Considerações sobre esta lista de exercícios:

1. Esta lista de exercícios deve ser escrita no latex e enviado somente o pdf com as respostas (se necessário vejam na pasta das orientações gerais sobre a disciplina, no moodle, o arquivo linkTemplateListaExercicios-1.txt para maiores detalhes);
2. Mesmo para questões cujas respostas sejam desenhos, é recomendável que alguma explicação seja dada com relação à estratégia adotada para resolução do problema;
3. Esta lista de exercícios pode ser feita em duplas;
4. Tentem organizar a lista da forma já explicada em sala de aula: enunciado da questão no cabeçalho da página, dados da disciplina, com 1 única questão por página, etc;
5. Questões copiadas serão anuladas, independente do número ou percentual de cópias, caso toda lista seja copiada ou não tenha percentual mínimo de originalidade, então ela será anulada (não copie questão do colega, ou várias questões de vários colegas, faça o que conseguir da lista e entregue o fruto do seu esforço);
6. Se houver alguma dúvida com relação ao conteúdo ou interpretação da lista entrem em contato imediatamente com o professor da disciplina: tanilson.dias@uft.edu.br

Boa Sorte!

Teoria dos Grafos (Lista 1)

Prof. Tanilson Dias dos Santos
Alunos: Daniel Nolêto Maciel Luz e João Victor Walcacer Giani

15 de setembro de 2023

Universidade Federal do Tocantins - UFT
Teoria dos Grafos (Lista 1)
Prof. Tanilson Dias dos Santos
Daniel Nolêto Maciel Luz e João Victor Walcacer
1. [*Definições assintóticas de funções*] Sejam $f(n) = 5n^2 - 271n$ e $g(n) = 17n^2 - 8$, então prove que $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$.

Para que $f(n) = O(g(n))$ seja verdade, a condição $f(n) \leq c \cdot g(n)$ tem que ser cumprida. Sendo assim:

$$
\begin{aligned}
f(n) &\leq c \cdot g(n) \\
5n^2 - 271n &\leq c \cdot (17n^2 - 8) \\
\frac{5n^2 - 271n}{n^2} &\leq c \cdot \frac{(17n^2 - 8)}{n^2} \\
5 - \frac{271}{n} &\leq c \cdot (17 - \frac{8}{n^2}) \\
5 &\leq c \cdot (17) \\
c &\geq \frac{5}{17}
\end{aligned}
$$

Como foi possível idenficar um valor para a constante c ($c \geq \frac{5}{17}$) em que para todo $n \geq 1$ a condição é cumprida, a afirmação $f(n) = O(g(n))$ está correta.

Universidade Federal do Tocantins - UFT
Teoria dos Grafos (Lista 1)
Prof. Tanilson Dias dos Santos
Alunos: Daniel Nolêto Maciel Luz e João Victor Walcacer

2. Sejam $f(n) = 27n^3 - 15$ e $g(n) = 15n^3 + 100$, então prove que $f(n) = \Theta(g(n))$.

Para que f(n) seja Θ de g(n), f(n) tem que ser tanto O(g(n)) quanto Ω(g(n)). Sendo assim:

(I) - Provando que $f(n) = O(g(n))$

$$\begin{aligned}
f(n) &= O(g(n)) \\
f(n) &\leq c \cdot g(n) \\
27n^3 - 15 &\leq c \cdot (15n^3 + 100) \\
\frac{27n^3 - 15}{n^3} &\leq c \cdot \frac{(15n^3 + 100)}{n^3} \\
27 - \frac{15}{n^3} &\leq c \cdot (15 - \frac{100}{n^3}) \\
27 &\leq c \cdot (15) \\
c &\geq \frac{27}{15}
\end{aligned}$$

Foi possível identificar a constante c em que a condição foi cumprida.Portanto, $f(n) = O(g(n))$.

(II) - Provando que $f(n) = \Omega(g(n))$

$$\begin{aligned}
f(n) &= \Omega(g(n)) \\
f(n) &\geq c \cdot g(n) \\
27n^3 - 15 &\geq c \cdot (15n^3 + 100) \\
\frac{27n^3 - 15}{15n^3} &\geq c \cdot \frac{(15n^3 + 100)}{15n^3} \\
\frac{27}{15} - \frac{15}{15n^3} &\geq c \cdot (1 + \frac{100}{15n^3}) \\
\frac{9}{5} &\geq c \cdot (1) \\
c &\leq \frac{9}{5}
\end{aligned}$$

É possível afirmar que $f(n) = \Omega(g(n))$ para toda constante $c \leq \frac{9}{5}$ e para todo $n \geq 1$.

