Cálculo Numérico – BCC760

Raízes de equações algébricas e transcendentes

Departamento de Computação

Página da disciplina

http://www.decom.ufop.br/bcc760/

Resolução de Equações Não lineares
Introdução

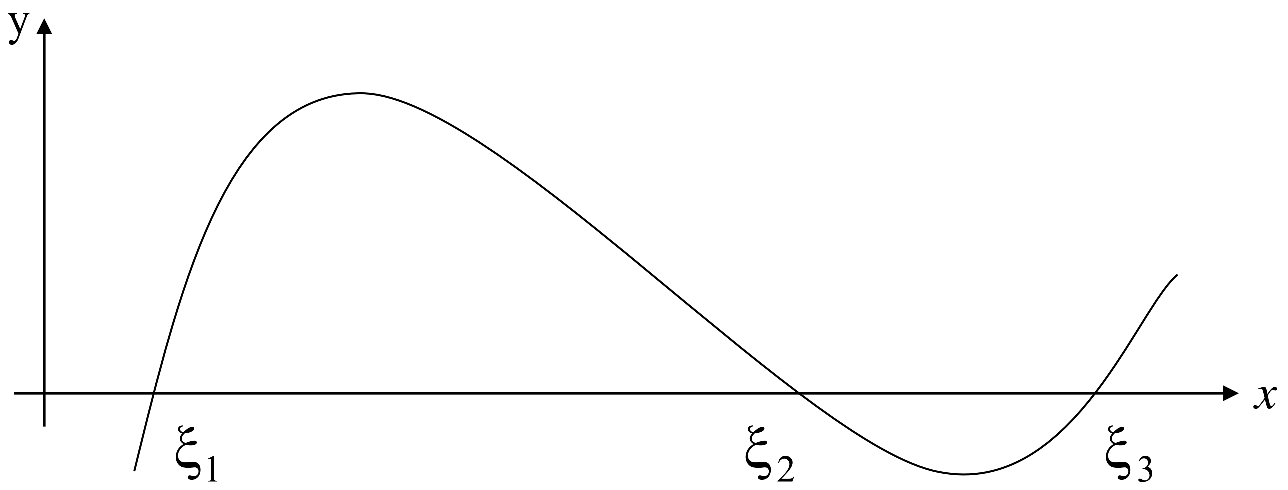
- Dada uma função y = f(x), o objetivo deste capítulo é a determinação valores $x = \xi$ tais que $f(\xi) = 0$.

- Estes valores são chamados de raízes da equação f(x) = 0 ou zeros da função y = f(x).

- Será tratado o caso em que ξ é um número real.

Resolução de Equações Não lineares
Introdução

- Geometricamente, conforme mostra a figura, estes valores são os pontos de interseção do gráfico de y = f(x) com o eixo das abscissas.



Resolução de Equações Não lineares
Introdução

- Se y = f(x) é um polinômio quadrático, cúbico ou biquadrado, então os seus zeros podem ser determinados por meio de processos algébricos.

- Para polinômios de grau superior, estes processos não existem, é necessário, então, utilizar **métodos numéricos**.

- Quando y = f(x) é uma função transcendente, para as quais não existe método geral para obter os seus zeros, também é necessária a utilização de **métodos numéricos**.

Resolução de Equações Não lineares
Introdução

- Os **métodos numéricos** utilizados são iterativos, portanto, por meio deles é possível obter uma solução, normalmente, aproximada.

- Faz-se necessário, então definir o que é uma solução (raiz) aproximada.

Resolução de Equações Não lineares
Introdução

Raiz aproximada

Sendo ε uma precisão desejada, diz-se que um ponto x_k é uma aproximação para uma raiz ξ, de uma equação $f(x) = 0$, se satisfizer as condições:

(i) $|f(x_k)| < \varepsilon$

(ii) $|x_k - \xi| < \varepsilon$

Conforme mostrado a seguir, estas duas condições não são equivalentes.

