Introdução a Demonstrações

Matemática Discreta

Prof. Emanuel Estrada

centro de ciências computacionais

Introdução

- **Demonstração**: Argumento válido que estabelece a verdade de uma sentença matemática

Hipóteses de teorema

Axiomas

Teoremas

Regras de Inferência

Verdade de uma sentença

Terminologia

Teorema	sentença que se pode **demonstrar ser verdadeira**
Proposição	teorema menos importante
Axiomas	sentenças **assumidas** como verdadeiras
Lema	**pré-teorema** ou teorema menos importante que ajuda na demonstração de outros resultados
Corolário	**pós-teorema** ou teorema que pode ser estabelecido diretamente de outro teorema
Conjectura	sentença tomada inicialmente como verdadeira, baseada em **evidências parciais, argumentos heurísticos ou na intuição de um perito**. Se torna um teorema quando demonstrada.

Exemplo de Demonstração de Teorema

- Muitos teoremas afirmam que uma propriedade é assegurada para todos os elementos de um domínio

Se x>y, onde x e y são números reais positivos, então $x^2>y^2$

Para todo os números reais positivos x e y, se x>y, então $x^2>y^2$

$$\forall x \forall y (x > y \rightarrow x^2 > y^2) \qquad \mathbb{U} = \mathbb{R}^+$$

$$R(x, y): x > y$$

$$S(x, y): x^2 > y^2$$

Exemplo de Demonstração de Teorema

- Como provar $\forall x \forall y \big(R(x,y) \rightarrow S(x,y)\big)$?

Generalização universal:

$$\boxed{\dfrac{P(c)}{\therefore\ \forall x P(x)}}$$

Mostrar que $R(c,d) \rightarrow S(c,d)$ onde *c* e *d* são elementos arbitrários do domínio

Demonstrações Diretas

- Pressupõe-se **verdadeira** a hipótese e, a partir desta, prova-se **verdadeira** a conclusão.
- Tem-se a expressão $p \rightarrow q$, considera-se que $p \equiv V$ e demostra-se que $Q \equiv V$

Demonstrações Diretas

- **Exemplo 1**: "Se *n* é um número inteiro ímpar, então n^2 é ímpar"

$$\forall n\big(P(n) \rightarrow Q(n)\big)$$

$P(n)$: "*n* é um inteiro ímpar"
$Q(n)$: "n^2 é impar"

Definição: *n* é impar se existe um inteiro *k* tal que $n = 2k + 1$.

Demonstrações Diretas

- **Exemplo 1**: “Se *n* é um número inteiro ímpar, então n^2 é ímpar”

$$n = 2k + 1$$

hipótese

Definição: *n* é impar se existe um inteiro *k* tal que $n = 2k + 1$.

Demonstrações Diretas

- **Exemplo 1**: “Se n é um número inteiro ímpar, então n^2 é ímpar”

$$n = 2k + 1$$
$$n^2 = (2k + 1)^2$$

Demonstrações Diretas

- **Exemplo 1**: “Se *n* é um número inteiro ímpar, então n^2 é ímpar”

$$n = 2k + 1$$
$$n^2 = (2k + 1)^2$$
$$n^2 = 4k^2 + 4k + 1$$

Demonstrações Diretas

- **Exemplo 1**: "Se *n* é um número inteiro ímpar, então n^2 é ímpar"

$$n = 2k + 1$$
$$n^2 = (2k + 1)^2$$
$$n^2 = 4k^2 + 4k + 1$$
$$n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

$$t = 2k^2 + 2k$$

Demonstrações Diretas

- **Exemplo 1**: "Se *n* é um número inteiro ímpar, então n^2 é ímpar"

$$n = 2k + 1$$
$$n^2 = (2k + 1)^2$$
$$n^2 = 4k^2 + 4k + 1$$
$$n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$
$$\boxed{n^2 = 2t + 1}$$

conclusão

Definição: *n* é impar se existe um inteiro *k* tal que $n = 2k + 1$.

Demonstrações Diretas

- **Exemplo 2**: “Se *m* e *n* são quadrados perfeitos então *nm* também é um quadrado perfeito.”

$$m = s^2$$
$$n = t^2$$

hipóteses

Definição: Um inteiro *a* é um quadrado perfeito se existe um inteiro *b*, tal que $a = b^2$.

