligned}$$

Ou seja, $(c_B + \delta c_B)B^{-1}N - (c_N + \delta c_N) \not\geqslant 0$

Alterando o vetor custo

Exemplo:
Consideremos novamente o (PPL) anterior. Suponhamos agora que o custo associado à variável x_2 seja alterado de -5 para -1.

$$(c_2 \ c_1)B^{-1}N - (c_4 \ c_3) =$$

$$(-1 \ \ -4)\begin{pmatrix} \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{2}{10} & \frac{4}{10} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - (0 \ 0) =$$

$$(-1 \ \ -4)\begin{pmatrix} \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{2}{10} & \frac{4}{10} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - (0 \ 0) = (\frac{15}{10} \ \ -\frac{5}{10}) \not\geqslant 0$$

Por outro lado, sabemos que B não deixa de ser primal viável. Sendo assim, aplicamos a seguir o método do simplex para resolver o problema modificado, tomando a base B como base inicial.

Alterando o vetor custo

Base inicial:

$$I_B = \{2, 1\}, \;\; I_N = \{4, \;\; 3\}$$

Como visto anteriormente, $z_4 - c_4 = \frac{15}{10} > 0$ e $z_3 - c_3 = -\frac{5}{10} < 0$, logo a coluna a_3 entrará na base na próxima iteração do algoritmo

$$y_3 = B^{-1}a_3 = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{2}{10} & \frac{4}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{10} \\ \frac{2}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{13} \\ y_{23} \end{pmatrix}$$

logo $L_1 = \{2\}$. Como L_1 só tem um elemento, este elemento determinará a coluna que sairá da base, ou seja, $a_{B(2)} = a_1$ sairá da base, sendo substituída pela coluna a_3.

Alterando o vetor custo

Segunda base:

$$I_B = \{2, 3\}, \;\; I_N = \{4, \;\; 1\}$$

$$B(1) = 2, \;\; B(2) = 3$$

$$B = (a_2 \;\; a_3) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \text{ logo } B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$c_B = (-1 \;\, 0), \;\; u = c_B B^{-1} = (-1 \;\, 0) \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = (0 \;\; -\frac{1}{2}),$$

$$\bar{x}_B = B^{-1} b = \begin{pmatrix} \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\bar{z} = c_B B^{-1} b = ub = (0 \;\; -\frac{1}{2}) \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} = -\frac{7}{2}$$

Alterando o vetor custo

$$z_1 = ua_1 = (0 \;\; -\frac{1}{2}) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = -\frac{3}{2} \Rightarrow z_1 - c_1 = -\frac{3}{2} - (-4) = \frac{5}{2} > 0$$

$$z_4 = ua_4 = (0 \;\; -\frac{1}{2}) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \Rightarrow z_4 - c_4 = -\frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2} > 0$$

Como $z_j - c_j > 0$, $\forall j \in I_N$, esta solução básica é ótima. Logo $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{7}{2}$, $x_3 = 9$, $x_4 = 0$ é uma solução ótima, fornecendo $z = -\frac{7}{2}$.

Acrescentando mais Restrições

Suponhamos agora que acrescentemos mais uma restrição ao (PPL) da forma $sx \geqslant b_{m+1}$, onde $s = (s_1 \; s_2 \; \dots \; s_n)$ é um vetor linha dado e b_{m+1} um real também conhecido.
Sem inicializarmos novamente todo o processo de solução do (PPL) com mais uma restrição poderemos pensar em, a partir da solução ótima obtida para o (PPL) original, reotimizar o novo problema utilizando os resultados já obtidos.
Introduziremos a variável de folga $x_{n+1} \geqslant 0$ a essa nova restrição: $s_x - x_{n+1} = b_{m+1}$ e o novo (PPL) será escrito:

$$\begin{array}{rl}
\text{maximizar} & z = cx + 0x_{n+1} \\
\text{sujeito a} & Ax - 0x_{n+1} = b \\
 & s_x - x_{n+1} = b_{m+1} \\
 & x \geqslant 0, \;\; x_{n+1} \geqslant 0
\end{array}$$

Acrescentando mais Restrições

em termos matriciais as restrições ficariam da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ s & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ b_{m+1} \end{pmatrix},, \text{ lembrando que } A \in \mathcal{R}^{m \times n}$$

Consideremos $s = (s_B\ s_N)$, onde s_B está associado a B: Tomemos a matriz

$$\overline{B} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ s_B & -1 \end{pmatrix}$$

Como B^{-1} existe, então $\overline{B}^{-1}$ também existe, pois $det(\overline{B}) = det(B)(-1)$

$\overline{B}$ está associada a uma solução dual viável de (PPL)

Acrescentando mais Restrições

em termos matriciais as restrições ficariam da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ s & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ b_{m+1} \end{pmatrix}, \text{, lembrando que } A \in \mathcal{R}^{m \times n}$$

