CIÊNCIA da COMPUTAÇÃO
Universidade Federal do Tocantins

Pesquisa Operacional

3 de setembro de 2024

Prof. Warley Gramacho
wgramacho@uft.edu.br

Simplex

Dada uma solução básica primal viável para o (PPL).

Se $z_j - c_j \geqslant 0$, $\forall j \in I_N$, a solução dada é uma solução ótima. PARE.

Caso contrário, escolhe-se um $k \in I_N$ para o qual $z_k - c_k < 0$;

se $\alpha_k = +\infty$, a solução do (PPL) é ilimitada. PARE.

se $\alpha_k < +\infty$, faremos $x_k = \alpha_k$, acarretando $x_{B(s)} = 0$,
a coluna a k ocupará o lugar da coluna $a_{B(s)}$ em B.

MUDANÇA DE BASE

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximizar} & z = 3x_1 + 5x_2 \\
\text{sujeito a:} & \\
& \begin{array}{rcrcr}
x_1 & & & \leqslant & 4 \\
& + & x_2 & \leqslant & 6 \\
3x_1 & + & 2x_2 & \leqslant & 18 \\
\end{array} \\
& x_1,\ x_2 \geqslant 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximizar} & z = 3x_1 + 5x_2 \\
\text{sujeito a:} & \\
& \begin{array}{lcr}
x_1 & \leqslant & 4 \\
\quad + \ x_2 & \leqslant & 6 \\
3x_1 + 2x_2 & \leqslant & 18 \\
x_1, \ x_2 \geqslant 0 & &
\end{array}
\end{array}
$$

Associaremos às restrições não triviais as variáveis de folga $x_3 \geqslant 0$, $x_4 \geqslant 0$, $x_5 \geqslant 0$ tais que o (PPL) fique sob a seguinte forma:

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximizar} & z = 3x_1 + 5x_2 \\
\text{sujeito a:} & \\
& \begin{array}{rcl}
x_1 & \leqslant & 4 \\
+\ x_2 & \leqslant & 6 \\
3x_1 + 2x_2 & \leqslant & 18
\end{array} \\
& x_1,\ x_2 \geqslant 0
\end{array}
$$

Associaremos às restrições não triviais as variáveis de folga $x_3 \geqslant 0$, $x_4 \geqslant 0$, $x_5 \geqslant 0$ tais que o (PPL) fique sob a seguinte forma:

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximizar} & z = 3x_1 + 5x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \\
\text{sujeito a:} & \\
& \begin{array}{lcl}
x_1 + x_3 & = & 4 \\
x_2 + x_4 & = & 6 \\
3x_1 + 2x_2 + x_5 & = & 18
\end{array} \\
& \\
& x_j \geqslant 0,\ j = 1, 2, 3, 4, 5.
\end{array}
$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 18 \end{pmatrix}$$

$$c = (3\ 5\ 0\ 0\ 0).$$

Simplex

1ª Solução básica:

$$I_B = \{3,\ 4,\ 5\},\quad I_N = \{1,\ 2\},$$

$$B(1) = 3,\ B(2) = 4,\ B(3) = 5,$$

$$B = (a_3\ a_4\ a_5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I,\ \text{logo}\ B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c_B = (0\ 0\ 0),\ u = c_B B^{-1} = (0\ 0\ 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (0\ 0\ 0),$$

$$\bar{x}_B = B^{-1} b = \begin{pmatrix} \bar{x}_3 \\ \bar{x}_4 \\ \bar{x}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 18 \end{pmatrix}$$

$$\bar{z} = c_B B^{-1} b = ub = (0\ 0\ 0) \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 18 \end{pmatrix} = 0$$

