MBA USP ESALQ

FUNDAMENTOS DE ESTATÍSTICA

Prof. Dr. Wilson Tarantin Junior

*A responsabilidade pela idoneidade, originalidade e licitude dos conteúdos didáticos apresentados, é do professor.

Proibida a reprodução total ou parcial, sem autorização. Lei nº 9610/98

Tipos de variáveis

- As variáveis podem ser classificadas em:
  - **Qualitativas**: são variáveis não métricas, atribuem categorias ou classificações
    - Podem atribuir duas ou mais categorias
    - A análise descritiva de variáveis qualitativas é feita por meio de tabelas de frequência e gráficos, pois tais variáveis não permitem o cálculo de medidas de posição e dispersão
  - **Quantitativas**: são variáveis métricas, atribuem contagem ou mensuração
    - Podem ser discretas ou contínuas
    - A análise descritiva de variáveis quantitativas pode ser feita por diversas ferramentas estatísticas, incluindo as medidas de posição e dispersão

Tipos de variáveis

- **Qualitativas**: exemplos
  - Escalas Likert
  - Faixa de renda
  - Nacionalidade
  - Estado civil
  - Escolaridade
  - Tipo de solo
  - Vacinado ou não
  - Cor do veículo

Tipos de variáveis

- **Quantitativas**: exemplos
  - Idade
  - Renda (em R$)
  - Quantidade de filhos
  - Altura da pessoa (em cm)
  - Peso (em kg)
  - Retorno de ações na bolsa
  - Temperatura do ambiente
  - Lucro/prejuízo da empresa

Estatísticas Descritivas

1. Tabela de frequências

- Quantidade de ocorrências por categoria

  - **Qualitativas**

    - De forma direta, apresenta a quantidade de ocorrências para cada categoria

  - **Quantitativas**

    - Variável discreta: a análise assemelha-se ao caso da variável qualitativa, ou seja, mostra a quantidade de ocorrências para cada valor discreto da variável
    - Variável contínua: é necessária uma categorização inicial por classes ou faixas para, em seguida, apresentar a quantidade de ocorrências em cada categoria gerada

1. Tabela de frequências

- Elaborando uma tabela de frequências

  - Os tipos de frequências reportados são:

    - **Frequência absoluta**: contagem de ocorrências em cada categoria
    - **Frequência relativa**: percentual de cada categoria em relação ao total de observações
    - **Frequência acumulada**: soma da frequência absoluta a cada nova categoria
    - **Frequência relativa acumulada**: soma da frequência relativa a cada nova categoria

  - **Exemplo:** Foram coletados dados sobre o país de origem de 300 pessoas que estavam em uma palestra. A tabela de frequências para a variável "país de origem" está disponível na planilha de suporte na **aba Tabela de Frequências**.

2. Medidas de posição

- **Média**
- **Mediana**
- **Moda**
- **Percentis**
- **Quartis**
- **Decis**

2. Medidas de posição

- **Média**

  - É média aritmética simples para a variável, ou seja, é a soma dos valores (X_i) contidos na variável dividido pela quantidade total de observações (n)

  - $\boldsymbol{\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}}$

2. Medidas de posição

- **Mediana**

  - É o elemento central da distribuição da variável, considerando que a variável esteja com seus *n* valores organizados de forma crescente

  - Metade dos valores da variável são maiores ou iguais ao valor da mediana e metade dos valores são menores ou iguais ao valor da mediana

- $$\boldsymbol{Md(X)} = \begin{cases} \dfrac{X_{\frac{n}{2}} + X_{\left(\frac{n}{2}\right)+1}}{2} & , \ \boldsymbol{se\ n\ for\ par} \\ X_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} & , \ \boldsymbol{se\ n\ for\ impar} \end{cases}$$

2. Medidas de posição

- **Moda**
  - É o valor que aparece com maior frequência nas observações de uma variável
  - A moda também pode ser calculada para dados qualitativos
  - É possível que não exista a moda de uma variável (especialmente, se for uma variável contínua)
    - Ocorre quando nenhum valor se repete

2. Medidas de posição

- **Percentis**

  - São os elementos da distribuição da variável que dividem as observações em **cem partes iguais**, considerando que a variável esteja com seus valores organizados de forma crescente

    - 14º Percentil
    - 42º Percentil
    - 60º Percentil ...

  - $\boldsymbol{Pos(P_i) = \left[(n-1).\left(\frac{P_i}{100}\right)\right] + 1}$

2. Medidas de posição

- **Quartis**
  - São os elementos da distribuição da variável que dividem as observações em **quatro partes iguais**, considerando que a variável esteja com seus valores organizados de forma crescente
    - 1º Quartil: 25% das observações são menores do que o 1º quartil
    - 2º Quartil: trata-se da mediana
    - 3º Quartil: 25% das observações são maiores do que o 3º quartil

    - 1º Quartil = 25º Percentil
    - 2º Quartil = 50º Percentil
    - 3º Quartil = 75º Percentil

2. Medidas de posição

- **Decis**
  - São os elementos da distribuição da variável que dividem as observações em **dez partes iguais**, considerando que a variável esteja com seus valores organizados de forma crescente
    - 1º Decil
    - 3º Decil
    - 8º Decil ...

    - 1º Decil = 10º Percentil
    - 3º Decil = 30º Percentil
    - 8º Decil = 80º Percentil

3. Medidas de dispersão

- **Amplitude**
- **Variância**
- **Desvio padrão**
- **Erro padrão**
- **Coeficiente de variação**

3. Medidas de dispersão

- **Amplitude**

  - Apresenta a diferença entre o valor máximo e o valor mínimo de uma variável

  - $A = X_{máx} - X_{mín}$

    - Valor máximo: maior valor da variável
    - Valor mínimo: menor valor da variável

3. Medidas de dispersão

- **Variância**

  - Mostra a dispersão das observações de uma variável em torno de sua média

  - $\boldsymbol{S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1}}$

    - Neste caso, trata-se da variância amostral

3. Medidas de dispersão

- **Desvio padrão**
  - É uma medida derivada da variância, tornando mais simples a interpretação da dispersão em torno da média
    - A variância é definida em termos quadrados, o que dificulta a interpretação
  - O desvio padrão é a raiz quadrada da variância
  - $\boldsymbol{S} = \sqrt{\boldsymbol{S}^2}$

3. Medidas de dispersão

- **Erro padrão**
  - É o desvio padrão da média da variável
  - $\boldsymbol{S_{\overline{X}} = \frac{S}{\sqrt{n}}}$
    - Sendo que *S* é o desvio padrão da variável e *n* o tamanho da amostra
  - Quanto maior o tamanho da amostra, menor o erro padrão na estimativa da média da variável → mais precisa é a média estimada

3. Medidas de dispersão

- **Coeficiente de variação (CV)**
  - É uma medida de dispersão relativa, pois relaciona o desvio padrão e a média de uma variável
  - Pode ser utilizada para realizar comparações entre amostras, por exemplo
  - Quanto menor o CV, mais homogêneos são os valores da variável e mais concentrados estão os valores em torno da média
  - $CV = \frac{S}{\bar{X}} . 100$

4. Medidas de forma

- **Assimetria e Curtose**

  - Assimetria: local de concentração da distribuição

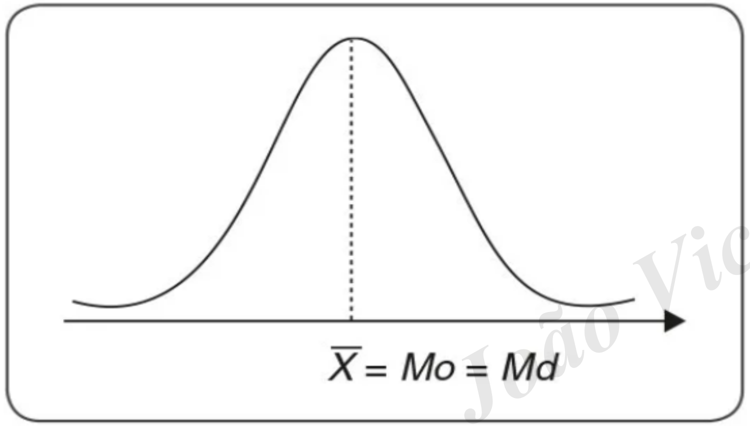
    - Curva Simétrica: **Média = Mediana = Moda**
    - Curvas Assimétricas – Direta: tem cauda mais longa à direita → **Média > Mediana**
    - Curvas Assimétricas – Esquerda: tem cauda mais longa à esquerda → **Média < Mediana**

