

Geometria de Tales e de Pitágoras

Eduardo Gomes

João Zambaldi

Novembro de 2022

1 O espírito Grego

Os gregos da antiguidade tinham desejo de conhecer e capacidade para absorver todo o conhecimento das culturas que entravam em contato. Uma vez que dominavam a área, logo construíam em cima disso. Sobre isso Platão disse ¹.

Sempre que gregos aprendem algo dos bárbaros, isso é transformado em algo mais nobre; [...]

Falaremos de dois gregos, *Pitágoras de Samos* e *Tales de Mileto*, que viajaram pelo Egito e pela babilônia, aprenderam geometria, aritmética astronomia e fizeram enormes contribuições, sendo provavelmente os matemáticos mais conhecidos até os dias de hoje. Sendo assim, começaremos falando sobre o primeiro matemático da história.

2 Tales de Mileto

A tradição tem que Tales de Mileto (624, 548 antes de Cristo) foi o primeiro matemático e primeiro filósofo. Foi Tales a primeira pessoa a provar um teorema. De fato, a ele são atribuídos em particular os seguintes resultados²

1. um círculo é dividido pelo seu diâmetro
2. os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes
3. ângulos opostos pelo vértice são congruentes
4. se dois triângulos são tais que dois ângulos e um lado de um deles são congruentes respectivamente a dois ângulos e um lado de outro, então estes triângulos são congruentes
5. um triângulo inscrito em uma circunferência, em que um dos lados coincide com o diâmetro do círculo é um triângulo retângulo

Existem algumas histórias notáveis em que Tales faz uso da geometria das formas mais elegantes possíveis. Duas delas são:

1. mediu a altura de uma pirâmide usando sua sombra - novamente citando [2], existem várias versões desta história a mais simples delas é que Tales percebeu que em um momento do dia, a sombra de uma pessoa era igual sua altura, e inferiu que a sombra da pirâmide teria também o mesmo comprimento que a altura da pirâmide
2. mediu a distância de uma embarcação até a praia usando semelhança entre dois triângulos retângulos

¹Tradução de um pequeno trecho de Epinomis 987e do inglês, talvez a tradução não seja fidedigna, a citação que eu queria colocar originalmente está na página 9 de [2] mas parece que a referência não está correta, de qualquer forma a frase no livro é "Let us take it as an axiom that, whatever the Greeks take from the barbarian, they bring it to fuller perfection" e no livro Heath cita Epinomis 988D como fonte, o que não se verifica com a versão de Epinomis que eu encontrei

²Página 130 de [2], uma lista similar, diferindo apenas no quinto resultado é encontrada no capítulo 4 de [1]

3 Pitágoras de Samos

O aluno mais notável de Tales foi Pitágoras, como conta Heath na página 4 de [2], a tradição tem que Tales admirado com as habilidades de Pitágoras lhe contou tudo que sabia e como na época já tinha idade avançada o aconselhou que viajasse ao Egito para aprender com os sacerdotes. Essa história é bastante controversa, e Boyer diz que isso é improvável³. Mas é parte importante da tradição. Pitágoras foi o mestre da *Escola Pitagórica*. Era comum na antiguidade dar todo o mérito de uma escola ao mestre, e isso é o que aconteceu. Para os *Pitagóricos*,

tudo é número

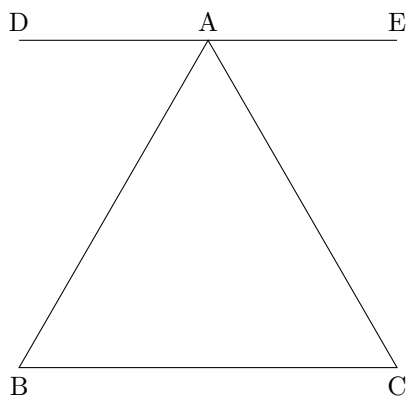
Quando ouvimos isso, não é muito claro o que significa, alguns exemplos fazem esse conceito, com alguns exemplos fica mais claro. Eles consideravam que os números tinham gêneros: os números pares eram femininos e os ímpares, excetuando o número 1, eram masculinos, o número 5 era o número do casamento pois $2+3=5$, simbolizando a união do primeiro número feminino 2 com o primeiro número masculino 3. O número dez era o número do universo, pois 1 representa a dimensão do ponto, 2 representa a dimensão da reta, pois dois pontos distintos determinam uma reta, 3 representa a dimensão do plano, pois três pontos distintos e não colineares determinam um plano e 4 a dimensão do espaço, pois quatro pontos não coplanares determinam um tetraedro. Assim, 10 que inclui todas as dimensões geométricas, $1+2+3+4=10$, é o número do universo.

