Trabalho trimestral de Matemática II - Geometria Analítica - Professor Rodrigo Duda

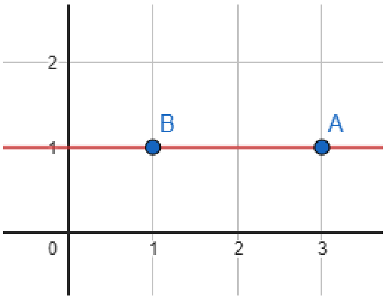
Nome: João Vitor Gaioski **Turma:** 3° Ano Informática Matutino 2024

A geometria analítica é uma área da matemática que combina álgebra e geometria para estudar propriedades e relações de figuras usando o sistema de coordenadas do plano cartesiano como base. Neste trabalho aprenderemos as principais ferramentas usadas no estudo da geometria analítica.

Como calcular a distância entre pontos usando suas coordenadas?

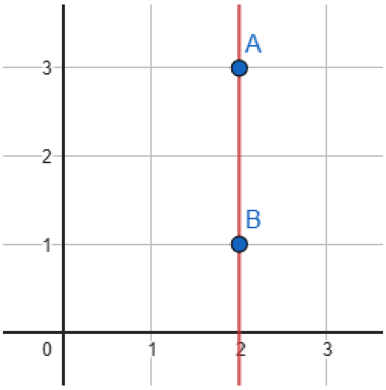
Existem 3 tipos diferentes de calcular essa distância, mas fundamentalmente eles são os mesmos, a diferença em módulo dos dois pontos. Os dois pontos formam uma reta que chamaremos de r.

1. Quando a reta r é paralela ao eixo X.



$$\boxed{d = |X_A - X_B|}$$

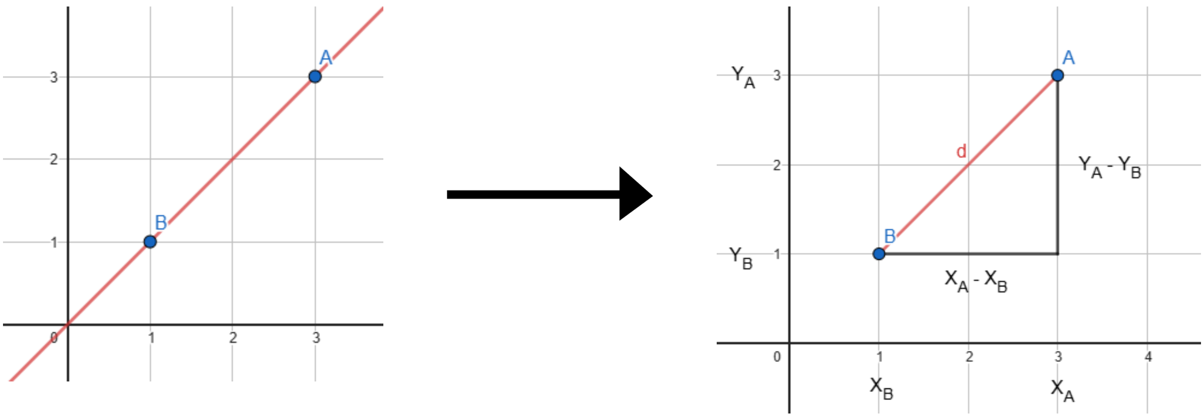
2. Quando a reta r é paralela ao eixo Y.