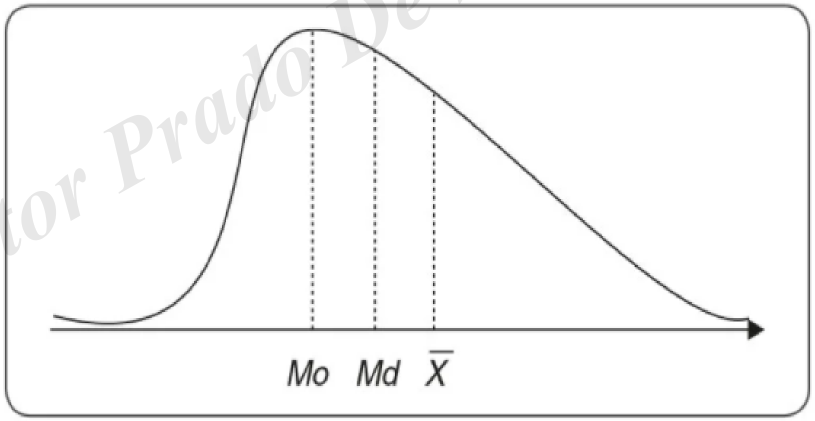
  - Coeficiente de Assimetria de Fisher:

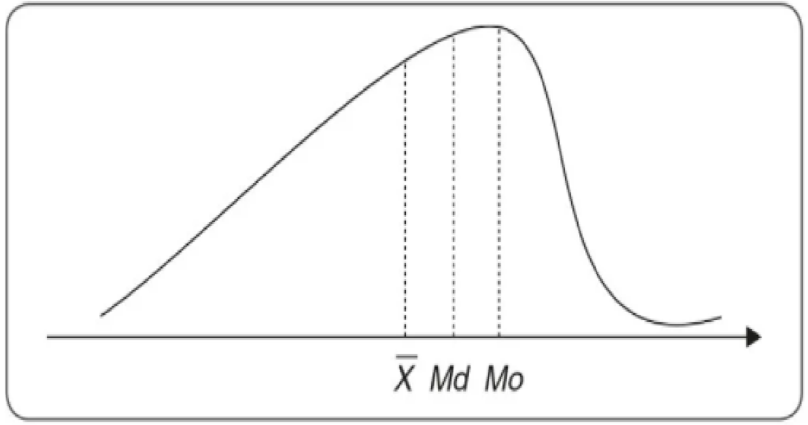
  - $\boldsymbol{g_1 = \frac{n^2 \,.\, M_3}{(n-1).(n-2).S^3}}$ em que $\boldsymbol{M_3 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^3}{n}}$

4. Medidas de forma

- **Assimetria**
  - Simétrica, Assimétrica à Direita e Assimétrica à Esquerda (respectivamente)







Fonte: Fávero e Belfiore (2017, Cap. 2)

4. Medidas de forma

- **Assimetria e Curtose**

  - Curtose: achatamento da curva de distribuição

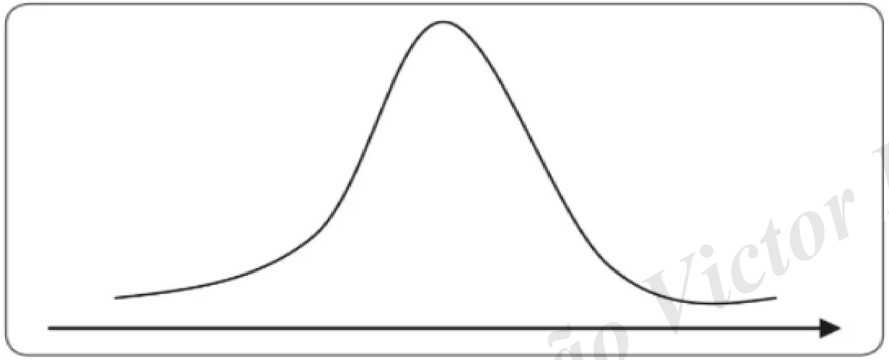
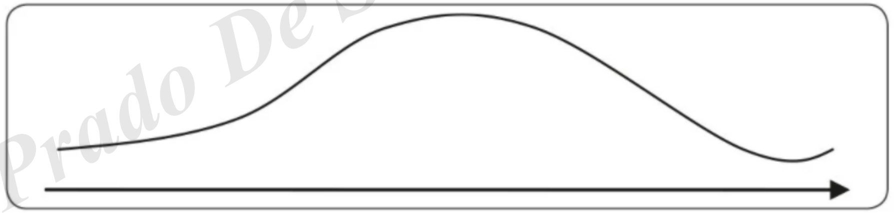
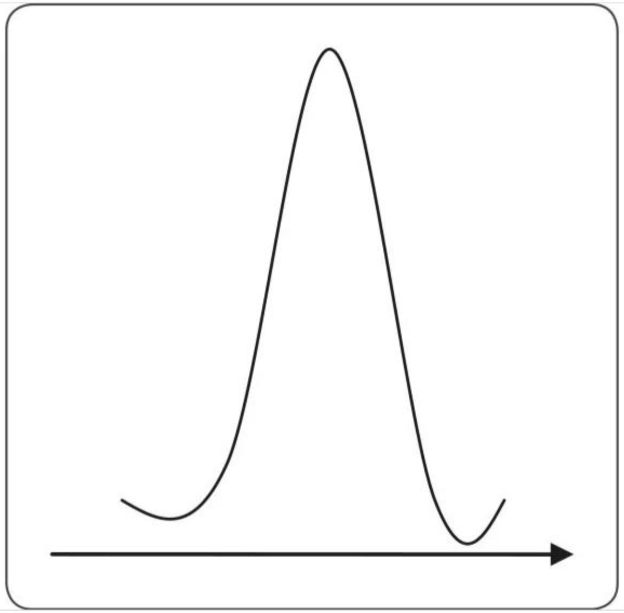
    - Com a curva normal como referência, é possível observar se as curvas têm menor dispersão em torno da média ou maior dispersão em torno da média

  - Coeficiente de curtose de Fisher:

- $\boldsymbol{g_2 = \frac{n^2 . (n+1) . M_4}{(n-1).(n-2).(n-3).S^4} - 3 . \frac{(n-1)^2}{(n-2).(n-3)}}$ em que $\boldsymbol{M_4 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^4}{n}}$

4. Medidas de forma

- **Curtose**
  - Mesocúrtica, platicúrtica e leptocúrtica (respectivamente)

Fonte: Fávero e Belfiore (2017, Cap. 2)

4. Medidas de forma

- **Assimetria e Curtose**
  - **Assimetria**
    - $g_1 = 0$ indica curva simétrica
    - $g_1 > 0$ indica curva assimétrica positiva (à direita)
    - $g_1 < 0$ indica curva assimétrica negativa (à esquerda)
  - **Curtose**
    - $g_2 = 0$ indica curva com distribuição normal
    - $g_2 > 0$ indica curva com distribuição alongada
    - $g_2 < 0$ indica curva com distribuição achatada

Posição, dispersão e forma

- **Aplicação conjunta das medidas**
  - **Exemplo:** Um consumidor está analisando o preço de um produto que deseja comprar. Para gerar mais informações para sua tomada de decisão, ele coleta 100 preços praticados para o produto. Como o "preço" é variável quantitativa, serão realizadas as análises por meio das medidas de posição, dispersão e forma abordadas anteriormente.
    - O banco de dados com as 100 observações de preço está na planilha suporte **na aba Descritivas – Quantitativa**.

