Cálculo Numérico – BCC760

Resolução de Sistemas de Equações Lineares Simultâneas

Departamento de Computação

Página da disciplina

http://www.decom.ufop.br/bcc760/

Resolução de Sistemas de Equações Lineares Simultâneas
Introdução

- **Definição**

Uma equação é dita linear quando cada um dos seus termos contém apenas uma variável e ela está na primeira potência.

Por exemplo:

$3x + 2y - 5z = 10 \rightarrow$ é linear

$3.x.y - 5z = 10 \rightarrow$ não é linear, o primeiro termo contém duas variáveis.

- Um sistema de equações lineares é um conjunto de equações lineares.

Resolução de Sistemas de Equações Lineares Simultâneas
Introdução

- **Notação clássica**

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Onde:

x_i, i = 1, 2, ..., n; são as incógnitas
a_{ij}, i, j = 1, 2, ..., n; são os coeficientes das incógnitas
b_i, i = 1, 2, ..., n; são os termos independentes

Resolução de Sistemas de Equações Lineares Simultâneas
Introdução

➢ **Notação matricial: A.X = B**

Onde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Resolução de Sistemas de Equações Lineares Simultâneas
Introdução

➢ **Matriz aumentada [A | B]**

Para obtê-la basta acrescentar à matriz dos coeficientes o vetor B dos termos independentes.

$$[\mathbf{A} \mid b] = \left[\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right]$$

Resolução de Sistemas de Equações Lineares Simultâneas
Introdução

- **Definição**

Uma solução de um sistema de equações lineares, A.X = B, é um vetor X que satisfaz, simultaneamente, a todas as equações.

- A classificação de um sistema linear é feita em função do número de soluções que ele admite, da seguinte maneira:

a) Compatível determinado: quando admitir uma única solução.

b) Compatível indeterminado: quando admitir um número infinito de soluções.

c) Incompatível: quando não admitir solução.

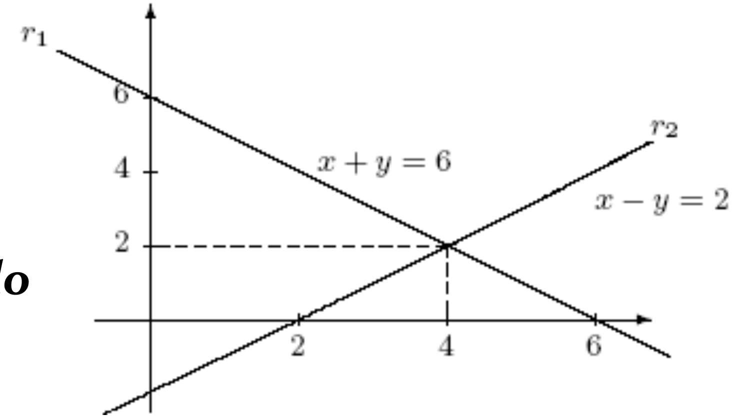
Portanto, resolver um sistema de equações lineares significa discutir a existência de soluções e obter uma solução quando for possível.

Resolução de Sistemas de Equações Lineares Simultâneas
Introdução

Exemplo – Seja classificar os sistemas de equações lineares a seguir.

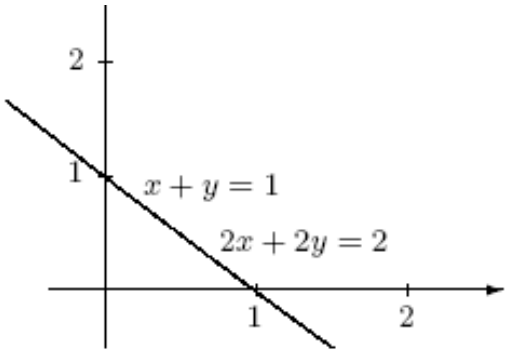
$$(I)\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Sistema compatível determinado



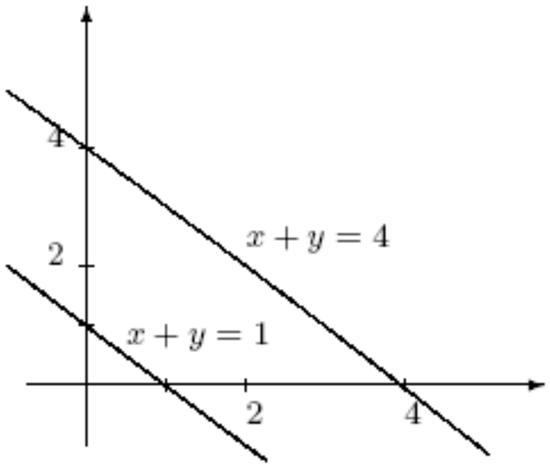
$$(II)\begin{cases} x + y = 1 \\ 2\,x + 2\,y = 2 \end{cases}$$

Sistema compatível indeterminado



Resolução de Sistemas de Equações Lineares Simultâneas
Introdução

$$(III)\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 4 \end{cases}$$



Sistema incompatível

Observe-se que um sistema de equações lineares terá solução única somente se a matriz dos coeficientes for não singular, isto é, $\mathbf{det(A) \neq 0}$.
Caso contrário, será indeterminado ou não terá solução.

Resolução de Sistemas de Equações Lineares Simultâneas
Métodos Numéricos de Resolução

Métodos Diretos

Resolução de Sistemas de Equações Lineares Simultâneas
Métodos Numéricos de Resolução

- **Métodos Diretos**

Os Métodos Diretos são aqueles que, exceto por erros de arredondamento, fornecem a solução exata de um sistema de equações lineares, caso ela exista,

por meio de um número finito de operações aritméticas.

- **Transformações elementares linha**

(i) Multiplicação de uma linha por uma constante não-nula.

$$L_i \leftarrow c \times L_i,\ c \in \Re,\ c \neq 0,\ i = 1, 2, \ldots, n$$

(ii) Troca de posição entre duas linhas.

$$L_i \leftrightarrows L_j;\ i, j = 1, 2, \ldots, n;\ i \neq j$$

(iii) Adição de um múltiplo de uma linha a outra linha,

$$L_i \leftarrow L_i + c \times L_j,\ c \in \Re,\ c \neq 0;\ i, j = 1, 2, \ldots, n;\ i \neq j$$

Resolução de Sistemas de Equações Lineares Simultâneas
Métodos Numéricos de Resolução – Métodos Diretos

- **Matrizes equivalentes**

Duas matrizes são ditas equivalentes quando é possível, a partir de uma delas, chegar à outra por meio de um número finito de transformações elementares.

- **Sistemas de equações equivalentes**

Sistemas de equações equivalentes são aqueles que possuem a mesma solução.

Resolução de Sistemas de Equações Lineares Simultâneas
Métodos Numéricos de Resolução – Métodos Diretos

➢ **Teorema**

Seja [A | B] a matriz aumentada de um sistema de equações A.X = B, com determinante de A não nulo, e [T | C] uma matriz a ela equivalente. Sendo assim, os sistemas A.X = B e T.X = C possuem a mesma solução.

Resolução de Sistemas de Equações Lineares Simultâneas
Métodos Numéricos de Resolução – Métodos Diretos

- **Matriz Triangular**

(i) Inferior: é uma matriz quadrada na qual todos os elementos acima da diagonal principal são nulos.

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{1n} & l_{21} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}$$

(ii) Superior: é uma matriz quadrada na qual todos os elementos abaixo da diagonal principal são

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

Resolução de Sistemas de Equações Lineares Simultâneas
Métodos Numéricos de Resolução – Métodos Diretos

➢ **Sistema de Equações Triangular**

É um sistema de equações lineares no qual a matriz dos coeficientes é triangular.

➢ **Exemplo**

Seja o sistema de equações

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 2 \\ \phantom{2x_1 + {}} 5x_2 - 2x_3 = 1 \\ \phantom{2x_1 + 4x_2 - {}} 2x_3 = 4 \end{cases}$$

Note-se que é triangular superior. Pode, portanto, ser resolvido por meio de substituições retroativas.

Verifica-se, facilmente, que a sua solução é: **X = [- 5 1 2]^t**

Resolução de Sistemas de Equações Lineares Simultâneas
Métodos Numéricos de Resolução – Métodos Diretos

➢**Método da Eliminação de Gauss**

A resolução de um sistema de equações lineares por este método envolve duas fases distintas.

Fase I: eliminação

Consiste em efetuar transformações elementares sobre as linhas da matriz aumentada de um sistema de equações A.X = B até que, depois de $(n - 1)$ passos, se obtenha um sistema de equações triangular superior, U.X = C, equivalente ao sistema dado.

$$\underbrace{\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right]}_{[A|B]} \xrightarrow{\text{Transf. Elemen.}} \underbrace{\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{1} & \cdots & a_{2n}^{1} & b_2^{1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{n-1} & b_n^{n-1} \end{array}\right]}_{[U|C]}$$

Resolução de Sistemas de Equações Lineares Simultâneas
Métodos Diretos – Eliminação de Gauss

Fase II: substituição
Consiste em resolver o sistema triangular superior por meio de substituições retroativas.