Demonstrações Diretas

- **Exemplo 2**: “Se *m* e *n* são quadrados perfeitos então *nm* também é um quadrado perfeito.”

$$m = s^2$$
$$n = t^2$$
$$mn = s^2 t^2$$

Demonstrações Diretas

- **Exemplo 2**: "Se *m* e *n* são quadrados perfeitos então *nm* também é um quadrado perfeito."

$$m = s^2$$
$$n = t^2$$
$$mn = s^2t^2$$
$$mn = (st)^2 \qquad k = st$$

Demonstrações Diretas

- **Exemplo 2**: "Se *m* e *n* são quadrados perfeitos então *nm* também é um quadrado perfeito."

$$m = s^2$$
$$n = t^2$$
$$mn = s^2t^2$$
$$mn = (st)^2$$
$$\boxed{mn = k^2}$$

conclusão

Definição: Um inteiro *a* é um quadrado perfeito se existe um inteiro *b*, tal que $a = b^2$.

Demonstrações Diretas

- **Exemplos -** Prove usando demonstração direta que:

a) Se *a* e *b* são dois números inteiros pares, então *a*+*b* também é par.

b) Se *a* e *b* são dois números inteiros pares, então *ab* também é par.

a) Se *a* e *b* são dois números inteiros pares, então *a*+*b* também é par.

$$a = 2k$$
$$b = 2l$$

Definição: *n* é par se existe um inteiro *k* tal que $n = 2k$.

a) Se *a* e *b* são dois números inteiros pares, então *a*+*b* também é par.

$$a = 2k$$
$$b = 2l$$
$$a + b = 2k + 2l$$

a) Se *a* e *b* são dois números inteiros pares, então *a*+*b* também é par.

$$a = 2k$$
$$b = 2l$$
$$a + b = 2k + 2l$$
$$a + b = 2(k + l) \qquad k + l = t$$

a) Se *a* e *b* são dois números inteiros pares, então *a*+*b* também é par.

$$a = 2k$$
$$b = 2l$$
$$a + b = 2k + 2l$$
$$a + b = 2(k + l)$$
$$\boxed{a + b = 2t}$$

Definição: *n* é par se existe um inteiro *k* tal que $n = 2k$.

b) Se *a* e *b* são dois números inteiros pares, então *ab* também é par.

$$a = 2k$$
$$b = 2l$$

Definição: *n* é par se existe um inteiro *k* tal que $n = 2k$.

b) Se *a* e *b* são dois números inteiros pares, então *ab* também é par.

$$a = 2k$$
$$b = 2l$$
$$ab = 2k2l$$

b) Se *a* e *b* são dois números inteiros pares, então *ab* também é par.

$$a = 2k$$
$$b = 2l$$
$$ab = 2k2l$$
$$ab = 2 \cdot 2 \cdot kl$$

b) Se *a* e *b* são dois números inteiros pares, então *ab* também é par.

$$a = 2k$$

$$b = 2l$$

$$ab = 2k2l$$

$$ab = 2 \cdot 2 \cdot kl$$

$$ab = 2 \cdot (2kl) \qquad 2kl = t$$

b) Se *a* e *b* são dois números inteiros pares, então *ab* também é par.

$$a = 2k$$
$$b = 2l$$
$$ab = 2k2l$$
$$ab = 2 \cdot 2 \cdot kl$$
$$ab = 2(2kl)$$
$$\boxed{ab = 2t}$$

Definição: *n* é par se existe um inteiro *k* tal que $n = 2k$.

Demonstrações Diretas

- **Exercícios -** Prove usando demonstração direta que:

a) Se x é um inteiro par, então $x^2 - 6x + 5$ é ímpar.

b) Se a e b são dois números inteiros ímpares, então ab também é ímpar.

c) Sendo a, b e c inteiros. Se $a|b$ e $b|c$, então $a|c$. Obs.: Dizemos que a divide b, denotado por $a|b$, se existe um m tal que $b = a \cdot m.$

Técnicas de Demonstração

- **Demonstrações diretas** levam da hipótese de um teorema à conclusão

- Demonstrações de teoremas que não iniciam pelas hipóteses e não terminam nas conclusões são chamadas **demonstrações indiretas**.

Demonstração por Contraposição

$$\boldsymbol{p \to q \equiv \neg q \to \neg p}$$

Sentença condicional

Sentença contrapositiva

- Em uma demonstração por contraposição de $p \to q$, tem-se $\neg q$ como hipótese e demonstra-se que $\neg p$ está de acordo
- Demonstração pro contraposição é uma demonstração indireta

Demonstração por Contraposição

- **Exemplo 1**: Considerando o domínio do dos inteiros, se $3n + 2$ é ímpar, então n é impar.

