11 - Sejam A e B dois conjuntos numéricos não vazios, tais que $a \leq b$ para todo $a \in A$ e todo $b \in B$. Prove que $\sup A \leq \inf B$. Prove ainda que $\sup A = \inf B$ $\Leftrightarrow$ qualquer que seja $\varepsilon > 0$, existem $a \in A$ e $b \in B$ t.q $b - a < \varepsilon$?

I - $a \in A \wedge b \in B$, $a \leq b \Rightarrow \sup A \leq \inf B$:

supondo $\sup A > \inf B \Rightarrow \exists\ a \in A$ t.q $a > b$

$\therefore$ Absurdo, pois $a \leq b$ então $a \leq b$

$\Leftrightarrow \sup A \leq \inf B$

II - Definições:

Dado $a \in A$ e $\sup A$:

$\sup A - \varepsilon < a \Rightarrow \sup A < \varepsilon + a$

Dado $b \in B$ e $\inf B$:

$b < \inf B + \varepsilon \Rightarrow b - \varepsilon < \inf B$

considerando $\sup A = \inf B$:

$$b - \varepsilon < \inf B = \sup A < \varepsilon + a$$

$$b < \inf B + \varepsilon = \sup A < \varepsilon + a$$

$$b - a < \inf B + \varepsilon = \sup A < \varepsilon$$