



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

João Vitor Muniz Lopes

Limitadores TVD's aplicados à Equação de Advecção

Professor: Grazione de Souza Boy
2020

Resumo

Considerando problemas práticos, a equação de advecção pode ser utilizada na determinação entre espaço e tempo de um traçador escoando num meio físico. O composto traçador pode ser definido como uma pequena concentração de um elemento externo presente em um fluído que transcorre de modo que a presença do traçador não efetue uma intervenção na forma como o escoamento ocorre.

Para análise da dinâmica acima descrita será utilizado como ferramenta computacional o Scilab com o objetivo de obter a solução numérica das mesmas, por meio de métodos numéricos variados com a aplicação de formulações específicas realizando todo um desenvolvimento teórico e matemático dos conceitos apresentados. Os gráficos obtidos nos possibilitaram confirmar os efeitos esperados, retirando possíveis oscilações decorrentes da solução numérica obtida via métodos computacionais.

Introdução

Dentro do contexto de método dos volumes finitos é possível realizar análises das equações diferenciais que governam o escoamento, de líquidos e volumes. É importante para que se entenda de forma mais clara e objetiva o que acontece no fenômeno físico de advecção, além disso, com o avanço da computação, avançaram-se também as técnicas empregadas neste estudo, aplicando-se os métodos de resolução numérica, inclusive para os métodos de volumes finitos o qual irão ser estudados neste presente relatório.

O Teorema de Godunov demonstrou de certo modo que métodos lineares não são capazes de fornecer soluções não oscilatórias, dessa forma, novas técnicas tiveram de ser desenvolvidas para contornar essa situação, com isso, os limitadores ou TVD's surgiram em direção a solução desse problema e a vantagem principal é que estas estruturas conseguem captar descontinuidades ou se há uma mudança brusca nos gradientes obtidos na solução numérica .

No presente trabalho será desenvolvido a partir de métodos Upwind serão avaliados métodos limitadores de fluxo: Upwind, Superbee e VanAlbada. Os métodos FTBS e de Lax-Friedrichs por serem de 1º ordem geram difusão numérica mas Lax-Wendroff e Beam-Warming geram oscilações espúrias que não fazer parte da solução analítica, dessa forma, os métodos TVD procuram combinar as características positivas dos dois grupos de soluções numéricas previamente citados pois os os método TVD's tem como característica básica tentar empregar os métodos mais otimizados nos intervalos específicos. Onde deve o comportamento deve ser monótono o TVD aplica uma solução de primeira ordem enquanto ele irá ter uma exatidão de 2º ordem sempre que possível.

Palavras-Chave: Fluxos Numéricos, Limitadores TVD's, Superbee, Van-Albada, Upwind, métodos de volumes finitos.

Metodologia

1.1 - Desenvolvimento Teórico:

Para se obter uma versão discreta de uma EDP é utilizado o Método de Volumes Finitos. O resultado obtido é decorrente da análise física do problema que está sendo estudado e representado pela equação e geralmente o desenvolvimento é profundamente correlato à fluxo de um componente entre regiões ou volumes próximos, dessa forma, é a quantidade de um componente que atravessa divisas de volumes.

A seguir serão feitas etapas comuns a todos os métodos de obtenção de solução numérica para a EDP explicitada no trabalho por meio de MVD's, dessa forma, serão analisadas condições de contorno e iniciais que se manterão iguais para todos os objetos de estudo que virão a seguir e que serão as mesma para todas as discretizações fornecidas no presente trabalho.

Partindo da equação de Advecção proposta a ser analisada à priori temos:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial(uC)}{\partial x} = 0$$

Dados que C indica a concentração, u o coeficiente de difusão, este maior do que zero. Considerando $u = \bar{u}$ e reescreve-se a equação para o seguinte formato:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial C}{\partial x} = 0$$

Dado o contexto de solução dado pelo trabalho, supõe-se que o domínio no qual as soluções podem ser obtidas são por um meio unidimensional definido por:

$$-L < Lx < L, \text{ sendo } Lx \text{ um ponto intermediário}$$

Onde Lx é um ponto aleatório dentro do elemento unidimensional L no qual estamos lidando, dessa forma, dado esse pressuposto temos e considerando como condição inicial:

$$c(x,0) = \begin{cases} e^{(-A(x-B)^2)} + s(x), & \text{se } -L < Lx < L \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Onde $s(x)=0$ exceto no intervalo $D \geq x \geq C$ no qual $s(x)=E$ e as condições de contorno, onde t é uma representação numérica qualquer dado um intervalo de tempo, dados que serão utilizados para construir a malha no espaço e tempo:

$$\left(\frac{\partial C}{\partial x} \right)_{x=0}^t = 0$$

e

$$\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_{x=L}^t = 0$$

1.2 – Avaliação das condições de contorno:

Dado que neste presente trabalho são apresentadas 4 formulações diferentes a serem apresentadas será feito uma análise de aspectos que elas tem em comum (condições de contorno e inicial no caso) para que a análise geral fique mais curta e entendível :

1.2.1 – Avaliação das condição de contorno esquerda:

$$\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_{x=0}^t \approx \frac{Q_1^n - Q_0^n}{\delta x} = 0 \rightarrow Q_1^n = Q_0^n$$

1.2.1 – Avaliação das condição de contorno esquerda:

$$\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_{x=Lx}^t \approx \frac{Q_{k+1}^n - Q_k^n}{\delta x} = 0 \rightarrow Q_{k+1}^n = Q_k^n$$

As condições de contorno acima desenvolvidas serão válidas para todas as 4 formulações que virão a ser estudadas.