$$\boxed{d = |Y_A - Y_B|}$$

3. Quando a reta r não é paralela a nenhum eixo.

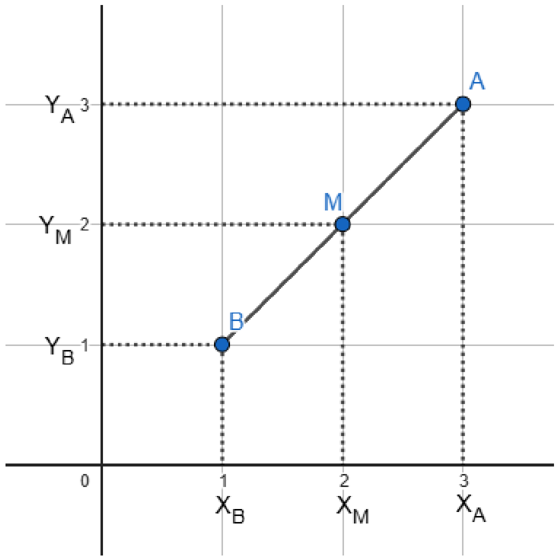
Nesse caso, forma-se um triângulo retângulo, e a distância passa a ser a hipotenusa.



$$\boxed{d = \sqrt{(X_A - X_B)^2 + (Y_A - Y_B)^2}}$$

Como calcular o ponto médio de um segmento usando suas coordenadas?

Para determinar o ponto médio, basta você fazer a média da coordenada X e da coordenada Y. Dessa forma, o X do ponto médio é a média do X de A e de B, e o Y do ponto médio é a média do Y de A e de B.



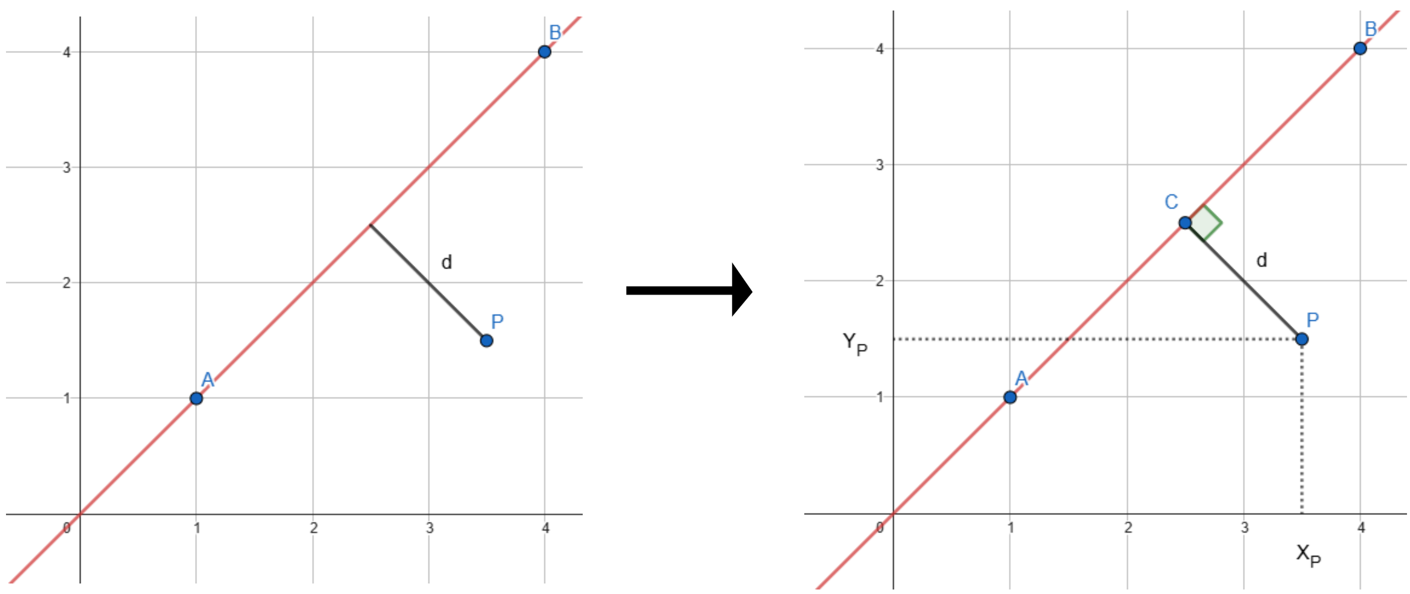
$$X_M = \frac{X_A + X_B}{2} \qquad Y_M = \frac{Y_A + Y_B}{2}$$

$$M = (X_M, Y_M)$$

$$\boxed{M = \left(\frac{X_A + X_B}{2}, \frac{Y_A + Y_B}{2} \right)}$$

Como calcular a distância entre um ponto e uma reta? Usando as coordenadas do ponto e a equação da reta

