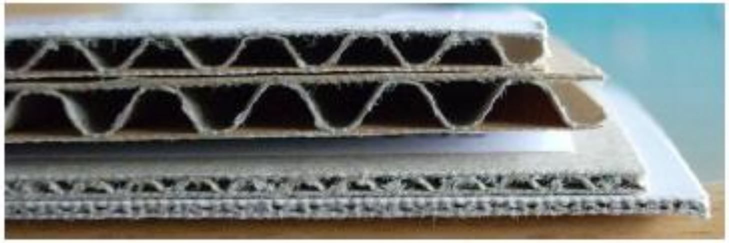
Cálculo Numérico – BCC760
Integração Numérica

Departamento de Computação

Página da disciplina

http://www.decom.ufop.br/bcc760/

Integração Numérica - Motivação



• Suponha que queremos obter uma folha de papelão de 4 metros de comprimento. A altura de cada onda do papel ondulado e de 1cm, a partir de seu centro, e cada onda tem um período de, aproximadamente, 2cm.

• O problema de se encontrar o comprimento da folha ondulada necessária para fabricar este papelão consiste em determinar o comprimento da curva dada por f (x) = sin(x), a partir de x = 0cm, ate x = 400cm.

$$L = \int_0^{400} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_0^{400} \sqrt{1 + (\cos(x))^2} dx.$$

Integração Numérica

1. Introdução

O Cálculo Diferencial e Integral ensina que se $y = f(x)$ é uma função contínua em [a, b], então para se obter

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

basta determinar uma primitiva, isto é, uma função F(x), tal que F'(x) = f(x), de forma que

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

1. Introdução

Problemas

- Pode não ser fácil, ou impossível, expressar F(x) por meio de uma combinação finita de funções elementares.

- Há situações nas quais y = f(x) é conhecida apenas em um conjunto discreto de pontos.

- **Nestas situações, avalia-se** $I = \int_a^b f(x)\,dx$ **numericamente!!!**

1. Introdução

- **Ideia básica**

Aproximar (substituir) a função integranda, $y = f(x)$, por outra cuja integral seja fácil de avaliar.

Substitui-se, então, $y = f(x)$ pelo polinômio que a interpola em um conjunto de pontos (x_i, y_i), $i = 0,1, \ldots, n$; pertencentes ao intervalo de integração $[a, b]$.

2. Fórmulas de Newton-Cotes

- Serão estudadas as Fórmulas de Newton-Cotes do tipo fechado. Neste caso, todos os pontos estão no intervalo de integração [a, b], e $x_0 = a$ e $x_n = b$ são os extremos.
- Estas fórmulas permitem calcular, por aproximação, uma integral definida substituindo a função a ser integrada pelo polinômio com diferenças finitas ascendentes que a interpola em um conjunto de pontos (x_i, y_i), $i = 0, 1, \ldots, n$.
- Sendo assim, é necessário que as abscissas dos pontos sejam equidistantes.

2. Fórmulas de Newton-Cotes

Sabe-se que

$$p(x_0 + h.z) = y_0 + z.\Delta y_0 + \frac{z(z-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{z(z-1)(z-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \ldots + \frac{z(z-1)\ldots[z-(n-1)]}{n!}\Delta^n y_0$$

E que $z = \dfrac{x - x_0}{h} \Rightarrow \quad x = x_o + h.z \Rightarrow dx = h.dz$

Para $x = x_o \Rightarrow \quad z = \dfrac{x_0 - x_0}{h} \Rightarrow z = 0$

Para $x = x_n \Rightarrow \quad z = \dfrac{x_n - x_0}{h} = \dfrac{n.h}{h} \Rightarrow z = n$

2. Fórmulas de Newton-Cotes

- A integral que se deseja calcular é

$$I = \int_a^b f(x)dx, \text{ onde } \mathrm{a} = \mathrm{x}_0 \text{ e } \mathrm{b} = \mathrm{x}_\mathrm{n}$$

- A integral que será, efetivamente, calculada é

$$\mathrm{I} = \int_0^n \mathrm{p}(\mathrm{x}_0 + \mathrm{h.z}).\mathrm{h.dz} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathrm{I} = \mathrm{h}.\int_0^n \mathrm{p}(\mathrm{x}_0 + \mathrm{h.z}).\mathrm{dz}}$$

- Este resultado constitui uma família de regras de integração ou de fórmulas de quadratura.

2. Fórmulas de Newton-Cotes
2.1 Regra dos Trapézios

- Esta regra é obtida fazendo-se n igual a um, ou seja, integrando-se o polinômio interpolador de grau um.