Demonstração por Contraposição

- **Exemplo 1**: Considerando o domínio do dos inteiros, se 3*n* + 2 é impar, então *n* é impar.
- Considerando:

p: $3n + 2$ é ímpar

q: n é $ímpar$

A sentença pode ser escrita como

$$p \to q$$

Neste caso, parece mais complicado partir da hipótese e chegar a conclusão.

Demonstração por Contraposição

- **Exemplo 1**: Considerando o domínio do dos inteiros, se 3*n* + 2 é impar, então *n* é impar.
- Usando a equivalência lógica contrapositiva, tem-se:

$$p \rightarrow q \equiv \underbrace{\neg q}_{\text{hipótese}} \rightarrow \underbrace{\neg p}_{\text{conclusão}}$$

Demonstração por Contraposição

- **Exemplo 1**: Considerando o domínio do dos inteiros, se 3*n* + 2 é impar, então *n* é impar.
- Hipótese e conclusão da demonstração direta

p: $3n + 2$ é ímpar

q: n é $ímpar$

- Hipótese e conclusão da demonstração por contraposição

$\neg \boldsymbol{q}$: $\boldsymbol{n}$ **é par**

$\neg \boldsymbol{p}$: $\boldsymbol{3n + 2}$ **é par**

Demonstração por Contraposição

- **Exemplo 1**: Considerando o domínio do dos inteiros, se 3*n* + 2 é impar, então *n* é impar.
- Um vez usada a equivalência contrapositiva, a demonstração agora se dá na forma direta, ou seja, assume-se que n é par como verdade e encontra-se $3n + 2$ como par.

$$n = 2k$$

hipótese

Definição: *n* é par se existe um inteiro *k* tal que $n = 2k$.

Demonstração por Contraposição

- **Exemplo 1**: Considerando o domínio do dos inteiros, se 3*n* + 2 é impar, então *n* é impar.

$$n = 2k$$

$$3n + 2 = 3(2\mathrm{k}) + 2$$

Demonstração por Contraposição

- **Exemplo 1**: Considerando o domínio do dos inteiros, se 3*n* + 2 é impar, então *n* é impar.

$$n = 2k$$

$$3n + 2 = 3(2\mathrm{k}) + 2$$

$$3n + 2 = 6k + 2$$

Demonstração por Contraposição

- **Exemplo 1**: Considerando o domínio do dos inteiros, se 3*n* + 2 é impar, então *n* é impar.

$$n = 2k$$

$$3n + 2 = 3(2\mathrm{k}) + 2$$

$$3n + 2 = 6k + 2$$

$$3n + 2 = 2(3k + 1)$$

Demonstração por Contraposição

- **Exemplo 1**: Considerando o domínio do dos inteiros, se 3*n* + 2 é impar, então *n* é impar.
- n é par como verdade e encontra-se $3n + 2$ como par.

$$n = 2k$$

$$3n + 2 = 3(2\mathrm{k}) + 2$$

$$3n + 2 = 6k + 2$$

$$3n + 2 = 2(3k + 1)$$

$$3n + 2 = 2t$$

conclusão

$\neg \boldsymbol{q}$: $\boldsymbol{n}$ **é par**
$\neg \boldsymbol{p}$: $\boldsymbol{3n+2}$ **é par**

Definição: *n* é par se existe um inteiro *k* tal que $n = 2k$.

Demonstração por Contraposição

- **Exemplo 1**: Se *n* é um inteiro e 3*n* + 2 é impar, então *n* é impar.

Por contraposição, se $3n + 2$ é ímpar, então *n* é ímpar.

Demonstração por Contraposição

- **Exemplo 2**: Se $ab = n$ e a e b são inteiro positivos, então a$\leq \sqrt{n}$ ou $b \leq \sqrt{n}$.
  - Hipótese: $p: ab = n$
  - Conclusão: $q: a \leq \sqrt{n} \vee b \leq \sqrt{n}$
- Pela demonstração por contraposição, tem-se:
  - Hipótese: $\neg \boldsymbol{q}: \neg(a \leq \sqrt{n} \vee b \leq \sqrt{n}) \equiv \neg(a \leq \sqrt{n}) \wedge \neg(b \leq \sqrt{n}) \equiv$
$$\boldsymbol{a > \sqrt{n} \wedge b > \sqrt{n}}$$
  - Conclusão: $\neg \boldsymbol{p}: \boldsymbol{n \neq ab}$

Demonstração por Contraposição

- **Exemplo 2**: Se $ab = n$ e a e b são inteiro positivos, então a$\leq \sqrt{n}$ ou $b \leq \sqrt{n}$.