O ideal quando se fala em distância na matemática, é que o caminho percorrido seja o menor, e esse caminho é o caminho que forma ângulo de 90°. A distância poderia ser do ponto a outro ponto da reta, mas nesse caso não seria um ângulo de 90º nem a menor distância como formalmente é dado esse conceito em matemática, então apenas consideramos a menor distância.



Precisamos da posição do ponto e a equação da reta. Adotando a equação geral da reta s: ax + by + c = 0 e o ponto como sendo $P(x_0, y_0)$, temos a fórmula para descobrir a distância d:
(Importante estar em módulo, pois não existe distância negativa).

$$\boxed{d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

Como escrever a equação de uma reta? (há várias formas, liste quais encontrar em sua pesquisa)

As formas de descrever a equação de uma reta que trataremos aqui são: a equação reduzida da reta e a equação geral da reta.

1. <u>Equação reduzida da reta</u>.

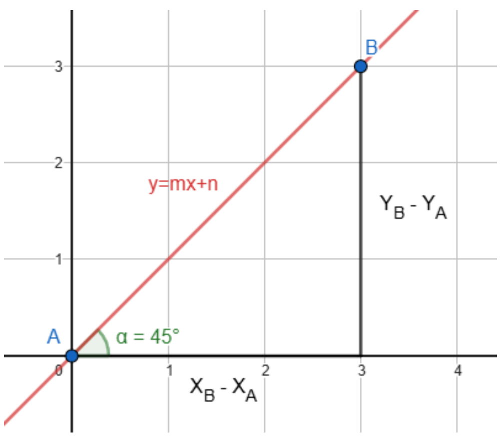
Consta na estrutura de uma função afim (y=ax+b), mas com poucas particularidades.

$$\boxed{y = m\,x + n}$$

- m é o coeficiente angular. Ele é muito importante, pois quanto maior seu valor, maior é a inclinação (ângulo) da reta em relação ao eixo X e ele nos revela se a reta é crescente, decrescente ou constante.
- n é o coeficiente linear, onde seu valor é o ponto da reta que corta o eixo Y, ou seja (0, y).

Vamos calcular m: m é a tangente do ângulo que forma aquela reta, isso é fácil de perceber por meio de uma manipulação geométrica clássica da função afim.

- m > 0, a reta será crescente;
- m = 0 a reta será constante;
- m < 0 a reta será decrescente.



$$m = tg_{\alpha}$$

$$tg_{\alpha} = \frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A}$$

$$m = \frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A}$$

Portanto, basta sabermos o ângulo que a reta faz com as abscissas para tirarmos sua tangente, ou sabermos as coordenadas dos dois pontos. No exemplo dado, m = tg(45°) = 1
Para escrever a equação reduzida da reta, substitua os valores de m e n agora conhecidos na fórmula.

2. <u>Equação geral da reta</u>.

$$ax + by + c = 0$$ Representação algébrica da equação geral da reta.

Vamos explicar com um exemplo para ser mais visível:
(Ex) Encontre a equação geral da reta s que passa pelos pontos (2, 3) e (4, 4).