2.1 – Formulação dos métodos :

Nesta seção deste relatório cada formulação será analisada por meio de seus componentes e modificada fornecendo alguns ajustes no qual facilitarão a confecção do algoritmo no qual fornecerá os resultados e plotagem dos gráficos para análise posterior. É esperado que para os problemas de fluxo o traçador se propague como ondas (no caso exposto de forma unidimensional), deslocando-se ao longo de curvas características, dessa forma, é possível valer-se da estrutura de solução pra determinar as funções numéricas do fluxo, considerando sempre os limitadores TVD's apresentados para posterior análise dos seus efeitos na solução.

O exposto acima gera como consequência alguns métodos Upwind que serão apresentados a seguir, no qual cada variável é relacionada com a direção do fluxo de entrada sendo o método Upwind então um método direcional baseado nos valores de escoamento. Assim o método determinará Q_{i+1}^n apartir dos valores conhecidos a esquerda ou a direita de i em função de \bar{u} .

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - C(Q_i^n - Q_{i-1}^n) - \frac{C}{2}(1-C)[\psi(\theta_{i+1/2}^n(Q_{i+1}^n - Q_i^n)) - \psi(\theta_{i-1/2}^n)(Q_i^n - Q_{i-1}^n)] \quad - I$$

Considerando que \bar{u} é uma velocidade então, $\bar{u} > 0$, os limitadores precisam respeita os seguintes critérios :

$$\theta_{i-1/2}^n = \frac{Q_{i-1}^n - Q_{i-2}^n}{Q_i^n - Q_{i-1}^n} \quad - II$$

e

$$\theta_{i+1/2}^n = \frac{Q_i^n - Q_{i-1}^n}{Q_{i+1}^n - Q_i^n} \quad - III$$

Reformulado com os limitadores temos em cada caso:

a) Upwind:

$$\psi(\theta) = 0$$

b) Superbee:

$$\psi(\theta) = \max(0, \min(1, 2\theta), \min(2, \theta))$$

c) Van-Albada:

$$\psi(\theta) = \frac{\theta^2 + \theta}{\theta^2 + 1}$$

Dados os métodos TVD e as formulações I, II e III o método computacional será variado contemplando as características únicas de tudo que foi exposto anteriormente.

Na feitura do algoritmo computacional o qual vai obter as soluções numéricas, a constante de Courant irá ser fixa e com δt dependente, dessa forma, evitamos problemas relativos a estabilidade ou falta dela, utilizando a seguinte formula:

$$C = \frac{\bar{u} \delta t}{\delta x} \leq C_{max}$$

$$\delta t = C \frac{\delta x}{\bar{u}}$$

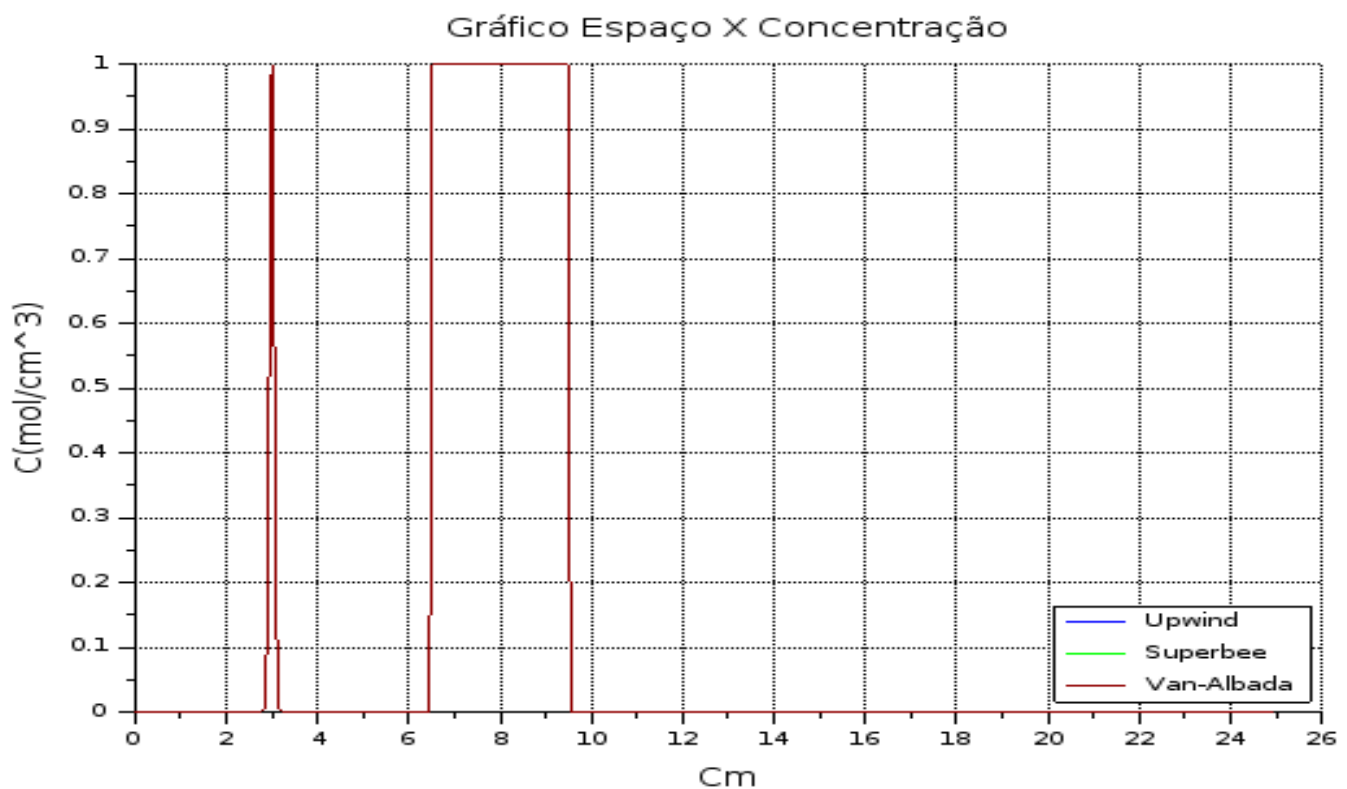
Resultados e Discussão

3.1 - Análises gráficas:

Antes de começar uma análise visual dos resultados vou apresentar alguns dados que serão utilizados nessa primeira análise, para que assim o leitor deste manuscrito possua a disposição de alguns valores que facilitarão o entendimento do que está acontecendo em relação a concentração e espaço.

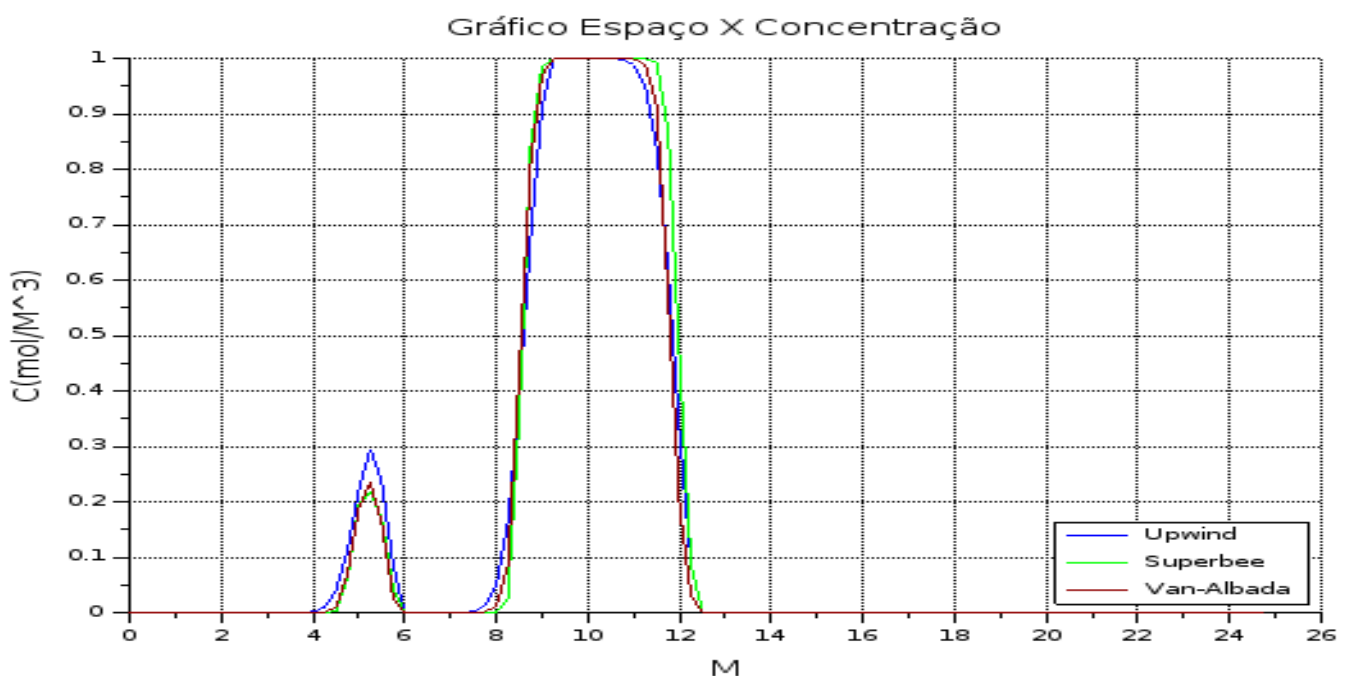
L (Comprimento da barra)	25 m
A	200
B	3 m
C	6.5 m
D	9.5 m
S(x)	1 mol/m ³
Nós espaciais	100
\bar{u}	1.0 m/s
Courant	0.8

Caso 1 – tempo: 0 segundos.



No gráfico acima, temos mostrados na imagem acima as condições iniciais e de contorno expressas, dessa forma, nenhum efeito de advecção ocorreu ao longo do elemento que teve um elemento traçador inserido no seu meio, dessa forma, ainda não é possível retirar alguma informação substancial ou relevante para completude da análise, apenas os pontos onde existe certa concentração ao longo da barra.

Caso 2 – tempo: 2 segundos.