5. Relação entre variáveis

- **Medidas de análises bivariadas**

  - Muitas vezes, o interesse pode estar na relação entre duas variáveis. Nestes casos, antes, é importante conhecer o tipo de variável:

    - **Variáveis qualitativas**: análise da **associação** pelo teste qui-quadrado (χ^2)

    - **Variáveis quantitativas**: análise da **correlação** por meio da covariância e coeficiente de correlação de Pearson

5. Relação entre variáveis

- **Teste qui-quadrado: variáveis qualitativas**

  - Inicia-se por meio de uma tabela de distribuição conjunta de frequências, a tabela de contingência (ou tabela de classificação cruzada) que apresenta as **frequências absolutas observadas** para cada par de categorias das variáveis

		Variável B					
		Categoria 1	**Categoria 2**	**Categoria 3**	**...**	**Categoria J**	**Total**
Variável A	**Categoria 1**	n_{11}	n_{12}	n_{13}	...	n_{1J}	Σ_{L1}
	Categoria 2	n_{21}	n_{22}	n_{23}	...	n_{2J}	Σ_{L2}
	Categoria 3	n_{31}	n_{32}	n_{33}	...	n_{3J}	Σ_{L3}
	...	...	...	...	...	...	...
	Categoria I	n_{I1}	n_{I2}	n_{I3}	...	n_{IJ}	Σ_{LI}
	Total	$\boldsymbol{\Sigma_{C1}}$	$\boldsymbol{\Sigma_{C2}}$	$\boldsymbol{\Sigma_{C3}}$	**...**	$\boldsymbol{\Sigma_{CJ}}$	N

5. Relação entre variáveis

- **Teste qui-quadrado: variáveis qualitativas**

  - Em seguida, são identificadas as **frequências absolutas esperadas** para cada par de categorias das variáveis

  - $\boldsymbol{freq.absoluta\ esperada_{11} = \frac{(\sum L1 \, . \sum C1)}{N}}$

    - O mesmo cálculo é realizado para cada par de categorias da tabela de contingência, mantendo-se as respectivas correspondências de linha e coluna no numerador

5. Relação entre variáveis

- **Teste qui-quadrado: variáveis qualitativas**

  - Posteriormente, são identificados os **resíduos** para cada par de categorias das variáveis

  - $\boldsymbol{res\acute{\imath}duo_{11} = freq.\,absoluta\;observada_{11} - freq.\,absoluta\;esperada_{11}}$

    - Os resíduos são identificados para cada par de categorias da tabela de contingência

5. Relação entre variáveis

- **Teste qui-quadrado: variáveis qualitativas**

  - Por fim, são calculados os valores χ^2 individuais de cada par de categorias

  - $\chi^2 = \dfrac{(\boldsymbol{resíduo})^2}{(\boldsymbol{freq.\ absoluta\ esperada})}$

  - E são somados valores χ^2 individuais para obter o valor χ^2 total da análise

5. Relação entre variáveis

- **Teste qui-quadrado: variáveis qualitativas**
  - Com base no valor χ^2 total, realiza-se o seguinte teste:
    - H_0: as variáveis se associam de forma aleatória.
    - H_1: a associação entre as variáveis não se dá de forma aleatória.
  - Dados o nível de significância e os graus de liberdade, se o valor da estatística χ^2 for maior do que seu valor crítico, há associação significante entre as duas variáveis (H_1)
    - Valor crítico da distribuição χ^2 com (I – 1) . (J – 1) graus de liberdade

5. Relação entre variáveis

- **Teste qui-quadrado: variáveis qualitativas**

  - **Exemplo:** Um estudo foi realizado com 200 pessoas com o intuito de analisar o comportamento conjunto da variável “operadora de plano de saúde” com a variável “nível de satisfação” do consumidor. O objetivo é analisar se existe a associação estatisticamente significativa entre tais variáveis. (Fonte: Fávero e Belfiore, 2017, Cap. 8)

    - Os dados da tabela de contingência obtida a partir da amostra está na planilha suporte na **aba Associação – Qui²**.

5. Relação entre variáveis

- **Coeficiente de correlação de Pearson**

  - É utilizado para identificar a correlação entre duas varáveis quantitativas

  - Inicia-se pelo cálculo da covariância entre as duas variáveis e, posteriormente, obtém-se o coeficiente de correlação de Pearson

  - $\boldsymbol{cov(X,Y) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}) \, . \, (Y_i - \bar{Y})}{n-1}}$

  - $\boldsymbol{\rho_{XY} = \frac{cov(X,Y)}{S_X \, . \, S_Y}}$, sendo que $\boldsymbol{\rho_{XY}}$ varia entre -1 e 1

ρ_{XY} = -1 (perfeita negativa)
ρ_{XY} = 0 (sem correlação)
ρ_{XY} = 1 (perfeita positiva)

5. Relação entre variáveis

- **Coeficiente de correlação de Pearson**

  - **Exemplo:** O coordenador de um curso deseja analisar se existe correlação entre as notas dos alunos em diferentes matérias. Para tanto, montou um banco de dados com as notas de 30 alunos para as disciplinas de matemática, física e literatura. Em seguida, deseja calcular os pares de correlações entre as notas de matemática – física, matemática – literatura e física – literatura. Quais são as correlações de Pearson obtidas?

    - Os dados estão na planilha suporte na **aba Correlação de Pearson**.

Distribuições de Probabilidades

Variáveis e as distribuições

- **Característica primordial**

  - **Variável aleatória discreta**: é aquela que não assume valores decimais, ou seja, é composta exclusivamente de valores inteiros

    - Exemplos: número de filhos; quantidade de pacientes por dia; quantidade de mudas por hectare; quantidade de casos da doença por dia...

  - **Variável aleatória contínua**: é aquela que pode assumir quaisquer valores contidos nos números reais

    - Exemplos: distância ente cidades; salário mensal; altura da pessoa; retorno da ação...

Variáveis discretas

- **Distribuições de probabilidade:**
  - **Uniforme**
  - **Bernoulli**
  - **Binomial**
  - **Binomial negativa**
  - **Poisson**

Variáveis discretas

- **Distribuição uniforme discreta**
  - Todos os possíveis valores têm a mesma probabilidade de ocorrência
  - $\boldsymbol{P(X = x_i) = \frac{1}{n}}$
  - O parâmetro *n* representa a quantidade de possíveis valores

Variáveis discretas

- **Distribuição uniforme discreta**
  - **Exemplo:** As probabilidades dos resultados possíveis ao lançar um dado são:
    - $P(X=1) = 1/6$
    - $P(X=2) = 1/6$
    - $P(X=3) = 1/6$
    - $P(X=4) = 1/6$
    - $P(X=5) = 1/6$
    - $P(X=6) = 1/6$

Variáveis discretas

- **Distribuição de Bernoulli**

  - Os valores da variável podem assumir apenas dois resultados possíveis, sendo que tais resultados são chamados de sucesso (x=1) ou fracasso (x=0)

  - A distribuição de Bernoulli apresenta a probabilidade de sucesso (p) ou de fracasso (1 – p) quando ocorre apenas um experimento

  - $\boldsymbol{P(X = x) = p^{x} \, . \, (1 - p)^{1-x}}$

Logística binária!

Variáveis discretas

- **Distribuição de Bernoulli**

  - **Exemplo:** A probabilidade (*p*) de que um candidato seja aprovado (x=1) em um exame para um conselho de classes é de 48%. Se cada candidato só pode realizar o exame uma vez, analise as probabilidades possíveis por meio da distribuição de Bernoulli.

    - ***P(X=1)*** = $(0{,}48)^1 \,.\, (1 – 0{,}48)^0$ = 0,48 ou 48%
    - ***P(X=0)*** = $(0{,}48)^0 \,.\, (1 – 0{,}48)^1$ = 0,52 ou 52%

    - Sendo que X=1 é aprovação e X=0 é a reprovação no exame.

Variáveis discretas

- **Distribuição binomial**

  - A distribuição binomial ocorre quando há (n) repetições independentes do experimento de Bernoulli e a probabilidade de sucesso (p) é constante em todas as repetições

  - A variável no modelo binomial indica a quantidade de sucessos (k) nas (n) repetições do experimento

  - $\boldsymbol{P(X = k) = \binom{n}{k} \, . \, p^k \, . \, (1 - p)^{n-k}}$ em que $\boldsymbol{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$

Logística multinomial!