Como os itens (I) e (II) foram provados , é possível afirmar que $f(n) = \Theta(g(n))$.

Universidade Federal do Tocantins - UFT
Teoria dos Grafos (Lista 1)
Prof. Tanilson Dias dos Santos
Alunos: Daniel Nolêto Maciel Luz e João Victor Walcacer

3. Provar ou dar contra-exemplo:

(a) $f(n) = O(g(n)) \Rightarrow g(n) = O(f(n))$.

Segundo o enunciado, se $f(n) = O(g(n))$ então $g(n) = O(f(n))$.
Partindo dessa afirmação, ao atruibuirmos valores tal que $f(n) = n$ e $g(n) = n^2$, a sentença "$f(n) = O(g(n)) \Rightarrow g(n) = O(f(n))$"deve permanecer verdadeira.

(I) - Provando que $f(n) = O(g(n))$

$$\begin{aligned} f(n) &= O(g(n)) \\ f(n) &\leq c \cdot g(n) \\ n &\leq c \cdot n^2 \\ 1 &\leq c \cdot n \end{aligned}$$

Como c continua a crescer para todo n >= 1 é possível concluir que a condição sempre será cumprida, sendo assim, f(n) = O(g(n)).

(II) - Provando que $g(n) = O(f(n))$

$$\begin{aligned} g(n) &= O(f(n)) \\ g(n) &\leq c \cdot f(n) \\ n^2 &\leq c \cdot n \\ n &\leq c \\ 1 &\leq \frac{c}{n} \end{aligned}$$

Como a constante c irá diminuir quanto maior for o valor de n, é possível concluir que em determinado momento a condição não será cumprida, sendo assim, $g(n) \neq O(f(n))$.

Ao analisar os itens (I) e (II), é possível afirmar que a sentença $f(n) = O(g(n)) \Rightarrow g(n) = O(f(n))$ é falsa, uma vez que no caso apresentado, f(n) = O(g(n)) e $g(n) \neq O(f(n))$.

Universidade Federal do Tocantins - UFT
Teoria dos Grafos (Lista 1)
Prof. Tanilson Dias dos Santos
Alunos: Daniel Nolêto Maciel Luz e João Victor Walcacer

(b) $f(n) = O(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = \Omega(f(n))$.

Segundo o enunciado, $f(n) = O(g(n))$ e $g(n) = \Omega(f(n))$, só são afirmativas válidas se ambas foram verdadeiras.

Partindo dessa afirmação, ao atruibuirmos valores tal que $f(n) = n$ e $g(n) = n^2$, a sentença "$f(n) = O(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = O(f(n))$"deve permanecer verdadeira.

(I) - Provando que $f(n) = O(g(n))$

$$\begin{aligned} f(n) &= O(g(n)) \\ f(n) &\leq c \cdot g(n) \\ n &\leq c \cdot n^2 \\ 1 &\leq c \cdot n \end{aligned}$$

Como c continua a crescer para todo n >= 1 é possível concluir que a condição sempre será cumprida, sendo assim, $f(n) = O$(g(n)).

(II) - Provando que $g(n) = \Omega(f(n))$

$$\begin{aligned} g(n) &= \Omega(f(n)) \\ g(n) &\geq c \cdot f(n) \\ n^2 &\geq c \cdot n \\ n &\geq c \\ 1 &\geq \frac{c}{n} \end{aligned}$$

Como a constante c irá diminuir quanto maior for o valor de n, é possível concluir que em determinado momento a condição será cumprida, sendo assim, $g(n) = O(f(n))$.

Ao analisar os itens (I) e (II), é possível afirmar que a sentença $f(n) = O(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = \Omega(f(n))$ é verdadeiro, uma vez que no caso apresentado, $f(n) = O(g(n)) e g(n) = \Omega(f(n))$.