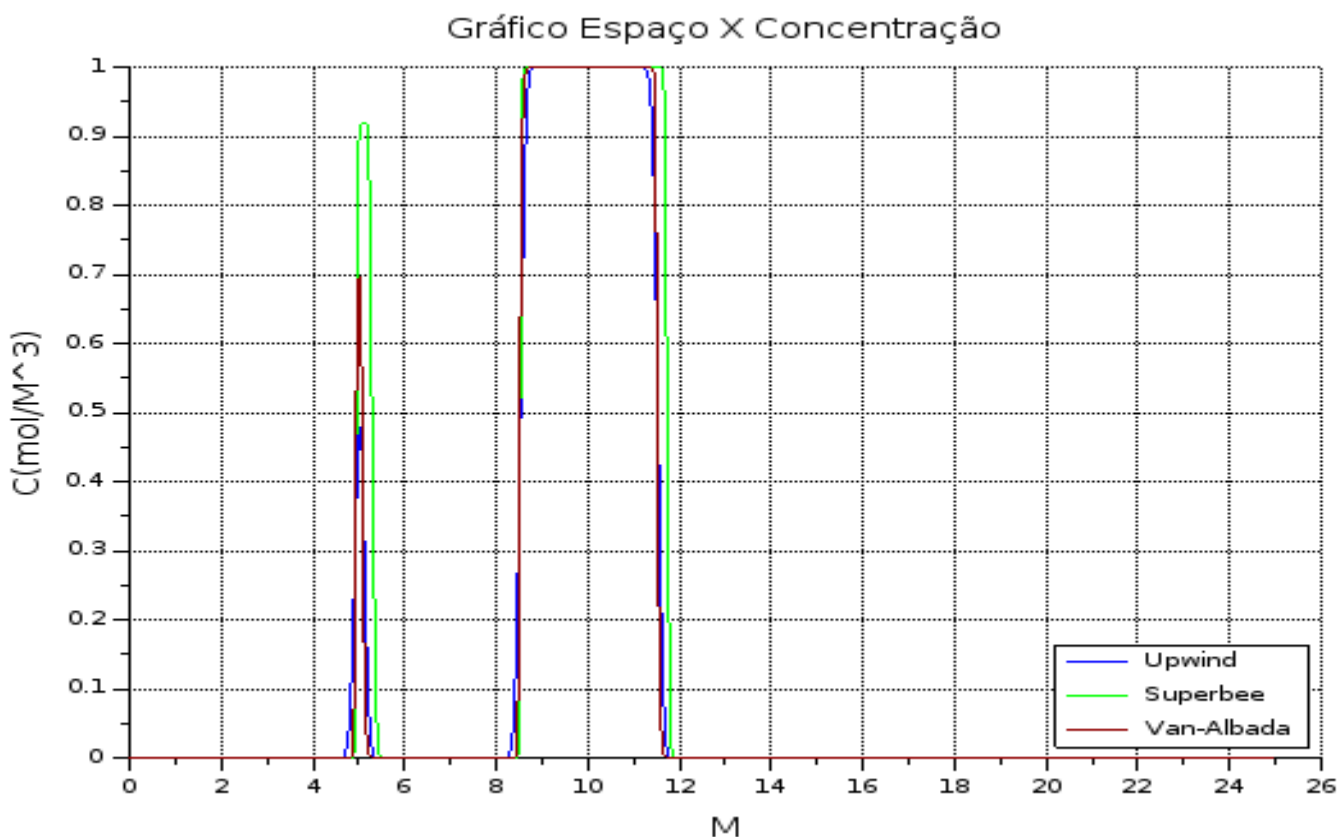
Para o gráfico exposto na página anterior, temos o início do efeito no qual um traçador está inserido em um meio. À priori pode-se observar que os 3 métodos apesar das nuances de cada um os mesmos apresentam comportamentos extremamente parecidos, além disso, os valores obtidos dos variados métodos não distam muito entre si sendo até relativamente difícil verificar as diferenças entre eles.

No entanto é importante ressaltar as diferenças dos métodos até agora. Upwind é um limitador de 1º ordem, Van-Albada efetua uma divisão de somas ao quadrado e Superbee utiliza máximos e mínimos para efetuar os cálculos, com isso, era esperado pequenas diferenças mesmo eles estando sobrepostos.

A seguir será feito um refinamento de malha no qual o único dado que será modificado são os valores de nós no espaço, dado que para o gráfico anterior os resultados geram gráficos brutos :

Nós Espaço	1200
------------	------

Caso 3 – tempo: 2 segundos.

