Engenharia econômica

Vinicius Santos

Economia - ENG1 07067

10 de Julho de 2025

Quantias únicas

- Se uma taxa de juros nominal for informada e se o número de períodos de capitalização por ano e o número de anos forem conhecidos, qualquer problema que envolva valores equivalentes futuros, anuais ou presentes pode ser resolvido por meio da aplicação direta das Equações

$$F = P(F/P, i\%, n) \tag{1}$$

$$i = (1 + r/M)^M - 1 \tag{2}$$

respectivamente.

Exemplo 1. Valor Futuro Equivalente quando os Juros são Capitalizados Trimestralmente
Suponha que um valor único de \$100 seja investido por 10 anos a uma taxa de juros nominal de 6% capitalizada trimestralmente. Qual será o valor acumulado ao final do décimo ano?

Quantias únicas

- Se uma taxa de juros nominal for informada e se o número de períodos de capitalização por ano e o número de anos forem conhecidos, qualquer problema que envolva valores equivalentes futuros, anuais ou presentes pode ser resolvido por meio da aplicação direta das Equações

$$F = P(F/P, i\%, n) \tag{1}$$

$$i = (1 + r/M)^M - 1 \tag{2}$$

  respectivamente.

Exemplo 1. Valor Futuro Equivalente quando os Juros são Capitalizados Trimestralmente
Suponha que um valor único de \$100 seja investido por 10 anos a uma taxa de juros nominal de 6% capitalizada trimestralmente. Qual será o valor acumulado ao final do décimo ano? Existem quatro períodos de capitalização por ano, ou um total de $4 \times 10 = 40$ períodos de juros. A taxa de juros por período é $6\%/4 = 1.5\%$./ Quando esses valores são utilizados na Equação 1, obtém-se que

$$F = P(F/P, 1.5\%, 40) = \$100(1.015)^{40} = \$100(1.814) = \$181.40.$$

De forma alternativa, pela Equação 2, encontramos a taxa de juros efetiva igual a 6.14%. Assim,

$$F = P(F/P, 6.14\%, 10) = \$100(1.0614)^{10} = \$181.40.$$

Séries uniformes e séries de gradiente

- Quando há mais de um período de capitalização de juros por ano, as fórmulas e tabelas para séries uniformes e séries com gradiente podem ser usadas.
- Isso é válido desde que haja um fluxo de caixa no final de cada período de juros.

Exemplo 2. Cálculo de um Pagamento Mensal de Financiamento de Automóvel
Stan Moneymaker tem um empréstimo bancário de $10000 para pagar seu novo caminhão. Esse empréstimo deve ser pago em parcelas mensais iguais no final de cada mês por cinco anos. A taxa de juros nominal é de 12% ao ano, capitalizada mensalmente. Qual é o valor de cada parcela?

Séries uniformes e séries de gradiente

- Quando há mais de um período de capitalização de juros por ano, as fórmulas e tabelas para séries uniformes e séries com gradiente podem ser usadas.
- Isso é válido desde que haja um fluxo de caixa no final de cada período de juros.

Exemplo 2. Cálculo de um Pagamento Mensal de Financiamento de Automóvel
Stan Moneymaker tem um empréstimo bancário de $10000 para pagar seu novo caminhão. Esse empréstimo deve ser pago em parcelas mensais iguais no final de cada mês por cinco anos. A taxa de juros nominal é de 12% ao ano, capitalizada mensalmente. Qual é o valor de cada parcela? O número de parcelas é $5 \times 12 = 60$. A taxa de juros por mês é $12\% \ / \ 12 = 1\%$. Quando esses valores são utilizados na Equação $A = P(A/P, i\%, n)$, encontra-se

$$A = P(A/P, 1\%, 60) = \$10000(0.0222) = \$222.$$

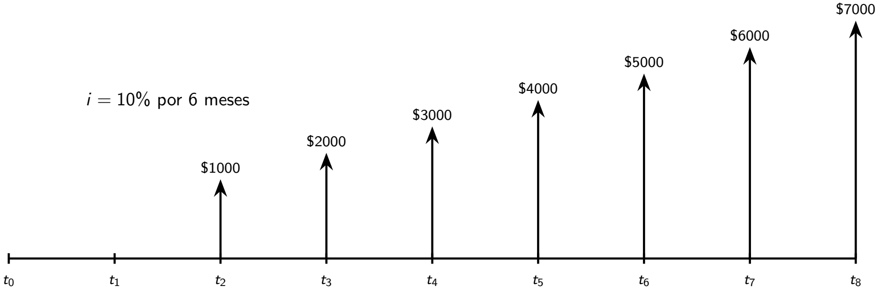
Observe que há um fluxo de caixa ao final de cada mês (período de juros), incluindo o mês 60, neste exemplo.

