Resolução do Problema de Programação Linear Inteira usando Branch-and-Bound

João Victor Walcacer Giani
Professor: Warley Gramacho

22 de Outubro de 2024

1 Descrição do Problema de Programação Linear Inteira

O problema escolhido é:

$$\text{Maximizar } Z = 3x_1 + 2x_2 \tag{1}$$

Sujeito a:

$$2x_1 + x_2 \leq 6 \quad (1) \tag{2}$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 5 \quad (2) \tag{3}$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \tag{4}$$
$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \tag{5}$$

Neste problema, buscamos maximizar a função objetivo Z com restrições de capacidade, onde x_1 e x_2 devem ser números inteiros não negativos.

2 Modelo Relaxado de Programação Linear (PPL)

Para obter o modelo relaxado, removemos a restrição de integralidade, resultando no seguinte problema:

$$\text{Maximizar } Z = 3x_1 + 2x_2 \tag{6}$$
$$\text{sujeito a:} \tag{7}$$
$$2x_1 + x_2 \leq 6 \tag{8}$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 5 \tag{9}$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \tag{10}$$

3 Resolução do Problema Relaxado

Usamos o método gráfico para resolver o problema relaxado.

3.1 Determinando os Vértices das Restrições

A primeira restrição $2x_1 + x_2 = 6$ intercepta os eixos em:

- Intercepto no eixo x_1: $x_1 = 3$ (quando $x_2 = 0$)
- Intercepto no eixo x_2: $x_2 = 6$ (quando $x_1 = 0$)

A segunda restrição $x_1 + 2x_2 = 5$ intercepta os eixos em:

- Intercepto no eixo x_1: $x_1 = 5$ (quando $x_2 = 0$)
- Intercepto no eixo x_2: $x_2 = 2.5$ (quando $x_1 = 0$)

3.2 Identificando a Região Viável

A região viável é formada pela interseção das áreas sob as duas retas e acima dos eixos x e y, representando a área onde todas as restrições são satisfeitas.

3.3 Vértices da Região Viável

Para encontrar os vértices da região viável, resolvemos o sistema de equações:

$$2x_1 + x_2 = 6 \tag{11}$$
$$x_1 + 2x_2 = 5 \tag{12}$$

Resolvendo o sistema:
Multiplicamos a segunda equação por 2 e subtraímos da primeira:

$$4x_1 + 2x_2 = 12 \tag{13}$$
$$-(x_1 + 2x_2) = -5 \tag{14}$$
$$3x_1 = 7 \tag{15}$$
$$x_1 = \frac{7}{3} \approx 2.33 \tag{16}$$

Substituindo o valor de x_1 na primeira equação:

$$2\left(\frac{7}{3}\right) + x_2 = 6 \tag{17}$$
$$\frac{14}{3} + x_2 = 6 \tag{18}$$
$$x_2 = 6 - \frac{14}{3} = \frac{18}{3} - \frac{14}{3} = \frac{4}{3} \approx 1.33 \tag{19}$$

Assim, temos um vértice: $\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}\right)$.
Os outros vértices da região viável são:

- $A(0, 0)$
- $B(3, 0)$
- $C(0, 2.5)$
- $D\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}\right)$

4 Avaliação dos Vértices

Agora, calculamos o valor da função objetivo Z em cada vértice:

- Para $A(0, 0)$:
$$Z = 3(0) + 2(0) = 0$$
- Para $B(3, 0)$:
$$Z = 3(3) + 2(0) = 9$$
- Para $C(0, 2.5)$:
$$Z = 3(0) + 2(2.5) = 5$$
- Para $D\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}\right)$:
$$Z = 3\left(\frac{7}{3}\right) + 2\left(\frac{4}{3}\right) = 7 + \frac{8}{3} = \frac{21}{3} + \frac{8}{3} = \frac{29}{3} \approx 9.67$$

O valor máximo da função objetivo para o modelo relaxado ocorre no ponto $D\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}\right)$ com $Z \approx 9.67$.