Universidade Federal do Tocantins - UFT
Teoria dos Grafos (Lista 1)
Prof. Tanilson Dias dos Santos
Alunos: Daniel Nolêto Maciel Luz e João Victor Walcacer

4. [*Técnicas de Demonstração*] Vértice interno é um vértice que não é folha de uma árvore binária T. Provar que o número de vértices internos de uma árvore T com altura h é no máximo $2^h - 1$.

[Obs. considere T é árvore binária; considere a raiz com altura 0; sugerida a prova por indução.]

(I) - Caso Inicial(h = 0)

$$\begin{aligned} 2n^h - 1 &= x \\ 2n^0 - 1 &= x \\ 1 - 1 &= x \\ x &= 0 \end{aligned}$$

O caso inicial é referente a uma árvore que possue apenas sua raíz, portanto, x = 0 está correto.

(II) - Para h = h

$$\begin{aligned} 2^h - 1 &= V - F \\ 2^h &= V - F + 1 \end{aligned}$$

V= Número de Vértices
F= Número de Folhas

(III) - Para h = h + 1

$$\begin{aligned} 2^h - 1 &= x \\ 2^{(h+1)} - 1 &= 2(2^h) - 1 \\ 2^{(h+1)} - 1 &= 2(V - F + 1) - 1 \\ 2^{(h+1)} &= 2V - 2F + 2 \\ 2^h \cdot 2 &= 2V - 2F + 2 \\ 2^h &= V - F + 1 \end{aligned}$$

Como o valor de 2^n obtido no item (III) foi o mesmo obtido no item (II), é possível afirmar que o número máximo de vértices internos de uma árvore é $2^h - 1$.

Universidade Federal do Tocantins - UFT
Teoria dos Grafos (Lista 1)
Prof. Tanilson Dias dos Santos
Alunos: Daniel Nolêto Maciel Luz e João Victor Walcacer

5. Provar que o número total de vértices de uma árvore T com altura h é no máximo $2^h - 1$.
[Obs. considere T é árvore binária; considere a raiz com altura 1; sugerida a prova por indução.]

(I) - Caso Inicial(h = 1)

$$2^h - 1 = x$$
$$2^1 - 1 = x$$
$$2 - 1 = 1$$

(II) - Para h = h

$$2^h - 1 = V - F$$
$$2^h = V - F + 1$$

V= Número de Vértices
F= Número de Folhas

(III) - Para h = h + 1

$$2^h - 1 = x$$
$$2^{(h+1)} - 1 = 2(2^h) - 1$$
$$2^{(h+1)} - 1 = 2(V - F + 1) - 1$$
$$2^{(h+1)} = 2V - 2F + 2$$
$$2^h \cdot 2 = 2V - 2F + 2$$
$$2^h = V - F + 1$$

Como o valor de 2^n obtido no item (III) foi o mesmo obtido no item (II), é possível afirmar que o número máximo de vértices internos de uma árvore é $2^h - 1$.

Universidade Federal do Tocantins - UFT
Teoria dos Grafos (Lista 1)
Prof. Tanilson Dias dos Santos
Alunos: Daniel Nolêto Maciel Luz e João Victor Walcacer

6. [*Conceitos Básicos de Grafos*] Uma grade de dimensão $p \times q$ é um grafo cujos vértices são os pontos de coordenadas inteiras (x, y) tal que $1 \leq x \leq p$ e $1 \leq y \leq q$ e tal que dois vértices são adjacentes se, e somente se, a distância entre os pontos é igual a 1. Mostre que uma grade é um grafo hamiltoniano se, e somente se, $p * q$ for par.

Universidade Federal do Tocantins - UFT
Teoria dos Grafos (Lista 1)
Prof. Tanilson Dias dos Santos
Alunos: Daniel Nolêto Maciel Luz e João Victor Walcacer