Resolução de Equações Não lineares
Introdução

- Caso 1

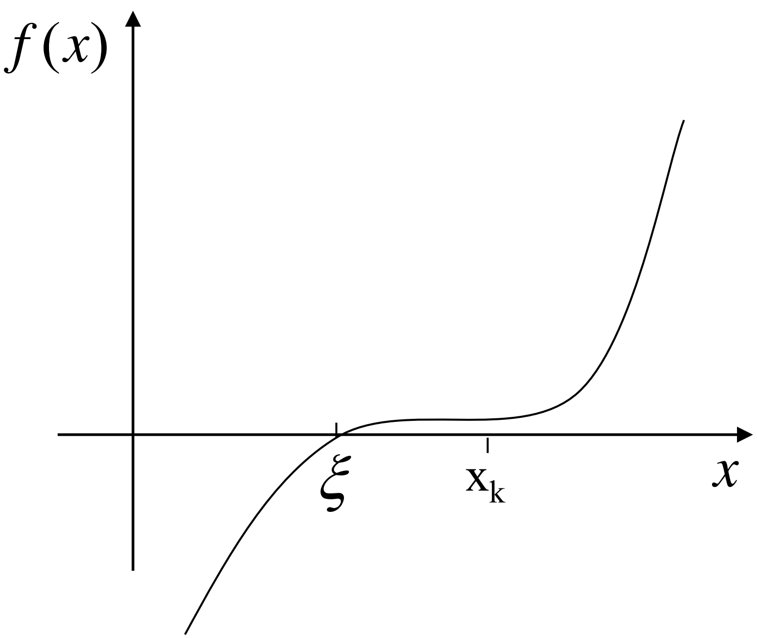
  $f(x_k) < \varepsilon$

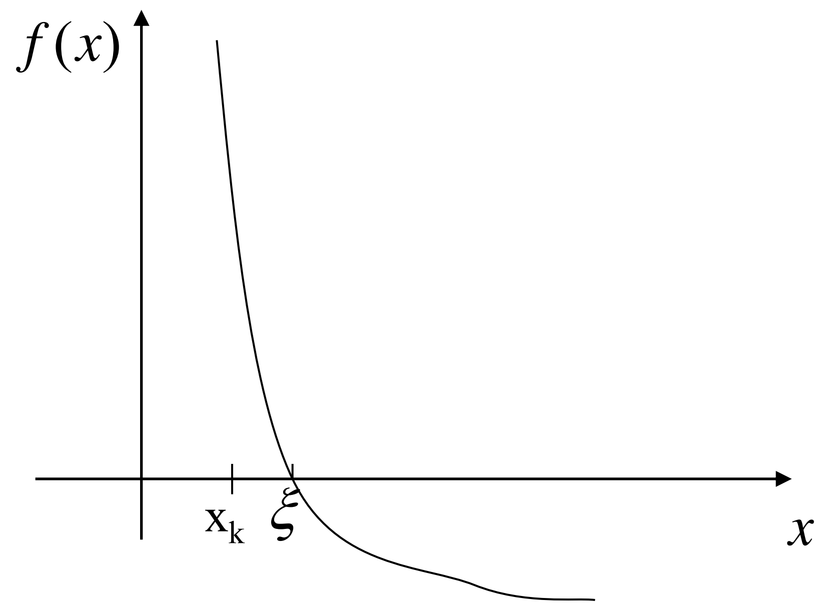
  $|x_k - \xi| >> \varepsilon$

  Caso 2

  $|x_k - \xi| < \varepsilon$

  $f(x_k) >> \varepsilon$





Resolução de Equações Não lineares
Introdução

- **Raiz múltipla**

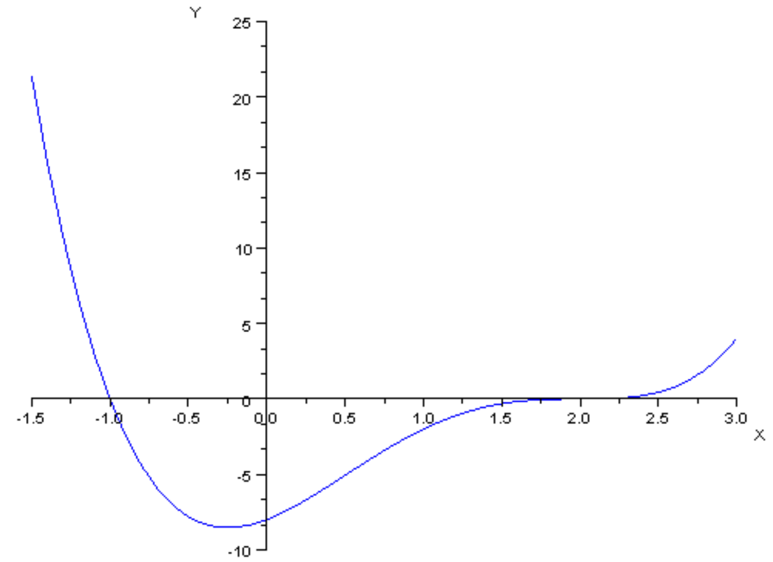
Uma raiz, ξ, de uma equação $f(x) = 0$, tem multiplicidade m se:

$$f(\xi) = f'(\xi) = f''(\xi) = \ldots = f^{m-1}(\xi) = 0 \text{ e } f^{m}(\xi) \neq 0$$

Onde $f^{j}(\xi)$, $j = 1, 2, \ldots, m$; é a derivada de ordem j da função $y = f(x)$ calculada no ponto ξ.

Exemplo

$f(x) = x^4 - 5.x^3 + 6.x^2 + 4.x - 8 = 0,$



$f(2) = 0$

$f'(x) = 4.x^3 - 15.x^2 + 12.x + 4 \Rightarrow f'(2) = 0$

$f''(x) = 12.x^2 - 30.x + 12 \Rightarrow f''(2) = 0$

$f'''(x) = 24.x - 30 \Rightarrow f'''(2) \neq 0$

Portanto, $\xi = 2$ é uma raiz com multiplicidade 3.

Resolução de Equações Não lineares
Introdução

Fases na determinação de raízes

- **Fase 1:** Isolamento das raízes

É feita a delimitação, a enumeração e a separação das raízes com o objetivo de determinar intervalos que contenham, cada um, uma única raiz.

- **Fase 2:** Refinamento

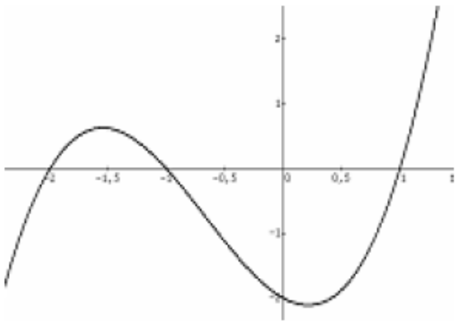
São utilizados métodos numéricos, com precisão pré-fixada, para calcular cada raiz. Todos eles pertencem à classe dos métodos iterativos.

Resolução de Equações Não lineares
Fase 1 – Isolamento das raízes

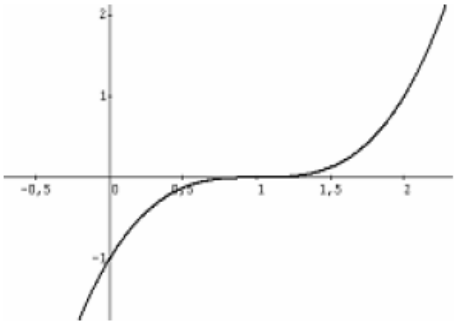
• **Teorema (Cauchy-Bolzano)**

Seja $y = f(x)$ uma função contínua em um intervalo $[a, b]$.

(i) Se $f(a) \times f(b) < 0$, então a equação $f(x) = 0$ tem um número ímpar de raízes no intervalo $[a, b]$. Além disso, se $f'(x)$ preservar o sinal em $[a, b]$ então a raiz é única.



Número ímpar de raízes



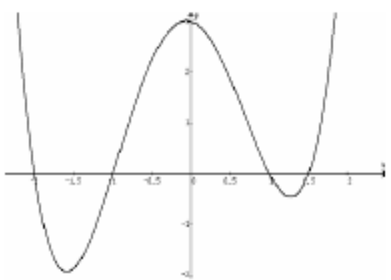
Raiz com multiplicidade ímpar

Resolução de Equações Não lineares
Fase 1 – Isolamento das raízes

•**Teorema (Cauchy-Bolzano)**

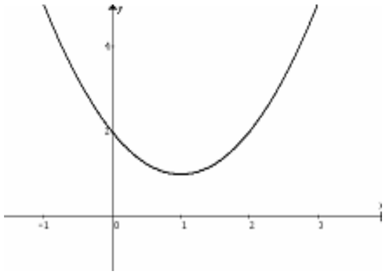
Seja y = f(x) uma função contínua em um intervalo [a, b].

(ii) Se $f(a) \times f(b) > 0$, então a equação $f(x) = 0$ tem um número par de raízes ou nenhuma raiz no intervalo [a, b].



Número par de raízes

Raiz com multiplicidade par



Não há raiz

Resolução de Equações Não lineares
Fase 1 – Isolamento das raízes

Formas de isolar as raízes

•**Tabelar a função** que dá origem à equação e analisar as mudanças de sinal.

tabela de pontos $[x_i, f(x_i)]$, $i = 1, 2, ..., n$.

Exemplo

Isole as raízes positivas da equação

$$f(x) = x^5 - 6.x^4 - 14.x^3 + 72.x^2 + 44.x - 180 = 0.$$

Sabendo-se que elas são em número de três e estão situadas no intervalo (0, 7)

Inicialmente, estabelece-se um passo h = 1 e gera-se uma tabela de pontos.

x	0	1	2	3	4	5	6	7
f(x)	-180	- 83	20	- 21	- 260	- 535	- 348	1255

Tendo em vista que $f(1) \times f(2) < 0$, $f(2) \times f(3) < 0$ e $f(6) \times f(7) < 0$ e considerando o Teorema 2.1, conclui-se que a equação dada tem uma raiz em cada um dos intervalos:

(1, 2), (2, 3) e (6, 7).

