Questão Seja $u \in \mathbb{R}^3$ e $v \in \mathbb{R}^4$, 2 vetores (não) nulos! Defina a matriz $A = uv^T$ e considere a transformação linear T_A.

a) Determine a imagem de A.

b) Determine o núcleo de A

c) Imagem de TA, ou seja, o posto de A.

Sol:

$$A = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} - v_1 - \\ - v_2 - \\ - v_3 - \\ - v_4 - \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1v_1 & u_1v_2 & u_1v_3 & u_1v_4 \\ u_2v_1 & u_2v_2 & u_2v_3 & u_2v_4 \\ u_3v_1 & u_3v_2 & u_3v_3 & u_3v_4 \end{bmatrix}.$$

* todos os colunas são múltiplos de $(u_1, u_2, u_3)^T$

$$T_A : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$x \longmapsto T_A(x) = Ax$$

a) Considerando a definição de produto interno:

$$\langle , \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto \langle x,y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$\Downarrow$$

$$\langle x,y \rangle = x^T y = (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = c, \ c \in \mathbb{R},$$ ou seja, o resultado é um número.

$Ax = Uv^T X = U \langle V, X \rangle = \langle V, X \rangle U$

$\therefore$ A imagem de TA múltiplo do vetor U, ou seja, um subespaço vetorial gerado pelo vetor U.

b) Ax só será nulo se $\langle V, X \rangle = 0$, ou seja, NUC(A) são os vetores ortogonais de X.

c) Posto de TA = Posto de TX, dado que a imagem é gerada por um único vetor não nulo; logo LI $\Rightarrow$ dim(A) = 1 = dim(X)