7. Responda as questões a seguir de acordo com o Grafo G_1 apresentado na Figura 1.

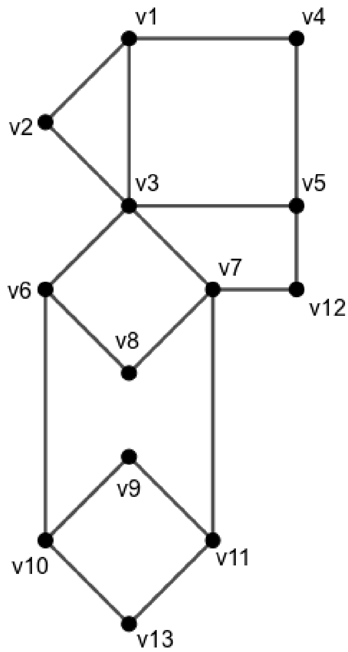


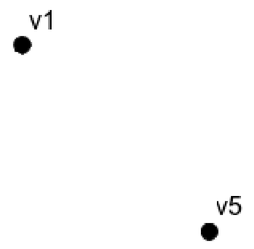
Figura 1: Grafo G_1

(a) G_1 é grafo euleriano? Sim/Não, por quê?
O grafo G_1 não é considerado euleriano. Para que um grafo seja euleriano é preciso que todos os seus vértices tenham grau par, entretanto, G_1 apresenta vértices de grau ímpar, como por exemplo o v1.

Universidade Federal do Tocantins - UFT
Teoria dos Grafos (Lista 1)
Prof. Tanilson Dias dos Santos
Alunos: Daniel Nolêto Maciel Luz e João Victor Walcacer

(b) Apresentar um conjunto independente em G_1 que **não** seja maximal.

S = {v1, v5}

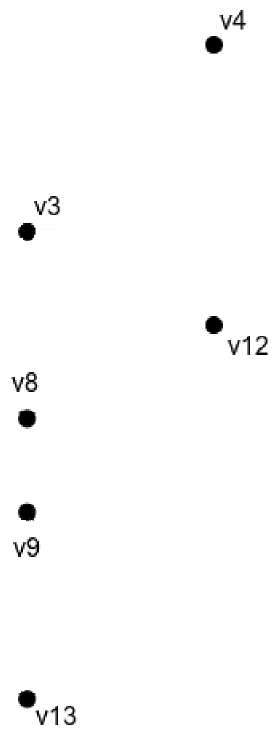


S não é considerado um conjunto independente maximal, já que é possível adicionar outro vértice sem perder o título de conjunto independente maximal, como por exemplo v10.

Universidade Federal do Tocantins - UFT
Teoria dos Grafos (Lista 1)
Prof. Tanilson Dias dos Santos
Alunos: Daniel Nolêto Maciel Luz e João Victor Walcacer

(c) Apresentar um conjunto independente em G_1 que seja maximal.

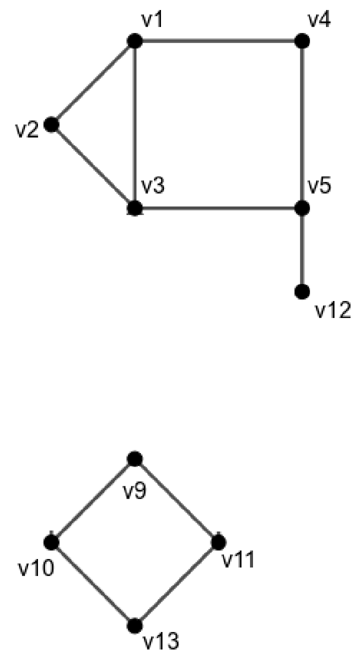
S = {v3, v4, v8, v9, v12, v13}



S é considerado um conjunto independente maximal, já que não é possível adicionar outro vértice sem perder o título de conjunto independente maximal.

Universidade Federal do Tocantins - UFT
Teoria dos Grafos (Lista 1)
Prof. Tanilson Dias dos Santos
Alunos: Daniel Nolêto Maciel Luz e João Victor Walcacer

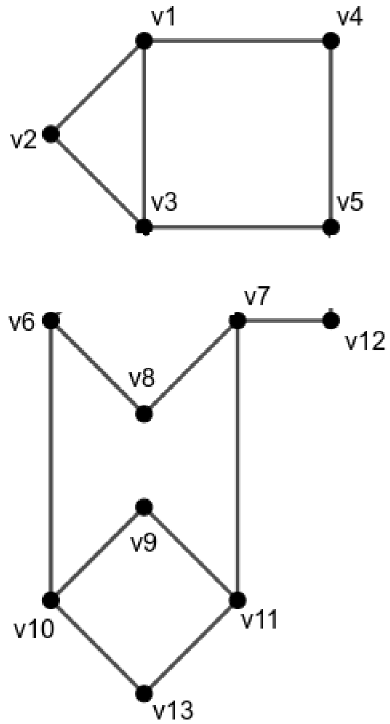
(d) Apresentar um corte de vértices em G_1.