➢**Exemplo 1**
Para a descrição do método, seja resolver o sistema de equações lineares a seguir.

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 2x_2 \phantom{{}- 3x_3} + x_4 &= 3 \\
9x_1 + 8x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 6 \\
-6x_1 + 4x_2 - 8x_3 \phantom{{}+ 4x_4} &= -16 \\
3x_1 - 8x_2 + 3x_3 - 8x_4 &= 22
\end{aligned}
$$

Matriz aumentada

$$
[A\,|\,b] = \left[\begin{array}{cccc|c}
3 & 2 & 0 & 1 & 3 \\
9 & 8 & -3 & 4 & 6 \\
-6 & 4 & -8 & 0 & -16 \\
3 & -8 & 3 & -8 & 22
\end{array}\right]
$$

Resolução de Sistemas de Equações Lineares Simultâneas
Métodos Diretos – Eliminação de Gauss - Exemplo

- **Passo 1** - Eliminação na primeira coluna. $a_{11} = 3$ é o pivô.

(i) Calculam-se os multiplicadores

$$m_{i1} = -\frac{a_{i1}}{a_{11}}, i = 2, 3, 4$$

$$m_{21} = -\frac{a_{21}}{a_{11}} = -\frac{9}{3} = -3 \quad m_{31} = -\frac{a_{31}}{a_{11}} = -\frac{(-6)}{3} = 2$$

$$m_{41} = -\frac{a_{41}}{a_{11}} = -\frac{3}{3} = -1$$

(ii) Transformações elementares

$$L_2^1 \leftarrow L_2 + m_{21} \times L_1$$

$$L_3^1 \leftarrow L_3 + m_{31} \times L_1 \qquad L_4^1 \leftarrow L_4 + m_{41} \times L_1$$

$$[A\,|\,b] = \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{3} & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 9 & 8 & -3 & 4 & 6 \\ -6 & 4 & -8 & 0 & -16 \\ 3 & -8 & 3 & -8 & 22 \end{array}\right] \begin{array}{l} \rightarrow L_1 \\ \rightarrow L_2 \\ \rightarrow L_3 \\ \rightarrow L_4 \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$[A^1\,|\,b^1] = \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 8 & -8 & 2 & -10 \\ 0 & -10 & 3 & -9 & 19 \end{array}\right]$$

Resolução de Sistemas de Equações Lineares Simultâneas
Métodos Diretos – Eliminação de Gauss - Exemplo

- **Passo 2** - Eliminação na segunda coluna. $a_{22}^{1} = 2$ é o pivô.

(i) Calculam-se os multiplicadores

$$m_{i2} = -\frac{a_{i2}^{1}}{a_{22}^{1}}, i = 3, 4$$

$$m_{32} = -\frac{a_{32}^{1}}{a_{22}^{1}} = -\frac{8}{2} = -4$$

$$m_{42} = -\frac{a_{42}^{1}}{a_{22}^{1}} = -\frac{(-10)}{2} = 5$$

(ii) Transformações elementares

$$L_3^2 \leftarrow L_3^1 + m_{32} \times L_2^1$$

$$L_4^2 \leftarrow L_4^1 + m_{42} \times L_2^1$$

$$[A^1 | b^1] = \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & \boxed{2} & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 8 & -8 & 2 & -10 \\ 0 & -10 & 3 & -9 & 19 \end{array}\right]$$

$$\Downarrow$$

$$[A^2 | b^2] = \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -12 & -4 & 4 \end{array}\right]$$

Resolução de Sistemas de Equações Lineares Simultâneas

Métodos Diretos – Eliminação de Gauss - Exemplo

- **Passo 3** - Eliminação na terceira coluna. $a_{33}^2 = 4$ é o pivô.

(i) Calcula-se o multiplicador

$$m_{i3} = -\frac{a_{i3}^2}{a_{33}^2}, i = 4$$

$$[A^2 \mid b^2] = \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & \boxed{4} & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -12 & -4 & 4 \end{array}\right]$$

$$m_{43} = -\frac{a_{43}^2}{a_{33}^2} = -\frac{(-12)}{4} = 3$$

$$\Downarrow$$

(ii) Transformação elementar

$$[A^3 \mid b^3] = \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-10} & 10 \end{array}\right]$$

$$L_4^3 \leftarrow L_4^2 + m_{43} \times L_3^2$$

Resolução de Sistemas de Equações Lineares Simultâneas
Métodos Diretos – Eliminação de Gauss - Exemplo

- Tem-se, então, o sistema de equações triangular superior equivalente.

Sistema dado

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 2x_2 \qquad\quad + x_4 &= 3 \\
9x_1 + 8x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 6 \\
-6x_1 + 4x_2 - 8x_3 \qquad\quad &= -16 \\
3x_1 - 8x_2 + 3x_3 - 8x_4 &= 22
\end{aligned}
$$

$$\sim$$

Sistema equivalente

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 2x_2 \qquad\quad + x_4 &= 3 \\
2x_2 - 3x_3 + x_4 &= -3 \\
4x_3 - 2x_4 &= 2 \\
-10x_4 &= 10
\end{aligned}
$$

- Resolvendo o sistema triangular, obtém-se

$$X = [2\ -1\ 0\ -1]^t$$

Que é, também, a solução do sistema de equações dado.

Resolução de Sistemas de Equações Lineares Simultâneas
Métodos Diretos – Eliminação de Gauss

➢**Exemplo 2**

Para a descrição do método, seja resolver o sistema de equações lineares a seguir.

Matriz aumentada

$$
\begin{aligned}
x_1 + \ 4x_2 + 52x_3 &= 57 \\
27x_1 + 110x_2 - 3x_3 &= 134 \\
22x_1 + 2x_2 + 14x_3 &= 38
\end{aligned}
\qquad
[A\,|\,\mathrm{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 52 & 57 \\ 27 & 110 & -3 & 134 \\ 22 & 2 & 14 & 38 \end{array}\right]
$$

Resolução de Sistemas de Equações Lineares Simultâneas
Métodos Diretos – Eliminação de Gauss - Exemplo

- **Passo 1** - Eliminação na primeira coluna. $a_{11} = 1$ é o pivô.

(i) Calculam-se os multiplicadores

$$m_{i1} = -\frac{a_{i1}}{a_{11}}, \mathrm{i} = 2, 3$$

$$m_{21} = -\frac{a_{21}}{a_{11}} = -\frac{27}{1} = -27 \quad m_{31} = -\frac{a_{31}}{a_{11}} = -\frac{22}{1} = -22$$

$$[A \mid \mathrm{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 4 & 52 & 57 \\ 27 & 110 & -3 & 134 \\ 22 & 2 & 14 & 38 \end{array}\right] \begin{array}{l} \rightarrow L_1 \\ \rightarrow L_2 \\ \rightarrow L_3 \end{array}$$

$$\Downarrow$$

(ii) Transformações elementares

$$L_2^1 \leftarrow L_2 + m_{21} \times L_1$$

$$L_3^1 \leftarrow L_3 + m_{31} \times L_1$$

$$[A^1 \mid \mathrm{b}^1] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 52 & 57 \\ 0 & 2 & -1407 & -1405 \\ 0 & -86 & -1130 & -1216 \end{array}\right]$$

Resolução de Sistemas de Equações Lineares Simultâneas
Métodos Diretos – Eliminação de Gauss - Exemplo

- **Passo 2** - Eliminação na segunda coluna. $a^1_{22} = 2$ é o pivô.

(i) Calculam-se os multiplicadores

$$m_{i2} = -\frac{a^1_{i2}}{a^1_{22}}, \mathrm{i} = 3$$

$$[A^1 \mid \mathrm{b}^1] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 52 & 57 \\ 0 & \boxed{2} & -1407 & -1405 \\ 0 & -86 & -1130 & -1216 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \to L^1_2 \\ \to L^1_3 \end{array}$$

$$m_{32} = -\frac{a^1_{32}}{a^1_{22}} = -\frac{(-86)}{2} = 43$$

$$\Downarrow$$

(ii) Transformações elementares

$$\mathrm{L}^2_3 \leftarrow \mathrm{L}^1_3 + \mathrm{m}_{32} \times \mathrm{L}^1_2$$

$$[A^2 \mid \mathrm{b}^2] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 52 & 57 \\ 0 & 2 & -1407 & -1405 \\ 0 & 0 & \boxed{-61631} & -61631 \end{array}\right]$$

Resolução de Sistemas de Equações Lineares Simultâneas
Métodos Diretos – Eliminação de Gauss - Exemplo

- Tem-se, então, o sistema de equações triangular superior equivalente.