2.1.1 Fórmula Simples

É calculada a integral

$$I = h.\int_0^1 [y_0 + z\Delta y_0]\cdot dz \quad \Rightarrow \quad I = h.\left[zy_0 + \frac{z^2}{2}\Delta y_0\right]_0^1 = h\left[y_0 + \frac{\Delta y_0}{2}\right]$$

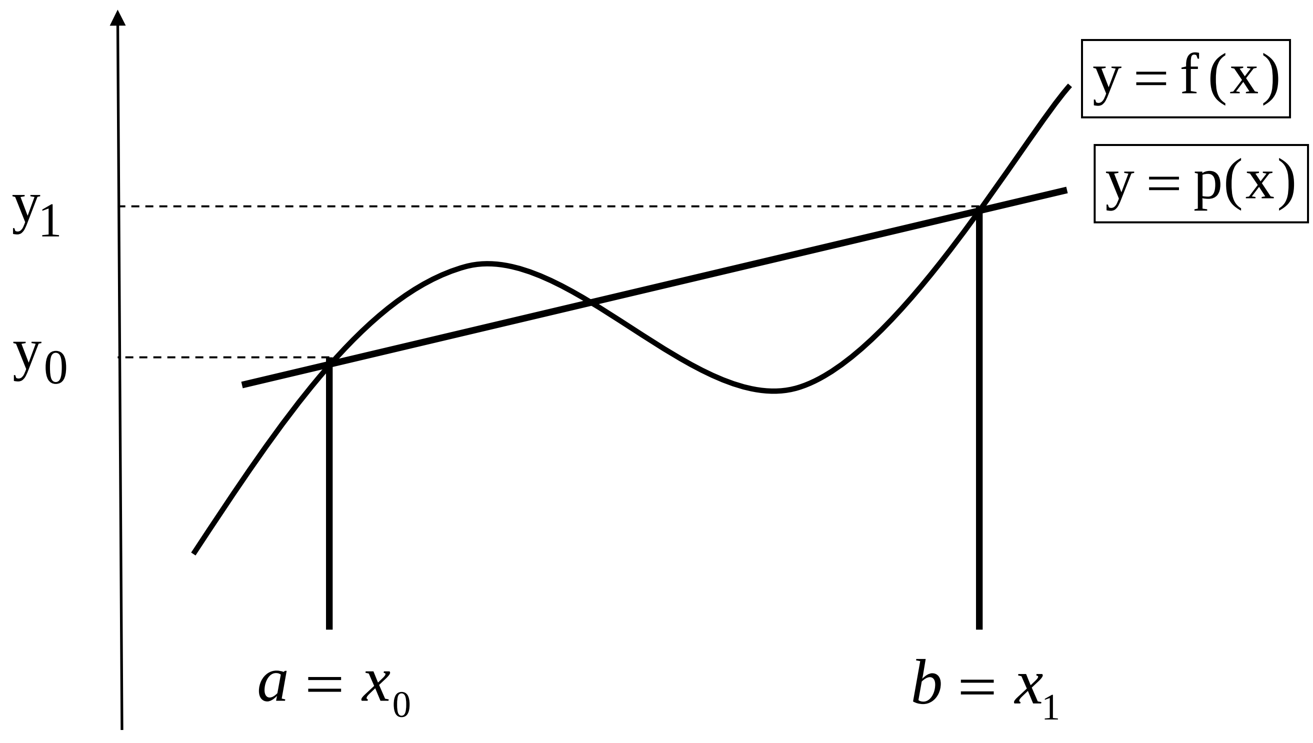
Como $\Delta y_0 = y_1 - y_0$

$$I = \frac{h}{2}\left[y_0 + y_1\right] \quad \Rightarrow$$

Fórmula simples da Regra dos Trapézios

2. Fórmulas de Newton-Cotes
2.1 Regra dos Trapézios

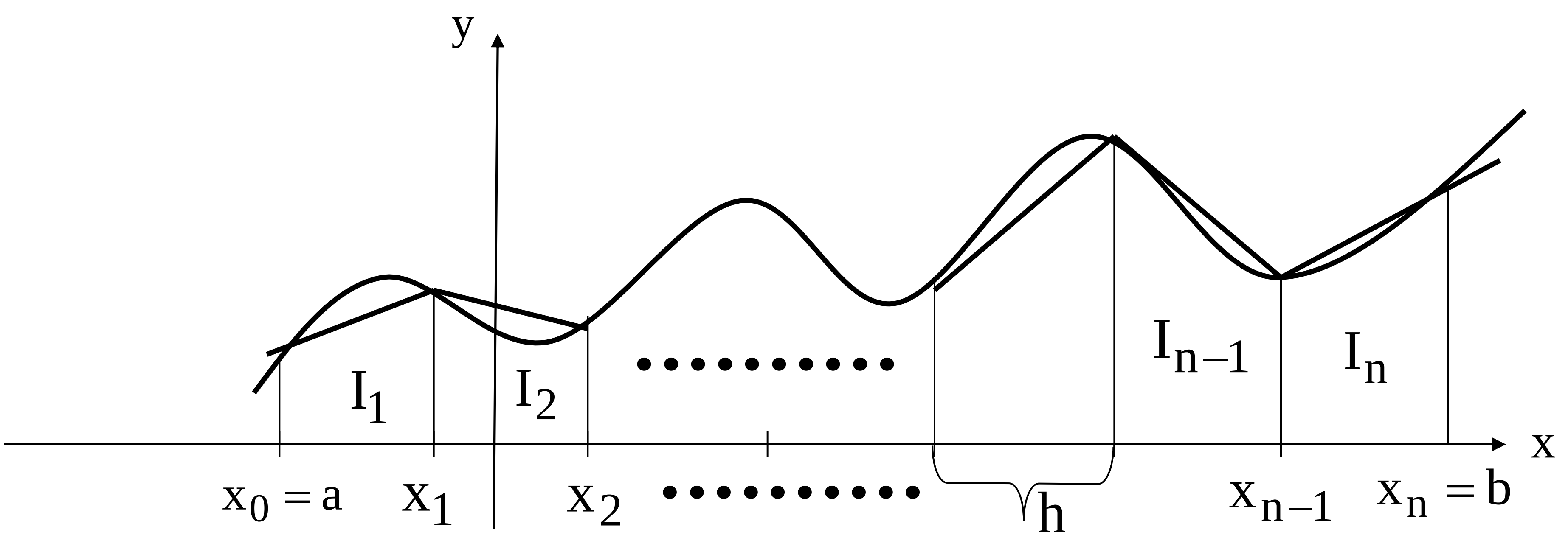
- Note-se que I é a área do trapézio de altura $h = x_1 - x_0$ e de bases y_0 e y_1.