Primeiramente encontramos a equação reduzida e em seguida montamos a equação geral da reta.

$$m = \frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A} \qquad m = \frac{3-4}{2-4} \qquad \boxed{m = \frac{1}{2}}$$

Agora escolhemos um ponto e o substituiremos, vou escolher (2, 3).

$$y = m\,x + n \qquad 3 = 2\,m + n \qquad 3 = 2 \cdot \frac{1}{2} + n \qquad \boxed{n = 2}$$

Agora podemos montar a equação reduzida substituindo o m e o n que acabamos de descobrir.

$$y = \frac{x}{2} + 2$$

Nesse momento, falta apenas igualarmos a equação a 0, isolando os valores e fazendo manipulações algébricas.

$$0 = \frac{x}{2} + 2 - y$$

$$0 = \frac{x}{2} + \frac{4}{2} - \frac{2 \cdot y}{2}$$

$$\boxed{0 = x + 4 - 2\,y}$$

Assim, descobrimos que a equação geral da reta s do exemplo é s: x + 4 - 2y = 0

Como escrever a equação de retas paralelas?

Retas são paralelas e nunca se interceptam quando, e somente quando seus coeficientes angulares forem iguais, ou seja, $m_r = m_s$, o que significa dizer que seus ângulos são iguais. Para escrever a equação da reta, podemos usar esse fato para nos ajudar.
Novamente, vamos usar um exemplo para ilustrar o assunto.

(Ex) Encontre a equação geral da reta que passa pelos pontos (1, 2) e é paralela a 2x - 3y + 6 = 0

Temos a equação de uma reta e temos os pontos que outra reta passa e sabemos que essas duas são paralelas, tendo isso em vista, devemos transformar a reta que já possuímos em uma equação reduzida para descobrirmos o m (afinal queremos igualar os emes). Para isso, isolamos o y.

$$2x - 3y + 6 = 0 \qquad -3\,y = -2\,x - 6 \qquad y = \frac{2x + 6}{3} \qquad y = \frac{2 \cdot x}{3} + \frac{6}{3}$$

Em vermelho está representado o m, m esse que deve ser igual para a outra reta.

$$\boxed{m = \frac{2}{3}}$$

Vamos começar a escrever a reta paralela que queremos descobrir, agora que sabemos o m, precisamos descobrir o n, e para isso, basta usar os pontos que foram dados (1, 2).

$$y = mx + n \qquad y = \frac{2 \cdot x}{3} + n \qquad 2 = \frac{2 \cdot 1}{3} + n \qquad 2 = \frac{2}{3} + \frac{3n}{3} \qquad \boxed{n = \frac{4}{3}}$$

Pronto, agora basta colocar o valor de n e m em seus respectivos locais e assim montar a equação da reta que passa pelos pontos (1, 2) e é paralela a 2x - 3y + 6 = 0

$$\boxed{y = \frac{2x}{3} + \frac{3}{4}}$$

Como escrever a equação de retas perpendiculares?

Em retas perpendiculares a ideia é parecida, mas nesse caso, os coeficientes angulares são diferentes, quando se cruzam formam 90° e sua multiplicação resulta em -1 ($m_r * m_s = -1$). Da mesma forma que nas retas paralelas, esse fato nos ajuda a resolver problemas.

(Ex) Dê a posição relativa entre as retas r: 3x + 5y + 7 = 0 e s: 10x - 6y +1 = 0

Vamos reduzir as expressões isolando o y e descobrir o m de cada um.

$$r:\ 5y = -3x - 7$$

$$r:\ y = -\frac{3x}{5} - \frac{7}{5}$$

$$\boxed{m_r = -\frac{3}{5}}$$

$$s:\ 6y = 10x + 1$$

$$s:\ y = \frac{10x}{6} + \frac{1}{6}$$

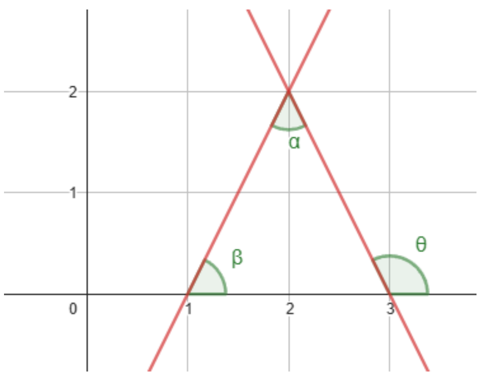
$$\boxed{m_s = \frac{10}{6}}$$

Caso $m_r * m_s = -1$, então essas retas são perpendiculares.

$$-\frac{3}{5}\cdot\frac{10}{6} = -1 \qquad \boxed{-\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{3} = -1}$$

Conclui-se que sim, essas retas são perpendiculares pois a multiplicação de seus coeficientes angulares resulta em -1.