Resolução de Equações Não lineares
Fase 1 – Isolamento das raízes

Formas de isolar as raízes

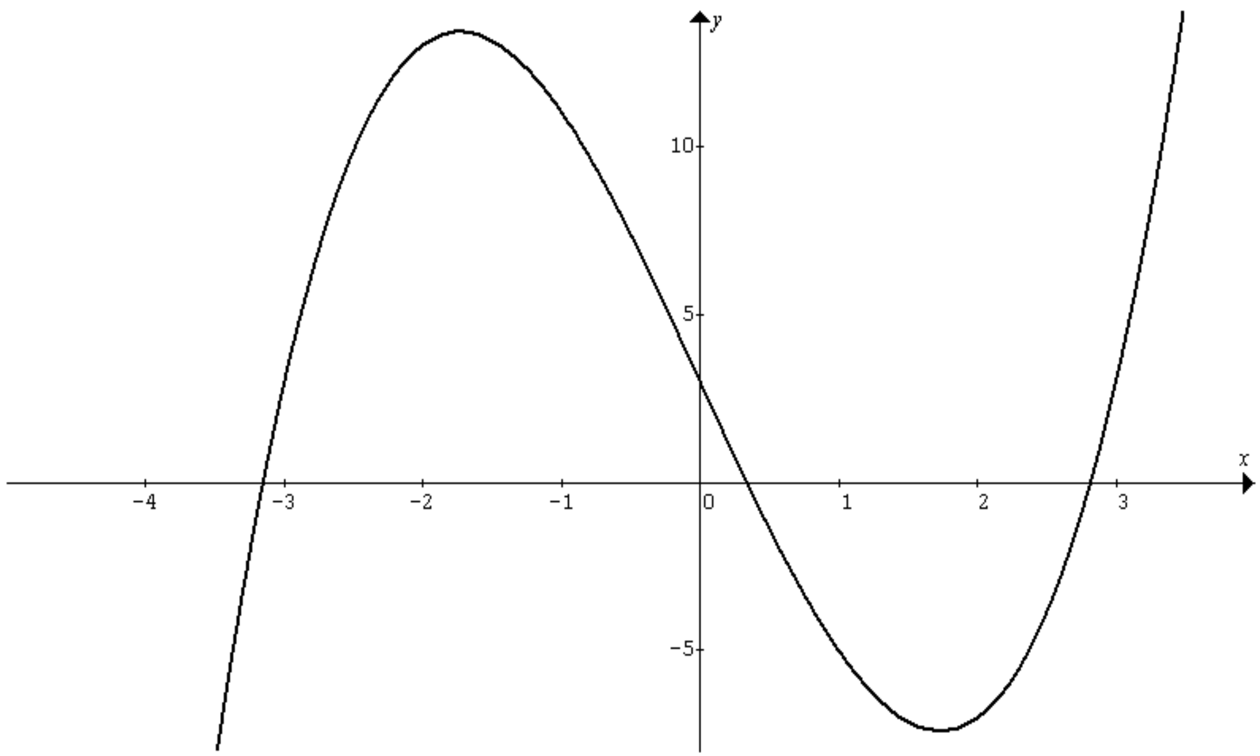
•**Análise gráfica da função**

Procedimento I: esboçar o gráfico de $y = f(x)$, com o objetivo de detectar intervalos que contenham, cada um, uma única raiz.

Procedimento II: decompor a equação $f(x) = 0$, se possível, na forma equivalente $g(x) - h(x) = 0$, onde os gráficos de $y = g(x)$ e $y = h(x)$ sejam conhecidos e mais simples. Neste caso, as abscissas dos pontos de interseção de $y = g(x)$ e $y = h(x)$ são as raízes de $f(x) = 0$.

Exemplo – Procedimento I

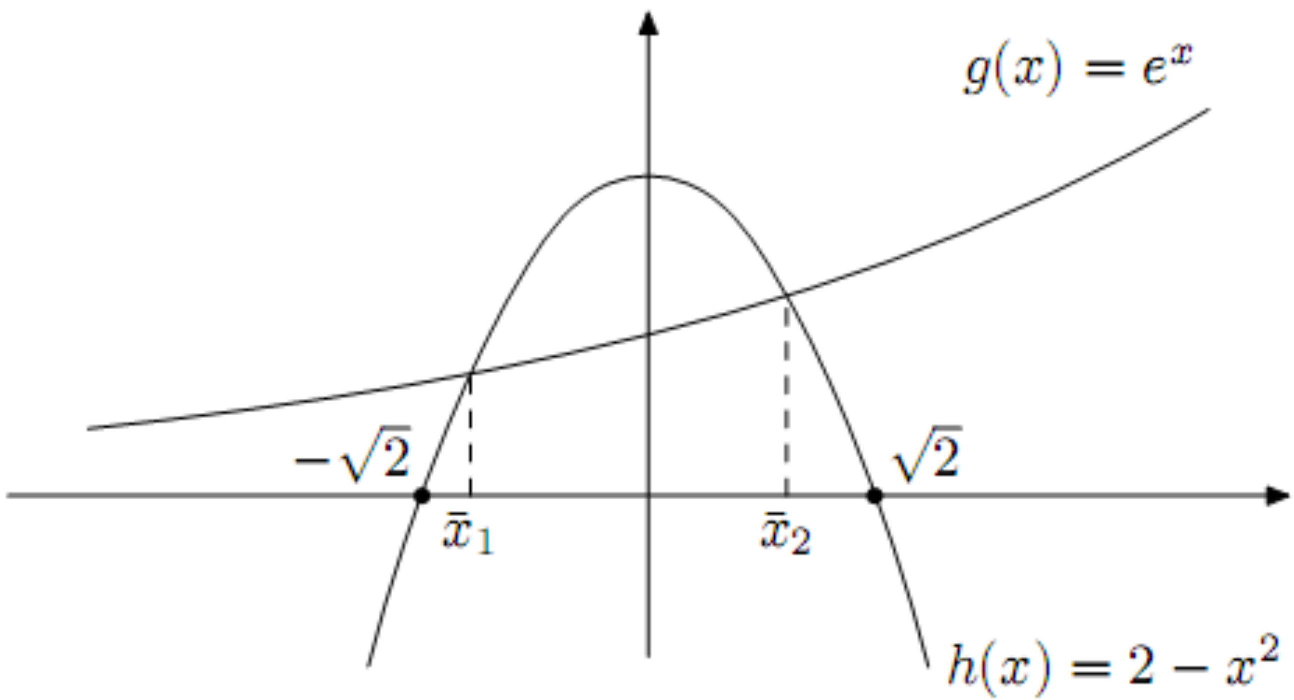
Seja a equação $f(x) = x^3 - 9.x + 3 = 0$. Conforme mostra a figura 2.3, ela tem três raízes isoladas nos intervalos (-4, -3); (0, 1) e (2,3).



Exemplo – Procedimento II

$$f(x) = e^x + x^2 - 2 = 0$$

$$g(x) = e^x \text{ e } h(x) = 2 - x^2$$



Resolução de Equações Não lineares
Fase 1 – Isolamento das raízes

Estudo especial das Equações Polinomiais

•Toda as equação da forma:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

onde $a_i \in \Re \ \forall \ i = 0, 1, \ldots, n$; é dita polinomial. Tem-se, ainda, que n é um número natural denominado grau da equação.

•Uma equação polinomial de grau n tem exatamente n raízes, reais ou complexas, contando cada raiz de acordo com a sua multiplicidade.

•Se os coeficientes de uma equação polinomial forem reais, então as suas raízes complexas ocorrerão em pares conjugados.

•Uma equação polinomial de grau ímpar, com coeficientes reais, tem, no mínimo, uma raiz real.

Resolução de Equações Não lineares
Fase 1 – Isolamento das raízes - Equações Polinomiais

Delimitação das raízes reais

•**Limite Superior das Raízes Positivas (LSRP)**

Teorema de Lagrange

Seja $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$ uma equação algébrica de grau n na qual $a_n > 0$ e $a_0 \neq 0$. Para limite superior das suas raízes positivas, caso existam, pode ser tomado o número:

$$L = 1 + \sqrt[(n-k)]{\frac{M}{a_n}}$$

Onde k é o grau do primeiro termo negativo e M o módulo do menor coeficiente negativo. (n-k) é o grau da raíz.