Variáveis discretas

- **Distribuição binomial**

  - **Exemplo:** Em uma indústria, sabe-se que a probabilidade (*p*) de encontrar peças defeituosas em cada lote produzido é 6,50%. São produzidos 12 lotes (*n*) da peça por mês. Analise as seguintes probabilidades (*k*):

    a) Qual a probabilidade de encontrar peças defeituosas em 2 lotes no mês?
    b) Qual a probabilidade de encontrar peças defeituosas em 4 lotes no mês?
    c) Qual a probabilidade de encontrar peças defeituosas em no máximo 2 lotes?

    - A planilha para auxílio está na planilha de suporte na **aba Distribuição Binomial**.

Variáveis discretas

- **Distribuição binomial negativa**

  - Na distribuição binomial negativa, são realizados (*x*) ensaios independentes de Bernoulli até que sejam obtidos (*k*) sucessos

  - A probabilidade de sucesso (*p*) é constante em todos os ensaios realizados

  - A variável no modelo binomial negativa indica a quantidade de ensaios (*x*)

  - $\boldsymbol{P(X = x) = \binom{x-1}{k-1} \cdot p^{k} \cdot (1-p)^{x-k}}$ em que $\boldsymbol{\binom{x-1}{k-1} = \frac{(x-1)!}{(k-1)![(x-1)-(k-1)]!}}$

Variáveis discretas

- **Distribuição binomial negativa**

  - **Exemplo:** Em um parque de diversões, existe uma máquina em que o jogador deve capturar algum item utilizando os comandos de um braço mecânico. Considere que a probabilidade (p) de que o jogador consiga capturar algum item em cada jogada é 11%. Identifique as seguintes probabilidades:

    a) De que o jogador necessite de 10 jogadas para capturar 3 itens.
    b) De que o jogador necessite de 20 jogadas para capturar 3 itens.
    c) De que o jogador necessite de 5 jogadas para capturar 1 item.

    - A planilha para auxílio está na planilha de suporte na **aba Distribuição Binomial Negativa**

Variáveis discretas

- **Distribuição Poisson**

  - A distribuição Poisson indica a probabilidade do número de sucessos (k) em uma determinada exposição contínua

  - Exemplos de exposição: tempo e área

  - $\boldsymbol{P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} . \lambda^{k}}{k!}}$

    - Em que $\boldsymbol{\lambda}$ é a taxa média estimada de ocorrência do evento (sucesso) em dada exposição

Variáveis discretas

- **Distribuição Poisson**
  - **Exemplo:** Um médico notou que a taxa média de ocorrência (λ) de pacientes com certa doença rara em seu consultório é de 2 por ano. Aceitando que esta variável tenha distribuição Poisson, estime:

    a) A probabilidade de que o médico receba 1 paciente com a doença em um ano.
    b) A probabilidade de que o médico receba 3 pacientes com a doença em um ano.
    c) A probabilidade de que o médico não receba pacientes com a doença em um ano.
    d) A probabilidade de que o médico receba 10 pacientes com a doença nos próximos 2 anos.

    - A planilha para auxílio está na planilha de suporte na **aba Distribuição Poisson**.

MBA USP ESALQ

Variáveis contínuas

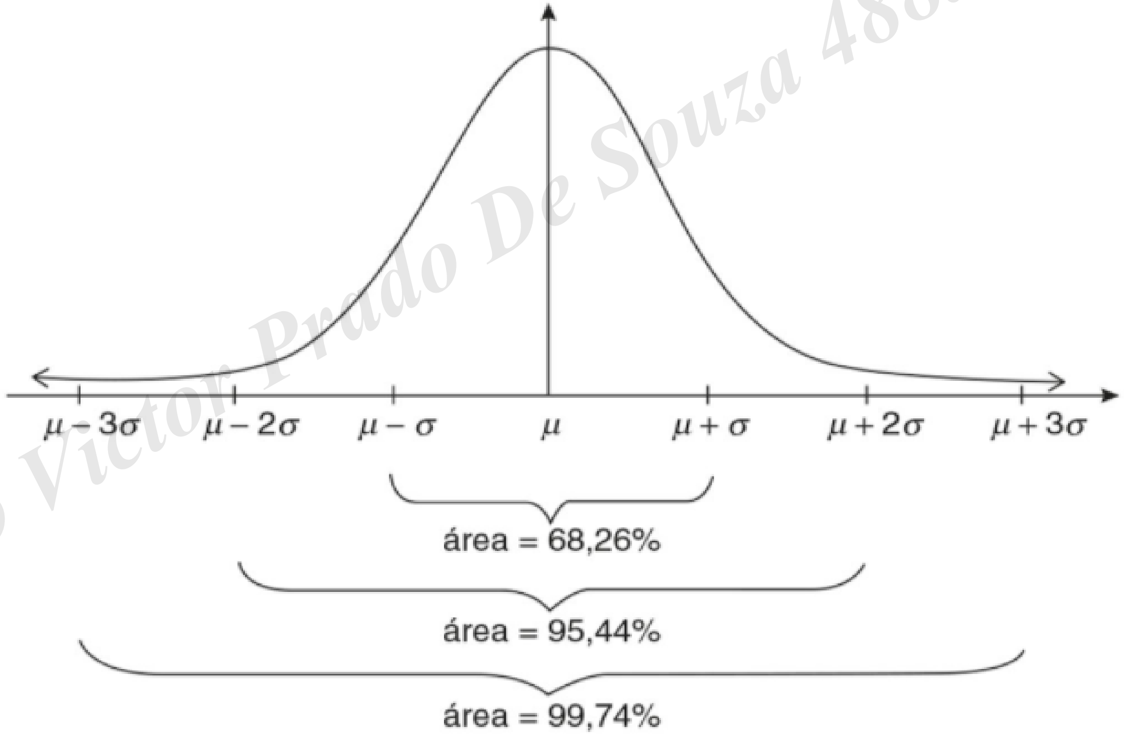
- **Distribuições de probabilidade:**
  - **Normal (Normal Padrão)**
  - **Qui-quadrado**
  - ***t de Student***
  - **F de Snedecor**

Variáveis contínuas

- **Distribuição normal**
  - É a distribuição Gaussiana, com curva em forma de sino
  - Os parâmetros relevantes da distribuição normal são a média (μ) e o desvio padrão (σ) da variável
  - $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{\sigma \,.\sqrt{2\pi}} \,.\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\,.\,\sigma^2}}}$

Variáveis contínuas

- **Distribuição normal**



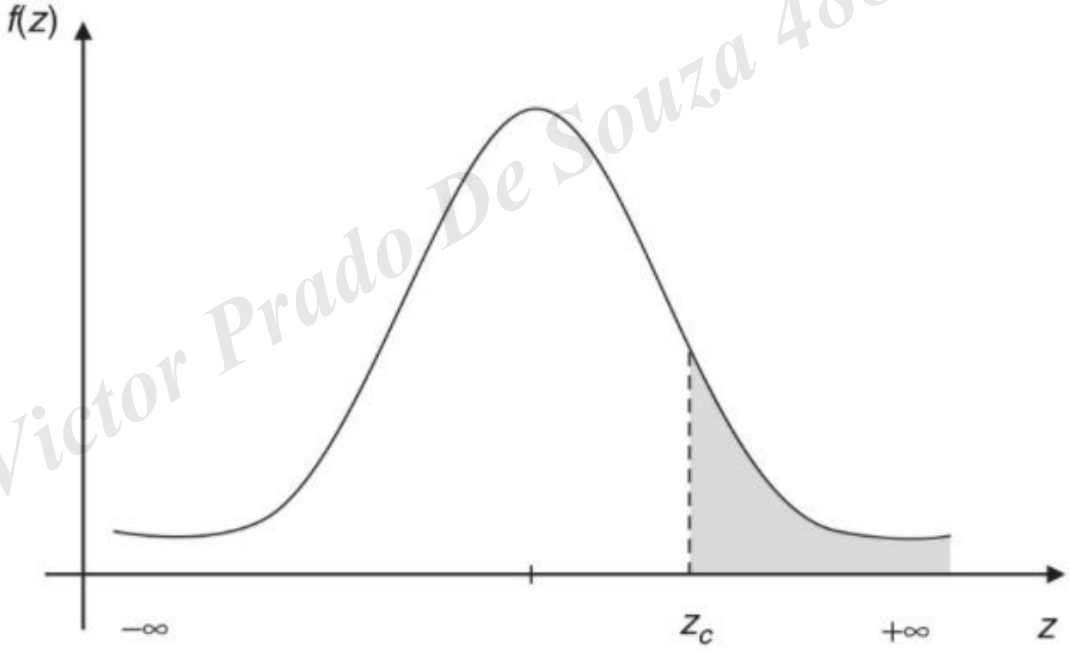
Fonte: Fávero e Belfiore (2017, Cap. 5)