Sistema dado

$$
\begin{aligned}
x_1 + 4x_2 + 52x_3 &= 57 \\
27x_1 + 110x_2 - 3x_3 &= 134 \\
22x_1 + 2x_2 + 14x_3 &= 38
\end{aligned}
$$

$$\sim$$

Sistema equivalente

$$
\begin{aligned}
x_1 + 4x_2 + 52x_3 &= 57 \\
2x_2 - 1407x_3 &= -1405 \\
-61631x_3 &= -61631
\end{aligned}
$$

- Resolvendo o sistema triangular, obtém-se

$$X = [\boldsymbol{1{,}000\ 1{,}000\ 1{,}000}]^t$$

Resolução de Sistemas de Equações Lineares Simultâneas
Métodos Diretos – Eliminação de Gauss

- O que acontece se o pivô for nulo?
- E se o pivô estiver próximo de zero?

Resolução de Sistemas de Equações Lineares Simultâneas
Métodos Diretos – Eliminação de Gauss

➢ Exemplo

Seja resolver o sistema de equações, Ax = b, a seguir utilizando o Método de Gauss.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ e } b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Ou o sistema,

$$A = \begin{bmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ e } b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Pivotação Parcial

Resolução de Sistemas de Equações Lineares Simultâneas

Métodos Diretos – Eliminação de Gauss – Pivotação Parcial

- A técnica da *pivotação parcial* consiste em:

(i) no passo k, da fase de eliminação, tomar como pivô o elemento de maior módulo dentre os coeficientes $a_{i,k}^{k-1}$, k = 1, 2, ..., n - 1; i = k, k + 1, ..., n;

(ii) se necessário, efetuar a troca de posição entre as linhas **i** e **k**.

Objetivo: minimizar o efeito dos erros de arredondamento.

Resolução de Sistemas de Equações Lineares Simultâneas

Métodos Diretos – Eliminação de Gauss – Pivotação Parcial

- Exemplo

Seja resolver o sistema de equações a seguir utilizando o Método de Gauss com pivotação parcial e considerando, quando for o caso, três casas decimais.

$$
\begin{aligned}
10^{-20}x_1 + x_2 &= 1 \\
1x_1 + x_2 &= 2
\end{aligned}
$$

Maior em módulo

Deve ser feita a troca de posição entre a linha 1 e a linha 2!

Resolução de Sistemas de Equações Lineares Simultâneas

Métodos Diretos – Eliminação de Gauss – Pivotação Parcial

➢ **Passo 1** - Eliminação na primeira coluna. $a_{11} = 1$ é o pivô.

(i) Calculam-se os multiplicadores

$$m_{i1} = -\frac{a_{i1}}{a_{11}}, \mathrm{i} = 2$$

$$[A \mid \mathrm{b}] = \left[\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 1 & 2 \\ 10^{-20} & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \rightarrow \mathrm{L}_1 \\ \rightarrow \mathrm{L}_2 \end{array}$$

$$m_{21} = -\frac{a_{21}}{a_{11}} = -\frac{10^{-20}}{1} = -10^{-20}$$

$$\Downarrow$$

(ii) Transformações elementares

$$\mathrm{L}_2^1 \leftarrow \mathrm{L}_2 + \mathrm{m}_{21} \times \mathrm{L}_1$$

$$[A \mid \mathrm{b}] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1-10^{-20} & 1-2*10^{-20} \end{array}\right] \begin{array}{l} \rightarrow \mathrm{L}_1 \\ \rightarrow \mathrm{L}_2 \end{array}$$

Resolução de Sistemas de Equações Lineares Simultâneas

Métodos Diretos – Eliminação de Gauss – Pivotação Parcial

- Resolução do sistema triangular superior

$$x_1 + x_2 = 2$$
$$(1-10^{-20})x_2 = 1 - 2*10^{-20}$$

- Resolvendo obtém-se o vetor

$$X = \left[1 - \frac{10^{-20}}{1-10^{-20}} \quad 1 + \frac{10^{-20}}{1-10^{-20}} \right]^t$$

Que é, mais próxima, da solução do sistema de equações dado.

X = [***1 1***]^t

Resolução de Sistemas de Equações Lineares Simultâneas
Métodos Diretos – Eliminação de Gauss – Resíduos

- Se x’ for encontrado como solução do sistema Ax = b, então o erro dessa solução é x – x’.

- A(x – x’) = Ax –Ax’= b – Ax’ = R’ ⟵ Resíduo da solução x’

- A.(erro) = resíduo

- Do exemplo anterior:

Resíduo sem pivotação R = ?

Resíduo com pivotação R = ?

Resolução de Sistemas de Equações Lineares Simultâneas
Métodos Diretos

Complexidade

Regra de Cramer x Eliminação de Gauss

Resolução de Sistemas de Equações Lineares Simultâneas
Métodos Diretos – Complexidade

- **Regra de Cramer**

Um sistema AX = B é resolvido, por meio da Regra de Cramer, da seguinte forma:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, i = 1, 2, ..., n$$

Onde

Δ = det(A)

Δ_i = det(A) com a *i-ésima* coluna substituída pelo vetor independente B.

Resolução de Sistemas de Equações Lineares Simultâneas
Métodos Diretos – Complexidade – Regra de Cramer

- Pode ser demonstrado que, para calcular o determinante de uma matriz de ordem n, são requeridas:

- ✓ $(n + 1)(n!)(n - 1)$ multiplicações

- ✓ $(n + 1)(n!)$ somas

Resolução de Sistemas de Equações Lineares Simultâneas

Métodos Diretos – Complexidade – Regra de Cramer

- Exemplo

Seja resolver um sistema de 20 equações usando um computador hipotético com a capacidade de 2.000 Mflops (2.000.000.000 operações por segundo).

Considerando-se, somente, as multiplicações tem-se

$(n + 1)(n!)(n - 1) = (21)(20!)(19) = 970.727.901.262.479.360.000$ operações

O tempo requerido para a resolução, é:

$$\text{tempo} = \frac{970.727.901.262.479.360.000}{2.000.000.000 \text{x} 3600 \text{x} 24 \text{x} 360} \Longrightarrow \boxed{\text{Tempo} = 15.604{,}55 \text{ anos}}$$

Resolução de Sistemas de Equações Lineares Simultâneas
Métodos Diretos – Complexidade

➢ **Eliminação de Gauss**

Pode ser demonstrado que, para resolver um sistema de n equações, são necessárias

- ✓ $\dfrac{n(n+1)}{2}$ divisões
- ✓ $\dfrac{n^3}{3} + \dfrac{n^2}{2} - \dfrac{5n}{6}$ multiplicações
- ✓ $\dfrac{n^3}{3} + \dfrac{n^2}{2} - \dfrac{5n}{6}$ adições

$$\boxed{\text{Total} = \frac{4n^3 + 9n^2 - 7n}{6} \text{ operações}}$$

Resolução de Sistemas de Equações Lineares Simultâneas
Métodos Diretos – Complexidade – Eliminação de Gauss

➢Exemplo

Seja resolver um sistema de 20 equações usando um computador hipotético com a capacidade de 2.000 Mflops (2.000.000.000 operações por segundo).

O número total de operações é

$$\frac{4n^3 + 9n^2 - 7n}{6} = \frac{4.(20)^3 + 9.(20)^2 - 7.(20)}{6} \Rightarrow \boxed{\text{Total} = 5910 \text{ operações}}$$

O tempo requerido para a resolução, é:

$$\text{tempo} = \frac{5.910}{2.000.000.000} \Rightarrow \boxed{\text{Tempo} = 0,000002955\text{s}}$$

➢ **Definição – Matriz Identidade**

É uma matriz quadrada na qual os elementos situados na diagonal principal são iguais a um e, os demais, são nulos. É denotada por $\mathbf{I_n}$.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Sendo A uma matriz de ordem n, tem-se que

$$\boxed{A.I_n = I_n.A = A}$$

Resolução de Sistemas de Equações Lineares Simultâneas
Métodos Diretos – Matrizes

- **Definição – Matriz Inversa**

Seja A uma matriz quadrada de ordem n, não-singular, isto é, $\det(A) \neq 0$. Uma matriz A^{-1} é a inversa de A se

$$\boxed{A.A^{-1} = A^{-1}.A = I_n}$$

- **Teorema**

Se A e B são matrizes de ordem n, invertíveis, então

$$\boxed{(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}}$$

Resolução de Sistemas de Equações Lineares Simultâneas
Métodos Diretos

Método da Decomposição LU

Resolução de Sistemas de Equações Lineares Simultâneas

Métodos Diretos – Decomposição LU

- A técnica da decomposição consiste em decompor a matriz dos coeficientes em um produto de dois, ou mais, fatores e, em seguida, resolver uma sequência de sistemas de equações lineares que conduz à solução do sistema original.
- É indicada para a resolução de um conjunto de sistemas de equações lineares que possuem em comum a matriz dos coeficientes e têm termos independentes diferentes, ou seja, quando se tem:

$$\mathbf{A.X = B_i,\ i = 1, 2, ..., m}$$

- A vantagem da utilização de uma técnica de decomposição é que se pode resolver qualquer sistema de equações lineares que tenha A como matriz dos coeficientes. Alterando-se B, a resolução do novo sistema é imediata.
- A técnica da decomposição LU é um processo de fatoração no qual a matriz L é triangular inferior com diagonal unitária e U é uma matriz triangular superior.