Como calcular o ângulo formado entre duas retas?



O ângulo externo é a soma dos dois ângulos internos não-adjacentes, no exemplo, θ é o ângulo externo que corresponde a θ = α+β

Disso, chegamos ao fato de que o ângulo formado entre as duas retas (α) pode ser escrito como α = θ - β

Para descobrirmos α, vamos usar sua tangente para nos guiarmos

Vamos usar a fórmula da soma/diferença de tangentes lá da trigonometria:

$$\mathrm{tg}(A - B) = \frac{\mathrm{tg}(A) - \mathrm{tg}(B)}{1 + \mathrm{tg}(A)\ \mathrm{tg}(B)}$$

Perceba que tg(A - B) é o α que queremos descobrir, vamos fazer as substituições:
Lembremos que a tangente dos ângulos é o m pela equação da reta, no caso temos dois emes.

$$\boxed{\mathrm{tg}(\alpha) = \frac{m_r - m_s}{1 + m_r \cdot m_s}}$$

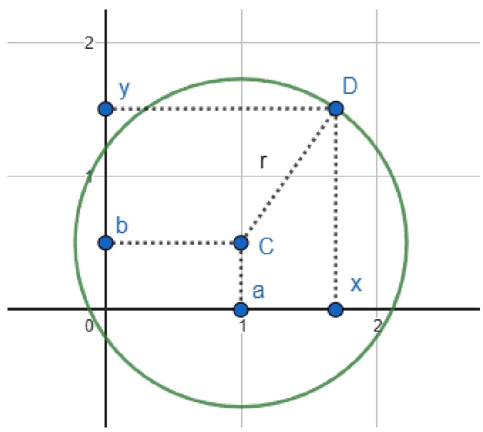
Pronto, essa é a fórmula para saber o ângulo formado entre duas retas, e a partir do valor dessa tangente, obtemos o valor do ângulo pelo seu estudo. Por exemplo: caso a tangente resultante fosse 1, sabemos que o ângulo valeria 45° (pode-se usar arctan).

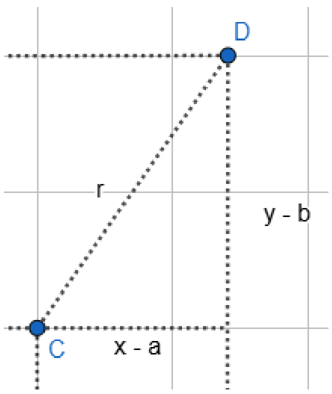
Como escrever a equação de uma circunferência?

Uma circunferência é essencialmente uma linha em que todos os seus pontos são equidistantes ao centro, formando-se uma circunferência, e por conta disso, podemos escrever uma equação que represente essa circunferência:

$$\boxed{x^2 + y^2 - 2\ a\ x - b\ y + a^2 + b^2 - r^2 = 0}$$

Onde a e b são os pontos que, respectivamente, representam o x e o y do ponto central da circunferência. r representa o raio e, x e y são as coordenadas do ponto na circunferência.