Variáveis contínuas

- **Distribuição normal padrão**
  - Para obter a normal padrão, transforma-se a variável por meio do Z-score
  - A transformação pelo Z-score faz com que a variável passe a ter média = 0 e desvio padrão = 1 e não altera a distribuição original
  - $\boldsymbol{Z = \frac{(X - \mu)}{\sigma}}$
  - **Exemplo:** valores críticos em uma tabela normal padrão e no Excel

Variáveis contínuas

- **Distribuição normal padrão**



Fonte: Fávero e Belfiore (2017, Cap. 5)

Variáveis contínuas

- **Distribuição normal padrão**

  - **Exemplo:** Um investidor calculou que o retorno médio mensal de uma ação na bolsa de valores foi 2,80%. No mesmo período, o desvio padrão dos retornos da ação foi de 1,20%. Com base na distribuição normal, calcule:

    a) A probabilidade de que o retorno da ação seja maior do que 4% ao mês.
    b) A probabilidade de que o retorno da ação seja menor do que 3% ao mês.
    c) A probabilidade de que o retorno da ação seja negativo.
    d) A probabilidade de que o retorno da ação seja maior que 1% e menor que 5% ao mês.

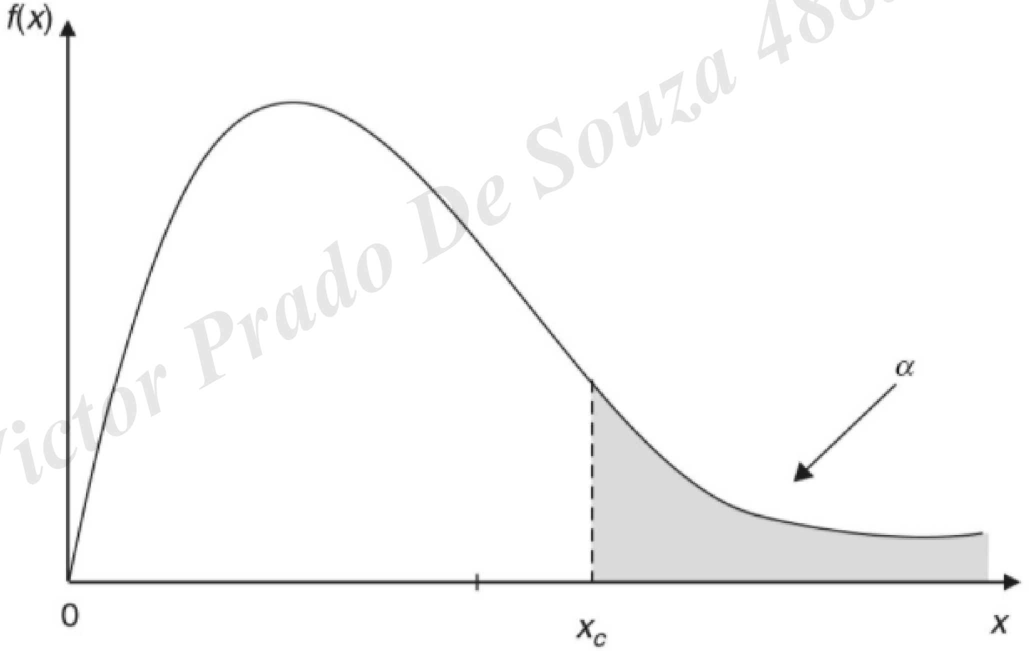
    - A planilha para auxílio está na planilha de suporte na **aba Distribuição Normal**.

Variáveis contínuas

- **Distribuição qui-quadrado (χ^2)**
  - A distribuição χ^2 apresenta curva assimétrica e positiva
  - É formada a partir da soma dos quadrados de v variáveis aleatórias independentes com distribuição normal padrão
  - **Exemplo:** valores críticos em uma tabela qui-quadrado e no Excel

Variáveis contínuas

- **Distribuição qui-quadrado (χ^2)**



Fonte: Fávero e Belfiore (2017, Cap. 5)

Variáveis contínuas

- **Distribuição qui-quadrado (χ^2)**

  - **Exemplo:** Um pesquisador em botânica identificou que um teste estatístico de seu estudo deve ser avaliado com base na distribuição qui-quadrado, sendo 7 graus de liberdade em seu teste. Neste contexto, avalie o seguinte:

    a) A probabilidade de que encontre um valor $X>6$.
    b) A probabilidade de que encontre um valor $X<8$.
    c) O valor de X que faz com que a $P(X>x)$ seja 5%.
    d) O valor de X que faz com que a $P(X<x)$ seja 90%.

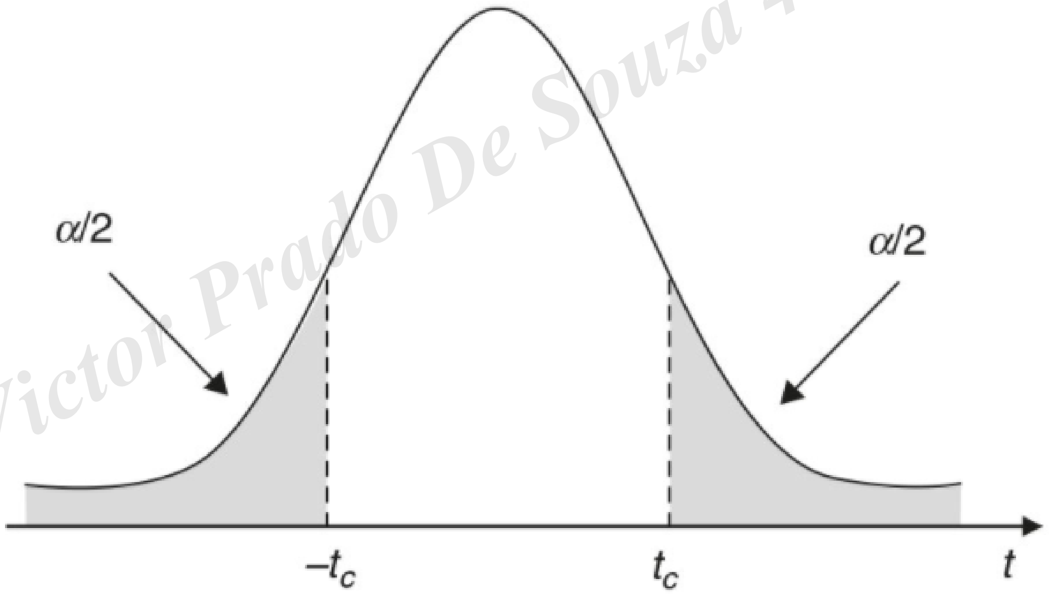
    - A planilha para auxílio está na planilha de suporte na **aba Distribuição Qui-Quadrado**

Variáveis contínuas

- **Distribuição *t de Student***
  - A distribuição *t de Student* é parecida com a distribuição normal padrão, ou seja, tem formato de sino e é simétrica em torno da média
  - Por outro lado, a distribuição *t de Student* tem caudas mais longas e isso permite valores mais extremos
  - Uma aplicação da distribuição *t de Student* é o teste de hipóteses para médias
  - **Exemplo:** valores críticos em uma tabela *t de Student* e no Excel

Variáveis contínuas

- **Distribuição *t de Student***



Fonte: Fávero e Belfiore (2017, Cap. 5)

Variáveis contínuas

- **Distribuição *t de Student***

  - **Exemplo:** O gestor do controle de qualidade de uma empresa está realizando uma análise com base na distribuição t de Student. Em seu teste, há 7 graus de liberdade. Quais são os resultados nas seguintes situações:

    a) A probabilidade de que encontre T > 2,5.
    b) A probabilidade de que encontre T < - 2,5.
    c) A probabilidade de que encontre T>-1 e T<2.
    d) O valor de T para que P(T>t) = 5%.