Simplex

$$z_1 = ua_1 = (0\ 0\ 0)\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad z_1 - c_1 = 0 - 3 = -3 \ \ngeq 0,$$

$$z_2 = ua_2 = (0\ 0\ 0)\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad z_2 - c_2 = 0 - 5 = -5 \ \ngeq 0,$$

$$y_1 = B^{-1}a_1 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$$

$$y_2 = B^{-1}a_2 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$\text{maximizar} \quad z$$

sujeito a:

$$\begin{array}{rcrcrcr} z & = & 0 & + & 3x_1 & + & 5x_2 \\ x_3 & = & 4 & - & x_1 & & \\ x_4 & = & 6 & & & - & x_2 \\ x_5 & = & 18 & - & 3x_1 & - & 2x_2 \end{array}$$

$$x_j \geqslant 0, j = 1, \ldots, 5$$

Fazendo $x_1 = x_2 = 0$ teremos $x_3 = 4$, $x_4 = 6$, $x_5 = 18$ fornecendo $z = 0$. Faremos uma das variáveis x_1 ou x_2 crescer de valor, provocando o aumento de z. Tomemos, por exemplo, x_2 para ter seu valor aumentado, isto é, faremos a coluna a 2 entrar na nova base. Como $L_1 = \{2, 3\}$, pois $y_{12} = 0$, $y_{22} = 1$ e $y_{32} = 2$, passaremos a calcular α_2:

$$\alpha_2 = \min \left\{ \frac{\overline{x}_{B(2)}}{y_{22}}, \frac{\overline{x}_{B(3)}}{y_{32}} \right\} = \min \left\{ \frac{6}{1}, \frac{18}{2} \right\} = 6 = \frac{\overline{x}_{B(2)}}{y_{22}},$$

logo $a_{B(2)}$ deixará a base, sendo substituída pela coluna a_2 .

Simplex

2ª Solução básica:

$$I_B = \{3,\ 2,\ 5\},\quad I_N = \{1,\ 4\},$$

$$B(1) = 3,\ B(2) = 2,\ B(3) = 5,$$

$$B = (a_3\ a_2\ a_5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ \text{logo}\ B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c_B = (0\ 5\ 0),\ \ u = c_B B^{-1} = (0\ 5\ 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = (0\ 5\ 0),$$

$$\bar{x}_B = B^{-1} b = \begin{pmatrix} \bar{x}_3 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\bar{z} = c_B B^{-1} b = ub = (0\ 5\ 0) \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 18 \end{pmatrix} = 30$$

Simplex

$$z_1 = ua_1 = (0\ 5\ 0)\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad z_1 - c_1 = 0 - 3 = -3 \ngeq 0,$$

$$z_4 = ua_4 = (0\ 5\ 0)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = 5 \qquad \Rightarrow \qquad z_4 - c_4 = 5 - 0 = \ 5 \geqslant 0.$$

Calcularemos o essencial para a passagem à terceira solução básica, isto é, a_1 entrará na nova base; necessitamos obter α_1 para saber qual a coluna de B que será substituída por a_1 .

$$y_1 = B^{-1}a_1 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y_{11}\\y_{21}\\y_{31}\end{pmatrix},$$

logo $L_1 = \{1, 3\}$ e

Simplex

$$\alpha_1 = \min_{i \in L_1} \left\{ \frac{\overline{x}_{B(1)}}{y_{i1}}, \frac{\overline{x}_{B(3)}}{y_{i1}} \right\} = \min \left\{ \frac{4}{1}, \frac{6}{3} \right\} = \frac{6}{3} = 2 = \frac{\overline{x}_{B(3)}}{y_{31}} = \frac{\overline{x}_5}{y_{31}},$$

Assim sendo $a_5 = a_{B(3)}$ deixará a base.

Simplex

3ª Solução básica:

$$I_B = \{3,\ 2,\ 1\},\quad I_N = \{4,\ 5\},$$

$$B(1) = 3,\ B(2) = 2,\ B(3) = 1,$$

$$B = (a_3\ a_2\ a_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ \text{logo } B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$c_B = (0\ 5\ 3),\ u = c_B B^{-1} = (0\ 5\ 3) \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = (0\ 3\ 1),$$

$$\bar{x}_B = B^{-1} b = \begin{pmatrix} \bar{x}_3 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{z} = c_B B^{-1} b = ub = (0\ 3\ 1) \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 18 \end{pmatrix} = 36$$

Simplex

$$z_4 = ua_4 = (0\ 3\ 1)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = 3 \qquad \Rightarrow \qquad z_4 - c_4 = 3 - 0 = 3 \geqslant 0,$$

$$z_5 = ua_5 = (0\ 3\ 1)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad z_5 - c_5 = 1 - 0 = 1 \geqslant 0.$$

Como $z_j - c_j \geqslant 0,\ \forall j \in I_N$, esta solução básica (3ª solução) é ótima.