Resolução de Sistemas de Equações Lineares Simultâneas
Métodos Diretos – Decomposição LU

Teorema (da decomposição LU)

Seja A uma matriz quadrada, de ordem n, e A_k, $k = 1, 2, \ldots, (n-1)$; as matrizes constituídas das primeiras k linhas e colunas de A, tal que $\det(A_k) \neq 0$. Sendo assim, existe uma única matriz triangular inferior L, com diagonal unitária, e uma única matriz triangular superior U tal que

$$\boxed{A = L.U}$$

Resolução de Sistemas de Equações Lineares Simultâneas

Métodos Diretos – Decomposição LU

➢ **Obtenção dos Fatores L e U**

Será utilizada a ideia básica do método da Eliminação de Gauss. Seja uma matriz genérica de ordem três.

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Primeiro passo

➢ Multiplicadores

$$m_{21} = -\frac{a_{21}}{a_{11}} \qquad m_{31} = -\frac{a_{31}}{a_{11}}$$

➢ Transformações elementares

$$L_2^1 \leftarrow L_2 + m_{21}.L_1 \qquad L_3^1 \leftarrow L_3 + m_{31}.L_1$$

Resolução de Sistemas de Equações Lineares Simultâneas
Métodos Diretos – Decomposição LU – Fatores L e U

- Obtém-se a matriz

$$A^1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a^1_{22} & a^1_{23} \\ 0 & a^1_{32} & a^1_{33} \end{bmatrix}$$

Pode ser demonstrado que $\boxed{A^1 = M^0.A}$

Onde

$$M^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 \\ m_{31} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Resolução de Sistemas de Equações Lineares Simultâneas
Métodos Diretos – Decomposição LU – Fatores L e U

- Segundo passo

$$A^{1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & \boxed{a_{22}^{1}} & a_{23}^{1} \\ 0 & a_{32}^{1} & a_{33}^{1} \end{bmatrix}$$

- Multiplicador

$$m_{32} = -\frac{a_{32}^{1}}{a_{22}^{1}}$$

- Transformação elementar $L_3^2 \leftarrow L_3^1 + m_{32} . L_2^1$

Resolução de Sistemas de Equações Lineares Simultâneas

Métodos Diretos – Decomposição LU – Fatores L e U

- Obtém-se a matriz

$$A^2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a^1_{22} & a^1_{23} \\ 0 & 0 & \boxed{a^2_{33}} \end{bmatrix}$$

Pode ser demonstrado que

$$\boxed{A^2 = M^1.A^1}$$

Onde

$$M^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & m_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

Resolução de Sistemas de Equações Lineares Simultâneas

Métodos Diretos – Decomposição LU – Fatores L e U

- Tem-se:

$$\boxed{A^1 = M^0.A} \quad \text{e} \quad \boxed{A^2 = M^1.A^1} \Longrightarrow \boxed{A^2 = (M^1.M^0).A}$$

- Fazendo

$$\mathbf{(M^1.\ M^0)^{-1}}.A^2 = \mathbf{(M^1.\ M^0)^{-1}}.(M^1.\ M^0).A = \mathbf{I}.A = A$$

- Portanto

$$\boxed{A = (M^1.M^0)^{-1}.A^2} \Longrightarrow \boxed{A = (M^0)^{-1}.(M^1)^{-1}.A^2}$$

Resolução de Sistemas de Equações Lineares Simultâneas
Métodos Diretos – Decomposição LU – Fatores L e U

- Pode ser demonstrado que:

$$(M^0)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 \\ -m_{31} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (M^1)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -m_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad (M^0)^{-1}.(M^1)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 \\ -m_{31} & -m_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

- Sendo assim,

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 \\ -m_{31} & -m_{32} & 1 \end{bmatrix}}_{L=(M^0)^{-1}.(M^1)^{-1}} . \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22}^1 & a_{23}^1 \\ 0 & 0 & a_{33}^2 \end{bmatrix}}_{U=A^2}$$

➢ Conclusão

(i) U é a matriz triangular superior obtida ao final da fase de eliminação do método de Gauss;

(ii) L é uma matriz triangular inferior, na qual os elementos da diagonal principal são unitários e, abaixo, se encontram os multiplicadores da etapa k da fase de eliminação com o sinal trocado.

Resolução de Sistemas de Equações Lineares Simultâneas

Métodos Diretos – Decomposição LU

- **Resolução de um sistema de equações**

  Seja um sistema de equações A.X = B. Para resolvê-lo, utilizando a decomposição LU, basta executar a seguinte sequência de passos:

✓Obtém-se a fatoração L.U da matriz A;
✓Sendo A = L.U, então L.U.X = B;
✓Faz-se U.X = Y, logo L.Y = B;
✓Resolve-se o sistema triangular inferior L.Y = B;
✓Resolve-se o sistema triangular superior U.X = Y obtendo, então, a solução do sistema de equações A.X = B.

- **Exemplo**

Resolução de Sistemas de Equações Lineares Simultâneas
Métodos Diretos – Decomposição LU

Pivotação Parcial

Resolução de Sistemas de Equações Lineares Simultâneas

Métodos Diretos – Decomposição LU – Pivotação Parcial

- Exemplo

Seja resolver o sistema de equações a seguir utilizando o Método da Decomposição LU com pivotação parcial e considerando, quando for o caso, duas casas decimais.

$$
\begin{array}{rcl}
4.x_1 - x_2 \qquad\qquad - x_4 &=& 6 \longrightarrow 1 \\
x_1 - 2.x_2 + x_3 \qquad\qquad &=& 8 \longrightarrow 2 \\
4.x_2 - 4.x_3 + x_4 &=& -7 \longrightarrow 3 \\
5.x_1 \qquad + 5.x_3 - 10.x_4 &=& -40 \longrightarrow 4
\end{array}
$$

$\boxed{\text{Maior em módulo}} \longrightarrow 5$

$P = [1\ 2\ 3\ 4]^t \longrightarrow$ vetor de permutação

Deve ser feita a troca de posição entre a linha 1 e a linha 4!

Resolução de Sistemas de Equações Lineares Simultâneas

Métodos Diretos – Decomposição LU – Pivotação Parcial

- **Passo 1**

Linha	Multiplicador	Coeficientes				P	Transformações
L_1^1		<u>5</u>	0	5	- 10	<u>4</u>	L_4
L_2^1	$m_{21} = -0,2$	1	- 2	1	0	2	L_2
L_3^1	$m_{31} = 0$	0	4	- 4	1	3	L_3
L_4^1	$m_{41} = -0,8$	4	- 1	0	- 1	1	L_1

Resolução de Sistemas de Equações Lineares Simultâneas
Métodos Diretos – Decomposição LU – Pivotação Parcial

- **Passo 1**

Linha	Multiplicador	Coeficientes				P	Transformações
L_1^1		$\underline{5}$	0	5	- 10	$\underline{4}$	L_4
L_2^1	$m_{21} = -0,2$	1	- 2	1	0	2	L_2
L_3^1	$m_{31} = 0$	0	4	- 4	1	3	L_3
L_4^1	$m_{41} = -0,8$	4	- 1	0	- 1	1	L_1
L_2^2			- 2	0	2	2	$L_2^1 + m_{21} L_1^1$
L_3^2			4	- 4	1	3	L_3^1
L_4^2			- 1	- 4	7	1	$L_4^1 + m_{41} L_1^1$

Resolução de Sistemas de Equações Lineares Simultâneas
Métodos Diretos – Decomposição LU – Pivotação Parcial

- **Passo 1**

Linha	Multiplicador	Coeficientes				P	Transformações
L_1^1		$\underline{5}$	0	5	- 10	$\underline{4}$	L_4
L_2^1	$m_{21} = -0,2$	1	- 2	1	0	2	L_2
L_3^1	$m_{31} = 0$	0	4	- 4	1	3	L_3
L_4^1	$m_{41} = -0,8$	4	- 1	0	- 1	1	L_1
L_2^2		*0,2*	- 2	0	2	2	$L_2^1 + m_{21} L_1^1$
L_3^2		*0*	4	- 4	1	3	L_3^1
L_4^2		*0,8*	- 1	- 4	7	1	$L_4^1 + m_{41} L_1^1$