5 Bifurcações na Árvore de Branch-and-Bound

A solução relaxada $D\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}\right)$ não é inteira, pois x_1 e x_2 assumem valores fracionários. Portanto, iniciamos o processo de bifurcação.

6 Bifurcações no Problema de Programação Inteira

6.1 Primeira Bifurcação

Escolhemos bifurcar em x_1:

- **Caso 1**: $x_1 \leq 2$
- **Caso 2**: $x_1 \geq 3$

6.2 Resolvendo o Caso 1: $x_1 \leq 2$

Considerando o problema original com a nova restrição:

Função Objetivo:

$$Z = 3x_1 + 2x_2$$

Restrições:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leq 6 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 5 \\ x_1 &\leq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \quad \text{(inteiros)} \end{aligned}$$

6.3 Método Gráfico para o Caso 1

1. **Gráfico das Restrições**:

- **Reta 1**: $2x_1 + x_2 = 6$
- **Reta 2**: $x_1 + 2x_2 = 5$
- **Reta 3**: $x_1 = 2$

2. **Pontos de Interseção**: - Interseção das retas $2x_1 + x_2 = 6$ e $x_1 + 2x_2 = 5$:

- Resolvendo o sistema:

$$x_2 = 6 - 2x_1$$

  Substituindo na segunda restrição:

$$x_1 + 2(6 - 2x_1) = 5 \implies x_1 + 12 - 4x_1 = 5 \implies -3x_1 = -7 \implies x_1 = \frac{7}{3} \approx 2.33$$

- Substituindo x_1 na primeira equação para encontrar x_2:

$$x_2 = 6 - 2\left(\frac{7}{3}\right) = 6 - \frac{14}{3} = \frac{18}{3} - \frac{14}{3} = \frac{4}{3} \approx 1.33$$

Os pontos a serem avaliados incluem:

- (0, 0)
- (0, 6)
- $\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}\right)$ (ponto de interseção)
- (2, 2) (ponto da nova restrição)

3. **Solução do Caso 1**: Avaliando Z nos pontos relevantes:

- Para (0, 0): $Z = 3(0) + 2(0) = 0$
- Para (2, 2): $Z = 3(2) + 2(2) = 6 + 4 = 10$
- Para $\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}\right)$: $Z = 3\left(\frac{7}{3}\right) + 2\left(\frac{4}{3}\right) = 7 + \frac{8}{3} \approx 11.67$ (não viável, pois $x_1 > 2$)

Assim, a melhor solução para o Caso 1 é:

- $x_1 = 2$
- $x_2 = 2$
- **Valor de** Z: $Z = 10$

6.4 Poda do Caso 1

Como encontramos uma solução viável, não há poda nesse caso.

6.5 Resolvendo o Caso 2: $x_1 \geq 3$

Agora, consideramos o problema original com a nova restrição:

Função Objetivo:

$$Z = 3x_1 + 2x_2$$

Restrições:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leq 6 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 5 \\ x_1 &\geq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \quad \text{(inteiros)} \end{aligned}$$

6.6 Método Gráfico para o Caso 2

1. **Gráfico das Restrições**:

- **Reta 1**: $2x_1 + x_2 = 6$
- **Reta 2**: $x_1 + 2x_2 = 5$
- **Reta 3**: $x_1 = 3$

2. **Pontos de Interseção**: - A interseção das retas $2x_1 + x_2 = 6$ e $x_1 + 2x_2 = 5$ é o mesmo ponto encontrado anteriormente:

$$\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

3. **Solução do Caso 2**: Avaliando Z nos pontos relevantes:

- Para (3, 0): $Z = 3(3) + 2(0) = 9$
- Para (3, 1): $Z = 3(3) + 2(1) = 9 + 2 = 11$
- Para (3, 2): $Z = 3(3) + 2(2) = 9 + 4 = 13$ (não viável, pois $x_2 > 2$)

Assim, a melhor solução para o Caso 2 é:

- $x_1 = 3$
- $x_2 = 0$
- **Valor de** Z: $Z = 9$

6.7 Poda do Caso 2

Como a solução encontrada no Caso 2 ($Z = 9$) é menor que a solução do Caso 1 ($Z = 10$), podemos podar essa bifurcação.