$$a > \sqrt{n}$$
$$b > \sqrt{n}$$

hipóteses

Demonstração por Contraposição

- **Exemplo 2**: Se $ab = n$ e a e b são inteiro positivos, então a$\leq \sqrt{n}$ ou $b \leq \sqrt{n}$.

$$a > \sqrt{n}$$

$$b > \sqrt{n}$$

$$ab > \sqrt{n}\sqrt{n}$$

Demonstração por Contraposição

- **Exemplo 2**: Se $ab = n$ e a e b são inteiro positivos, então a$\leq \sqrt{n}$ ou $b \leq \sqrt{n}$.

$$a > \sqrt{n}$$

$$b > \sqrt{n}$$

$$ab > \sqrt{n}\sqrt{n}$$

$$ab > n$$

conclusão

Demonstração por Contraposição

- **Exemplo 2**: Se $ab = n$ e a e b são inteiro positivos, então a$\leq \sqrt{n}$ ou $b \leq \sqrt{n}$.

$$a > \sqrt{n}$$
$$b > \sqrt{n}$$
$$ab > \sqrt{n}\sqrt{n}$$
$$ab > n$$

conclusão

Pela demonstração por contraposição a conclusão a se chegar é que $ab \neq n$, esta sendo verdadeira.

Demonstração por Contraposição

- **Exemplo 2**: Se $n = ab$ e a e b são inteiro positivos, então a$\leq \sqrt{n}$ ou $b \leq \sqrt{n}$.

Por contraposição, se $n = ab$, então a$\leq \sqrt{n}$ ou $b \leq \sqrt{n}$.

Demonstração por Contraposição

- Exercícios:

1. Demonstre por contraposição:

   1.1 Se n é um inteiro e $n+11$ é par, então n é impar.

   1.2 Se a e b são inteiros e ab é impar, então a e b também são ímpares.

2. Demonstre pelo método direto e por contraposição que, dado um inteiro x, se $7x+9$ é par, então x é ímpar.

Demonstração por Contraposição

1.1 Se *n* é um inteiro e *n*+11 é par, então *n* é impar.

$\boldsymbol{p}$: $n + 11$ é par

$\boldsymbol{q}$: n é ímpar

$\neg\boldsymbol{q}$: n é par

$\neg\boldsymbol{p}$: $n + 11$ é ímpar

$p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$

$n = 2k$

Demonstração por Contraposição

1.1 Se *n* é um inteiro e *n*+11 é par, então *n* é impar.

$\boldsymbol{p}$: $n + 11$ é par

$\boldsymbol{q}$: n é ímpar

$\neg\boldsymbol{q}$: n é par

$\neg\boldsymbol{p}$: $n + 11$ é ímpar

$p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$

$$n = 2k$$
$$n + 11 = 2k + 11$$

Demonstração por Contraposição

1.1 Se *n* é um inteiro e *n*+11 é par, então *n* é impar.

$\boldsymbol{p}$: $n + 11$ é par

$\boldsymbol{q}$: n é ímpar

$\neg\boldsymbol{q}$: n é par

$\neg\boldsymbol{p}$: $n + 11$ é ímpar

$p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$

$$n = 2k$$
$$n + 11 = 2k + 11$$
$$n + 11 = 2k + 10 + 1$$

Demonstração por Contraposição

1.1 Se *n* é um inteiro e *n*+11 é par, então *n* é impar.

$\boldsymbol{p}$: $n + 11$ é par

$\boldsymbol{q}$: n é ímpar

$\neg\boldsymbol{q}$: n é par

$\neg\boldsymbol{p}$: $n + 11$ é ímpar

$p \to q \equiv \neg q \to \neg p$

$$n = 2k$$
$$n + 11 = 2k + 11$$
$$n + 11 = 2k + 10 + 1$$
$$n + 11 = 2(k + 5) + 1$$

Demonstração por Contraposição

1.1 Se *n* é um inteiro e *n*+11 é par, então *n* é impar.

$\boldsymbol{p}: n + 11$ é par

$\boldsymbol{q}: n$ é ímpar

$\neg\boldsymbol{q}: n$ é par

$\neg\boldsymbol{p}: n + 11$ é ímpar

$p \to q \equiv \neg q \to \neg p$

$$n = 2k$$
$$n + 11 = 2k + 11$$
$$n + 11 = 2k + 10 + 1$$
$$n + 11 = 2(k + 5) + 1$$
$$\boxed{n + 11 = 2t + 1}$$