Exemplo

Determine o limite superior das raízes positivas da equação

$$f(x) = x^5 - 2x^4 - 7x^3 + 9x^2 + 8x - 6 = 0.$$

Solução

Tem-se que k = 4, M = 7. Sendo assim **L = 8**

$$L = 1 + \sqrt[n-k]{\frac{M}{a_n}}$$

Resolução de Equações Não lineares
Fase 1 – Isolamento das raízes - Equações Polinomiais

Delimitação das raízes reais

- **Limite Inferior das Raízes Negativas (LIRN)**

(i) Toma-se a equação auxiliar $f_1(x) = f(-x) = 0$.

(ii) Aplica-se o teorema de Lagrange em $f_1(x) = 0$ para determinar L_1, que é o limite superior das suas raízes positivas.

(iii) Sendo assim, $(-L_1)$ é o limite inferior das raízes negativas de $f(x) = 0$.

Exemplo

$$f(x) = x^5 - 2x^4 - 7x^3 + 9x^2 + 8x - 6 = 0.$$

$$f_1(x) = f(-x) = (-x)^5 - 2(-x)^4 - 7(-x)^3 + 9(-x)^2 + 8(-x) - 6 = 0$$

$$f_1(x) = -x^5 - 2x^4 + 7x^3 + 9x^2 - 8x - 6 = 0.$$

De acordo com o teorema de Lagrange a_5 deve ser maior que zero.

$$f_1(x) = x^5 + 2x^4 - 7x^3 - 9x^2 + 8x + 6 = 0.$$

Tem-se, então, que $k = 3$, $M = 9$. Assim, $L_1 = 4 \Rightarrow$ $\mathbf{-L_1 = -4}$

Resolução de Equações Não lineares
Fase 1 – Isolamento das raízes - Equações Polinomiais

Enumeração das raízes reais

- **Regra de Sinais de Descartes**

O número de raízes positivas de uma equação polinomial é igual ao número de variações de sinal na sequência dos seus coeficientes ou é menor por um inteiro par.

Para obter o número de raízes negativas, basta trocar x por $-x$ e determinar o número de raízes positivas de $f(-x) = 0$, o qual será o número de raízes negativas de $f(x) = 0$.

Exemplo

$$f(x) = x^5 - 2x^4 - 7x^3 + 9x^2 + 8x - 6 = 0.$$

→ Raízes positivas: + 1, - 2, - 7, + 9, + 8, - 6 $\Rightarrow$ **3 ou 1**

→ Raízes negativas

Tomando $f_1(x) = - x^5 - 2x^4 + 7x^3 + 9x^2 - 8x - 6 = 0$ do exemplo 4.3 tem-se que a seqüência dos coeficientes é - 1, - 2, + 7, + 9, - 8, - 6. Portanto a equação tem **2 ou nenhuma raiz negativa**

Resolução de Equações Não lineares
Fase 1 – Isolamento das raízes - Equações Polinomiais

Enumeração das raízes reais

- **Sequência de Sturm - Definição**

Chama-se sequência de Sturm de uma equação polinomial $f(x) = 0$, de grau n, o conjunto de polinômios $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, ..., $f_k(x)$; $k \leq n$.

O primeiro termo é o polinômio que origina a equação, o segundo é a sua primeira derivada, ou seja, $f_1(x) = f'(x)$ e, de $f_2(x)$ em diante, cada termo é o resto, com o sinal trocado, da divisão dos dois termos anteriores. A sequência se encerra quando se obtém um resto constante.

Resolução de Equações Não lineares
Fase 1 – Isolamento das raízes - Equações Polinomiais

Enumeração das raízes reais

• **Sequência de Sturm – Propriedades**

(i) Se $f(x) = 0$ tem raízes múltiplas, então o último termo da sequência é uma constante nula.

(ii) Para nenhum valor de x dois termos consecutivos da sequência podem se anular.

(iii) Se, para algum valor de x, um termo médio da sequência se anula, então os termos vizinhos terão valores numéricos de sinais opostos.

Resolução de Equações Não lineares
Fase 1 – Isolamento das raízes - Equações Polinomiais

Enumeração das raízes reais

- **Teorema de Sturm**

Seja $N(\alpha)$ o número de variações de sinal apresentado pela sequência de Sturm quando cada um dos seus termos é avaliado em $x = \alpha$.

O número de raízes reais de uma equação polinomial, que não possua raízes múltiplas, em um intervalo (a, b), é igual a $N(a) - N(b)$.

Exemplo 1

$$f(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^3 - 3x + 1$$

$$f_1(x) = 3x^2 - 3$$

$$f_2(x) = 2x - 1$$

$$f_3(x) = \frac{9}{4}$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 0x^2 - 3x + 1 & 3x^2 + 0x - 3 \\ \cline{2-2} -x^3 + 0x^2 + x & \frac{1}{3}x \\ \cline{1-1} -2x + 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 3x^2 + 0x - 3 & 2x - 1 \\ \cline{2-2} -3x^2 + \frac{3}{2}x - 3 & \frac{3}{2}x + \frac{3}{4} \\ \cline{1-1} \frac{3}{2}x - 3 & \\ -\frac{3}{2}x + \frac{3}{4} & \\ \cline{1-1} -\frac{9}{4} & \end{array}$$

Exemplo 1

$$f(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^3 - 3x + 1$$

$$f_1(x) = 3x^2 - 3$$

$$f_2(x) = 2$$

$$f_3(x) = \frac{9}{4}$$

x	f_0	f_1	f_2	f_3
-2	$-$	$+$	$-$	$+$
-1	$+$	0	$-$	$+$
0	$+$	$-$	$-$	$+$
1	$-$	0	$+$	$+$
2	$+$	$+$	$+$	$+$

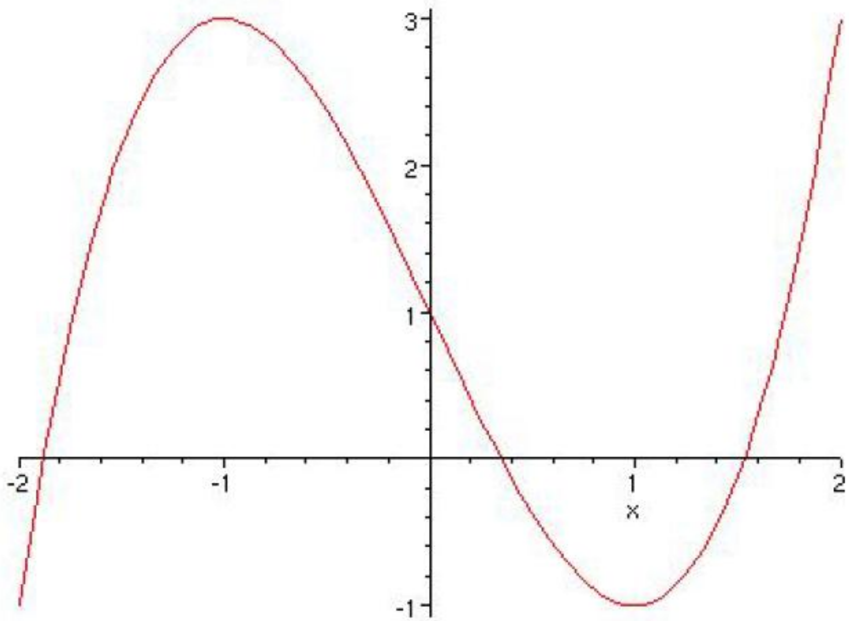


Figura 1: Gráfico de $f(x) = x^3 - 3x + 1$ no intervalo $(-2, 2)$.