A teoria dos números foi originada na escola pitagórica, eles conheciam os números triangulares, retangulares, números perfeitos e números amigáveis.

Na geometria os seguintes resultados são atribuídos a escola Pitagórica

1. a soma dos ângulos de um triângulo é de dois ângulos retos
2. o teorema de Pitágoras
3. os incomensuráveis
4. os cinco sólidos regulares

Acredita-se que a prova de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é de 180 graus se deu por traçar uma reta paralela a um lado de um triângulo passando pelo vértice que não está nesse lado,



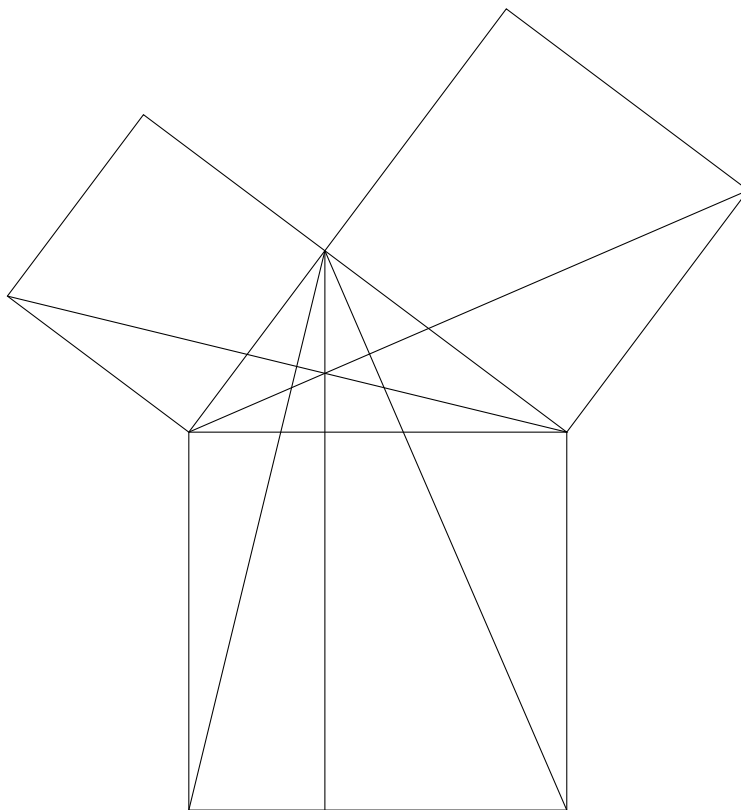
E usando que DE é paralela a BC , temos que os ângulos \widehat{DAB} e \widehat{ACB} são alternos internos. Da mesma forma \widehat{EAC} e \widehat{ABC} são congruentes. E a soma $\widehat{DAB} + \widehat{BAC} + \widehat{EAC}$ é igual a soma de \widehat{BAC} , \widehat{ABC} e \widehat{BCA} .

Sobre o *Teorema de Pitágoras* algumas fontes dizem que Pitágoras teria sacrificado um gado (em outros relatos 100 gados) em gratidão aos deuses pela descoberta. As regras das escolas Pitagóricas não permitiam sacrifícios dessa forma e isto é geralmente tido em descredito. Algumas fontes citam que o suposto sacrifício

