

5) Prove que o conjunto E definido em
(1.3) não tem mínimo?

$$E = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \text{ e } x^2 > 2\}$$

Vamos supor que ε que é par: $(x - \varepsilon)^2$ ainda
será maior:

$$(x - \varepsilon)^2 > 2$$

$$x^2 - 2x\varepsilon + \varepsilon^2 > 2$$

$$-2x\varepsilon + \varepsilon^2 > 2 - x^2$$

$$-\varepsilon(-2x + \varepsilon) > 2 - x^2$$

Restringindo ε para ser maior que 1 ou $\varepsilon >$

$$-2x + \varepsilon > -2x + 1:$$

$$(x - \varepsilon)^2 = x^2 + \varepsilon(-2x + \varepsilon) \geq x^2 + \varepsilon(-2x + 1)$$

$$x^2 + \varepsilon(-2x + 1) > 2$$

$$\varepsilon > \frac{2 - x^2}{-2x + 1}$$

Como $\varepsilon > 1 \Rightarrow x - \varepsilon$ também pertence a E
o conjunto não tem mínimo