Resolução de Equações Não lineares
Fase 2 – Refinamento

• **Método da Bisseção**

Seja $y = f(x)$ uma função contínua em um intervalo $[a,b]$ que contém uma, e só uma, raiz, ξ, da equação $f(x) = 0$.

A ideia básica do Método da Bisseção é reduzir o intervalo $[a, b]$ dividindo-o, de forma sucessiva, ao meio.

As iterações são realizadas da forma mostrada a seguir

Resolução de Equações Não lineares
Fase 2 – Refinamento – Método da Bisseção

1) $x_1 = \dfrac{a+b}{2} \quad \Rightarrow Se\ f(a).f(x_1) < 0 \quad \text{então} \begin{cases} \xi \in (a, x_1) \\ a_1 = a \\ b_1 = x_1 \end{cases}$

2) $x_1 = \dfrac{a+b}{2} \Rightarrow Se\ \ f(a_1).f(x_1) > 0 \quad \text{então} \begin{cases} \xi \in (x_1, b) \\ a_1 = x_1 \\ b_1 = b \end{cases}$

3) $x_1 = \dfrac{a+b}{2} \Rightarrow Se\ \ f(x_1) = 0 \quad \text{então} \ \ \xi = x_1$

4) O processo continua até que $(b_k - a_k) \leq \varepsilon$ e, então, ξ é $\forall\ x \in [a_k, b_k]$.

Resolução de Equações Não lineares
Fase 2 – Refinamento – Método da Bisseção

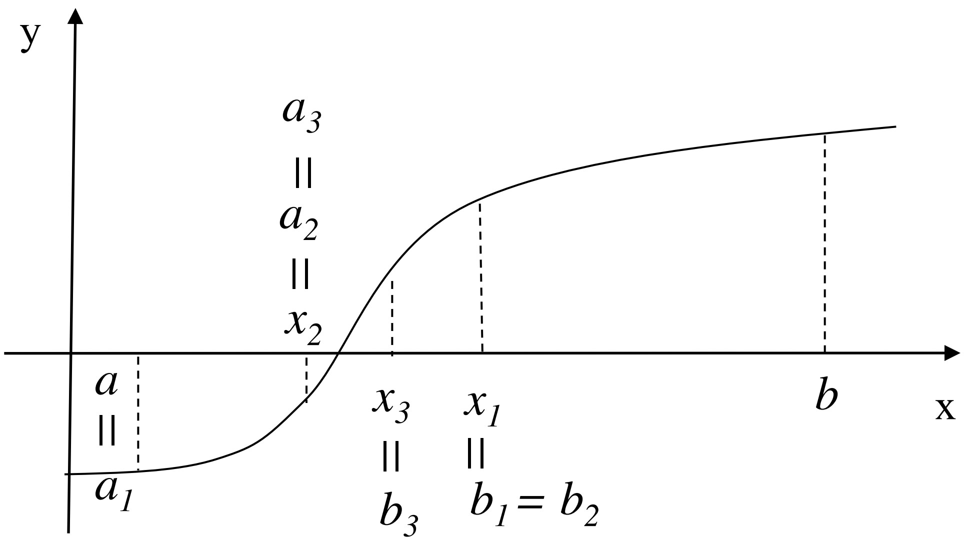
$$1)\ \ x_1 = \frac{a+b}{2} \Rightarrow \text{Se} \begin{cases} f(a) < 0 \\ f(b) > 0 \\ f(x_1) > 0 \end{cases} \text{então} \begin{cases} \xi \in (a, x_1) \\ a_1 = a \\ b_1 = x_1 \end{cases}$$

$$2)\ \ x_2 = \frac{a_1+b_1}{2} \Rightarrow \text{Se} \begin{cases} f(a_1) < 0 \\ f(b_1) > 0 \\ f(x_2) < 0 \end{cases} \text{então} \begin{cases} \xi \in (x_2, b_1) \\ a_2 = x_2 \\ b_2 = b_1 \end{cases}$$

3) O processo continua até que $(b_k - a_k) \leq \varepsilon$ e, então, ξ é $\forall\ x \in [a_k, b_k]$.

Resolução de Equações Não lineares
Fase 2 – Refinamento – Método da Bisseção

- **Interpretação geométrica**



Resolução de Equações Não lineares
Fase 2 – Refinamento – Método da Bisseção

- **Função de iteração**

$$x_k = \frac{a_{k-1} + b_{k-1}}{2}, k = 1, 2, 3, \ldots$$

- **Critério de parada**

O processo iterativo é finalizado quando se obtém um intervalo cujo tamanho é menor ou igual a uma precisão pré-estabelecida e, então, qualquer ponto nele contido pode ser tomado como uma estimativa para a raiz; ou quando for atingido um número máximo de iterações previamente estabelecido.

- **Critério de convergência**

Se $y = f(x)$ for contínua em $[a, b]$ e $f(a).f(b) < 0$, então o método da Bisseção gera uma sequência que converge para uma raiz de $f(x) = 0$.

Resolução de Equações Não lineares
Fase 2 – Refinamento – Método da Bisseção

- **Exemplo**

Seja estimar a raiz de $f(x) = x^3 - 9x + 3 = 0$ contida no intervalo $(0, 1)$ com precisão $\varepsilon = 0{,}065$.

Solução

Tem-se. que $f(0) = 3$ e $f(1) = -5$.

Os resultados obtidos são apresentados a seguir.

Resolução de Equações Não lineares
Fase 2 – Refinamento – Método da Bisseção

- Resultados obtidos

k	a_{k-1}	b_{k-1}	$b_{k-1}- a_{k-1}$	x_k	$f(x_k)$
1	0	1	1	0.5	-1.375

Resolução de Equações Não lineares
Fase 2 – Refinamento – Método da Bisseção

- Resultados obtidos

k	a_{k-1}	b_{k-1}	b_{k-1}- a_{k-1}	x_k	$f(x_k)$
1	0	1	1	0.5	-1.375
2	0	0.5	0.5		

Resolução de Equações Não lineares
Fase 2 – Refinamento – Método da Bisseção

- Resultados obtidos

k	a_{k-1}	b_{k-1}	$b_{k-1} - a_{k-1}$	x_k	$f(x_k)$
1	0	1	1	0.5	-1.375
2	0	0.5	0.5	0.25	

Resolução de Equações Não lineares
Fase 2 – Refinamento – Método da Bisseção

- Resultados obtidos

k	a_{k-1}	b_{k-1}	$b_{k-1} - a_{k-1}$	x_k	$f(x_k)$
1	0	1	1	0.5	-1.375
2	0	0.5	0.5	0.25	0.765

Resolução de Equações Não lineares
Fase 2 – Refinamento – Método da Bisseção

- Resultados obtidos

k	a_{k-1}	b_{k-1}	$b_{k-1} - a_{k-1}$	x_k	$f(x_k)$
1	0	1	1	0.5	-1.375
2	0	0.5	0.5	0.25	0.765
3	0.25	0.5	0.25		

Resolução de Equações Não lineares
Fase 2 – Refinamento – Método da Bisseção

- Resultados obtidos

k	a_{k-1}	b_{k-1}	$b_{k-1} - a_{k-1}$	x_k	$f(x_k)$
1	0	1	1	0.5	-1.375
2	0	0.5	0.5	0.25	0.765
3	0.25	0.5	0.25	0.375	

