Teoria dos Grafos (Lista 3)

Prof. Tanilson Dias dos Santos

24 de novembro de 2023

1. [*Algoritmos em Grafos*] Suponha que π corresponde ao problema de ordenação de elementos alocados em um vetor, e que $\mathcal{A}$ é um **algoritmo ótimo** de ordenação por comparação que resolve π. Nessa condições, é possível que exista um algoritmo π', assintoticamente falando, mais rápido que π? Explique.

2. Como podemos encontrar as pontes de um grafo utilizando uma busca em profundidade e o conceito de demarcador?

3.[*Emparelhamentos e Coberturas*] Demonstrar que M é um emparelhamento máximo se, e somente se, G não possui caminho M-aumentante.

4. Seja $\alpha(G)$ a cobertura mínima e $\beta(G)$ o emparelhamento máximo, provar que se G é um grafo bipartido então $\alpha(G) = \beta(G)$.

João Victor Walcacer Giani e Daniel Nolêto Maciel Luz

João Victor Walcacer Giani e Daniel Nolêto Maciel Luz

1. [*Algoritmos em Grafos*] Suponha que π corresponde ao problema de ordenação de elementos alocados em um vetor, e que $\mathcal{A}$ é um **algoritmo ótimo** de ordenação por comparação que resolve π. Nessa condições, é possível que exista um algoritmo $\mathcal{A}'$, assintoticamente falando, mais rápido que $\mathcal{A}$? Explique.

Não é possível. Supondo que A é um algoritimo ótimo de ordenação, isto é, pela definição de algoritimos ótimos, A ocorre quando a complexidade do pior caso é igual ao limite inferior do problema, ou seja, A possui a menor complexidade assintótica possível para o problema π. Já que A atinge o limite inferior do algoritimo de ordenação, não pode haver outro A' assintóticamente mais rápido, pois isso violaria o limite inferir estabelecido

2. Como podemos encontrar as pontes de um grafo utilizando uma busca em profundidade e o conceito de demarcador?

Levando em consideração um cenário onde (v,w) é uma aresta de uma árvore A, originada a partir de uma busca em profundidade sobre um grafo G, onde w é demarcador de v, podemos afirmar que a aresta (v,w) será uma ponte se o valor do lowpt(w) for igual a w. Isso mostra que a única forma de relacionar os vértices v e w é pela aresta (v,w), portanto, sua remoção tornaria o grafo desconexo.

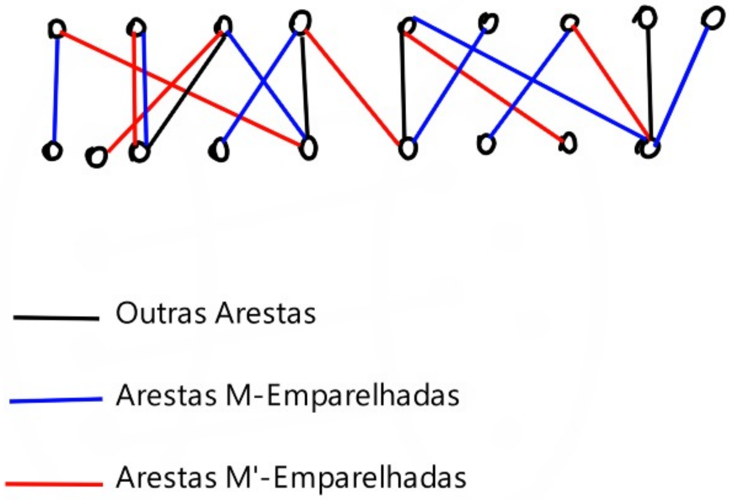
3.[*Emparelhamentos e Coberturas*] Demonstrar que M é um emparelhamento máximo se, e somente se, G não possui caminho M-aumentante.

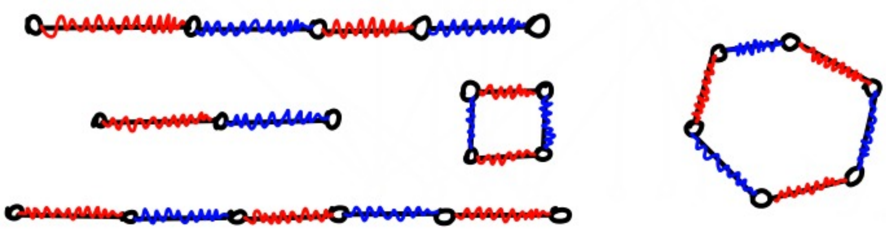
(->) Se M é um emparelhamento máximo, então G não contém caminho M-aumentante

Por contradição: Se M é um emparelhamento máximo, então G possui caminho M-aumentante
Tome p = v1,v2,v3,v4,v5,v6,...,v2n-1, v2n é um caminho M-aumentante
M’ = {M \(M $\cap \in (P)) \cup \in (P) \backslash (M \cap \in (P))\}$