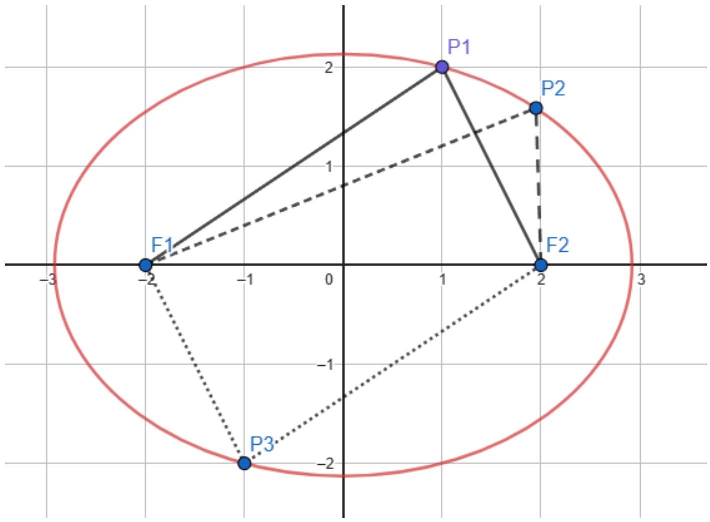
Novamente, podemos escrever tanto a equação geral da circunferência (representada acima) como podemos escrever a equação reduzida, no segundo caso, a equação reduzida é obtida por Pitágoras:

$$\boxed{r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2}$$ Equação reduzida da reta

A equação geral é o desenvolvimento da equação reduzida.

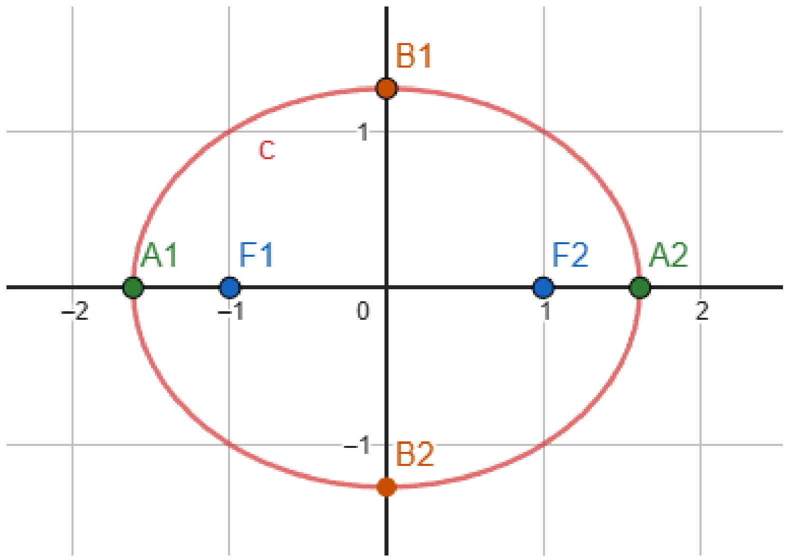
Como escrever a equação de uma elipse?

Elipses, hipérboles e parábolas são seções específicas obtidas a partir de cortes de cones, onde cada uma das 3 figuras é um corte em perspectiva diferente, por isso chamamos essas figuras de cônicas. Pode-se entender uma elipse como uma circunferência com dois focos.



<u>Organizando as informações:</u>

- A elipse é formada a partir de dois focos F1 e F2 que são pontos que distanciam uma distância denominada 2c, onde cada c é a distância de cada foco ao centro.
- No eixo X, a elipse corta o eixo duas vezes, esses dois pontos são denominados A1 e A2 e distanciam uma distância 2a, e esse é o chamado eixo maior.
- No eixo Y, a elipse corta o eixo duas vezes, esses dois pontos são denominados B1 e B2 e distanciam uma distância 2b, e esse é o chamado eixo menor.
- Costuma-se colocar o centro da elipse na origem do plano cartesiano, no ponto (0, 0).



A soma das distâncias de cada foco ao ponto é igual a uma constante 2a, e a manipulação dessa constante nos revela a equação reduzida da elipse:

Com centro na origem e A1, A2 cortando o eixo X

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Com centro na origem e A1, A2 cortando o eixo Y