    - A planilha para auxílio está na planilha de suporte na **aba Distribuição t Student**.

Variáveis contínuas

- **Distribuição F de Snedecor**

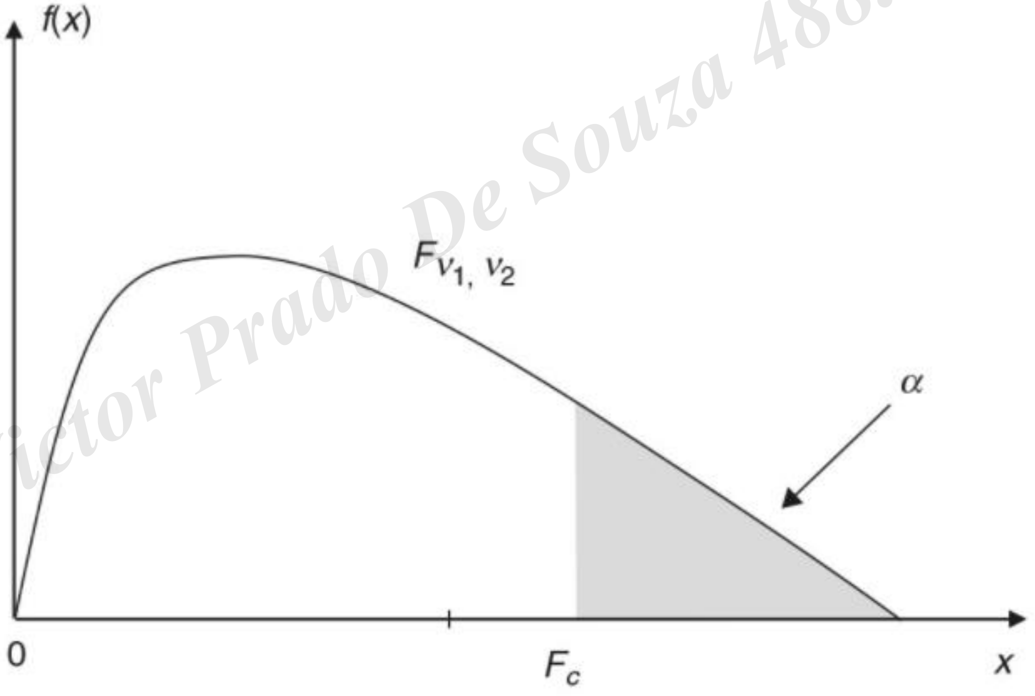
  - Uma aplicação comum da distribuição F (distribuição de Fischer) é a análise de variâncias

  - Tem distribuição de probabilidades assimétrica e positiva quando os graus de liberdade v_1 e v_2 são pequenos

  - **Exemplo:** valores críticos em uma tabela F de Snedecor e no Excel

Variáveis contínuas

- **Distribuição F de Snedecor**



Fonte: Fávero e Belfiore (2017, Cap. 5)

Variáveis contínuas

- **Distribuição F de Snedecor**

  - **Exemplo:** Um cientista de dados está realizando um teste estatístico que tem como base a distribuição F de Snedecor. No teste, há 17 graus de liberdade no numerador e 28 graus de liberdade no denominador. Determine:

    a) A probabilidade de que encontre $X > 1,5$.
    b) A probabilidade de que encontre $X < 1,0$.
    c) A probabilidade de que encontre $2<X<3$.
    d) O valor de F para que $P(X>x) = 5\%$.

    - A planilha para auxílio está na planilha de suporte na **aba Distribuição F de Snedecor**.

Graus de liberdade

- **O que são os graus de liberdade?**

  - As distribuições qui-quadrado, t de Student e F de Snedecor têm sua forma e, consequentemente, seus valores alterados em função dos graus de liberdade

  - “Graus de liberdade <u>para variar</u>”: é a quantidade de observações da amostra que pode variar de forma independente e aleatória e ainda assim obter o valor em análise

    - Cada teste estatístico tem um cálculo específico dos graus de liberdade, ou seja, não é padrão para todos os testes. Normalmente, leva-se em consideração o tamanho da amostra e a quantidade de parâmetros estimados

Graus de liberdade

- **O que são os graus de liberdade?**
  - Exemplo
    - Considere uma amostra de 5 números cuja soma deve ser igual a 18. Os 4 primeiros elementos da amostra podem ser escolhidos aleatoriamente, mas o 5º elemento deve ser um valor específico → o valor que tornará a soma = 18
    - {1; 3; 5; 7; _}: dado que os valores 1, 3, 5 e 7 foram selecionados, o 5º elemento deve ser obrigatoriamente igual a **2** para atender à restrição da soma
    - Portanto, há **4 graus de liberdade (poderia ser escrito como n-1 graus de liberdade, onde n é o tamanho da amostra)**

Graus de liberdade

- **Qual a relação dos graus de liberdade com os testes estatísticos?**
  - Analisando as tabelas das distribuições de probabilidade notamos que:
    - Para uma dada probabilidade (área sob a curva), os valores críticos da distribuição se alteram em função das alterações nos graus de liberdade
    - Isto significa que os graus de liberdade do teste estatístico são fundamentais, pois irão impactar o teste de hipótese (conforme veremos a seguir)
    - Influencia o valor crítico que será utilizado como base de comparação para a rejeição ou não da hipótese nula do teste

Testes de Hipóteses

Testes de hipóteses

- **Finalidade**

  - Em certos casos, podemos estar interessados em testar características sobre parâmetros populacionais como a média e o desvio padrão (variância)

  - Dada a impossibilidade de obter os dados sobre a população, utilizamos as amostras da população

  - Para testar o parâmetro de interesse por meio de amostras, utilizamos os testes de hipóteses estatísticas

Tipos de testes

- **Teste bilateral (bicaudal)**

  - No teste bilateral, para um parâmetro θ, o interesse é testar:

    - H_0: $\theta = \theta_0$ (hipótese nula)
    - **H_1: $\theta \neq \theta_0$ (hipótese alternativa)**

  - O objetivo é verificar se o parâmetro é **estatisticamente diferente** de certo valor de interesse

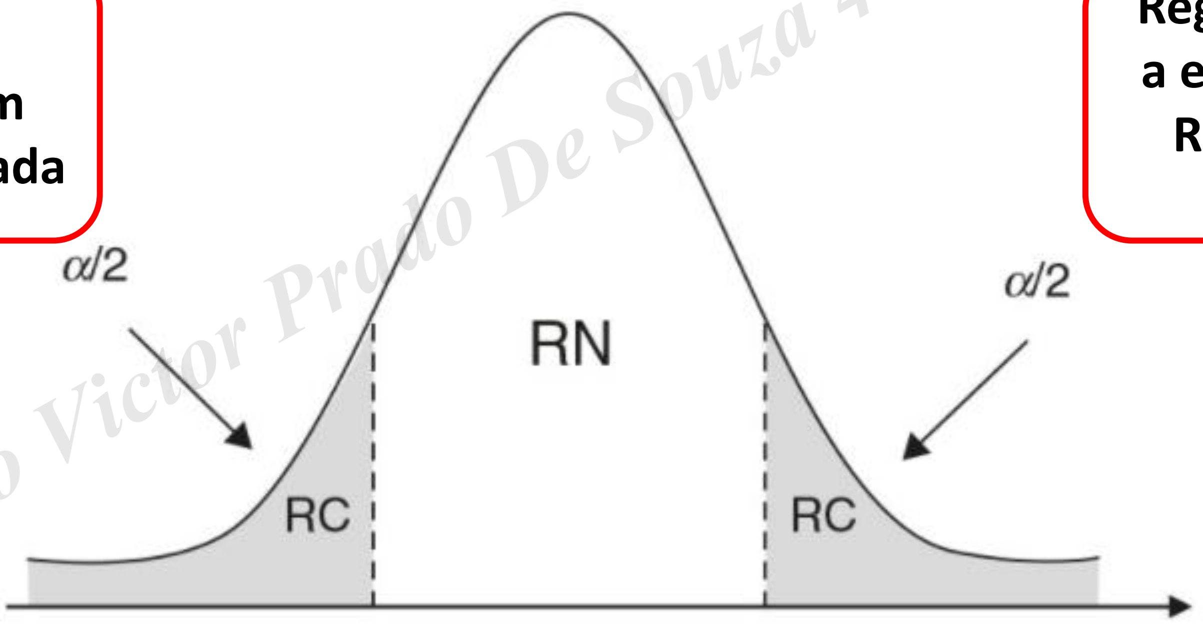
  - É necessário definir o **nível de significância (α)** desejada para a análise