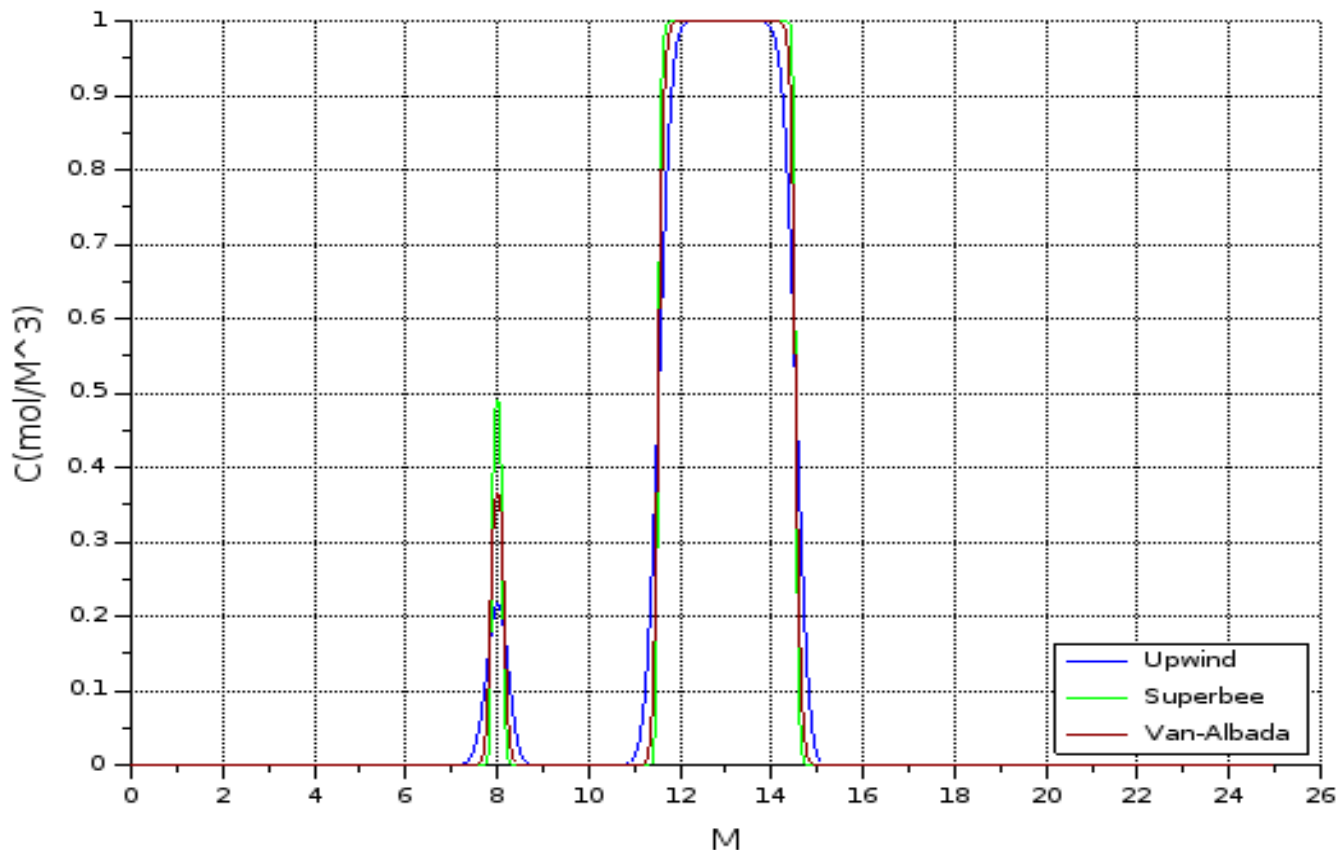


Para o número maior de nós espaciais mas com os mesmos dados utilizados até agora, percebe-se que o comportamento das curvas assumem um caráter mais retangular que é mais parecido com as condições iniciais, além disso, para a concentração no ponto perto de 3 do eixo x percebemos que antes a concentração estava bem menor e com o refinamento de malha a concentração neste ponto fica mais parecida com os valores de entrada.

A seguir irá ser feito uma modificação na quantidade de nós espaciais para que futuramente seja feito um refinamento de malha:

Caso 4 – tempo: 5 segundos.