A remoção dos vértices v = {v6, v7, v8} pode ser considerado como um corte de vértices, já que torna o grafo G desconexo.

Universidade Federal do Tocantins - UFT
Teoria dos Grafos (Lista 1)
Prof. Tanilson Dias dos Santos
Alunos: Daniel Nolêto Maciel Luz e João Victor Walcacer

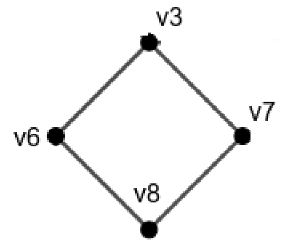
(e) Apresentar um corte de arestas em G_1.



A remoção das arestas E = {v3v6, v3v7, v5v12} pode ser considerado como um corte de arestas, já que torna o grafo G desconexo.

Universidade Federal do Tocantins - UFT
Teoria dos Grafos (Lista 1)
Prof. Tanilson Dias dos Santos
Alunos: Daniel Nolêto Maciel Luz e João Victor Walcacer

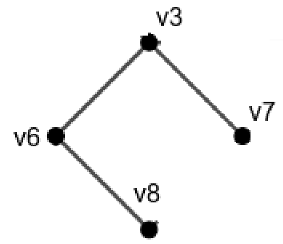
(f) Apresentar um subgrafo induzido de G_1.



S = (V = {v3 ,v6 , v7, v8}, E = {v3v6, v6v8, v8v7, v7v3}) é considerado subgrafo induzido de G_1, já que forma um grafo com as mesma conexões entre os vértices do grafo original.

Universidade Federal do Tocantins - UFT
Teoria dos Grafos (Lista 1)
Prof. Tanilson Dias dos Santos
Alunos: Daniel Nolêto Maciel Luz e João Victor Walcacer

(g) Apresentar um subgrafo de G_1 que não seja subgrafo induzido.



S = (V = {v3 ,v6 , v7, v8}, E = {v3v6, v6v8, v8v7}) não é considerado subgrafo induzido de G_1, já que não forma um grafo com as mesma conexões entre os vértices do grafo original.

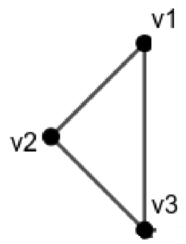
(h) Informar $\delta(G_1)$ =
$\delta(G_1)$ = 2

Universidade Federal do Tocantins - UFT
Teoria dos Grafos (Lista 1)
Prof. Tanilson Dias dos Santos
Alunos: Daniel Nolêto Maciel Luz e João Victor Walcacer

(i) Informar $\Delta(G_1)$ =
$\Delta(G_1)$ = 4

Universidade Federal do Tocantins - UFT
Teoria dos Grafos (Lista 1)
Prof. Tanilson Dias dos Santos
Alunos: Daniel Nolêto Maciel Luz e João Victor Walcacer

(j) Apresentar uma clique de G_1.



Isso pode ser considerado uma clique de G_1, uma vez que todos os vértices tem conexão entre si.

Universidade Federal do Tocantins - UFT
Teoria dos Grafos (Lista 1)
Prof. Tanilson Dias dos Santos
Alunos: Daniel Nolêto Maciel Luz e João Victor Walcacer

8. Qual a quantidade máxima de arestas que um grafo com 10 vértices pode ter para que ele seja planar? E se esse grafo for bipartido com partes de tamanhos iguais?

O limite superior de um grafo planar é delimitado por $m \leq 3n - 6$, onde m é o número de arestas e n o de vértices. Sendo assim,

$$
\begin{aligned}
m &\leq 3n - 6 \\
m &\leq 3(10) - 6 \\
m &\leq 30 - 6 \\
m &\leq 24
\end{aligned}
$$

Para ser planar este grafo deve ter um número de arestas m ≤ 24.

Caso esse grafo seja bipartido com partes de tamanho igual, é possível afirmar que os dois lados possuem 5 vértices cada. Sendo assim, para saber o número máximo de arestas é possível utilizar a fórmula E = m · n, onde n e m correspondem ao número de vértices de cada lado.

$$
\begin{aligned}
E &= m \cdot n \\
E &= 5 \cdot 5 \\
E &= 25
\end{aligned}
$$

Universidade Federal do Tocantins - UFT
Teoria dos Grafos (Lista 1)
Prof. Tanilson Dias dos Santos
Alunos: Daniel Nolêto Maciel Luz e João Victor Walcacer

9. Qual a quantidade mínima de vértices que um grafo com 20 arestas pode ter para que ele seja planar? E se esse grafo for bipartido com partes de tamanhos iguais?