Resolução de Equações Não lineares
Fase 2 – Refinamento – Método da Bisseção

- Resultados obtidos

k	a_{k-1}	b_{k-1}	$b_{k-1}- a_{k-1}$	x_k	$f(x_k)$
1	0	1	1	0.5	-1.375
2	0	0.5	0.5	0.25	0.765
3	0.25	0.5	0.25	0.375	-0.322

Resolução de Equações Não lineares
Fase 2 – Refinamento – Método da Bisseção

- Resultados obtidos

k	a_{k-1}	b_{k-1}	$b_{k-1} - a_{k-1}$	x_k	$f(x_k)$
1	0	1	1	0.5	-1.375
2	0	0.5	0.5	0.25	0.765
3	0.25	0.5	0.25	0.375	-0.322
4	0.25	0.375	0.125		

Resolução de Equações Não lineares
Fase 2 – Refinamento – Método da Bisseção

- Resultados obtidos

k	a_{k-1}	b_{k-1}	$b_{k-1} - a_{k-1}$	x_k	$f(x_k)$
1	0	1	1	0.5	-1.375
2	0	0.5	0.5	0.25	0.765
3	0.25	0.5	0.25	0.375	-0.322
4	0.25	0.375	0.125	0.313	

Resolução de Equações Não lineares
Fase 2 – Refinamento – Método da Bisseção

- Resultados obtidos

k	a_{k-1}	b_{k-1}	$b_{k-1}- a_{k-1}$	x_k	$f(x_k)$
1	0	1	1	0.5	-1.375
2	0	0.5	0.5	0.25	0.765
3	0.25	0.5	0.25	0.375	-0.322
4	0.25	0.375	0.125	0.313	0.213

Resolução de Equações Não lineares
Fase 2 – Refinamento – Método da Bisseção

- Resultados obtidos

k	a_{k-1}	b_{k-1}	$b_{k-1} - a_{k-1}$	x_k	$f(x_k)$
1	0	1	1	0.5	-1.375
2	0	0.5	0.5	0.25	0.765
3	0.25	0.5	0.25	0.375	-0.322
4	0.25	0.375	0.125	0.313	0.213
5	0.313	0.375	0.062	*******	*******

Note que $(b_4 - a_4) < \varepsilon$

- Portanto, para a precisão estabelecida, qualquer ponto do intervalo [**0,313; 0,375**] pode ser tomado como uma estimativa para a raiz.

Resolução de Equações Não lineares
Fase 2 – Refinamento – Método da Bisseção

• **Estimativa do numero de iterações**

Dada uma precisão ε e um intervalo inicial [a, b], estimar o número k de iterações para obter $b_k - a_k \leq \varepsilon$.

$$b_k - a_k = \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2} = \frac{b-a}{2^k} \leq \varepsilon \Rightarrow \quad 2^k \geq \frac{b-a}{\varepsilon}, k = 1, 2, \ldots$$

Utilizando logaritmo em qualquer base, tem-se que

$$\boxed{k \geq \frac{\log\ (b-a) - \log(\varepsilon)}{\log\ 2}}$$

Resolução de Equações Não lineares
Fase 2 – Refinamento – Método da Bisseção

- **Estimativa do numero de iterações – Exemplo**

Seja estimar o número de iterações necessário para calcular uma raiz de uma equação f(x) = 0, situada no intervalo (2, 3), com precisão 0,01 utilizando o método da bisseção.

$$k \geq \frac{\log(b-a) - \log(\varepsilon)}{\log(2)} = \frac{\log(3-2) - \log(0{,}01)}{\log(2)} = \frac{2}{0.301} = 6{,}6$$

Portanto $k \geq 7$

Exercício

- Isole as raízes (com tabelamento h=1), sabendo que há 2 negativas e 3 positivas em (-4,0) e (0,8)
- Calcule a menor raíz positiva com precisão 0,040 em no máximo 6 iterações.

$$f(x) = x^5 - 2x^4 -7x^3 + 9x^2 +8x - 6 = 0$$

Exercício

Raízes negativas

x	- 4	- 3	- 2	- 1	0
f(x)	- 982	- 165	6	- 1	- 6

Raízes positivas

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
f(x)	- 6	3	- 10	- 9	234	1.259	4.038	10.095	21.626

$$k \geq \frac{\log(1 - 0) - \log(0{,}040)}{\log(2)} \Rightarrow K \geq 4{,}6 \Rightarrow \mathbf{k = 5}$$

Exercícios

k	a	b	f(a)	f(b)	b - a	x_k	$f(x_k)$
01	0,000	1,000	- 6,000	3,000	1,000	0,500	- 0,719
02	0,500	1,000	- 0,719	3,000	0,500	0,750	1,714
03	0,500	0,750	- 0,719	1,714	0,250	0,625	0,597
04	0,500	0,625	- 0,719	0,597	0,125	0,563	- 0,042
05	0,563	0,625	- 0,042	0,597	0,062	0,594	0,283
06	0,563	0,594	- 0,042	0,283	0,031		

intervalo [0,563; 0,594]

Resolução de Equações Não lineares
Fase 2 – Refinamento

• **<u>Método da Falsa Posição</u>**

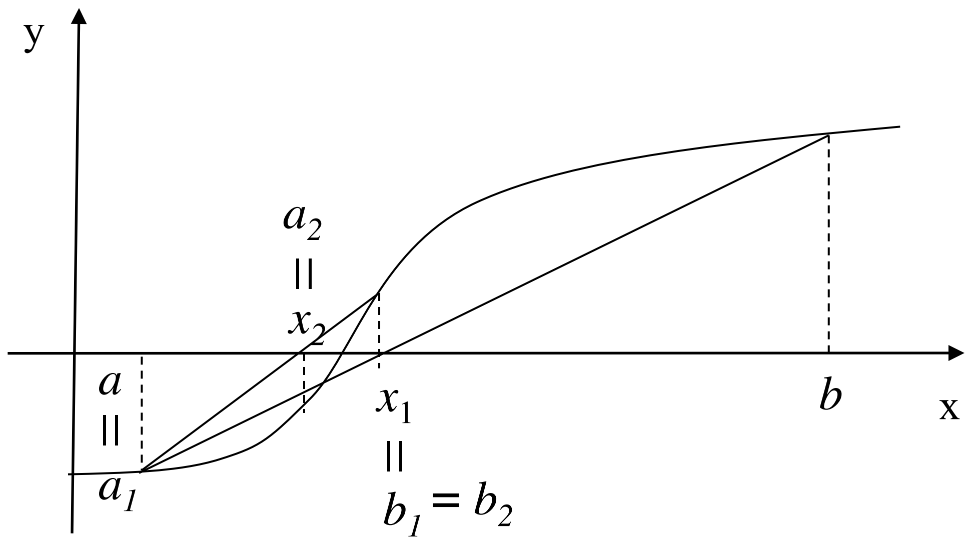
Seja y = f(x) uma função contínua em um intervalo [a,b] que contém uma, e só uma, raiz, ξ, da equação f(x) = 0.

O Método da Falsa Posição consiste em dividir, de forma sucessiva, o intervalo [a, b] no ponto em que a reta que passa por [a, f(a),] e [b, f(b)] intercepta o eixo das abscissas.

A figura a seguir ilustra o processo.