6.8 Resumo das Soluções

- **Caso 1**: $x_1 = 2$, $x_2 = 2$, $Z = 10$ - **Caso 2**: $x_1 = 3$, $x_2 = 0$, $Z = 9$ (poda)

Como a solução $Z = 10$ é maior do que a solução da relaxação original ($Z \approx 9.67$), continuamos o processo de branch-and-bound.

6.9 Verificando o Caso 2: $x_1 \geq 3$

Substituindo $x_1 = 3$ na função objetivo:

$$2(3) + x_2 \leq 6 \tag{20}$$
$$x_2 \leq 0 \tag{21}$$

A única solução inteira é $x_2 = 0$.
Calculando Z:

$$Z = 3(3) + 2(0) = 9$$

Como $Z = 9$ é menor que a solução do Caso 1, não precisamos continuar com essa bifurcação.

7 Descrição e Justificativas

7.1 Descrição do Problema e sua Formulação Matemática

O problema de maximização consiste em encontrar os valores inteiros de x_1 e x_2 que maximizam a função objetivo $Z = 3x_1 + 2x_2$ sujeita às restrições de capacidade e não negatividade. A solução deve atender às condições de integralidade.

7.2 Solução da Relaxação Linear do Problema (PPL)

A relaxação linear nos forneceu um valor ótimo de $Z \approx 9.67$ em $\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}\right)$, que não atende às restrições de integralidade.

7.3 Desenho da árvore do Branch-and-Bound com as bifurcações exploradas

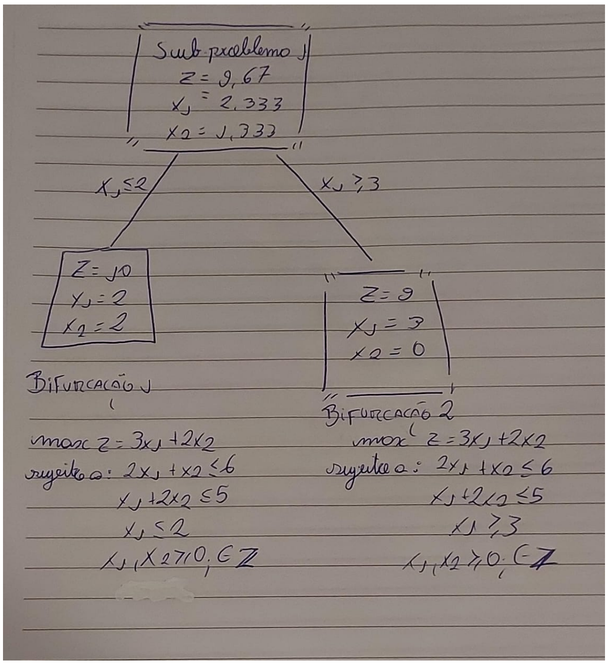

Figure 1: Desenho da Árvore

7.4 Justificativas para as Podas Realizadas em Cada Nó da Árvore

- **Caso 2** ($x_1 \geq 3$): A solução obtida $Z = 9$ é inferior à melhor solução inteira encontrada até agora ($Z = 10$). Assim, podamos esse nó. - **Caso 1** ($x_1 \leq 2$): O valor de $Z = 10$ é a solução ótima encontrada e, portanto, mantivemos essa bifurcação.

7.5 A Solução Ótima Obtida ao Final da Execução do Algoritmo

A solução ótima encontrada ao final da execução do algoritmo é:

$$x_1 = 2 \tag{22}$$
$$x_2 = 2 \tag{23}$$
$$Z = 10 \tag{24}$$