O limite superior de um grafo planar é delimitado por $m \leq 3n - 6$, onde m é o número de arestas e n o de vértices. Sendo assim,

$$\begin{aligned} m &\leq 3n - 6 \\ m &\leq 3(20) - 6 \\ m &\leq 60 - 6 \\ m &\leq 54 \end{aligned}$$

Para ser planar este grafo deve ter um número de arestas m ≤ 54.

Caso esse grafo seja bipartido com partes de tamanho igual, é possível afirmar que os dois lados possuem 10 vértices cada. Sendo assim, para saber o número máximo de arestas é possível utilizar a fórmula E = m · n, onde n e m correspondem ao número de vértices de cada lado.

$$\begin{aligned} E &= m \cdot n \\ E &= 10 \cdot 10 \\ E &= 100 \end{aligned}$$

Universidade Federal do Tocantins - UFT
Teoria dos Grafos (Lista 1)
Prof. Tanilson Dias dos Santos
Alunos: Daniel Nolêto Maciel Luz e João Victor Walcacer

10. Provar que:

(a) Um Grafo G é Bipartido se e somente se G não possui ciclo ímpar.

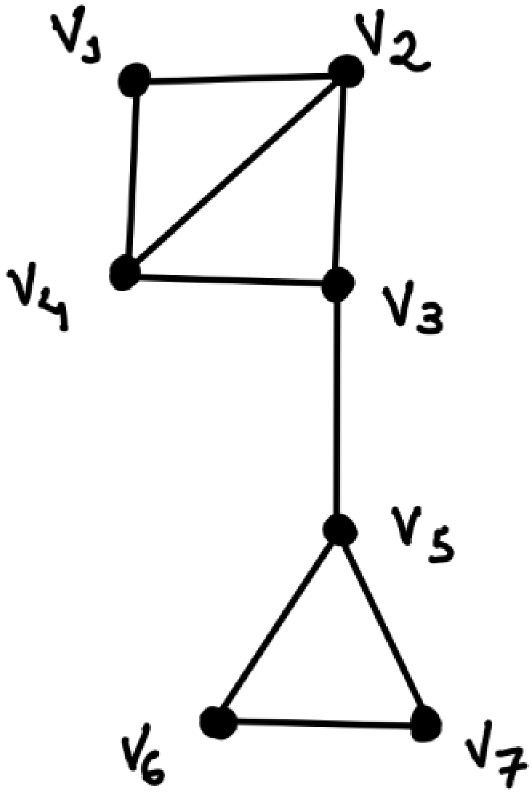
(a) Um Grafo G é Bi-colorível se e somente se G é bipartido.

11. Apresente uma representação gráfica para o Grafo G_2, definido pela Matriz de Adjacência da Tabela 1, logo em seguida responda às questões sobre G_2.

Tabela 1: Matriz de Adjacência do grafo G_2

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
v_1	0	1	0	1	0	0	0
v_2	1	0	1	1	0	0	0
v_3	0	1	0	1	1	0	0
v_4	1	1	1	0	0	0	0
v_5	0	0	1	0	0	1	1
v_6	0	0	0	0	1	0	1
v_7	0	0	0	0	1	1	0

Universidade Federal do Tocantins - UFT
Teoria dos Grafos (Lista 1)
Prof. Tanilson Dias dos Santos
Alunos: Daniel Nolêto Maciel Luz e João Victor Walcacer



(a) G_2 é grafo euleriano? Sim/Não, por quê?
O grafo G_2 não é considerado euleriano. Para que um grafo seja euleriano é preciso que todos os seus vértices tenham grau par, entretanto, G_2 apresenta vértices de grau ímpar, como por exemplo o v2 e v4.