2. Fórmulas de Newton-Cotes
2.1 Regra dos Trapézios

2.1.2 Fórmula Composta

Para melhorar o resultado, o intervalo de integração é dividido em n partes de tamanho h e aplica-se a fórmula simples em cada uma delas.



2. Fórmulas de Newton-Cotes
2.1 Regra dos Trapézios

- Fazendo a soma

$$I = I_1 + I_2 + \ldots + I_n$$

$$I = \underbrace{\frac{h}{2}\left[y_0 + y_1\right]}_{I_1} + \underbrace{\frac{h}{2}\left[y_1 + y_2\right]}_{I_2} + \ldots\ldots\ldots + \underbrace{\frac{h}{2}\left[y_{n-1} + y_n\right]}_{I_n}$$

- Logo

$$I = \frac{h}{2}\left[y_0 + 2.y_1 + 2.y_2 + \ldots + 2.y_{n-1} + y_n\right]$$

Fórmula composta da Regra dos Trapézios

2. Fórmulas de Newton-Cotes
2.1 Regra dos Trapézios

- **Erro de truncamento**

$$E_T = -\frac{(x_n - x_0)^3}{12n^2}.f''(\xi) \quad x_0 \leq \xi \leq x_n$$

Exemplos

Sendo f(x) = ln(x + 2) -1, estime $I = \int_{2}^{3,2} f(x).dx$, utilizando a Regra dos Trapézios, de modo que o erro de truncamento máximo seja 0,0004.

Solução

Tem-se que $f''(x) = -\frac{1}{(x+2)^2}$ cujo módulo é máximo, no intervalo [2; 3,2], para x = 2 e $|f''(2)| = 0,0625$. Fazendo as substituições em (2.8.a), vem:

$$E_T \leq \left|\frac{(3,2-2)^3}{12k^2}\right|.0,0625 \leq 0,0004 \Rightarrow k \geq 4,7 \Rightarrow \mathbf{k \geq 5}$$

Exemplos

Considerando o intervalo de integração dividido em 5 partes, tem-se h = 0,24.

i	x_i	y_i	c_i
0	2,00	0,3863	1
1	2,24	0,4446	2
2	2,48	0,4996	2
3	2,72	0,5518	2
4	2.96	0,6014	2
5	3,20	0,6487	1

Tendo em vista que:

$$I = \frac{h}{2}\left[y_0 + 2.y_1 + 2.y_2 + 2.y_3 + 2.y_4 + y_5\right]$$

$$\sum_{i=0}^{5} c_i.y_i = 5,2298$$

$$I = \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{5} c_i.y_i \Rightarrow I = \frac{0,24}{2}.5,2298 \Rightarrow \mathbf{I = 0,6276}$$

Exemplos

$$\sum_{i=0}^{5} c_i . y_i = 5,2298 \qquad I = \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{5} c_i . y_i \Rightarrow I = \frac{0,24}{2} . 5,2298 \Rightarrow \mathbf{I = 0,6276}$$

Observação

Utilizando o Cálculo Diferencial e Integral e quatro casas decimais, é obtido o seguinte resultado:

$$I = \int_{2}^{3,2} [(\ln(x+2) - 1].dx = \{(x+2).[\ln(x+1) - 1] - x\}_{2}^{3,2} = 0,6278$$

Exercício

Um terreno está limitado por uma cerca reta e por um rio. As diferentes distâncias x (em metros) de uma extremidade da cerca ao rio, que é a largura y do terreno (em metros), foi medida. Os resultados estão na tabela a seguir.

x	0	20	40	60	80	100	120
y	0	22	41	53	38	17	0

2. Fórmulas de Newton-Cotes
2.2 Primeira Regra de Simpson

- Esta regra é obtida fazendo-se n igual a dois, ou seja, integrando-se o polinômio interpolador de grau dois.