Séries uniformes e séries de gradiente

Exemplo 3. Série de Gradiente Uniforme e Capitalização Semestral
Certas economias operacionais esperadas são de \$0 ao final dos primeiros seis meses, de \$1.000 ao final do segundo semestre, e aumentam em \$1.000 ao final de cada período de seis meses subsequente, durante um total de quatro anos. Deseja-se encontrar o valor uniforme equivalente, A, ao final de cada um dos oito períodos semestrais, se a taxa de juros nominal for de 20% capitalizada semestralmente.

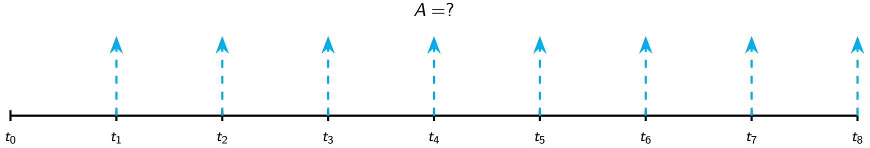
Séries uniformes e séries de gradiente

Exemplo 3. Série de Gradiente Uniforme e Capitalização Semestral
Certas economias operacionais esperadas são de \$0 ao final dos primeiros seis meses, de \$1.000 ao final do segundo semestre, e aumentam em \$1.000 ao final de cada período de seis meses subsequente, durante um total de quatro anos. Deseja-se encontrar o valor uniforme equivalente, A, ao final de cada um dos oito períodos semestrais, se a taxa de juros nominal for de 20% capitalizada semestralmente.



Séries uniformes e séries de gradiente

Exemplo 3. Série de Gradiente Uniforme e Capitalização Semestral



No Exemplo, a taxa de juros por período de seis meses é de 10%, e os fluxos de caixa ocorrem a cada seis meses.

$$A = G(A/G, 10\%, 8) = \$1000(3.0045) = \$3004.50$$

Séries uniformes e séries de gradiente

Exemplo 2. Encontrando a taxa de juros de um empréstimo
Um empréstimo de \$15000 requer pagamentos mensais de \$477 durante um período de 36 meses. Esses pagamentos incluem tanto o principal quanto os juros.

(a) Qual é a taxa de juros nominal (APR) para este empréstimo?

(b) Qual é a taxa de juros efetiva ao ano?

(c) Determine o valor do principal do empréstimo ainda não quitado após 20 meses.

Séries uniformes e séries de gradiente

Exemplo 2. Encontrando a taxa de juros de um empréstimo
Um empréstimo de \$15000 requer pagamentos mensais de \$477 durante um período de 36 meses. Esses pagamentos incluem tanto o principal quanto os juros.

(a) Qual é a taxa de juros nominal (APR) para este empréstimo?

(b) Qual é a taxa de juros efetiva ao ano?

(c) Determine o valor do principal do empréstimo ainda não quitado após 20 meses.

(a) Podemos definir o relacionamento de equivalência para resolver para a taxa de juros desconhecida, sabendo que $P = \$15000$, $A = \$477$, e $n = 36$ meses.

$$\begin{aligned} \$477 &= \$15000(A/P, i_{mensal}, 60) \\ (A/P, i_{mensal}, 36) &= 0.0318 \end{aligned}$$

Podemos procurar nas tabelas de fatores equivalentes valores de i que possuam o fator $(A/P, i, 36)$ próximo de 0.0318, chegando em $i_{mensal} = 0.75\%$. Outra alternativa seria chutar valores para i em $i(1+i)^{36}/((1+i)^{36}-1)$ que se aproximassem de 0.0318. Com a taxa de juros mensal, podemos calcular a taxa de juros nominal, r:

$$r = 12 \times 0.75\% = 9\% \text{ ao ano, captalizado mensalmente.}$$

Séries uniformes e séries de gradiente

Exemplo 2. Encontrando a taxa de juros de um empréstimo
Um empréstimo de \$15000 requer pagamentos mensais de \$477 durante um período de 36 meses. Esses pagamentos incluem tanto o principal quanto os juros.

(a) Qual é a taxa de juros nominal (APR) para este empréstimo?

(b) Qual é a taxa de juros efetiva ao ano?

(c) Determine o valor do principal do empréstimo ainda não quitado após 20 meses.

Séries uniformes e séries de gradiente

Exemplo 2. Encontrando a taxa de juros de um empréstimo
Um empréstimo de \$15000 requer pagamentos mensais de \$477 durante um período de 36 meses. Esses pagamentos incluem tanto o principal quanto os juros.

(a) Qual é a taxa de juros nominal (APR) para este empréstimo?

(b) Qual é a taxa de juros efetiva ao ano?

(c) Determine o valor do principal do empréstimo ainda não quitado após 20 meses.

(b) Com a Equação 2, temos

$$i_{efetivo} = \left(1 + \frac{0.09}{12}\right)^{12} - 1 = 0.0938 = 9.38\% \ a.a.$$

(c) O saldo devedor pode ser encontrado determinando o valor equivalente dos 16 pagamentos mensais restantes no mês 20.

$$P_{20} = \$477(P/A, 0.75\%, 16) = \$477(15.0243) = \$7166.59$$

Após 20 pagamentos terem sido feitos, quase metade do valor principal original permanece. Observe que usamos a taxa de juros mensal de 0.75% em nosso cálculo, já que os fluxos de caixa ocorrem mensalmente.