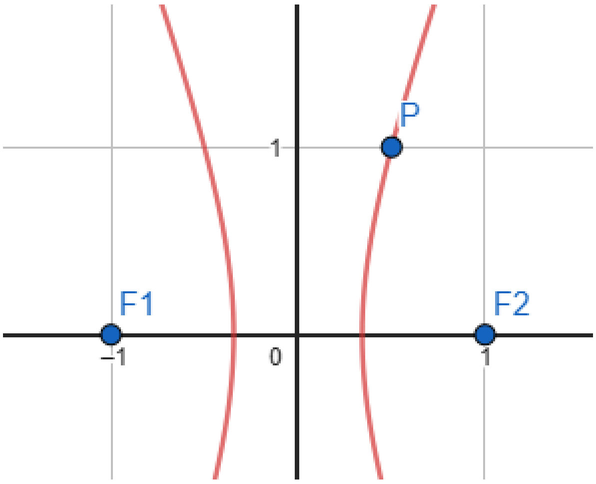
$$\boxed{\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1}$$

Quando a coordenada está fora da origem, ou seja, o centro da elipse não está na origem, eu devo fazer a mesma coisa da equação, a única diferença é que eu devo descontar a distância de cada eixo até a origem. Nesse caso também é necessário verificar se o eixo maior está na vertical ou na horizontal, afinal é a mesma equação da elipse.

Como escrever a equação de uma hipérbole?

Em elipses, vimos que a soma das distâncias de cada foco ao ponto é uma constante 2a, no caso da hipérbole, a diferença entre essas distâncias é uma constante. Nesse caso, por precaução, a distância precisa estar em módulo por conta da distância não poder ser negativa, já que não se trata de referencial.

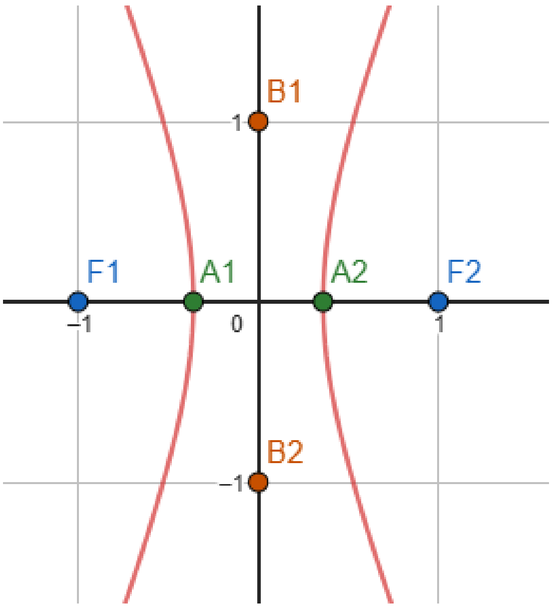
$$|d(P, F1) - d(P, F2)| = 2a$$



A hipérbole e a parábola são bem parecidas com a elipse, ainda temos os focos e os pontos A1, A2, B1 e B2.

Organizando as informações:

- Existe um eixo imaginário, que não cruza com a hipérbole em nenhum lado e está presente no meio entre eles. Nesse eixo imaginário, definimos pontos B1 e B2 que distanciam uma distância 2b.
- O eixo em que os focos estão posicionados, ou seja, o eixo que os ramos de hipérbole corta é chamado de eixo real, e esses pontos em que os ramos de hipérbole cortam o eixo real são chamados de A1 e A2 e distanciam uma distância 2a.
- A distância entre os dois focos F1 e F2 continua sendo chamada de 2c.



Vamos ver as equações da hipérbole, é a mesma coisa da hipérbole, porém com o sinal trocado.