2.2.1 Fórmula Simples

É calculada a integral

$$I = h.\int_{0}^{2} [y_0 + z\Delta y_0 + \frac{z(z-1)}{2}\Delta^2 y_0] \cdot dz$$

2. Fórmulas de Newton-Cotes
2.2 Primeira Regra de Simpson

- O resultado é

$$I = h\left[z.y_0 + \frac{z^2}{2}.\Delta y_0 + \left(\frac{z^3}{6} - \frac{z^2}{4} \right).\Delta^2 y_0 \right]_0^2$$

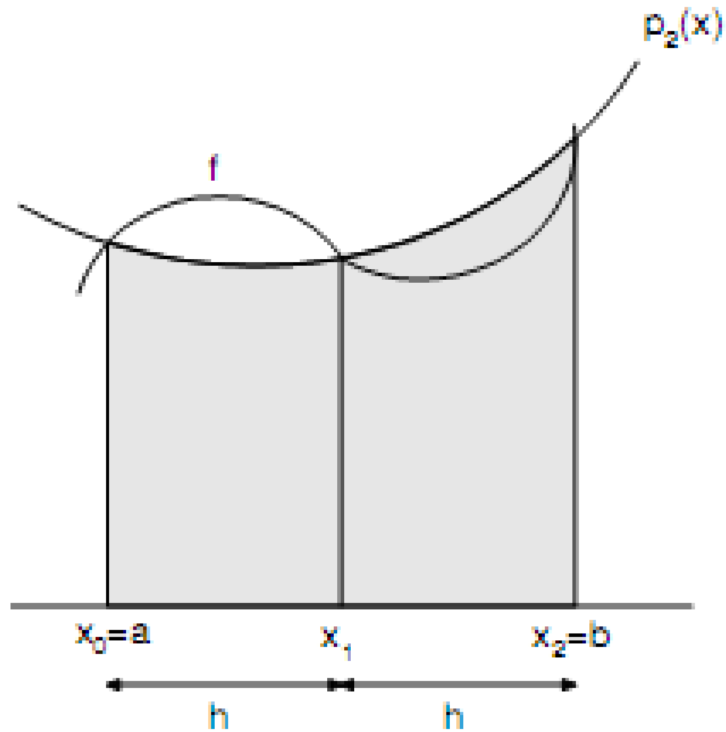
Como $\Delta y_0 = y_1 - y_0$ e $\Delta^2 y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0$