Fórmulas de Juros para Capitalização Contínua e Fluxos de Caixa Discretos

- Na maioria das transações comerciais e estudos econômicos, os juros são capitalizados ao final de períodos discretos e, como discutido anteriormente, assume-se que os fluxos de caixa ocorrem em quantias discretas ao final desses períodos.
- No entanto, é evidente que, na maioria das empresas, o fluxo de caixa ocorre de forma quase contínua.
- Como o dinheiro, sempre que disponível, pode geralmente ser utilizado de forma lucrativa, essa situação cria oportunidades para capitalizações de juros muito frequentes.
- Para que essa condição possa ser tratada (modelada) quando taxas de juros com capitalização contínua estão disponíveis, o conceito de capitalização contínua é, às vezes, utilizado em estudos econômicos.
- Na realidade, o efeito desse procedimento, em comparação com a capitalização discreta, é relativamente pequeno na maioria dos casos.
- A capitalização contínua assume que os fluxos de caixa ocorrem em intervalos discretos (por exemplo, uma vez ao ano), mas que a capitalização dos juros é contínua ao longo do intervalo.

Fórmulas de Juros para Capitalização Contínua e Fluxos de Caixa Discretos

- Por exemplo, com uma taxa nominal de juros anual r, se os juros são capitalizados M vezes por ano, uma unidade de principal resultará em $[1 + (r/M)]^M$ ao final de um ano.
- Fazendo $M/r = p$, encontramos que a expressão anterior se torna

$$\left[1 + \frac{1}{p}\right]^{rp} = \left[\left(1 + \frac{1}{p}\right)^{p}\right]^{r} \tag{3}$$

- Como

$$\lim_{p \to \infty} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{p} = e^1 = 2.71828...,$$

  a Equação 3 pode ser escrita como e^r.
- Consequentemente, o fator de capitalização com capitalização contínua (para um fluxo de caixa único) a uma taxa de juros nominal de $r\%$ por n anos é e^{rn}.
- Usando nossa notação funcional, expressamos isso como

$$(F/P, \underline{r}\%, n) = e^{rn} \tag{4}$$

- Note que o símbolo $\underline{r}$ é diretamente comparável ao usado para capitalização discreta e fluxos de caixa discretos ($i\%$), exceto que $\underline{r}\%$ é utilizado para denotar a taxa nominal com capitalização contínua.

Fórmulas de Juros para Capitalização Contínua e Fluxos de Caixa Discretos

- Como e^{rn} para capitalização contínua corresponde a $(1+i)^n$ para capitalização discreta, então e^r é igual a $(1+i)$.
- Assim, podemos concluir corretamente que

$$i = e^r - 1 \tag{5}$$

- Usando essa relação, os valores correspondentes de (P/F), (F/A) e (P/A) para capitalização contínua podem ser obtidos substituindo-se $e^r - 1$ por i nas respectivas equações.
- Assim, para capitalização contínua e fluxos de caixa discretos,

$$(P/F, \underline{r}\%, n) = \frac{1}{e^{rn}} = e^{-rn}; \tag{6}$$

$$(F/A, \underline{r}\%, n) = \frac{e^{rn} - 1}{e^r - 1}; \tag{7}$$

$$(P/A, \underline{r}\%, n) = \frac{1 - e^{-rn}}{e^r - 1} = \frac{e^{rn} - 1}{e^{rn}(e^r - 1)}. \tag{8}$$

- Os valores de (A/P, $\underline{r}$%, n) e (A/F, $\underline{r}$%, n) podem ser derivados por meio de suas relações inversas com (P/A, $\underline{r}$%, n) e (F/A, $\underline{r}$%, n), respectivamente.

Fórmulas de Juros para Capitalização Contínua e Fluxos de Caixa Discretos - Exercícios

1. Você tem \$10000 para investir por dois anos. Seu banco oferece 5% de juros, compostos continuamente, para fundos em uma conta do mercado monetário. Assumindo que não haja depósitos ou retiradas adicionais, quanto dinheiro haverá nessa conta ao final de dois anos?
2. Suponha que alguém tenha um empréstimo atual de \$1000 e deseje determinar quais pagamentos uniformes equivalentes ao final de cada ano, A, poderiam ser obtidos a partir dele por 10 anos, se a taxa nominal de juros for 20% composta continuamente ($M = \infty$).
3. Um indivíduo precisa de \$12000 imediatamente como entrada para uma nova casa. Suponha que ele possa tomar esse dinheiro emprestado de sua companhia de seguros. Ele deve pagar o empréstimo em pagamentos iguais a cada seis meses durante os próximos oito anos. A taxa nominal de juros cobrada é 7% composta continuamente. Qual é o valor de cada pagamento?