Maior em módulo

- **Passo 2**

Linha	Multiplicador	Coeficientes				P	Transformações
L_1^1		$\underline{5}$	0	5	- 10	$\underline{4}$	L_4
L_2^1	$m_{21} = - 0,2$	1	- 2	1	0	2	L_2
L_3^1	$m_{31} = 0$	0	4	- 4	1	3	L_3
L_4^1	$m_{41} = - 0,8$	4	- 1	0	- 1	1	L_1
L_2^2		***0,2***	- 2	0	2	2	$L_2^1 + m_{21} L_1^1$
L_3^2		***0***	4	- 4	1	3	L_3^1
L_4^2		***0,8***	- 1	- 4	7	1	$L_4^1 + m_{41} L_1^1$
L_2^3		***0***	$\underline{4}$	- 4	1	$\underline{3}$	L_3^2
L_3^3	$m_{32} = 0,5$	***0,2***	- 2	0	2	2	L_2^2
L_4^3	$m_{42} = 0,25$	***0,8***	- 1	- 4	7	1	L_4^2

- **Passo 2**

Linha	Multiplicador	Coeficientes				P	Transformações
L_1^1		$\underline{5}$	0	5	- 10	$\underline{4}$	L_4
L_2^1	$m_{21} = -0{,}2$	1	- 2	1	0	2	L_2
L_3^1	$m_{31} = 0$	0	4	- 4	1	3	L_3
L_4^1	$m_{41} = -0{,}8$	4	- 1	0	- 1	1	L_1
L_2^2		*0,2*	- 2	0	2	2	$L_2^1 + m_{21} L_1^1$
L_3^2		*0*	4	- 4	1	3	L_3^1
L_4^2		*0,8*	- 1	- 4	7	1	$L_4^1 + m_{41} L_1^1$
L_2^3		*0*	$\underline{4}$	- 4	1	$\underline{3}$	L_3^2
L_3^3	$m_{32} = 0{,}5$	*0,2*	- 2	0	2	2	L_2^2
L_4^3	$m_{42} = 0{,}25$	*0,8*	- 1	- 4	7	1	L_4^2
L_3^4				- 2	2,5	2	$L_3^3 + m_{32} L_2^3$
L_4^4				- 5	7,25	1	$L_4^3 + m_{41} L_2^3$

- **Passo 2**

Linha	Multiplicador	Coeficientes				P	Transformações
L_1^1		<u>5</u>	0	5	- 10	<u>4</u>	L_4
L_2^1	$m_{21} = -0,2$	1	- 2	1	0	2	L_2
L_3^1	$m_{31} = 0$	0	4	- 4	1	3	L_3
L_4^1	$m_{41} = -0,8$	4	- 1	0	- 1	1	L_1
L_2^2		*0,2*	- 2	0	2	2	$L_2^1 + m_{21} L_1^1$
L_3^2		*0*	4	- 4	1	3	L_3^1
L_4^2		*0,8*	- 1	- 4	7	1	$L_4^1 + m_{41} L_1^1$
L_2^3		*0*	<u>4</u>	- 4	1	<u>3</u>	L_3^2
L_3^3	$m_{32} = 0,5$	*0,2*	- 2	0	2	2	L_2^2
L_4^3	$m_{42} = 0,25$	*0,8*	- 1	- 4	7	1	L_4^2
L_3^4		*0,2*	*-0,5*	- 2	2,5	2	$L_3^3 + m_{32} L_2^3$
L_4^4		*0,8*	*-0,25*	- 5	7,25	1	$L_4^3 + m_{41} L_2^3$

Maior em módulo

Resolução de Sistemas de Equações Lineares Simultâneas
Métodos Diretos – Decomposição LU – Pivotação Parcial

- **Passo 3**

Linha	Multiplicador	Coeficientes				P	Transformações
L_1^1		<u>5</u>	0	5	- 10	<u>4</u>	L_4
L_2^1	$m_{21} = -0,2$	1	- 2	1	0	2	L_2
L_3^1	$m_{31} = 0$	0	4	- 4	1	3	L_3
L_4^1	$m_{41} = -0,8$	4	- 1	0	- 1	1	L_1
L_2^2		*0,2*	- 2	0	2	2	$L_2^1 + m_{21} L_1^1$
L_3^2		*0*	4	- 4	1	3	L_3^1
L_4^2		*0,8*	- 1	- 4	7	1	$L_4^1 + m_{41} L_1^1$
L_2^3		*0*	<u>4</u>	- 4	1	<u>3</u>	L_3^2
L_3^3	$m_{32} = 0,5$	*0,2*	- 2	0	2	2	L_2^2
L_4^3	$m_{42} = 0,25$	*0,8*	- 1	- 4	7	1	L_4^2
L_3^4		*0,2*	*-0,5*	- 2	2,5	2	$L_3^3 + m_{32} L_2^3$
L_4^4		*0,8*	*-0,25*	- 5	7,25	1	$L_4^3 + m_{41} L_2^3$
L_3^5		*0,8*	*-0,25*	<u>- 5</u>	7,25	<u>1</u>	L_4^4
L_4^5	$m_{43} = -0,4$	*0,2*	*-0,5*	- 2	2,5	2	L_3^4

Resolução de Sistemas de Equações Lineares Simultâneas
Métodos Diretos – Decomposição LU – Pivotação Parcial

- **Passo 3**

Linha	Multiplicador	Coeficientes				P	Transformações
L_1^1		<u>5</u>	0	5	- 10	<u>4</u>	L_4
L_2^1	$m_{21} = -0,2$	1	- 2	1	0	2	L_2
L_3^1	$m_{31} = 0$	0	4	- 4	1	3	L_3
L_4^1	$m_{41} = -0,8$	4	- 1	0	- 1	1	L_1
L_2^2		*0,2*	- 2	0	2	2	$L_2^1 + m_{21} L_1^1$
L_3^2		*0*	4	- 4	1	3	L_3^1
L_4^2		*0,8*	- 1	- 4	7	1	$L_4^1 + m_{41} L_1^1$
L_2^3		*0*	<u>4</u>	- 4	1	<u>3</u>	L_3^2
L_3^3	$m_{32} = 0,5$	*0,2*	- 2	0	2	2	L_2^2
L_4^3	$m_{42} = 0,25$	*0,8*	- 1	- 4	7	1	L_4^2
L_3^4		*0,2*	*-0,5*	- 2	2,5	2	$L_3^3 + m_{32} L_2^3$
L_4^4		*0,8*	*-0,25*	- 5	7,25	1	$L_4^3 + m_{41} L_2^3$
L_3^5		*0,8*	*-0,25*	<u>- 5</u>	7,25	<u>1</u>	L_4^4
L_4^5	$m_{43} = -0,4$	*0,2*	*-0,5*	- 2	2,5	2	L_3^4
L_4^6					<u>- 0,4</u>	<u>2</u>	$L_4^5 + m_{43} L_3^5$

Resolução de Sistemas de Equações Lineares Simultâneas
Métodos Diretos – Decomposição LU – Pivotação Parcial

- **Passo 3**

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0,8 & -0,25 & 1 & 0 \\ 0,2 & -0,5 & 0,4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 5 & -10 \\ 0 & 4 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 7,25 \\ 0 & 0 & 0 & -0,4 \end{bmatrix}$$

$$P^{(3)} = [4\,3\,1\,2]^t$$

Linha	Multiplicador	Coeficientes				P	Transformações
L_1^1		$\underline{5}$	0	5	- 10	$\underline{4}$	L_4
L_2^1	$m_{21} = -0,2$	1	- 2	1	0	2	L_2
L_3^1	$m_{31} = 0$	0	4	- 4	1	3	L_3
L_4^1	$m_{41} = -0,8$	4	- 1	0	- 1	1	L_1
L_2^2		*0,2*	- 2	0	2	2	$L_2^1 + m_{21} L_1^1$
L_3^2		*0*	4	- 4	1	3	L_3^1
L_4^2		*0,8*	- 1	- 4	7	1	$L_4^1 + m_{41} L_1^1$
L_2^3		*0*	$\underline{4}$	- 4	1	$\underline{3}$	L_3^2
L_3^3	$m_{32} = 0,5$	*0,2*	- 2	0	2	2	L_2^2
L_4^3	$m_{42} = 0,25$	*0,8*	- 1	- 4	7	1	L_4^2
L_3^4		*0,2*	*-0,5*	- 2	2,5	2	$L_3^3 + m_{32} L_2^3$
L_4^4		*0,8*	*-0,25*	- 5	7,25	1	$L_4^3 + m_{41} L_2^3$
L_3^5		*0,8*	*-0,25*	$\underline{-5}$	7,25	$\underline{1}$	L_4^4
L_4^5	$m_{43} = -0,4$	*0,2*	*-0,5*	- 2	2,5	2	L_3^4
L_4^6		*0,2*	*-0,5*	*0,4*	$\underline{-0,4}$	$\underline{2}$	$L_4^5 + m_{43} L_3^5$