Resolução de Equações Não lineares
Fase 2 – Refinamento – Método da Falsa Posição

- Interpretação geométrica



Resolução de Equações Não lineares
Fase 2 – Refinamento – Método da Falsa Posição

$$1)\ \ Se\ f(a).f(x_1) < 0 \quad \text{então} \begin{cases} \xi \in (a, x_1) \\ a = a \\ b = x_1 \end{cases}$$

$$2)\ \ Se\ \ f(a_1).f(x_1) > 0 \quad \text{então} \begin{cases} \xi \in (x_1, b) \\ a = x_1 \\ b = b \end{cases}$$

$$3) Se\ \ f(x_1) = 0 \quad \text{então}\ \ \xi = x_1$$

4) O processo continua até precisão pré-fixada ε.

Equação da reta

$$\begin{vmatrix} x & f(x) & 1 \\ a & f(a) & 1 \\ b & f(b) & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$x.f(a) + b.f(x) + a.f(b) - b.f(a) - a.f(x) - x.f(b) = 0$$

$$x_k.f(a) + a.f(b) - b.f(a) - x_k.f(b) = 0$$

$$x_k.[- f(b) + f(a)] + a.f(b) - b.f(a) = 0$$

$$x_k = \frac{- a.f(b) + b.f(a)}{- f(b) + f(a)}$$

Resolução de Equações Não lineares
Fase 2 – Refinamento – Método da Falsa Posição

- **Função de iteração**

$$x_k = \frac{a.f(b) - b.f(a)}{f(b) - f(a)}, k = 1, 2, \ldots$$

- **Critério de parada**

O processo iterativo é finalizado quando se obtém x_k, k = 0, 1, 2, ...; tal que $|f(x_k)|$ seja menor ou igual a uma precisão pré-estabelecida e, então, x_k é tomado como uma estimativa para a raiz; ou quando for atingido um número máximo de iterações previamente estabelecido.

- **Critério de convergência**

Se y = f(x) for contínua em [a, b] e f(a).f(b) < 0, então o método da Falsa Posição gera uma sequência que converge para uma raiz de f(x) = 0.

Resolução de Equações Não lineares
Fase 2 – Refinamento – Método da Falsa Posição

- **Exemplo**

Seja estimar a raiz de $f(x) = x^3 - 9x + 3 = 0$ contida no intervalo (0, 1) com precisão $\varepsilon = 0,065$.

Solução

k	a	b	x_k	$f(x_k)$	b-a
1	0	1	0.375	-0,322	1
2	0	0.375	0.339	-0,012	0,375

Portanto, considerando a precisão estabelecida, $\mathbf{x_2 = 0,339}$ é uma estimativa para a raiz.

Exercício

Calcule uma raiz da equação $f(x) = x^4 - 14x^2 + 24x - 10 = 0$ usando o método da falsa posição com precisão 0,006 e um máximo de 5 iterações.

a) Limites das raízes reais (Teorema de Lagrange)

b) Enumeração das raízes reais

b.1) Regra dos sinais de Descartes

b.2) Teorema de Sturm – Enumeração das raízes positivas

c) Separação das raízes positivas

d) Cálculo da maior raiz positiva

x →	
$f(x) = x^4 - 14x^2 + 24x - 10$	
$f_1(x) = 4x^3 - 28x + 24$	
$f_2(x) = 7x^2 - 18x + 10$	
$f_3(x) = 7{,}2x - 9{,}3$	
$f_4(x) = 1{,}5$	
$N(x)$ →	

Exercício

Calcule uma raiz da equação $f(x) = x^4 - 14x^2 + 24x - 10 = 0$ usando o método da falsa posição com precisão 0,006 e um máximo de 5 iterações.

a) Limites das raízes reais (Teorema de Lagrange)

a.1) Limite superior positivo → $k = 2$, $M = 14$ → $L = 4{,}7 \Rightarrow L = 5$

a.2) Limite inferior negativo → $k = 2$, $M = 24$ → $L_1 = 5{,}9 \Rightarrow -L_1 = -6$

Exercício

Calcule uma raiz da equação $f(x) = x^4 - 14x^2 + 24x - 10 = 0$ usando o método da falsa posição com precisão 0,006 e um máximo de 5 iterações.

b) Enumeração das raízes reais

b.1) Regra dos sinais de Descartes

→ Raízes positivas: + 1, - 14, + 24, - 10 $\Rightarrow$ **3 ou 1**

→ Raízes negativas: + 1, - 14, - 24, - 10 $\Rightarrow$ **1 raiz**

Exercício

Calcule uma raiz da equação $f(x) = x^4 - 14x^2 + 24x - 10 = 0$ usando o método da falsa posição com precisão 0,006 e um máximo de 5 iterações.

b.2) Teorema de Sturm – Enumeração das raízes positivas

x →	0	5
$f(x) = x^4 - 14x^2 + 24x - 10$	-	+
$f_1(x) = 4x^3 - 28x + 24$	+	+
$f_2(x) = 7x^2 - 18x + 10$	+	+
$f_3(x) = 7,2x - 9,3$	-	+
$f_4(x) = 1,5$	+	+
N(x) →	**3**	**0**

Número de raízes positivas → N(0) – N(5) = 3 – 0 = **3**

Exercício

Calcule uma raiz da equação $f(x) = x^4 - 14x^2 + 24x - 10 = 0$ usando o método da falsa posição com precisão 0,006 e um máximo de 5 iterações.

c) Separação das raízes positivas

x	f(x)
0	- 10
1	1
2	- 2
3	17

Há uma raiz em cada um dos seguintes intervalos:

(0; 1); (1; 2) e (2; 3)

Exercício

Calcule uma raiz da equação $f(x) = x^4 - 14x^2 + 24x - 10 = 0$ usando o método da falsa posição com precisão 0,006 e um máximo de 5 iterações.

d) Cálculo da maior raiz positiva

Fazendo uma bisseção no intervalo (2, 3), tem-se que f(2,5) = 1,563. Portanto, a raiz está no intervalo (2; 2,5).

k	a	b	f(a)	f(b)	x_k	$f(x_k)$
01	2	2,5	- 2	1,563	2,281	- 1,029
02	2,281	2,5	- 1,029	1,563	2,368	- 0,231
03	2,368	2,5	- 0,231	1,563	2,385	- 0,041
04	2,385	2,5	- 0,041	1,563	2,388	- 0,005

Para a precisão estabelecida, $x_4 = 2{,}388$ é uma estimativa para a maior raiz positiva da equação.

Obs: verifica-se que o tamanho do último intervalo, (2,388; 2,5); é 0,112.

Resolução de Equações Não lineares
Fase 2 – Refinamento

<u>Método de Newton-Raphson</u>

•Seja $y = f(x)$ uma função contínua em um intervalo $[a, b]$ que contém uma, e só uma, raiz da equação $f(x) = 0$ e que, nele, $f'(x)$ e $f''(x)$ preservam o sinal e não se anulam.