Consideremos $s = (s_B \; s_N)$, onde s_B está associado a B: Tomemos a matriz

$$\overline{B} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ s_B & -1 \end{pmatrix}$$

Como B^{-1} existe, então $\overline{B}^{-1}$ também existe, pois $det(\overline{B}) = det(B)(-1)$

$\overline{B}$ está associada a uma solução dual viável de (PPL)

Acrescentando mais Restrições

Exemplo:

Voltemos ao (PPL) do exemplo anterior, acrescentamos a este a restrição $4x_1 + 5x_2 \geqslant 20$ à qual associaremos a variável de folga $x_5 \geqslant 0$: $4x_1 + 5x_2 - x_5 = 20$.
Teremos que

$$A = (a_1 \;\; a_2 \;\; a_3 \;\; a_4 \;\; a_5) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \;\; b = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 20 \end{pmatrix}, c = (-4 \;\; -5 \; 0 \; 0 \; 0).$$

Sabemos que $B = (\overline{a}_2 \;\; \overline{a}_1 \;\; \overline{a}_5)$ nos fornece uma base dual viável e que

$$\overline{B} = \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ \hline 5 & 4 & -1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} B & 0 \\ s_B & 1 \end{pmatrix}, \; \overline{B}^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ s_B B^{-1} & -1 \end{pmatrix},$$

Acrescentando mais Restrições

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{2}{10} & \frac{4}{10} \end{pmatrix}$$

Então

$$s_B B^{-1} = (5\ 4) \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{2}{10} & \frac{4}{10} \end{pmatrix} = (\frac{7}{10}\ \frac{11}{10}),$$

logo

$$\overline{B}^{-1} = \left(\begin{array}{cc|c} \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} & 0 \\ -\frac{2}{10} & \frac{4}{10} & 0 \\ \hline \frac{7}{10} & \frac{11}{10} & -1 \end{array}\right)$$

$$\overline{x}_B = \overline{B}^{-1}\overline{b} = \overline{B}^{-1} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{10} \\ \frac{18}{10} \\ -\frac{88}{10} \end{pmatrix} \not\geqslant 0,\ \overline{u} = (-\frac{7}{10}\ \ -\frac{11}{10}\ \ 0)$$

e

$$\overline{u}\overline{b} = (u\ 0) \begin{pmatrix} b \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = ub = -\frac{112}{10}$$

Acrescentando mais Restrições

Como $\overline{x}_{B(3)} = -\frac{88}{10} < 0$ faremos a_5 deixar a base. Para escolhermos uma coluna não básica para entrar na base devemos calcular os y_{3j}, $j \in \{3, 4\} = I_N$. Para isso tomaremos a terceira linha de B^{-1} e as colunas $\overline{a}_3$ e $\overline{a}_4$, tal como segue:

$$y_{33} = (-\frac{7}{10} \quad -\frac{11}{10} \quad 0) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{7}{10} \text{ e } y_{34} = (-\frac{7}{10} \quad -\frac{11}{10} \quad 0) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{11}{10}$$

Lembremos que $z_3 - c_3 = \frac{7}{10}$ e que $z_4 - c_4 = \frac{11}{10}$, calculemos agora

$$\min \left\{ \frac{\frac{7}{10}}{-\frac{7}{10}}, \frac{\frac{11}{10}}{-\frac{11}{10}} \right\}$$

há empate. Escolheremos $\overline{a}_4$ para entrar na base no lugar de $\overline{a}_5$.

Acrescentando mais Restrições

Nova base:

$$\overline{B} = (\overline{a}_2\ \overline{a}_1\ \overline{a}_4),\ \overline{B}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{11} & 0 & -\frac{1}{11} \\ -\frac{5}{11} & 0 & 0 \\ -\frac{7}{11} & -1 & \frac{10}{11} \end{pmatrix}$$

$$\overline{x}_B = \overline{B}^{-1}\overline{b} = \begin{pmatrix} \overline{x}_2 \\ \overline{x}_1 \\ \overline{x}_4 \end{pmatrix} = \overline{B}^{-1}\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} \geqslant 0$$

A última base $\overline{B}$ encontrada é primal e dual viável, assim sendo a solução $x_1 = 5,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 8,\ x_5 = 0$, fornecendo $z = -20$, é ótima para o (PPL).

Referências I

- P. Belfiore and L.P. Fávero, *Pesquisa operacional para cursos de engenharia*, Elsevier Editora Ltda., 2013.
- Maristela Oliveira dos Santos, *Notas de aula de introdução à pesquisa operacional*, Agosto 2010.
- M.C. Goldbarg and H.P.L. Luna, *Otimização combinatória e programação linear: modelos e algoritmos*, CAMPUS - RJ, 2005.
- N. MACULAN and M.H.C. Fampa, *Otimização linear*, EdUnB, 2006.