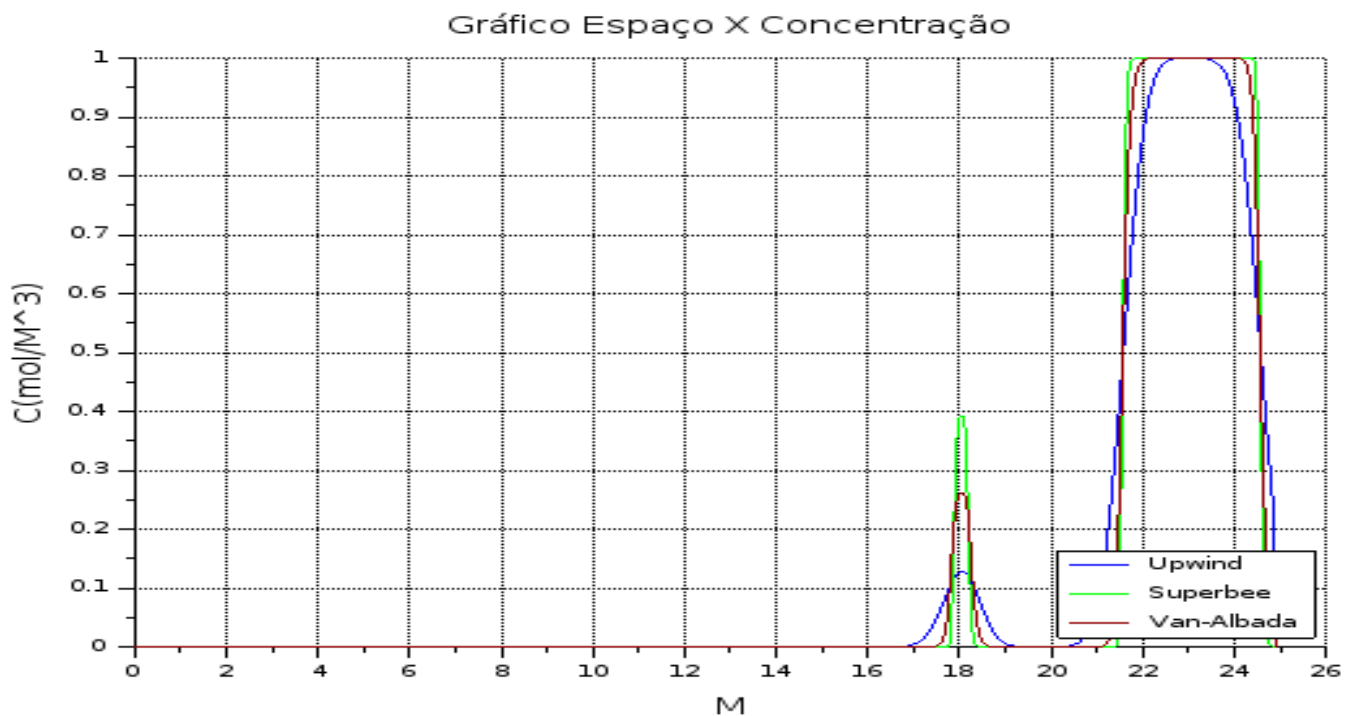
Gráfico Espaço X Concentração



No gráfico acima podemos perceber que o traçador que foi inserido está sendo carregado ao longo do elemento que teve algo inserido em seu meio, a partir dos valores de solução obtidos para o tempo inserido podemos perceber que para o pico de concentração a mais esquerda os valores dos mesmo são relativamente diferentes para os limitadores utilizados. Temos uma variação de 0.3 mol mol/m³ no ponto 8 m no eixo X o que gera uma incerteza da exatidão dos valores e qual seria o método que está dando o valor mais acurado, contudo dado gráficos mostrados anteriormente, vide **Gráfico-Caso3**, aparentemente a execução de um refinamento de malha iria melhorar esse problema nesses pontos.

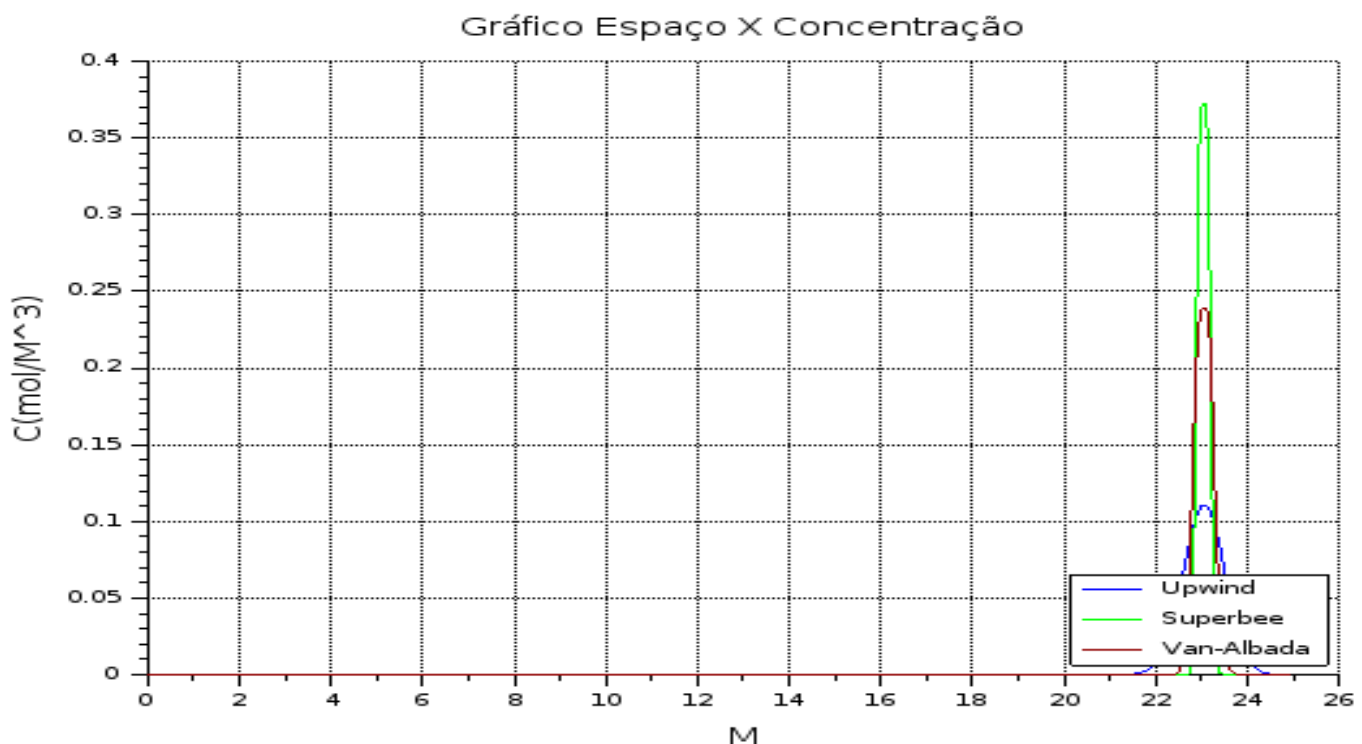
No entanto para os valores mostrados a direita aparentemente ocorre uma exatidão maior, os valores obtidos estão mais próximos o que gera uma maior confiança na acurácia obtida e na exatidão dos valores encontrados, dessa forma, há maior confiança para utilizar esses valores para uma análise mais profunda do fluxo numérico que está acontecendo nos pontos 10<x<16.

Caso 5 – tempo: 15 segundos.



No gráfico anterior podemos ver que analisando em conjunto com todos os gráficos mostrados até então temos que o comportamento aparente para a solução numérica com os TVD's aplicados é igual conforme o tempo vai variando para escalas maiores, o que muda é o carregamento do traçador, ou seja, conforme o tempo vai transcorrendo diversos pontos no espaço apresentam ou deixar de apresentar concentração de soluto ou algo do tipo em seu meio.

Caso 6 – tempo: 20 segundos.



No gráfico acima podemos observar um efeito que já era esperado, no qual para tempos de magnitude maior era esperado que a concentração do soluto em algum momento se encontrasse fora da barra, ou seja, o algoritmo e os cálculos efetuados funcionam e desempenham o que foram feitos para fazer mas conforme o tempo vai passando o traçador deixa de estar presente no meio, então para um tempo um pouco maior do que o **caso 6** não seria obtido nenhum valor e o gráfico seria vazio, dessa forma, existe um intervalo de tempo apropriado.