Tipos de testes

- **Teste bilateral (bicaudal)**

Região Crítica (RC): se a estatística do teste cair em RC, a hipótese nula é rejeitada

Região Não Rejeição (RN): se a estatística do teste cair em RN, a hipótese nula não é rejeitada



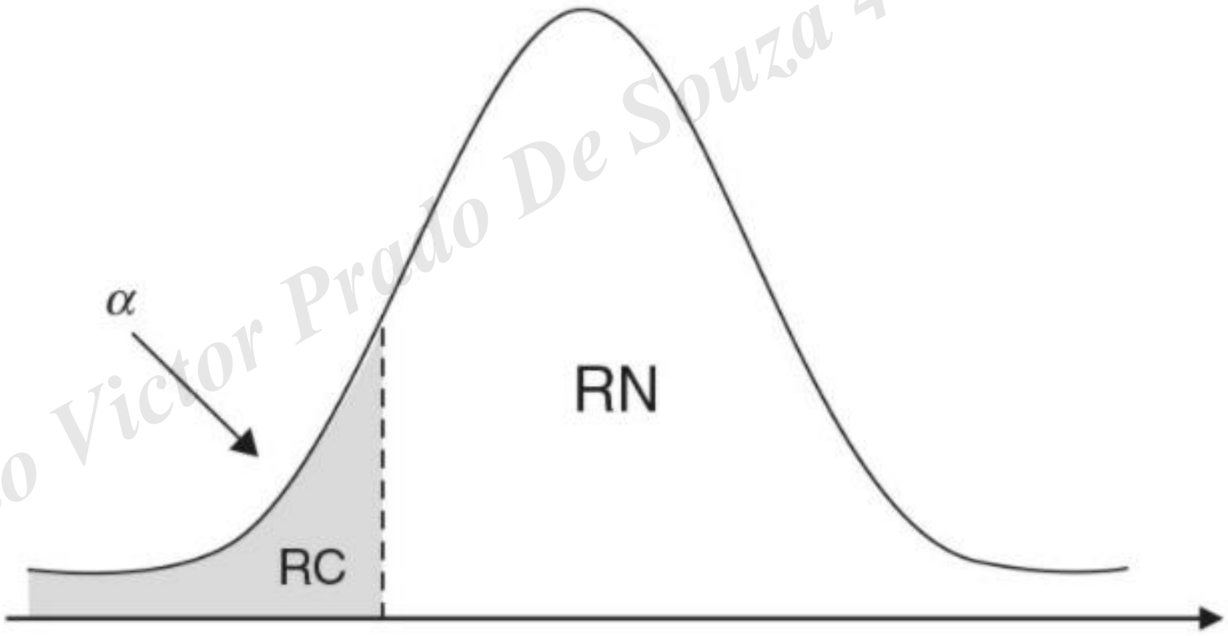
Fonte: Fávero e Belfiore (2017, Cap. 7)

Tipos de testes

- **Teste unilateral à esquerda**
  - No teste unilateral à esquerda, para um parâmetro θ, o interesse é testar:
    - H_0: $\theta = \theta_0$ (hipótese nula)
    - **H_1: $\theta < \theta_0$ (hipótese alternativa)**
  - O objetivo é analisar se o parâmetro é **estatisticamente menor** do que certo valor de interesse

Tipos de testes

- **Teste unilateral à esquerda**



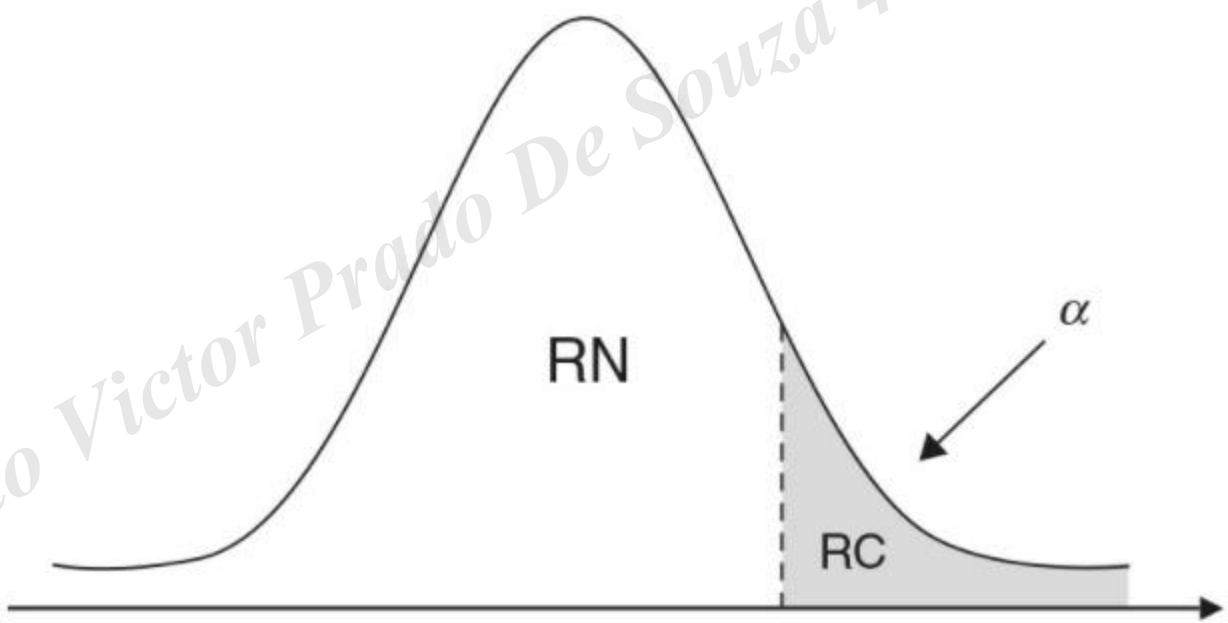
Fonte: Fávero e Belfiore (2017, Cap. 7)

Tipos de testes

- **Teste unilateral à direita**
  - No teste unilateral à direita, para um parâmetro θ, o interesse é testar:
    - $H_0: \theta = \theta_0$ (hipótese nula)
    - **$H_1: \theta > \theta_0$ (hipótese alternativa)**
  - O objetivo é verificar se o parâmetro é **estatisticamente maior** do que certo valor de interesse

Tipos de testes

- **Teste unilateral à direita**



Fonte: Fávero e Belfiore (2017, Cap. 7)

Tipos de erros

- **Possíveis erros na tomada de decisão**
  - **Erro tipo I:** rejeitar a hipótese nula (H_0) quando ela é verdadeira
  - **Erro tipo II:** não rejeitar a hipótese nula (H_0) quando ela é falsa
- As decisões corretas são:
  - Rejeitar H_0 quando ela é falsa
  - Não rejeitar H_0 quando ela é verdadeira

Significância do teste

- **Nível de significância do teste**
  - O nível de significância (α) indica a probabilidade de rejeitar H_0 quando ela é verdadeira, ou seja, a probabilidade de cometer o erro tipo I
  - Alguns níveis de significância recorrentemente utilizados:
    - $\alpha = 1\%$
    - $\alpha = 5\%$
    - $\alpha = 10\%$
  - O nível de confiança do teste é definido como $1 - \alpha$

P-valor e teste de hipótese

- **P-valor e nível de significância**

  - Uma forma de testar estatisticamente a hipótese é comparando o valor da estatística calculada nos dados com o valor crítico para o nível de significância

  - Também é possível obter o p-valor para a estatística calculada e, em seguida, compará-lo ao nível de significância escolhido

    - Se p-valor < nível de significância (α) → **rejeita-se H_0**
    - Se p-valor > nível de significância (α) → **não rejeita H_0**

  - **O p-valor é a probabilidade associada ao valor da estatística calculada**

Testes de hipóteses

- **Teste Z para médias de uma amostra**

  - Aplicado quando o desvio padrão populacional é conhecido e a distribuição da variável é normal (ou utilizando grandes amostras)

  - A estatística do teste é:

  - $\boldsymbol{Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}}$

  - A distribuição relevante para os valores críticos é a normal padrão

Testes de hipóteses

- **Teste Z para médias de uma amostra**

  - **Exemplo:** Um fabricante de caixas de papelão deseja verificar se a quantidade de papelão que está sendo utilizada em cada caixa do tipo 1 está de acordo com seu padrão histórico, pois existem indícios de que o consumo aumentou. Historicamente, são utilizados, em média, 100 g de papelão em cada caixa e o desvio padrão é de 12g. Coletou-se uma amostra para verificar se a média atual é maior do que a média histórica.