Então

$$I = \frac{h}{3}\left[y_0 + 4y_1 + y_2 \right] \Rightarrow$$

Fórmula simples da Primeira Regra de Simpson

2. Fórmulas de Newton-Cotes
2.2 Primeira Regra de Simpson

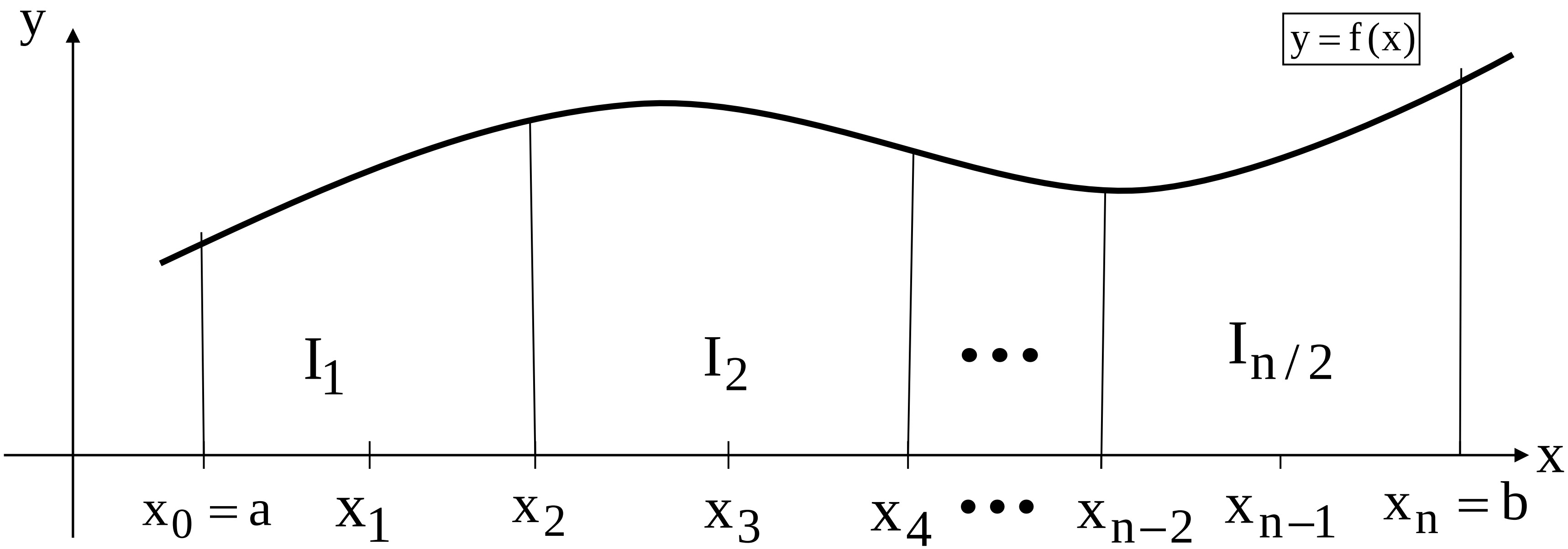


2. Fórmulas de Newton-Cotes
2.2 Primeira Regra de Simpson

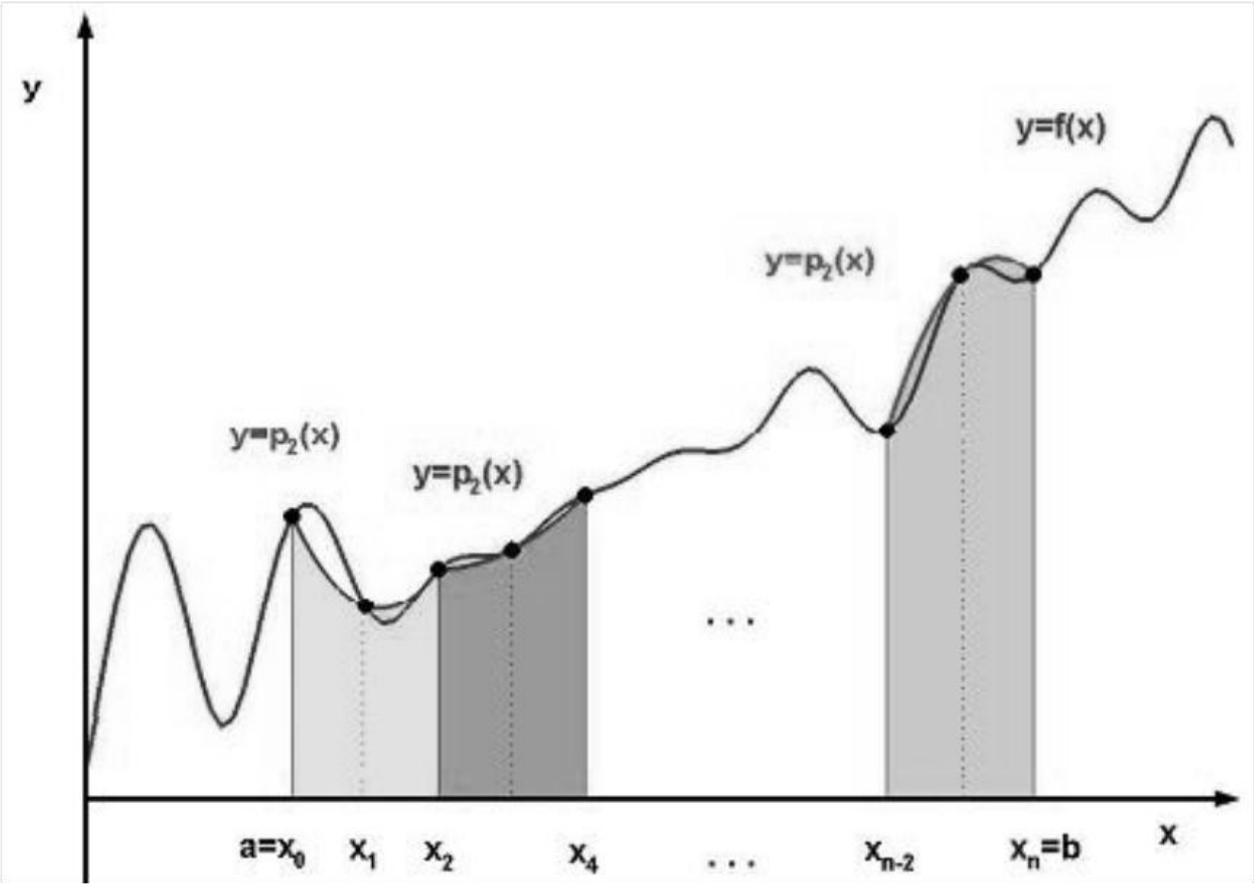
2.2.2 Fórmula Composta

Divide-se o intervalo de integração em n partes de tamanho h e aplica-se a fórmula simples de forma repetida.

• Representação geométrica



2. Fórmulas de Newton-Cotes
2.2 Primeira Regra de Simpson



2. Fórmulas de Newton-Cotes
2.2 Primeira Regra de Simpson

•Fazendo a soma: $I = I_1 + I_2 + \ldots + I_{n/2}$

$$I = \underbrace{\frac{h}{3}\left[y_0 + 4.y_1 + y_2\right]}_{I_1} + \underbrace{\frac{h}{3}\left[y_2 + 4.y_3 + y_4\right]}_{I_2} + \ldots + \underbrace{\frac{h}{3}\left[y_{n-2} + 4.y_{n-1} + y_n\right]}_{I_{n/2}}$$

•A fórmula composta é

$$\boxed{I = \frac{h}{3}.[y_0 + 4.y_1 + 2.y_2 + 4.y_3 + 2.y_4 + \ldots\ldots + 2.y_{n-2} + 4.y_{n-1} + y_n]}$$

Atenção! n deve ser par!