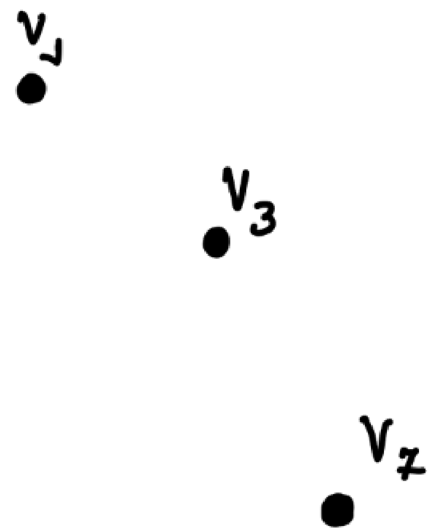
(b) $\{v_2, v_5\}$ representa um conjunto independente maximal em G_2? Sim/Não, por quê?

Sim, o conjunto $\{v_2, v_5\}$ é maximal em G_2, pois, não há nenhum outro vértice que aumente o tamanho do conjunto e o mantenha independente.

Universidade Federal do Tocantins - UFT
Teoria dos Grafos (Lista 1)
Prof. Tanilson Dias dos Santos
Alunos: Daniel Nolêto Maciel Luz e João Victor Walcacer

(c) Apresentar um conjunto independente que seja maximal e máximo em G_2.

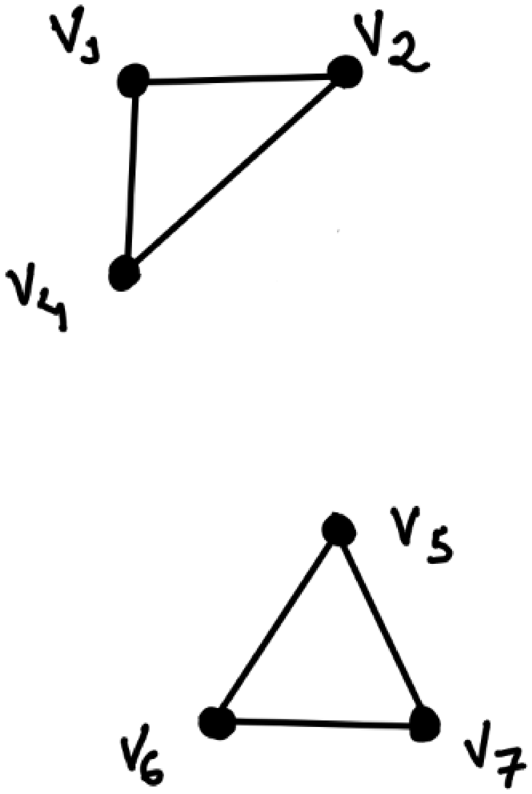
S = {v1, v3, v7}, pois, é o maior gráfo independente possível, e é maximal porque não tem como adicionar nem um vértice para aumenta-lo sem que ele deixe de ser independente.



Universidade Federal do Tocantins - UFT
Teoria dos Grafos (Lista 1)
Prof. Tanilson Dias dos Santos
Alunos: Daniel Nolêto Maciel Luz e João Victor Walcacer

(d) Apresentar um corte de vértices em G_2.

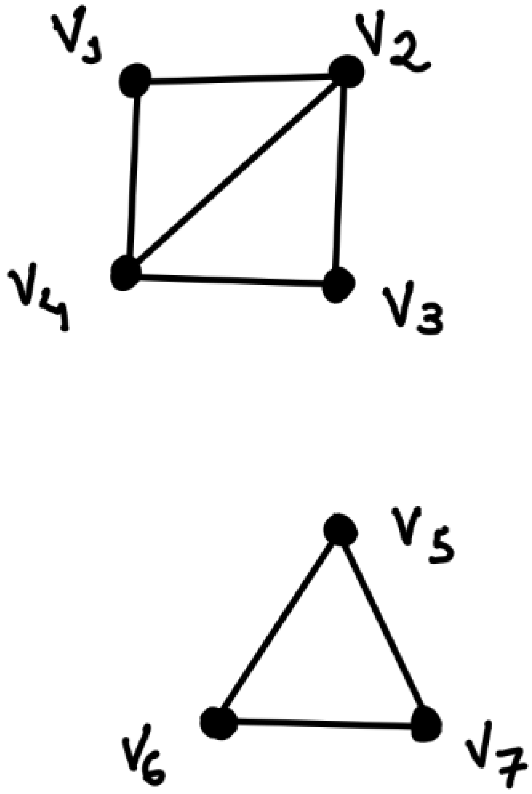
O corte foi realizado no vértice {v3}, tornando o grafo desconexo.