    - A amostra coletada está na planilha suporte na **aba Teste Z médias**.

Testes de hipóteses

- **Teste *t* para médias de uma amostra**

  - Aplicado quando o desvio padrão populacional não é conhecido e, assim, é utilizado o desvio padrão amostral

  - Estatística do teste é semelhante ao Z, porém com desvio padrão amostral:

  - $\boldsymbol{T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}}$

  - A distribuição relevante é a *t de student* com *n-1* graus de liberdade

Testes de hipóteses

- **Teste *t* para médias de uma amostra**
  - **Exemplo:** O tempo médio de processamento de determinada tarefa em uma máquina tem sido de 18 minutos. Foram introduzidos novos conceitos para reduzir o tempo médio de processamento. Desta forma, após certo período, coletou-se uma amostra de 25 elementos, obtendo-se o tempo médio de 16,808 minutos com desvio-padrão de 2,733 minutos. Verifique se esse resultado evidencia uma melhora no tempo médio de processamento. Considere α = 1%. (Fonte: Fávero e Belfiore, 2017, Cap. 7)
    - Os dados estão na planilha suporte na **aba Teste t médias**.

Testes de hipóteses

- **Teste *t* para correlações**

  - Após estimado o coeficiente de correlação (*r*) entre as variáveis quantitativas, é possível testar a significância do parâmetro estimado

  - Estatística do teste:

  - $\boldsymbol{t = \frac{r}{\sqrt{\frac{(1-r^2)}{(n-2)}}}}$

  - A distribuição relevante é a *t de student* com *n-2* graus de liberdade

Testes de hipóteses

- **Teste *t* para correlações**

  - **Exemplo:** Voltando ao exemplo da correlação entre as notas dos alunos, agora o objetivo é avaliar se as correlações obtidas para as amostras de notas são significantes. O coordenador utilizou o nível de significância de 5% para suas análises.

    - Os dados estão na planilha suporte na **aba Correlação de Pearson**.

Testes de hipóteses

- **Teste qui-quadrado para uma amostra**
  - Aplicado quando a variável assume duas ou mais categorias (K) e o objetivo é verificar se há diferenças entre as frequências observada (O) e esperada (E)
  - A estatística do teste é:
  - $\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$
  - A distribuição relevante é a qui-quadrado com *k-1* graus de liberdade

Testes de hipóteses

- **Teste qui-quadrado para uma amostra**

  - **Exemplo:** Uma loja deseja verificar se a quantidade vendida em cada dia da semana varia em função do dia da semana. Os dados para as vendas em cada dia de uma semana escolhida aleatoriamente foram tabulados. Neste caso, o objetivo é testar se a frequência observada e esperada são iguais ou se são diferentes. (Fonte: Fávero e Belfiore, 2017, Cap. 8)

    - Os dados tabulados estão na planilha de suporte na **aba Teste Qui² Uma Amostra**.

Testes de hipóteses

- **Teste F para comparação de variâncias**

  - Aplicado para comparar as variâncias de duas amostras independentes

  - A estatística do teste é:

  - $\boldsymbol{F = \frac{S^2_{maior}}{S^2_{menor}}}$

  - A distribuição relevante é a F de Snedecor, com *n-1* graus de liberdade no numerador e *n-1* graus de liberdade no denominador

Testes de hipóteses

- **Teste F para comparação de variâncias**

  - **Exemplo:** Uma empresa de logística está analisando qual entre duas rotas oferece a melhor previsibilidade para o horário de entrega ao seu maior cliente. Foram coletados dados sobre o tempo de entrega durante 35 dias para cada rota. O diretor de logística deseja testar a hipótese que a rota B tem maior variabilidade no tempo de entrega, comparativamente à rota A.

    - Os dados estão na planilha suporte na **aba Teste F Variâncias**.

Intervalo de confiança

- **Intervalo de confiança para a média**

  - Quando obtemos a estimativa para a média populacional a partir de uma amostra, também podemos construir seu intervalo de confiança, isto é, um intervalo de valores possíveis para o parâmetro populacional

  - É necessário estabelecer o nível de confiança da análise (por exemplo, 95%)

  - $\underbrace{\boldsymbol{IC = \left(\bar{x} - Z \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{x} + Z \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right)}}_{\text{Grandes amostras / Variância conhecida}}$ **ou** $\underbrace{\boldsymbol{IC = \left(\bar{x} - t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{x} + t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right)}}_{\text{Pequenas amostras / Variância desconhecida}}$

    - **Z** e **t** são os valores bicaudais; na distribuição **t** utiliza-se *n-1* graus de liberdade

Intervalo de confiança

- **Intervalo de confiança para a média**

  - **Exemplo:** Um engenheiro coletou uma amostra de 25 peças saídas da linha de montagem e encontrou que o tamanho médio foi de 47cm e o desvio padrão foi 1cm. Qual é o intervalo de confiança com 95% para esta média estimada?

    - Os dados estão na planilha de suporte na **aba Intervalo de Confiança – Média**.

Testes de hipóteses

- **Teste t para comparação de médias em duas amostras independentes**

  - Para comparar as médias de duas amostras independentes de uma mesma população por meio do teste t, antes é necessário comparar as variâncias populacionais dos dois grupos

    - Por exemplo, antes pode ser feito um teste F para comparação das variâncias

  - O cálculo da estatística t e graus de liberdade depende: se as variâncias populacionais forem diferentes ou se são homogêneas

Testes de hipóteses

- **Teste t para comparação de médias em duas amostras independentes**

  - Estatística T para variâncias populacionais diferentes

  - $\boldsymbol{T} = \dfrac{(\overline{X_1} - \overline{X_2})}{\sqrt{\dfrac{S^2{}_1}{n_1} + \dfrac{S^2{}_2}{n_2}}}$

  - Os graus de liberdade são $\boldsymbol{v} = \dfrac{\left(\dfrac{S^2{}_1}{n_1} + \dfrac{S^2{}_2}{n_2}\right)^2}{\dfrac{\left(S^2{}_1/n_1\right)^2}{(n_1 - 1)} + \dfrac{\left(S^2{}_2/n_2\right)^2}{(n_2 - 1)}}$

Testes de hipóteses

- **Teste t para comparação de médias em duas amostras independentes**

  - Estatística T para variâncias populacionais homogêneas

  - $\boldsymbol{T = \dfrac{(\overline{X_1} - \overline{X_2})}{S_p \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}}$

  - Em que $\boldsymbol{S_p = \sqrt{\dfrac{(n_1-1).S^2{}_1 + (n_2-1).S^2{}_2}{n_1+n_2-2}}}$ e os graus de liberdade são n_1+n_2-2

Testes de hipóteses

- **Teste t para comparação de médias em duas amostras independentes**

  - **Exemplo:** Em uma indústria, o gerente de produção fez um levantamento com 30 medições da temperatura (em °C) dos dois principais fornos da linha de produção que produzem os produtos do mesmo tipo. Destas, 15 medições foram do forno A e 15 medições foram para o forno B. O objetivo é verificar se a temperatura média está consideravelmente diferente entre os fornos.

    - Os dados estão na planilha suporte na **aba Teste t Duas Amostras Indep**.

Referência

Fávero, Luiz Paulo; Belfiore, Patrícia. (2017). Manual de análise de dados: estatística e modelagem multivariada com Excel®, SPSS® e Stata®. Rio de Janeiro: Elsevier

OBRIGADO!

linkedin.com/in/wilson-tarantin-junior-359476190