Conclusão

À partir dos gráficos plotados pra cada TVD específico: Upwind, Superbee e VanAlbada no método de solução numérica exposta no relatório podemos ver que os limitadores fazem os Métodos de Volumes Finitos serem consideravelmente mais acurados do que quando não estão presentes pois problemas relacionado a oscilações espúrias e difusões numéricas deixam de fazer parte integrante dos valores obtidos, dessa forma, há um ganho na exatidão das respostas.

Um aspecto positivo dos limitadores TVD's é que independente da quantidade de nós espaciais aplicados, o comportamento dos 3 métodos é extremamente parecido, com isso, resultando em valores ponto a ponto parecidos e sempre apresentando um comportamento suave, o que reforça a eficiência dos métodos mas aparentemente cada um deve ser aplicado para uma ocasião específica, dado que a partir dos dados obtidos parecer não haver um método único que funcione de forma plena para todos os problemas possíveis, sendo necessário tentativas e erros para encontrar o mais eficiente para determinada situação, com isso, somente com os dados do gráfico o melhor limitador a ser adotado é o Van-Albada pois os valores obtidos por esse método parecem ser intermediários dos outros métodos, no entanto, se houver um conhecimento prévio da EDP e sabendo que Superbee apresenta uma difusão numérica menor este seria o melhor método pois transforma onda suave em onda quadrada e gera uma solução com perfil muito próximo da solução analítica.

Anexos

```
/*n=20 //Nos no espaco
x=read("espaco.txt",-1,1)
y=read("concentracao.txt",-1,1)

plot(x, y)
title("Espaco X Concentração",'fontsize',4)
xlabel("L(cm)", 'fontsize',4)
ylabel("Concentração mol/cm^3",'fontsize',4)*/

//n=100 //Nos no espaco
clf();
clear();

L =25;

A=200;
B=3.0;
C=6.5;
D=9.5;
sx = 1.0

u = 1;
c=0.8;

t=0;
tempo = 15;

nosEspaco = 500;

deltax = L / nosEspaco;

vetorEspaco(1) = 0

for i = 2:nosEspaco
    vetorEspaco(i) = vetorEspaco(i-1) + deltax;
end

function [oldVet, newVet]=inicializarVetores()
    for i = 1:nosEspaco

        value = %e^(-A*(vetorEspaco(i)-B)^2)

        if C<=vetorEspaco(i) && vetorEspaco(i)<=D then

            value = value + sx;

        end

        oldVet(i)=value;
        newVet(i)=value;
```

```

    end
endfunction

function [psi]=psiUpwind(ponto)

    psi = 0;

endfunction

function [psi]=psiSuperbee(ponto)

    psi = max(0,min(1,2*ponto),min(2,ponto));

endfunction

function [psi]=psiValAlbada(ponto)

    psi = (((ponto^2) + ponto)/((ponto^2)+1));

endfunction

function [newVet]=Upwind()

    newVet=[];
    oldVet=[];
    deltat= c*deltax/u;
    tolerancia = (1 * 10) ** -6

    [oldVet,newVet] = inicializarVetores()

    while t < tempo

        newVet(2) = oldVet(2) - c*(oldVet(2)-oldVet(1))

        oldVet(3) = oldVet(2)
        newVet(3) = oldVet(2)

        for j = 4:nosEspaco-1

            if(oldVet(j+1)-oldVet(j))==0 then

                aux=(10**(-12))

            else

                aux=(oldVet(j+1)-oldVet(j))

            end

            if (oldVet(j + 1) - oldVet(j)) <= tolerancia then

```

```

        pontoPsiAvancado = (oldVet(j)-oldVet(j-1))/aux
    else
        pontoPsiAvancado = (oldVet(j)-oldVet(j-1))/aux
    end
    if (oldVet(j) - oldVet(j-1))==0 then
        aux=(10**(-12))
    else
        aux=(oldVet(j)-oldVet(j-1))
    end
    if (oldVet(j) - oldVet(j-1)) <= tolerancia then
        pontoPsiRecuado = (oldVet(j-1)-oldVet(j-2))/aux
    else
        pontoPsiRecuado = (oldVet(j-1)-oldVet(j-2))/(oldVet(j)-
oldVet(j-1))
    end
    ponto1 = psiUpwind(pontoPsiAvancado)*(oldVet(j+1)-oldVet(j))
    ponto2 = psiUpwind(pontoPsiRecuado)*(oldVet(j)-oldVet(j-1))
    newVet(j) = oldVet(j) - c*(oldVet(j)-oldVet(j-1)) - (c/2)*(1-
c)*(ponto1 - ponto2)
end

newVet(nosEspaco-1) = oldVet(nosEspaco-1)
oldVet(nosEspaco-1) = oldVet(nosEspaco-2)

oldVet=newVet;
t = t + deltat;
end

endfunction

function [newVet]=Superbee()

    newVet=[];