2. Fórmulas de Newton-Cotes
2.2 Primeira Regra de Simpson

- **Erro de truncamento**

$$E_{S1} = -\frac{(x_n - x_0)^5}{180n^4} f^{(IV)}(\xi) \quad \xi \in [x_0, x_n]$$

Exemplos

O PROCON tem recebido reclamações com relação ao peso dos pacotes de açúcar de 5kg. Com a finalidade de verificar a validade das reclamações, foi coletada uma amostra de 100 pacotes. Com isto, chegou-se à conclusão de que para determinar a probabilidade de um pacote de açúcar pesar menos do que 5kg deve ser avaliada a expressão a seguir.

$$F = 0,5 + \frac{1}{\sqrt{2.\pi}} . \int_{0}^{1,8} e^{-\frac{x^2}{2}} .dx$$

Estime essa probabilidade e o erro de truncamento máximo cometido utilizando a Primeira Regra de Simpson. Divida o intervalo de integração em 6 partes e faça os cálculos com 4 casas decimais.

Exemplos

i	x_i	y_i	c_i
0	0,0	1	1
1	0,3	0,9560	4
2	0,6	0,8353	2
3	0,9	0,6670	4
4	1,2	0,4868	2
5	1,5	0,3247	4
6	1,8	0,1979	1

Exemplos

i	x_i	y_i	c_i
0	0,0	1	1
1	0,3	0,9560	4
2	0,6	0,8353	2
3	0,9	0,6670	4
4	1,2	0,4868	2
5	1,5	0,3247	4
6	1,8	0,1979	1

$$I = \frac{h}{3}\sum_{i=0}^{6} c_i . y_i \Rightarrow I = \frac{0,3}{3} . 11,6325 \Rightarrow \mathbf{I = 1,1633}$$

$$F = 0,5 + \frac{1}{\sqrt{2.\pi}} . 1,1633 \Rightarrow \mathbf{F = 0,9640}$$

$$f^{(IV)}(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} .(x^4 - 6.x^2 + 3) \qquad |\, f^{(IV)}(0) \,| = 3$$

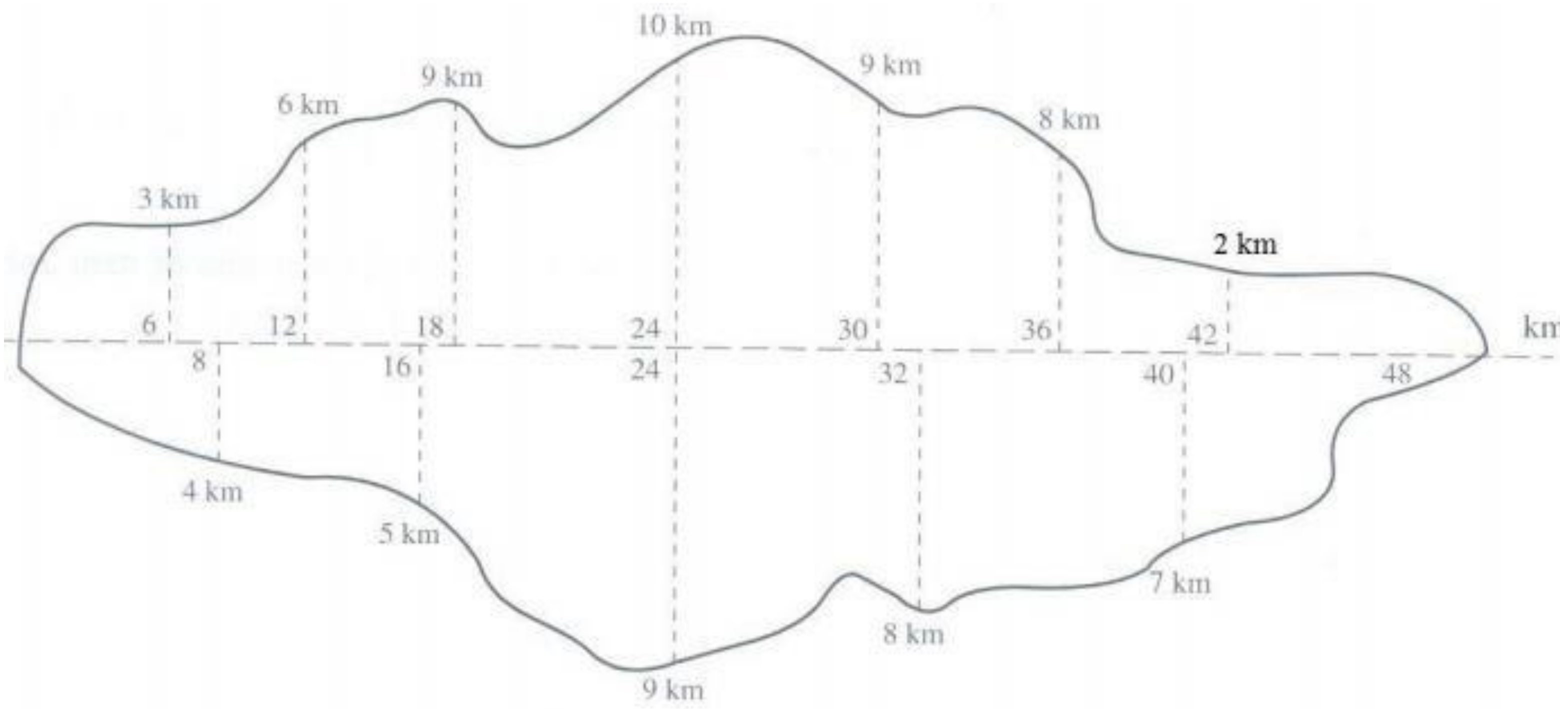
$$E_{S1} \le \left| \frac{(1,8-0)^5}{180.6^4} \right| \cdot 3 \Rightarrow E_{S1} \le 0,000243$$