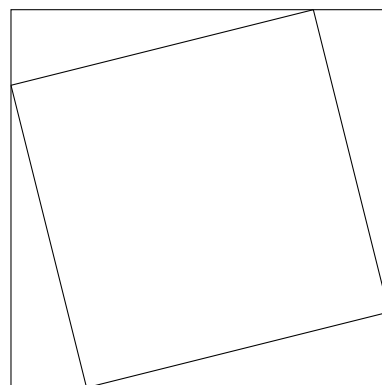
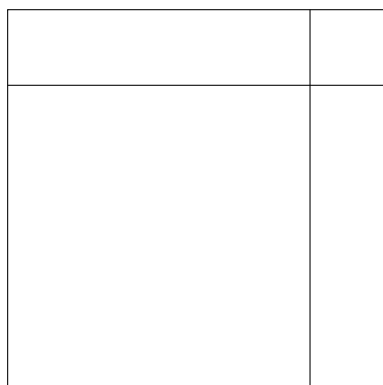
³No capítulo 4 de [1].

teria sido em virtude da descoberta do triângulo de lados 3, 4, 5 mas esse triângulo já era conhecido no Egito e é mais provável que tenha vindo de lá para a Grécia. Ainda existem linhas que dizem que o teorema já tenha sido enunciado antes de Pitágoras mas foi ele que demonstrou.

Existem algumas linhas de qual demonstração Pitágoras apresentou para o Teorema, a primeira é de que a prova foi por decompor os quadrados em partes retangulares e estas partes retangulares em triângulos como foi feito no livro de Euclides.



No entanto, a ideia mais aceita é a de que Pitágoras tenha usado raciocínio como das figuras abaixo.



O raciocínio algébrico de hoje nos permite facilmente mostrar usando das fórmulas da área de triângulos, retângulos a partir dessa figura que o teorema de Pitágoras vale, no entanto não foi assim que se imagina que a demonstração tenha sido feita.

4 A relação entre o trabalho de Pitágoras e o trabalho de Tales

Pitágoras e Tales atuaram nas mesmas áreas, em especial: filosofia, geometria e astronomia.

Uma interessante conexão entre o trabalho dos dois matemáticos é a soma de que os ângulos internos de um triângulo é 180° . Especula-se que se Tales realmente mostrou que o triângulo inscrito em um semicírculo é retângulo ele já estaria em posição para mostrar que a soma dos ângulos internos de um triângulo é de 180° . Usando o fato de que a soma dos ângulos agudos de um triângulo retângulo é de 90° , para decompor um triângulo qualquer em dois triângulos retângulos e então provar que a soma dos ângulos deste triângulo é também de 180° .

E para finalizar, eu quero falar sobre duas passagens do comentário de *Proclo* sobre os *Elementos de Euclides* que Heath cita [2] que eu acho que esclarecem como as contribuições⁴ de Tales e Pitágoras formam a base da geometria grega. A primeira é sobre Tales

[...] primeiro foi ao Egito e depois introduziu seus estudos a Grécia. Ele descobriu numerosas proposições próprias e instruiu seus sucessores nos seus métodos de ataque sendo em alguns casos mais geral e em outros mais empírico, no sentido de simples inspeção ou observação

e a segunda é sobre Pitágoras

Depois desses [Tales e Ameristus] Pitágoras transformou o estudo da geometria em uma educação liberal examinando a ciência dos princípios e provando os teoremas de forma imaterial e intelectual ; foi ele quem descobriu a teoria das proporções e a construções das figuras cósmicas

Ou seja, além dos incríveis teoremas que eles provaram, Tales e Pitágoras transformaram a geometria que nasceu no Egito para resolver problemas cotidianos baseada muito na intuição e no raciocínio prático em uma ciência de fato, baseada no raciocínio lógico dedutivo que conhecemos hoje, esse trajeto já tinha sido iniciado no Egito e na Índia mas eles levaram isso muito além do que se tem notícia.

References

- [1] Carl B Boyer and Uta C Merzbach. *A history of mathematics*. John Wiley & Sons, 2011.
- [2] Thomas Little Heath. *A history of Greek mathematics*, volume 1. Clarendon Press, 1921.

⁴Infelizmente não consegui uma tradução para o português dessas e fiz um tradução diretamente do livro de Heath [2], do inglês, a sobre Tales está na página 128 e a sobre Pitágoras na página 141