```

```
oldVet=[];  
deltat= c*deltax/u;  
tolerancia = (1 * 10) ** -6
```

```
[oldVet,newVet] = inicializarVetores()
```

```
while t < tempo
```

```
    newVet(2) = oldVet(2) - c*(oldVet(2)-oldVet(1))
```

```
    oldVet(3) = oldVet(2)
```

```
    newVet(3) = oldVet(2)
```

```
    for j = 4:nosEspaco-1
```

```
        if(oldVet(j+1)-oldVet(j))==0 then
```

```
            aux=(10**(-12))
```

```
        else
```

```
            aux=(oldVet(j+1)-oldVet(j))
```

```
        end
```

```
        if (oldVet(j + 1) - oldVet(j)) <= tolerancia then
```

```
            pontoPsiAvancado = (oldVet(j)-oldVet(j-1))/aux
```

```
        else
```

```
            pontoPsiAvancado = (oldVet(j)-oldVet(j-1))/aux
```

```
        end
```

```
        if (oldVet(j) - oldVet(j-1))==0 then
```

```
            aux=(10**(-12))
```

```
        else
```

```
            aux=(oldVet(j)-oldVet(j-1))
```

```
        end
```

```
        if (oldVet(j) - oldVet(j-1)) <= tolerancia then
```

```
            pontoPsiRecuado = (oldVet(j-1)-oldVet(j-2))/aux
```

```
        else
```



```
pontoPsiRecuado = (oldVet(j-1)-oldVet(j-2))/aux
```

```
end
```

```
ponto1 = psiSuperbee(pontoPsiAvancado)*(oldVet(j+1)-oldVet(j))  
ponto2 = psiSuperbee(pontoPsiRecuado)*(oldVet(j)-oldVet(j-1))
```

```
newVet(j) = oldVet(j) - c*(oldVet(j)-oldVet(j-1)) - (c/2)*(1-  
c)*(ponto1 - ponto2)
```

```
end
```

```
newVet(nosEspaco-1) = oldVet(nosEspaco-1)  
oldVet(nosEspaco-1) = oldVet(nosEspaco-2)
```

```
oldVet=newVet;  
t = t + deltat;
```

```
end
```

```
endfunction
```

```
function [newVet]=vanAlbada()
```

```
newVet=[];  
oldVet=[];  
deltat= c*deltax/u;  
tolerancia = (1 * 10) ** -6
```

```
[oldVet,newVet] = inicializarVetores()
```

```
while t < tempo
```

```
newVet(2) = oldVet(2) - c*(oldVet(2)-oldVet(1))
```

```
oldVet(3) = oldVet(2)  
newVet(3) = oldVet(2)
```

```
for j = 3:nosEspaco-1
```

```
if(oldVet(j+1)-oldVet(j))==0 then
```

```
aux=(10**(-12))
```

```
else
```

```
aux=(oldVet(j+1)-oldVet(j))
```

```
end
```

```
if (oldVet(j + 1) - oldVet(j)) <= tolerancia then
```

```

        pontoPsiAvancado = (oldVet(j)-oldVet(j-1))/aux
    else
        pontoPsiAvancado = (oldVet(j)-oldVet(j-1))/aux
    end
    if (oldVet(j) - oldVet(j-1))==0 then
        aux=(10**(-12))
    else
        aux=(oldVet(j)-oldVet(j-1))
    end
    if (oldVet(j) - oldVet(j-1)) <= tolerancia then
        pontoPsiRecuado = (oldVet(j-1)-oldVet(j-2))/aux
    else
        pontoPsiRecuado = (oldVet(j-1)-oldVet(j-2))/aux
    end

    ponto1 = psiValAlbada(pontoPsiAvancado)*(oldVet(j+1)-oldVet(j))
    ponto2 = psiValAlbada(pontoPsiRecuado)*(oldVet(j)-oldVet(j-1))

    newVet(j) = oldVet(j) - c*(oldVet(j)-oldVet(j-1)) - (c/2)*(1-
c)*(ponto1 - ponto2)

    end

    newVet(nosEspaco-1) = oldVet(nosEspaco-1)
    oldVet(nosEspaco-1) = oldVet(nosEspaco-2)

    oldVet=newVet;
    t = t + deltat;
end

endfunction

plot2d(vetorEspaco, Upwind(),2);
plot2d(vetorEspaco, Superbee(),3);
plot2d(vetorEspaco, vanAlbada(),19);

```

```
legends(['Upwind';'Superbee';'Van-Albada'],[2,3,19],opt="lr")
title("Gráfico Espaço X Concentração",'fontsize',3);
xlabel("M",'fontsize',3);
ylabel("C(mol/M^3)", 'fontsize',3);
xgrid()
```

Bibliografia

[1] C. A. J. Fletcher. Computational Techniques for Fluid Dynamics, volume 1.

Springer-Verlag,

[2] O método de limitação de fluxos na solução da equação da advecção em malha estruturada, Petterson Vinícius Pramiu , Rogério Luis Rizzi, Cláudia Brandelero Rizzi e Amarildo de Vicente

[3] Randall, L., Finite-Volume Methods for Hyperbolic Problems, Cambridge University Press, Cambridge - UK, 2004

[4] Métodos numéricos para solução da equação de transporte de massa - Régis S. Pereira

[5] APLICAÇÃO DOS ESQUEMAS DO TIPO LIMITADORES DE FLUXOS NA SIMULAÇÃO EM ESCOAMENTO MISCÍVEIS EM MEIOS POROSOS BIDIMENSIONAIS - Barbosa N.M. e Nélio Henderson

[6] Study of total variation diminishing (TVD) slope limiters in dam-break flow simulation – [Peng-peng Bai](#), [Zhong-hua](#) e [Yang Wu-gang Zhou](#).

[7] Analysis of Slope Limiters on Irregular Grid - Scott M. Murman, Michael J. Aftosmis e Marsha Berger

[8] Evaluating the Capability of the Flux-Limiter Schemes in Capturing the Turbulence Structures in a Fully Developed Channel Flow - Mohamed Elghorab, Vendra C. Madhav Rao, Jennifer X. Wen.

i

n

k

s

o

p

e

n

o

v

e

r

l

a

y

p

a

n

e

l