Exercício 1

Um terreno está limitado por uma cerca reta e por um rio. As diferentes distâncias x (em metros) de uma extremidade da cerca ao rio, que é a largura y do terreno (em metros), foi medida. Os resultados estão na tabela a seguir.

x	0	20	40	60	80	100	120
y	0	22	41	53	38	17	0

Exercício 2



10 km
9 km
9 km
6 km
8 km
3 km
2 km
6
12
18
24
30
36
42
km
8
16
24
32
40
48
4 km
5 km
7 km
8 km
9 km

2. Fórmulas de Newton-Cotes
2.3 Segunda Regra de Simpson

- Esta regra é obtida fazendo-se n igual a três, ou seja, integrando-se o polinômio interpolador de grau três.

2.3.1 Fórmula Simples

É calculada a integral

$$I = h.\int_0^3 \left[y_0 + z.\Delta y_0 + \frac{z(z-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{z(z-1)(z-2)}{3!}\Delta^3 y_0 \right].dz$$

Como $\Delta y_0 = y_1 - y_0$ $\Delta^2 y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0$ $\Delta^3 y_0 = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0$

$$I = \frac{3h}{8}\left[y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3 \right] \Rightarrow$$

Fórmula simples da Segunda Regra de Simpson

2. Fórmulas de Newton-Cotes
2.3 Segunda Regra de Simpson

2.3.2 Fórmula Composta

Divide-se o intervalo de integração em n partes de tamanho h e aplica-se a fórmula simples de forma repetida.

$$I = \underbrace{\frac{3h}{8}\left[y_0 + 3.y_1 + 3.y_2 + y_3\right]}_{I_1} + \underbrace{\frac{3h}{8}\left[y_3 + 3.y_4 + 3.y_5 + y_6\right]}_{I_2} + \ldots + \underbrace{\frac{3h}{8}\left[y_{n-3} + 3.y_{n-2} + 3.y_{n-1} + y_n\right]}_{I_{n/3}}$$

Resultando em

$$\boxed{I = \frac{3h}{8}[y_0 + 3.y_1 + 3.y_2 + 2.y_3 + 3.y_4 + 3.y_5 + 2.y_6 + \ldots. + 3.y_{n-2} + 3.y_{n-1} + y_n]}$$

Atenção! n deve ser múltiplo de três!

2. Fórmulas de Newton-Cotes
2.3 Segunda Regra de Simpson

- **Erro de truncamento**

$$E_{S2} = -\frac{(x_n - x_0)^5}{80n^4} f^{(IV)}(\xi) \quad \xi \in [x_0, x_n]$$

Exemplos

i	z_i	y_i	c_i
0	10	- 437,19	1
1	9	-337,89	3
2	8	-244,20	3
3	7	-156,41	2
4	6	-74,88	3
5	5	0,00	3
6	4	67,73	2
7	3	127,71	3
8	2	179,19	3
9	1	221,20	1

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{9} c_i . y_i = -1.443,56$$

Tendo em vista que:

$$t = \frac{3.h}{8}\left[y_0 + 3.y_1 + 3.y_2 + 2.y_3 + 3.y_4 + 3.y_5 + 2.y_6 + 3.y_7 + 3.y_8 + y_9\right], \text{ então}$$

$$t = \frac{3.h}{8}\sum_{i=0}^{9} c_i . y_i \Rightarrow t = \frac{3.(-1)}{8}.(-1.443,56) \Rightarrow \mathbf{t = 541,34s}$$

Exercício 1

Um terreno está limitado por uma cerca reta e por um rio. As diferentes distâncias x (em metros) de uma extremidade da cerca ao rio, que é a largura y do terreno (em metros), foi medida. Os resultados estão na tabela a seguir.

x	0	20	40	60	80	100	120
y	0	22	41	53	38	17	0

Exercício 2

$$\text{Sendo } f(x) = \frac{1}{x.\ln(x)}, \text{ estimar } I = \int_2^5 f(x)dx$$

x	**ln(x)**
2	0.6931
2.5	0.9163
3	1.0986
3.5	1.2528
4	1.3863
4.5	1.5041
5	1.6094

2. Fórmulas de Newton-Cotes
2.4 Grau de exatidão

- Uma regra de integração diz-se de **grau de exatidão n** se integrar, exatamente, todos os polinômios de grau menor ou igual a n e existir pelo menos um polinômio de grau n + 1 que não é integrado exatamente por esta regra.