Resolução de Sistemas de Equações Lineares Simultâneas
Métodos Diretos – Decomposição LU – Pivotação Parcial

➢ Resolução do sistema L.Y = B

Aplicando $P^{(3)} = [4\ 3\ 1\ 2]$ ao vetor $B = [6\ 8 - 7 - 40]^t$, tem-se $B = [-40 - 7\ 6\ 8]^t$.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0,8 & -0,25 & 1 & 0 \\ 0,2 & -0,5 & 0,4 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} y_1 = -40 \\ y_2 = -7 \\ 0,8.y_1 - 0,25.y_2 + y_3 = 6 \Rightarrow y_3 = 36,25 \\ 0,2.y_1 - 0,5.y_2 + 0,4.y_3 + y_4 = 8 \Rightarrow y_4 = -2 \end{array}$$

$$\boxed{\mathbf{Y = [-40\ -7\ 36,25\ -2]}}$$

Resolução de Sistemas de Equações Lineares Simultâneas
Métodos Diretos – Decomposição LU – Pivotação Parcial

- Resolução do sistema U.X = Y

$$U = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 5 & -10 \\ 0 & 4 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 7{,}25 \\ 0 & 0 & 0 & -0{,}4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{rrrrl} 5.x_1 & & +\,5.x_3 & -\;10.x_4 & = -40 \\ & 4.x_2 & -\,4.x_3 & +\;x_4 & = -7 \\ & & -\,5.x_3 & +\,7{,}25.x_4 & = 36{,}25 \\ & & & -\;0{,}4.x_4 & = -2 \end{array}$$

- Obtém-se o vetor

$$\boxed{\mathbf{X = [2\ -3\ 0\ 5]^t}}$$

- Como **R** = [**0 0 0 0**]^t, então X é a **solução exata** do sistema de equações dado.

Resolução de Sistemas de Equações Lineares Simultâneas
Métodos Diretos – Decomposição LU

Aplicações

➢ Refinamento da solução

Admita-se que:

(i) Um sistema de equações , A.X = B foi resolvido, utilizando-se o método da decomposição LU e obteve-se uma solução aproximada $\mathbf{X^0}$.

(ii) A solução exata, que se deseja determinar, é dada por um vetor $\mathbf{X^1}$.

(iii) Assim , $\mathbf{X^1 = X^0 + \Delta^0}$, onde $\mathbf{\Delta^0}$ **é a correção** a ser feita em X^0.

Resolução de Sistemas de Equações Lineares Simultâneas
Métodos Diretos – Decomposição LU – Aplicações

- **Refinamento da solução**

Tem-se que $\boxed{A.X = B}$ $\boxed{A.X^1 = B}$ $\boxed{X^1 = X^0 + \Delta^0}$

Logo $\boxed{A.(X^0 + \Delta^0) = B} \Rightarrow \boxed{A.\Delta^0 = B - A.X^0} \Rightarrow \boxed{A.\Delta^0 = R^0}$

- Sendo $\boxed{A = L.U} \Rightarrow \boxed{L.U.\Delta^0 = R^0}$

- Resolvem-se, então $\boxed{L.Y = R^0}$ $\boxed{U.\Delta^0 = Y}$

- **Exemplo**

- **Determinação da inversa de uma matriz**

Seja A uma matriz tal que $\det(A) \neq 0$, e $X = A^{-1}$ a sua inversa.
Tem-se, então, que

$$\boxed{A.X = I}$$

Considerando uma matriz A de ordem 3, tem-se que:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{I}$$

Resolução de Sistemas de Equações Lineares Simultâneas

Métodos Diretos – Decomposição LU – Aplicações

➢ **Determinação da inversa de uma matriz**

Efetuando o produto, são obtidos os três sistemas de equações a seguir.

$$\begin{aligned} a_{11}x_{11} + a_{11}x_{21} + a_{13}x_{31} &= 1 \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} + a_{21}x_{31} &= 0 \\ a_{31}x_{11} + a_{32}x_{21} + a_{33}x_{31} &= 0 \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\text{Primeira coluna de X}}$$

$$\begin{aligned} a_{11}x_{12} + a_{11}x_{22} + a_{13}x_{32} &= 0 \\ a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} + a_{21}x_{32} &= 1 \\ a_{31}x_{12} + a_{32}x_{22} + a_{33}x_{32} &= 0 \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\text{Segunda coluna de X}}$$

$$\begin{aligned} a_{11}x_{13} + a_{11}x_{23} + a_{13}x_{33} &= 0 \\ a_{21}x_{13} + a_{22}x_{23} + a_{21}x_{33} &= 0 \\ a_{31}x_{13} + a_{32}x_{23} + a_{33}x_{33} &= 1 \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\text{Terceira coluna de X}}$$

- **Determinação da inversa de uma matriz**

Conclusão

- São sistemas de equações da forma $\boxed{A.X^i = B^i,\ i = 1, 2, 3}$
- Onde X^i é a i-ésima coluna de X e B^i é a i-ésima coluna de I.
- Como A = L.U, então $\boxed{L.U.X^i = B^i,\ i = 1, 2, 3}$
- Resolvem-se, então, os sistemas de equações

$$\boxed{L.Y^i = B^i} \quad \boxed{U.X^i = Y^i} \quad i = 1, 2, 3$$

- A resolução de cada um destes sistemas de equações produz uma coluna da matriz X, que é a inversa de A.
- **Exemplo**

Exemplo

Seja determinar a inversa da matriz a seguir, utilizando o Método da Decomposição LU com pivotação parcial

sabendo-se que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0,5 & 1 & 0 \\ 0,5 & 0,714 & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3,5 & 1,5 \\ 0 & 0 & -2,571 \end{bmatrix}$$

e $P = [2\ 3\ 1]^t$. Considerar três casas decimais.

Exemplo - Solução

➢ Determinação da **primeira coluna** de X

Resolvendo $LY^1 = B^1$

Aplicando $P = [2\ 3\ 1]^t$ em $B^1 = [1\ 0\ 0]^t$, obtém-se $B^1 = [0\ 0\ 1]^t$.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0,5 & 1 & 0 \\ 0,5 & 0,714 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y_1^1 = 0 \\ 0,5y_1^1 + y_2^1 = 0 \\ 0,5y_1^1 + 0,714y_2^1 + y_3^1 = 1 \end{cases} \Rightarrow Y^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Resolvendo $U.X^1 = Y^1$

$$U = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3,5 & 1,5 \\ 0 & 0 & -2,571 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1^1 - x_2^1 + x_3^1 = 0 \\ 3,5x_2^1 + 1,5x_3^1 = 0 \\ -2,571x_3^1 = 1 \end{cases} \Rightarrow X^1 = \begin{bmatrix} 0,277 \\ 0,167 \\ -0,389 \end{bmatrix}$$

Primeira coluna de X

Resolução de Sistemas de Equações Lineares Simultâneas

Métodos Diretos – Decomposição LU – Aplicações

Exemplo - Solução

➢ Determinação da **segunda coluna** de X

Resolvendo $LY^2 = B^2$

Aplicando $P = [2\ 3\ 1]^t$ em $B^2 = [0\ 1\ 0]^t$, obtém-se $B^2 = [1\ 0\ 0]^t$.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0,5 & 1 & 0 \\ 0,5 & 0,714 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y_1^2 = 1 \\ 0,5y_1^2 + y_2^2 = 0 \\ 0,5y_1^2 + 0,714y_2^2 + y_3^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow Y^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0,5 \\ -0,143 \end{bmatrix}$$

Resolvendo $U.X^2 = Y^2$

$$U = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3,5 & 1,5 \\ 0 & 0 & -2,571 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 1 \\ 3,5x_2^2 + 1,5x_3^2 = -0,5 \\ -2,571x_3^2 = -0,143 \end{cases} \Rightarrow X^2 = \begin{bmatrix} 0,388 \\ -0,166 \\ 0,056 \end{bmatrix}$$

Segunda coluna de X

Exemplo - Solução

➢ Determinação da **terceira coluna** de X

Resolvendo $LY^3 = B^3$

Aplicando $P = [2\ 3\ 1]^t$ em $B^3 = [0\ 0\ 1]^t$, obtém-se $B^3 = [0\ 1\ 0]^t$.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0,5 & 1 & 0 \\ 0,5 & 0,714 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{aligned} y_1^3 &= 0 \\ 0,5y_1^3 + y_2^3 &= 1 \\ 0,5y_1^3 + 0,714y_2^3 + y_3^3 &= 0 \end{aligned} \Longrightarrow Y^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -0,714 \end{bmatrix}$$

Resolvendo $U.X^3 = Y^3$

Terceira coluna de X

$$U = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3,5 & 1,5 \\ 0 & 0 & -2,571 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{aligned} 2x_1^3 - x_2^3 + x_3^3 &= 0 \\ 3,5x_2^3 + 1,5x_3^3 &= 1 \\ -2,571x_3^3 &= -0,714 \end{aligned} \Longrightarrow X^3 = \begin{bmatrix} -0,056 \\ 0,167 \\ 0,278 \end{bmatrix}$$

Exemplo - Solução

- Portanto, a menos de erros de arredondamentos, a **inversa de é:**

$$X = A^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}277 & 0{,}388 & -0{,}056 \\ 0{,}167 & -0{,}166 & 0{,}167 \\ -0{,}389 & 0{,}056 & 0{,}278 \end{bmatrix}$$

- Observe-se que

$$A \, . \, A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0{,}277 & 0{,}388 & -0{,}056 \\ 0{,}167 & -0{,}166 & 0{,}167 \\ -0{,}389 & 0{,}056 & 0{,}278 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0{,}001 & 0 \\ -0{,}002 & 1{,}001 & -0{,}001 \\ 0 & 1{,}388D \;\; -17 & 1{,}001 \end{bmatrix}$$

Métodos Iterativos

São métodos que, teoricamente, produzem a solução exata de um sistema de equações lineares, caso ela exista, por meio de um número infinito de operações aritméticas.