Então $x_1 = 2,\ x_2 = 6,\ x_3 = 2,\ x_4 = x_5 = 0$ é uma solução ótima, fornecendo $z = 36$.

Busca de uma Solução Básica Viável

Acrescentaremos uma variável artificial $g_i \geqslant 0$ à esquerda de cada restrição. Suporemos $b_i \geqslant 0, \; i = 1, 2, \ldots, m$. Teríamos o seguinte conjunto de restrições:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + g_i = bi \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$g_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Construiremos um outro problema de programação linear

$$(PA): \text{minimizar} \sum_{i=1}^{m} g_i$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + g_i = bi \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$g_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

É fácil verificar que as variáveis $x_j = 0,\ j = 1, 2, \ldots, n$ e $g_i = b_i \geqslant 0$ estão associadas a uma solução básica de (PA) satisfazendo restrições do mesmo. Esta solução básica será tomada como solução inicial para a solução de (PA) utilizando o método do simplex para o caso de minimização, lembrando que $\min z = -\max(-z)$
Se a base final da solução ótima de (PA) não contiver nenhuma coluna associada às variáveis artificiais $g_i,\ i = 1, 2, \ldots, m$ esta será também uma base primal viável do (PPL) original.

Exemplo

Se tivermos as restrições seguintes:

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 &\geqslant 4 \\
-3x_1 + 4x_2 &\geqslant 5 \\
2x_1 + x_2 &\leqslant 6 \\
x_1, x_2 &\geqslant 0
\end{aligned}
$$

Introduzindo as variáveis de folga x_3, x_4 e x_5, temos:

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 - x_3 &= 4 \\
-3x_1 + 4x_2 - x_4 &= 5 \\
2x_1 + x_2 + x_5 &= 6 \\
x &\geqslant 0
\end{aligned}
$$

Exemplo

Essa matriz não tem uma identidade como submatriz; podemos então introduzir três variáveis artificiais de forma a obter uma variável básica viável inicial. No entanto, note que a variável x_5 tem coeficiente 1; portanto, precisamos apenas acrescentar 2 variáveis artificiais ao problema:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_6 &= 4 \\ -3x_1 + 4x_2 - x_4 + x_7 &= 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_5 &= 6 \\ x &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Aqui, temos uma variável básica viável inicial dada por $x_5 = 6$, $x_6 = 4$, $x_7 = 5$. O resto das variáveis são não-básicas e têm valor 0. É claro que para voltarmos ao problema original, gostaríamos que as variáveis artificiais eventualmente assumissem o valor nulo.

$\triangle$

Regra de Bland

Regra de Bland (Método primal de simplex)

- Critério de entrada (problema de maximização):
  a_p entra na base se $z_p - c_p < 0$ e p for o menor índice entre todos os $j \in I_N$ tais que $z_j - c_j < 0$.

- Critério de saída:
  a_s sai da base se $\frac{\overline{x}_s}{y_{lp}} = \min_{y_{ip}} > 0, \; i = 1, 2, \ldots, m \left\{ \frac{\overline{x}_{B(i)}}{y_{ip}} \right\} = \theta$, onde $s = B(l)$ e s é o menor índice entre todos aqueles para as quais $\frac{\overline{x}_{B(i)}}{y_{ip}} = \theta$

Caso aplicarmos a regra de Bland durante a resolução de um problema de progamação linear, utilizando o método primal do simplex, nunca haverá ciclo, isto é, o método do simplex convergirá.

Atividade

$$
\begin{aligned}
\min \quad & x_1 - 2x_2 \\
\text{s.a.} \quad & x_1 + x_2 \geqslant 2 \\
& -x_1 + x_2 \geqslant 1 \\
& x_2 \leqslant 3 \\
& x_1, x_2 \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

Referências I

- P. Belfiore and L.P. Fávero, *Pesquisa operacional para cursos de engenharia*, Elsevier Editora Ltda., 2013.
- Maristela Oliveira dos Santos, *Notas de aula de introdução à pesquisa operacional*, Agosto 2010.
- M.C. Goldbarg and H.P.L. Luna, *Otimização combinatória e programação linear: modelos e algoritmos*, CAMPUS - RJ, 2005.
- N. MACULAN and M.H.C. Fampa, *Otimização linear*, EdUnB, 2006.