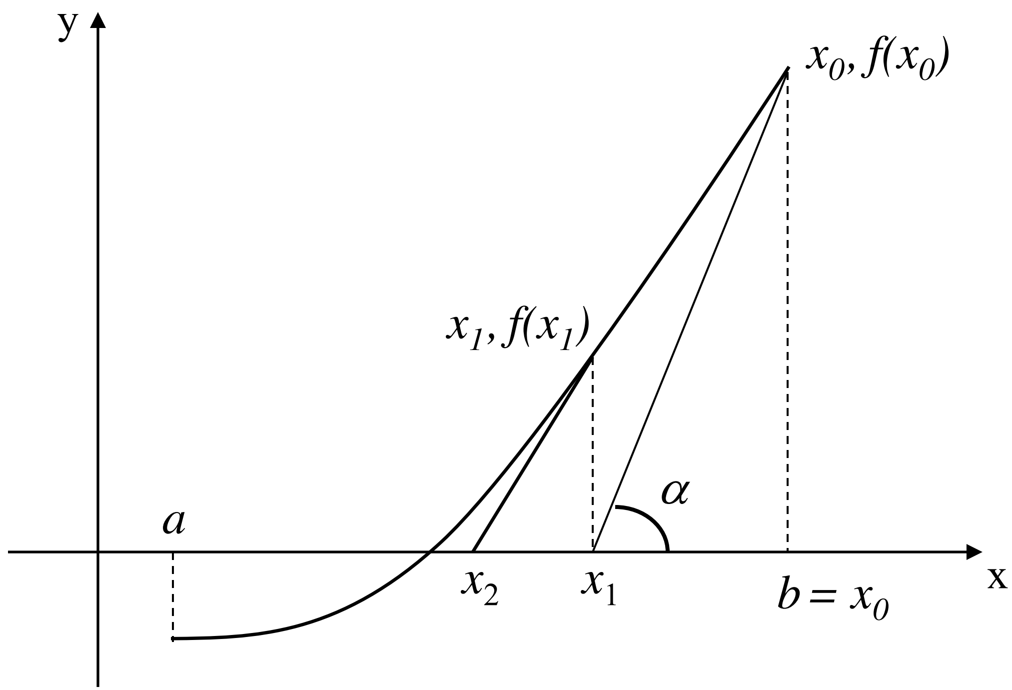
O Método de Newton-Raphson consiste em:

•atribuir uma estimativa inicial $x_0 \in [a, b]$ para uma raiz de $f(x) = 0$;

•gerar uma sequência de estimativas, $\{x_k\}$, $k = 1, 2, 3,\ldots$; onde cada ponto é a interseção da reta tangente a $y = f(x)$, em $[x_{k-1}, f(x_{k-1})]$, com o eixo das abscissas.

Resolução de Equações Não lineares
Fase 2 – Refinamento – Método de Newton-Raphson

- Interpretação geométrica



Resolução de Equações Não lineares
Fase 2 – Refinamento – Método de Newton-Raphson

- **Função de iteração**

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}, \; k = 1, 2, \ldots$$

- **Critério de parada**

O processo iterativo é finalizado quando é obtido x_k, k = 1, 2, ...; tal que $|x_k - x_{k-1}|$ ou $|f(x_k)|$ é menor ou igual a uma precisão estabelecida e, então, x_k é tomado como uma estimativa para a raiz; ou quando for atingido um número máximo de iterações estabelecido.

Resolução de Equações Não lineares
Fase 2 – Refinamento – Método de Newton-Raphson

• **Critério de convergência (condições suficientes)**

Seja [a, b] um intervalo que contém uma, e somente uma, raiz da equação $f(x) = 0$. A sequência x_k, $k = 1, 2, \ldots$; gerada pelo método de Newton-Raphson será convergente se:

(i) $f'(x)$ e $f''(x)$ não se anulam e preservam o sinal no intervalo [a, b]

(ii) o valor inicial $x_0 \in [a, b]$ for tal que $f(x_0) \times f''(x_0) > 0$.

Em geral, afirma-se que o método gera uma sequência convergente desde que x_0 seja escolhido "suficientemente próximo" da raiz.

Exercício

$S(t) = 69{,}2 - 19{,}6t - 39{,}2e^{-0{,}5.t} = 0$

$S(3) = 1{,}653$ e $S(4) = -14{,}505$.

$S'(t) = 19{,}6.(e^{-0{,}5.t} - 1) < 0 \ \forall\ t \in [3, 4]$

$S''(t) = -9{,}8.e^{-0{,}5.t} < 0 \ \forall\ t \in \Re$

k	t_k	$S(t_k)$	$S'(t_k)$	$\lvert t_k - t_{k-1} \rvert$
0	4,000	- 14,505	- 16,947	--------

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad ; k = 0, 1, 2, 3, ...$$

Exercício

k	t_k	$S(t_k)$	$S'(t_k)$	$\| t_k - t_{k-1} \|$
0	4,000	- 14,505	- 16,947	---------
1	3,144	- 0,561	- 15,530	0,856
2	3,108	- 0,004	- 15,457	0,036
3	3,108			0,000

$t \cong 3{,}108s$

Resolução de Equações Não lineares

Considerações finais

•Os três métodos podem ser comparados quanto à **existência e velocidade de convergência** e também quanto ao **esforço computacional**, de modo a facilitar a escolha do mais adequado para cada situação.

Resolução de Equações Não lineares
Considerações finais

•O método mais **simples (exige pouco esforço computacional)** e **robusto** é o da bisseção, que apresenta como grande vantagem o fato de **sempre gerar uma sequência convergente**.

•É contudo um método de **baixa velocidade de convergência**, apresentando como curiosidade o fato de gerar uma sequência que converge para a raiz sempre com a mesma velocidade.

•Pela sua robustez, é bom como **método preliminar** para a obtenção de um intervalo de pequeno tamanho, dentro do qual se encontra uma raiz da equação.

Resolução de Equações Não lineares
Considerações finais

•O método da falsa posição também é uma técnica robusta que apresenta a vantagem de **gerar uma sequência que sempre converge e, além disto, mais rapidamente** do que o método da bisseção.

•Entretanto, quando a **convergência para a raiz só se faz a partir de um dos extremos do intervalo**, esta se torna lenta, podendo igualar-se à do método da bisseção.

•O método de Newton-Raphson é sem dúvida o método que **proporciona a maior velocidade convergência**. Apresenta, entretanto, algumas desvantagens.

Resolução de Equações Não lineares
Considerações finais

•As **condições de convergência** são mais restritivas.

•Obriga o cálculo, em cada iteração, do **valor numérico da função e da sua primeira derivada**.

•Se a derivada tiver uma forma analítica complicada, a sua avaliação pode **exigir muito esforço computacional**.

•Se o **valor da primeira derivada for grande**, a convergência será lenta.

•Para os casos em que a utilização do método de Newton-Raphson se mostrar inviável, pode-se **recorrer ao método da Falsa Posição**.

Cálculo Numérico

Final do curso.

Muito obrigado!

Exemplo 2

Enumere as raízes reais da equação $f(x) = x^5 - 2x^4 - 7x^3 + 9x^2 + 8x - 6 = 0$ utilizando a regra dos sinais de Sturm e sabendo-se que estão nos intervalos (-4, 0) e (0, 8).

x →	- 4	0	8
$f(x) = x^5 - 2x^4 - 7x^3 + 9x^2 + 8x - 6$	-	-	+
$f_1(x) = 5x^4 - 8x^3 - 21x^2 + 18x + 8$	+	+	+
$f_2(x) = 3{,}4x^3 - 3{,}7x^2 - 7{,}8x + 5{,}4$	-	+	+
$f_3(x) = 12{,}4x^2 - 4{,}3x - 12$	+	-	+
$f_4(x) = 5{,}4x - 2{,}9$	-	-	+
$f_5(x) = 10{,}7$	+	+	+
N(x) →	**5**	**3**	**0**

Número de raízes negativas → N(- 4) – N(0) = 5 - 3 = **2**

Número de raízes positivas → N(0) – N(8) = 3 – 0 = **3**