Resolução de Sistemas de Equações Lineares Simultâneas
Métodos Numéricos de Resolução

Teoria geral dos Métodos Iterativos

- Uma das ideias fundamentais em Cálculo Numérico é a da iteração ou aproximação sucessiva.

- Existe um grande número de métodos numéricos, para resolver os mais variados tipos de problemas, que são processos iterativos.

- Como o próprio nome já diz, são métodos que se caracterizam pela **aplicação de um procedimento de forma repetida**.

- O objetivo é obter em cada repetição, ou iteração, uma aproximação para a solução do problema em questão que seja mais precisa do que aquela obtida na iteração anterior.

Resolução de Sistemas de Equações Lineares Simultâneas

Métodos Numéricos de Resolução

Teoria geral dos Métodos Iterativos

- Uma importante classe é a dos métodos iterativos estacionários de grau um, nos quais o resultado obtido em uma iteração é função, somente, do resultado da iteração anterior.

- Nestes métodos, dado um problema, **P**, e uma estimativa inicial $\mathbf{S^0}$**,** para a sua solução, **S**, é gerada uma sequência de aproximações, $\{S^k\}$, k = 1, 2, ...; tal que:

$$\mathbf{S^k = \varphi(P, S^{k-1})},\ k = 1, 2, 3, ...$$

- Sendo que **φ(.) é a função de iteração do método iterativo**.

Resolução de Sistemas de Equações Lineares Simultâneas
Métodos Numéricos de Resolução

Teoria geral dos Métodos Iterativos

- **Definição**

Um método iterativo é dito estacionário se a função de iteração é, sempre, a mesma em todas as iterações. Caso ela se modifique é dito não estacionário.

- **Definição**

Um método iterativo é dito de grau g se, para obter uma aproximação, são necessárias g aproximações anteriores da solução do problema, ou seja, a função de iteração é da forma:

$$\mathbf{S^k = \varphi\,(P, S^{k-1}, S^{k-2}, ..., S^{k-g});\ k = g, g + 1, g + 2, ...}$$

Exemplo

$g = 1 \Rightarrow S^0 = \varphi(P)$ e $S^k = \varphi(P, S^{k-1})$, $k = 1, 2, ...$

$g = 2 \Rightarrow S^0 = \varphi(P)$, $S^1 = \varphi(P, S^0)$ e $S^k = \varphi(P, S^{k-1}, S^{k-2})$, $k = 2, 3, ...$

Resolução de Sistemas de Equações Lineares Simultâneas
Métodos Numéricos de Resolução

Teoria geral dos Métodos Iterativos

Os aspectos a seguir estão, sempre, presentes nos processos iterativos estacionários de grau um qualquer que seja o problema a ser resolvido.

- **Estimativa inicial**

Para que o processo iterativo se inicie, é preciso uma estimativa inicial para a solução do problema.

- **Função de iteração**

Por meio da qual se constrói a sequência de aproximações.

- **Convergência**

O objetivo é gerar uma sequência que convirja para a solução do problema. Nem sempre se tem a garantia de que essa convergência ocorrerá.

- **Critério de Parada**

Envolve a precisão desejada na solução do problema e um número máximo de iterações.

Resolução de Sistemas de Equações Lineares Simultâneas
Métodos Numéricos de Resolução

Métodos Iterativos e a resolução de sistemas de equações lineares simultâneas

- Para resolver um sistema, AX = B, por meio de um método iterativo, é preciso transformá-lo em um outro sistema que possibilite a definição de um processo iterativo.

- O sistema linear obtido após a transformação deve ser equivalente ao original, ou seja, ambos devem ter a mesma solução.
- Então, AX = B é transformado em um sistema linear equivalente da forma:

$$\boxed{\mathbf{X = M.X + C = \varphi(X)}}$$

- M é uma matriz com dimensões *n x n,* c é um vetor com dimensões *n x 1*

φ(X) é a função de iteração dada na forma matricial.

Resolução de Sistemas de Equações Lineares Simultâneas
Métodos Numéricos de Resolução

Métodos Iterativos e a resolução de sistemas de equações lineares simultâneas

➢A seguir, tomando-se uma aproximação inicial, X^0 constrói-se uma sequência iterativa de vetores:

$$X^1 = M.X^0 + C = \varphi(X^0),\ X^2 = M.X^1 + C = \varphi(X^1),\ \ldots$$

➢Assim, a forma geral dos métodos iterativos estacionários, de grau um, é

$$\mathbf{X^k = M.X^{k-1} + C = \varphi(X^{k-1})},\ k = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\boxed{\textbf{M} \text{ é a } \textbf{matriz de iteração}}$$

Resolução de Sistemas de Equações Lineares Simultâneas
Métodos Numéricos de Resolução

Métodos Iterativos e a resolução de sistemas de equações lineares simultâneas

➢Critério de parada

O processo iterativo é finalizado quando se obtém X^k, k = 1, 2, ...; tal que

$$\max\left|x_i^k - x_i^{k-1}\right|, i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

seja menor ou igual a uma precisão fixada e, então, X^k é tomado como uma aproximação para a solução do sistema de equações; ou quando for atingido um número máximo de iterações estabelecido

Resolução de Sistemas de Equações Lineares Simultâneas
Métodos Numéricos de Resolução – Métodos Interativos

Método de Jacobi

Seja um sistema de equações lineares da forma

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots\dots\dots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots\dots\dots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots\dots\dots + a_{nn}x_n = b_n
\end{cases}
$$

Método de Jacobi

Sendo $a_{ii} \neq 0$, i = 1, 2, ..., n; e k = 1, 2, ...; explicita-se uma incógnita em cada equação e, a seguir, define-se o esquema iterativo:

$$\begin{cases} x_1^k = \dfrac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{k-1} - a_{13}x_3^{k-1} - \ldots - a_{1n}x_n^{k-1}) \\ x_2^k = \dfrac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{k-1} - a_{23}x_3^{k-1} - \ldots - a_{2n}x_n^{k-1}) \\ \vdots \\ x_n^k = \dfrac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1^{k-1} - a_{n2}x_2^{k.1} - \ldots - a_{nn-1}x_{n-1}^{k-1}) \end{cases}$$

Método de Jacobi

Portanto, dada uma aproximação inicial X^0 , o Método de Jacobi constrói uma sequência , X^1, X^2, ..., X^k, ...; por meio da relação recursiva:

$$\mathbf{X^k = M.X^{k-1} + C = \varphi(X^{k-1})},\ k = 1, 2, 3, \ldots$$

Onde

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12}/a_{11} & -a_{13}/a_{11} & \cdots & -a_{1n}/a_{11} \\ -a_{21}/a_{22} & 0 & -a_{23}/a_{22} & \cdots & -a_{2n}/a_{22} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{n1}/a_{nn} & -a_{n2}/a_{nn} & -a_{n3}/a_{nn} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \qquad c = \begin{bmatrix} b_1/a_{11} \\ b_2/a_{22} \\ \vdots \\ b_n/a_{nn} \end{bmatrix}$$

Exemplo

Exercício

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2.x_2 - 2.x_3 &= 1 \\
x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\
2.x_1 + 2.x_2 + x_3 &= 1
\end{aligned}
$$

Exercício

$$
\begin{cases}
x_1^k = 1 - 2.x_2^{k-1} + 2.x_3^{k-1} \\
x_2^k = 1 - x_1^{k-1} - x_3^{k-1} \\
x_3^k = 1 - 2.x_1^{k-1} - 2.x_2^{k-1}
\end{cases}
$$

k	x_1^k	x_2^k	x_3^k	$\max\limits_{1 \leq i \leq 3} \left\| x_i^k - x_i^{k-1} \right\|$
0	0	0	0	------------
1	1	1	1	1
2	1	- 1	- 3	4
3	- 3	3	1	4
4	- 3	3	1	0

Método de Gauss-Seidel

- Assim como no Método de Jacobi, o sistema de equações lineares A.X = B é escrito na forma equivalente X = M.X + C = φ(X) explicitando uma incógnita em cada equação.