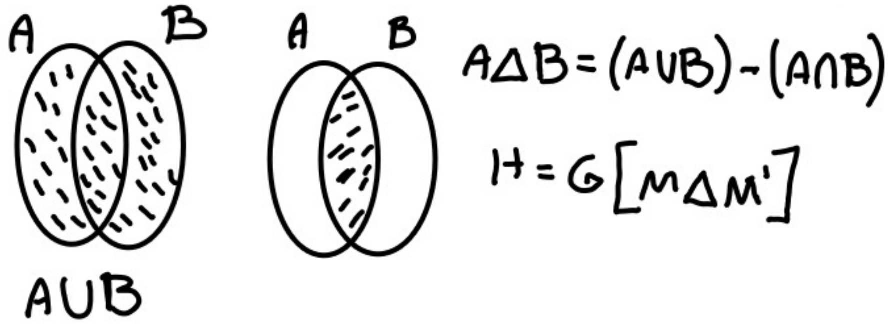
(<-) Se G não contém caminho M-aumentante, então M é emparelhamento máximo

Por contrapositiva: Se M não é emparelhamento máximo, então G contém caminho M aumentante
Se M não é emparelhamento máximo, então existe |M’|>|M|





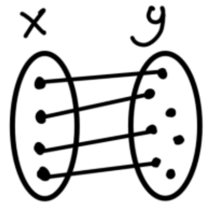
3.[*Emparelhamentos e Coberturas*] Demonstrar que M é um emparelhamento máximo se, e somente se, G não possui caminho M-aumentante. **(CONTINUAÇÃO)**



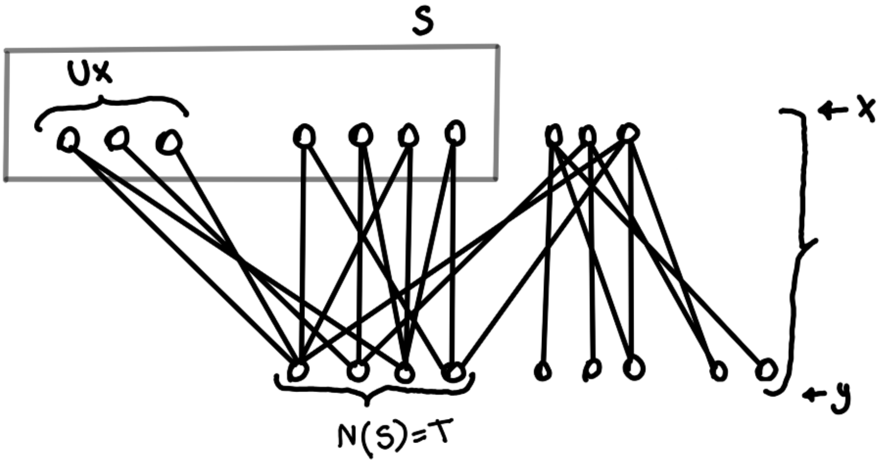
Observe que podemos compor H em diversos componentes conexos, que necessariamente são caminhos pares. Dessa forma, existe uma componente conexa, em particular, digamos que C1 que a seguinte propriedade: C1 é um caminho alternante e as extremidades de C1 são M-insaturadas e M'-saturadas. Dessa forma concluímos que c1 é um caminho M-aumentante

4. Seja $\alpha(G)$ a cobertura mínima e $\beta(G)$ o emparelhamento máximo, provar que se G é um grafo bipartido então(G) $\alpha(G) = \beta(G)$.

Demonstração Direta
Considere que |N| = β(G)
Fato (1)



Fato (1) $\rightarrow$ α'(G) $\geq$ β(G)



Z $\rightarrow$ Conjunto de vértices alcançados a partir de Ux por caminhos M-alternantes

S = Z$\cap$X ; T = Z$\cap$Y

Assim, temos que, T$\cup$(X$\setminus$Y) corresponde a uma cobertura para um grafo G. Cobertura essa que possui tamanho igual a β(G). A minimalidade da cobertura é garantida pelo **Fato(1)**. Portanto, se G é um grafo bipartido, então α(G) = β(G).

Referências

[1] Thomas H. Cormen and Charles E. Leiserson and Ronald L. Rivest and Cliford Stein. *Introduction to Algorithms*. MIT Press. 2th edition, 2001.

[2] SZWARCFITER, J. L. *Grafos e Algoritmos Computacionais*. Rio de Janeiro: Editora Campus, 1984. v. 1. 216p.

Observação. Por favor, a resolução de cada questão deve ser iniciada em uma folha de papel separada das folhas utilizadas para descrever a resolução das demais questões. Além disso, antes do início de cada questão deve-se incluir o número da questão (com o enunciado, de preferência) e o nome completo do aluno.
Dica: Para fazer tabelas mais rápido usando LaTeX, use o: Gerador de Tabelas Online - Tables Generator.