Quando o centro está na origem e ela corta o X

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

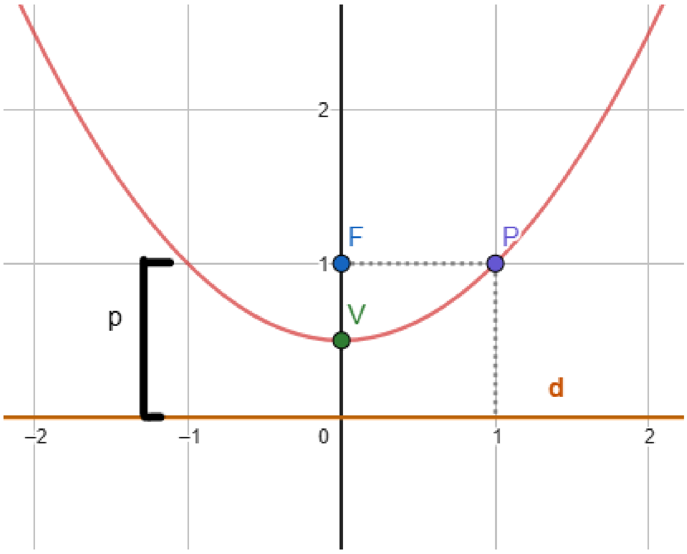
Quando o centro está na origem ela corta o Y

$$\boxed{\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1}$$

Novamente, quando a coordenada está fora da origem, ou seja, o centro da hipérbole não está na origem, eu devo fazer a mesma coisa da equação, a única diferença é que eu devo descontar a distância de cada eixo até a origem. Nesse caso também é necessário verificar se o eixo maior está na vertical ou na horizontal, afinal é a mesma equação da hipérbole.

Como escrever a equação de uma parábola?

As parábolas são curvas constituídas de um ponto focal (F) que está fora de uma reta qualquer chamada diretriz (d).



Se pegarmos qualquer ponto (P) que constitui a parábola, a distância desse ponto (P) até o foco (F) é a mesma distância do mesmo ponto (P) até o ponto mais próximo da diretriz (d).

$$d(P, F) = d(P, d)$$

Toda parábola possui um vértice (V) que é o ponto extremo da parábola que intercepta o eixo Y.

(p) é o parâmetro, esse parâmetro é a distância do foco até a diretriz (d), de modo que o ponto do vértice (V) tem igual distância ao foco (F) e a diretriz (d), ficando o parâmetro, em cada caso, $p/2$.

Para escrever a equação da parábola, vamos analisar se o vértice está na origem ou não, ou se a parábola tem concavidade para cima ou para baixo ou para esquerda ou para a direita, são vários casos mas com pequenas mudanças entre eles.

Vértice na origem e concavidade para cima:

$$\boxed{x^2 = 2\,p\,y}$$

Vértice na origem e concavidade para baixo:

$$\boxed{x^2 = -2\,p\,y}$$

Vértice na origem e concavidade para direita:

$$\boxed{y^2 = 2\,p\,x}$$

Vértice na origem e concavidade para esquerda:

$$\boxed{y^2 = -2\,p\,x}$$

Igual nos casos das elipses e das hipérboles, caso o vértice não esteja na origem, basta subtrairmos as coordenadas do x e do y do ponto, respectivamente, as coordenadas da origem. E nesses casos, a regra do sinal que está nas fórmulas acima continua sendo válida, então precisa tomar bastante cuidado.

Referências

- Aulas do Descomplica;
  - https://descomplica.com.br/;

- Brasil Escola;
  - https://brasilescola.uol.com.br/matematica/concavidade-uma-parabola.htm
  - https://brasilescola.uol.com.br/matematica/hiperbole.htm
  - https://brasilescola.uol.com.br/matematica/equacao-reduzida-reta.htm
  - https://brasilescola.uol.com.br/matematica/equacao-geral-reta.htm
  - https://brasilescola.uol.com.br/matematica/distancia-entre-ponto-reta.htm

- Mundo Educação;
  - https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/elipse.htm
  - https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/angulo-formado-entre-duas-retas.htm
  - https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/equacao-reduzida-reta.htm
  - https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/distancia-entre-dois-pontos.htm

- Educa Mais Brasil;
  - https://www.educamaisbrasil.com.br/enem/matematica/equacoes-da-reta

- GeoGebra para desenhar as imagens;
  - https://www.geogebra.org/

- Youtube;
  - https://www.youtube.com/@equacionamatematica
  - https://www.youtube.com/@sandrocuriodicasdemat

- Não é referência: vozes da minha cabeça.