- A diferença é que, na *k*-ésima iteração, ao realizar-se a atualização de uma das componentes do vetor X^k, são utilizadas as componentes já atualizadas nesta iteração e, as demais, ainda não atualizadas, da iteração anterior.

- Portanto, na k-ésima iteração, ao se calcular a componente x_j^k , j = 1, 2, ..., n; utilizam-se as componentes $x_1^k, x_2^k, \dots, x_{j-1}^k$, já atualizadas, e os valores $x_{j+1}^{k-1}, x_{j+2}^{k-1}, \dots, x_n^{k-1}$ restantes.

Método de Gauss-Seidel

Tem-se, então, a função de iteração e o esquema iterativo:

$$
\begin{aligned}
x_1^k &= \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{k-1} - a_{13}x_3^{k-1} - a_{14}x_4^{k-1} - \ldots - a_{1n}x_n^{k-1}) \\
x_2^k &= \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{k} - a_{23}x_3^{k-1} - a_{24}x_4^{k-1} - \ldots - a_{2n}x_n^{k-1}) \\
x_3^k &= \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^{k} - a_{32}x_2^{k} - a_{34}x_4^{k-1} - \ldots - a_{3n}x_n^{k-1}) \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
x_n^k &= \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1^{k} - a_{n2}x_2^{k} - a_{n3}x_3^{k} - \ldots - a_{nn-1}x_{n-1}^{k})
\end{aligned}
$$

- **Exemplo**

Resolução de Sistemas de Equações Lineares Simultâneas
Métodos Numéricos de Resolução – Métodos Interativos

Exemplo

Seja resolver o sistema de equações a seguir utilizando o Método de Gauss-Seidel, duas casas decimais e $X^0 = [0\ 0\ 0]^t$.

$$\begin{aligned} x_1 - 7.x_2 + 2.x_3 &= -4 \\ 8.x_1 + x_2 - x_3 &= 8 \\ 2.x_1 + x_2 + 9.x_3 &= 12 \end{aligned} \xrightarrow[\text{Esquema iterativo}]{\text{Função de iteração}} \begin{cases} x_1^k = -4 + 7.x_2^{k-1} - 2.x_3^{k-1} \\ x_2^k = 8 - 8.x_1^k + x_3^{k-1} \\ x_3^k = 0{,}111.(12 - 2.x_1^k - x_2^k) \end{cases}$$

k	x_1^k	x_2^k	x_3^k	$\max\limits_{1\le i\le 3} \lvert x_i^k - x_i^{k-1} \rvert$
0	0	0	0	-----
1	-4	40	-2,22	40
2	280,44	-2.237,74	180,46	2.277,74
3	-16.043,11	128.540,32	-10.705,07	130.7778,06

Exercício

$$
\begin{aligned}
0{,}5x_1 + 0{,}6.x_2 + 0{,}3.x_3 &= 0{,}2 \\
x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\
0{,}4.x_1 - 0{,}4.x_2 + x_3 &= -0{,}6
\end{aligned}
$$

Exercício

$$\begin{cases} x_1^k = 2.(0,2 - 0,6.x_2^{k-1} - 0,3.x_3^{k-1}) \\ x_2^k = -x_1^{k-1} - x_3^{k-1} \\ x_3^k = -0,6 - 0,4.x_1^{k-1} + 0,4.x_2^{k-1} \end{cases}$$

k	x_1^k	x_2^k	x_3^k	$\max\limits_{1 \le i \le 3} \lvert x_i^k - x_i^{k-1} \rvert$
0	0	0	0	------------
1	0,400	- 0,400	- 0,920	0,920
2	1,432	- 0,512	- 1,378	1,032
3	1,841	- 0,463	- 1,522	0,409
4	1,869	- 0,347	- 1,487	0,116
5	1,709	- 0,222	- 1,372	0,160
6	1,490	- 0,118	- 1,243	0,219
7	1,287	- 0,044	- 1,132	0,203
8	1,132	0,000	- 1,053	0,155
9	1,031	0,021	- 1,004	0,101
10	0,977	0,027	- 1,980	0,054

- **Critérios de convergência**

É condição suficiente para que os métodos iterativos gerem uma sequência que converge para a solução de um sistema de equações, qualquer que seja a aproximação inicial x^0, que

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left| a_{ij} \right| < | a_{ii} |, i = 1, 2, \ldots, n \longrightarrow$$ **Critério das linhas**

ou

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \left| a_{ij} \right| < | a_{jj} | \ , j = 1, 2, \ldots, n \longrightarrow$$ **Critério das colunas**

Estes dois critérios envolvem **condições que são apenas suficientes**, se pelo menos uma delas for satisfeita, então está assegurada a convergência, entretanto se nenhuma das duas for satisfeita nada se pode afirmar.

➢ Critérios de convergência

Considere o exemplo anterior:

$$\left.\begin{array}{lcl} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 & \longleftarrow & 2+1 < 10 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -8 & \longleftarrow & 1+1 < 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 6 & \longleftarrow & 2+3 < 10 \end{array}\right\} \text{Garantia de convergência}$$

Considere o exemplo abaixo:

$$\left.\begin{array}{lcl} x_1 + x_2 = 3 & \longleftarrow & 1 = 1 \\ x_1 - 3x_2 = -3 & \longleftarrow & 1 < 3 \end{array}\right\} \text{Não há garantia de convergência}$$

- No entanto, o método de Gauss-Jacobi converge neste sistema para a solução exata $x_1 = x_2 = 3/2$. Verifique!
- Isso mostra que o critério das linhas é <u>suficiente</u>, mas <u>não necessário</u>

➢ Critérios de convergência

Considere o sistema a seguir:

$$\left.\begin{array}{lcl} x_1 + 3x_2 + x_3 = -2 & \longleftarrow & 3+1 > 1 \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 & \longleftarrow & 5+2 > 2 \\ 6x_2 + 8x_3 = -6 & \longleftarrow & 6 < 8 \end{array}\right\} \text{Não há garantia de convergência}$$

- No entanto, uma permutação entre as duas primeiras linhas garante a convergência:

$$\left.\begin{array}{lcl} 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 & \longleftarrow & 2+2 < 5 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = -2 & \longleftarrow & 1+1 < 3 \\ 6x_2 + 8x_3 = -6 & \longleftarrow & 6 < 8 \end{array}\right\} \text{Garantia de convergência}$$

- Quando o critério das linhas não for satisfeito, convém tentar uma permutação de linhas e/ou colunas

Resolução de Sistemas de Equações Lineares Simultâneas
Métodos Numéricos de Resolução – Métodos Interativos

Complexidade

- Avaliar a quantidade de operações requeridas em um método iterativo, em cada iteração, é bastante simples.

- O que não é trivial é determinar o número total de operações realizadas.

- Uma vez que é estabelecido um número máximo de iterações, no pior caso, este será o número de vezes que as iterações serão executadas.

- Pode ser demonstrado que, para um sistema de n equações, o número total de operações, por iteração, é **($2n^2 - n$).**

Resolução de Sistemas de Equações Lineares Simultâneas
Métodos Numéricos de Resolução – Métodos Interativos

Complexidade

- O Método de **Gauss** requer **$(4.n^3 + 9.n^2 - 7.n)/6$** operações aritméticas.
- Os Métodos de **Jacobi e Gauss-Seidel** requerem **$(2.n^2 - n)$** operações aritméticas por iteração.
- Para valores grandes de n, os números de operações aritméticas são, aproximadamente,

  Método de Gauss: $2.n^3/3$

  Jacobi e Gauss-Seidel: $2.n^2$ por iteração

- Assim, se o número de iterações é menor ou igual a (n/3), então os métodos iterativos requerem menos operações aritméticas.

Considerações finais

- Comparação entre os Métodos Diretos e Iterativos considerando cinco indicadores.

Indicador	Método Direto	Método Iterativo
Aplicação	Para a resolução de sistemas de equações densos de pequeno a médio porte.	Para a resolução de sistemas de equações de grande porte, notadamente os esparsos.
Esparsidade	Destrói a esparsidade da matriz dos coeficientes durante a fase de eliminação.	Preserva a esparsidade da matriz da matriz dos coeficientes.
Número de operações	É possível determinar, a priori, o número de operações necessárias.	Não é possível determinar a complexidade a priori.
Convergência	Se a matriz dos coeficientes não é singular, então a solução é sempre obtida.	Há garantia de se obter a solução somente sob certas condições
Erros de arredondamento	São ampliados durante os cálculos. Podem ser minimizados usando uma técnica de pivotação.	Não afetam os resultados obtidos em cada iteração. Apenas a solução final pode conter erro.