- Portanto

  Regra dos Trapézios $\rightarrow$ grau de exatidão 1

  Primeira Regra de Simpson $\rightarrow$ grau de exatidão 3

  Segunda Regra de Simpson $\rightarrow$ grau de exatidão 3

3. Integração Dupla

- Trata-se da utilização de métodos numéricos para integração de funções de duas variáveis, ou seja,

$$I = \int_{x_0}^{x_n} \int_{y_0}^{y_m} f(x, y) dy\, dx$$

- Pode-se escrever

$$I = \int_{x_0}^{x_n} \left[\int_{y_0}^{y_m} f(x, y)\, dy \right] dx = \int_{x_0}^{x_n} G(x)\, dx$$

$$\text{onde} \quad G(x) = \int_{y_0}^{y_m} f(x, y)\, dy$$

3. Integração Dupla

Para calcular estas integrais,

$$I = \int_{x_0}^{x_n} G(x)\, dx$$

$$G(x) = \int_{y_0}^{y_m} f(x, y)\, dy$$

Podem ser utilizadas as regras de integração estudadas.

3. Integração Dupla

Sendo

$$I = k_x.[a_0.G(x_0) + a_1.G(x_1) + a_2.G(x_2) + \ldots + a_n.G(x_n)]$$

$$G(x_i) = k_y[b_0 f(x_i, y_0) + b_1 f(x_i, y_1) + b_2 f(x_i, y_2) + \ldots + b_m f(x_i, y_m)]$$

$$i = 0, 1, \ldots, n$$

Verifica-se que

$$I = k_x . k_y \sum_{\substack{j=0 \\ i=0}}^{\substack{n \\ m}} a_i . b_j . f(x_i . y_j)$$

3. Integração Dupla

Exemplo 3.1

Sendo $f(x, y) = \dfrac{\text{sen}(x.y)}{x^2 + y}$ estime $I = \int_{0,1}^{0,9} \int_{0,2}^{0,5} f(x, y)dy.dx$ com $h_x = 0{,}2$ e $h_y = 0{,}1$. Considere, nos cálculos, quatro casas decimais.

Solução:

a) $m = \dfrac{0{,}9 - 0{,}1}{0{,}2} = 4$ (subdivisões em x) $\rightarrow$ 1ª regra de Simpson

$p = \dfrac{0{,}5 - 0{,}2}{0{,}1} = 3$ (subdivisões em y) $\rightarrow$ 2ª regra de Simpson

3. Integração Dupla

b) O quadro a seguir apresenta uma forma de organizar os cálculos.

		j	0	1	2	3
		y_j	0,2	0,3	0,4	0,5
i	x_i	$\downarrow a_i$ | $b_j \rightarrow$	1	3	3	1
0	0,1	1	1 0,0952	3 0,0968	3 0,0975	1 0,0980
1	0,3	4	4 0,2068	12 0,2305	12 0,2443	4 0,2533
2	0,5	2	2 0,2219	6 0,2717	6 0,3056	2 0,3299
3	0,7	4	4 0,2022	12 0,2639	12 0,3105	4 0,3464
4	0,9	1	1 0,1773	3 0,2403	3 0,2911	1 0,3320
					$\Sigma =$	**24,0722**

3. Integração Dupla

Cada célula do corpo do quadro é preenchida da seguinte forma:

$$\boxed{\begin{array}{r} \boxed{a_i \times b_j} \\ f(x_i,\, y_j) \end{array}}$$

Tem-se então

$$\sum = 1.f(0{,}1\ ;\ 0{,}2) + 3.f(0{,}1\ ;\ 0{,}3) + 3.f(0{,}1\ ;\ 0{,}4) + \ldots + 1.f(0{,}9\ ;\ 0{,}5) = 24{,}0722$$

c) $I = \dfrac{h_x}{3}.\dfrac{3}{8}.h_y.\sum = \dfrac{0{,}2}{3}.\dfrac{3}{8}.0{,}1.[24{,}0722] \Rightarrow I = 0{,}0602$

3. Integração Dupla

Exemplo 3.2

Sendo $f(x, y) = \dfrac{1}{(x+y)^2}$ estime $I = \int_3^4 \int_1^2 f(x, y) dy.dx$ com $h_x = 0{,}2$ e $h_y = 0{,}25$. Considere, nos cálculos, quatro casas decimais.

4. Considerações finais

- Comparando as expressões dos erros, verifica-se que as fórmulas de Simpson têm ordem de convergência h^4, enquanto que a Regra dos Trapézios é da ordem h^2. Portanto , as regras de Simpson convergem para o resultado exato da integral com a mesma velocidade, e mais rapidamente do que a regra dos Trapézios, quando $h \to 0$.

- Embora a Primeira Regra de Simpson tenha sido obtida por meio do polinômio interpolador de grau dois, ela é exata, também, para polinômios de grau três, uma que, na fórmula do erro de truncamento, aparece a derivada quarta da função. Pode ser demonstrado que, se n é par, então as fórmulas de Newton-Cotes do tipo fechado têm grau de exatidão $(n + 1)$.