Universidade Federal do Tocantins - UFT
Teoria dos Grafos (Lista 1)
Prof. Tanilson Dias dos Santos
Alunos: Daniel Nolêto Maciel Luz e João Victor Walcacer

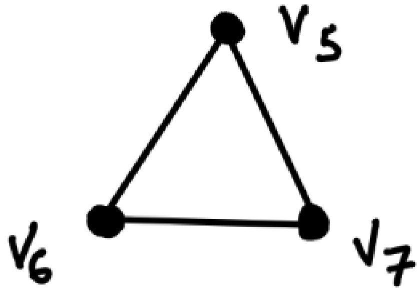
(e) Apresentar um corte de arestas em G_2.

O corte foi realizado na aresta V3V5, tornando o grafo desconexo.



(f) Apresentar um subgrafo induzido de G_2.

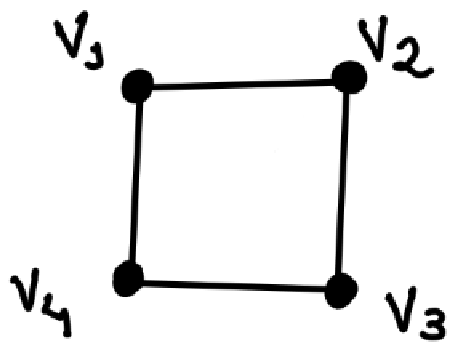
O subgrafo $G_2[S_1]$ foi criado a partir do conjunto S={v5, v6, v7}, que satisfaz as condições de subgrafo induzido, no qual, todos os vértices estão conectados entre sí.



Universidade Federal do Tocantins - UFT
Teoria dos Grafos (Lista 1)
Prof. Tanilson Dias dos Santos
Alunos: Daniel Nolêto Maciel Luz e João Victor Walcacer

(g) Apresentar um subgrafo de G_2 que não seja subgrafo induzido.

O subgrafo $G_2[S_2]$ foi criado a partir do conjunto de vértices S={v1, v2, v3, v4}. que não satisfaz a condição de subgrafo induzido, porque nem todos os vértices são conectados por arestas entre sí.



(h) Informar $\delta(G_2)$ =

$\delta(G_2)$ = 2

Universidade Federal do Tocantins - UFT
Teoria dos Grafos (Lista 1)
Prof. Tanilson Dias dos Santos
Alunos: Daniel Nolêto Maciel Luz e João Victor Walcacer

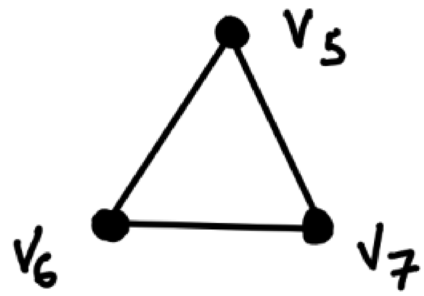
(i) Informar $\Delta(G_2)$ =

$\Delta(G_2)$ = 3

Universidade Federal do Tocantins - UFT
Teoria dos Grafos (Lista 1)
Prof. Tanilson Dias dos Santos
Alunos: Daniel Nolêto Maciel Luz e João Victor Walcacer

(j) Apresentar uma clique de G_2.

O conjunto escolhido foi S={v5, v6, v7}.



Universidade Federal do Tocantins - UFT
Teoria dos Grafos (Lista 1)
Prof. Tanilson Dias dos Santos
Alunos: Daniel Nolêto Maciel Luz e João Victor Walcacer

12. *[Digrafos]* Responda às questões a seguir.

   (a) Provar que todo torneio tem um rei.

   (b) Dar exemplo de um digrafo D que seja fracamente conexo e fortemente conexo ao mesmo tempo.

Referências

[1] Thomas H. Cormen and Charles E. Leiserson and Ronald L. Rivest and Cliford Stein. *Introduction to Algorithms*. MIT Press. 2th edition, 2001.

[2] Szwarcfiter, Jayme Luiz. *Teoria computacional de grafos: Os Algoritmos*. Elsevier Brasil, 2018.

[3] Bondy, John Adrian, and Uppaluri Siva Ramachandra Murty. *Graph theory with applications*. Vol. 290. London: Macmillan, 1976.