4) Em $M(2,2)$, seja S conjunto dos matrizes simétricos. Obtenha uma base para S? Qual a dimensão de S?

Definição de matriz simétrica:

$$S=\{M \in M_2(\mathbb{R}) \mid M^T = M\}$$

I - Qualquer matriz simétrica é do tipo:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = a\overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}^{E^1} + b\overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}^{E^2} + c\overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}^{E^3}$$

Logo $\{E^1, E^2, E^3\}$ é um conjunto de geradores do subespaço S.

II - Tomando a seguinte equação:

$$\alpha_1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_2\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_3\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Temos que: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

$\therefore$ As bases expostas acima são L.I e geram o subespaço S, logo forma uma base para S, $\dim(S) = 3$.