Portanto, n é ímpar

Demonstração por Contraposição

1.2 Se a e b são inteiros e ab é impar, então a e b também são ímpares.

$\boldsymbol{p}: ab$ é ímpar

$\boldsymbol{q}: a$ é ímpar e b é ímpar

$\neg\boldsymbol{q}: a$ é par ou b é par

$\neg\boldsymbol{p}: ab$ é par

$p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$

$q: I(a) \wedge I(b)$
$\neg q: \neg\big(I(a) \wedge I(b)\big)$
$\neg q: \neg I(a) \vee \neg I(b)$
$\neg q: P(a) \vee P(b)$

Demonstração por Contraposição

1.2 Se a e b são inteiros e ab é impar, então a e b também são ímpares.

p: ab é ímpar

q: a é ímpar e b é ímpar

$\neg q$: a é par ou b é par

$\neg p$: ab é par

$p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$

<u>Solução 1</u>:

$$a = 2k + 1$$
$$b = 2m$$

Demonstração por Contraposição

1.2 Se a e b são inteiros e ab é impar, então a e b também são ímpares.

p: ab é ímpar

q: a é ímpar e b é ímpar

$\neg q$: a é par ou b é par

$\neg p$: ab é par

$p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$

Solução 1:

$$a = 2k + 1$$
$$b = 2m$$
$$ab = (2k + 1)(2m)$$

Demonstração por Contraposição

1.2 Se a e b são inteiros e ab é impar, então a e b também são ímpares.

p: ab é ímpar

q: a é ímpar e b é ímpar

$\neg q$: a é par ou b é par

$\neg p$: ab é par

$p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$

<u>Solução 1</u>:

$$a = 2k + 1$$
$$b = 2m$$
$$ab = (2k + 1)(2m)$$
$$ab = 4\mathrm{km} + 2\mathrm{m}$$

Demonstração por Contraposição

1.2 Se a e b são inteiros e ab é impar, então a e b também são ímpares.

p: ab é ímpar

q: a é ímpar e b é ímpar

$\neg q$: a é par ou b é par

$\neg p$: ab é par

$p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$

<u>Solução 1</u>:

$$a = 2k + 1$$
$$b = 2m$$
$$ab = (2k + 1)(2m)$$
$$ab = 4\mathrm{km} + 2\mathrm{m}$$
$$ab = 2(2km + \mathrm{m})$$

Demonstração por Contraposição

1.2 Se a e b são inteiros e ab é impar, então a e b também são ímpares.

p: ab é ímpar

q: a é ímpar e b é ímpar

$\neg q$: a é par ou b é par

$\neg p$: ab é par

$p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$

Solução 1:

$$a = 2k + 1$$
$$b = 2m$$
$$ab = (2k + 1)(2m)$$
$$ab = 4\mathrm{km} + 2\mathrm{m}$$
$$ab = 2(2km + \mathrm{m})$$
$$ab = 2t$$

Portanto, a e b são ímpares

Demonstração por Contraposição

1.2 Se a e b são inteiros e ab é impar, então a e b também são ímpares.

p: ab é ímpar

q: a é ímpar e b é ímpar

$\neg q$: a é par ou b é par

$\neg p$: ab é par

$p \to q \equiv \neg q \to \neg p$

Solução 2:

$$a = 2k$$
$$b = 2m + 1$$
$$ab = (2k)(2m + 1)$$
$$ab = 4\text{km} + 2\text{k}$$
$$ab = 2(2km + \text{k})$$
$$ab = 2t$$

Portanto, a e b são ímpares

Demonstração por Contraposição

1.2 Se a e b são inteiros e ab é impar, então a e b também são ímpares.

p: ab é ímpar

q: a é ímpar e b é ímpar

$\neg q$: a é par ou b é par

$\neg p$: ab é par

$p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$

<u>Solução 3</u>:

$$a = 2k$$
$$b = 2m$$
$$ab = 2k2m$$
$$ab = 2 \cdot 2 \cdot km$$
$$ab = 2(2km)$$
$$ab = 2t$$

Demonstração por Contraposição

2. Demonstre pelo método direto e por contraposição que, dado um inteiro *x*, se 7*x*+9 é par, então *x* é ímpar.

Demonstração direta:
$p: 7x + 9$ é par
$q: x$ é ímpar

Demonstração por contraposição:
$\neg q: x$ é par
$\neg p: 7x + 9$ é ímpar

Demonstração por Contraposição

2. Demonstre pelo método direto e por contraposição que, dado um inteiro *x*, se 7*x*+9 é par, então *x* é ímpar.

Demonstração direta:

p: $7x + 9$ é par

q: x é ímpar

$7x + 9 = 2k$

Demonstração por contraposição:

$\neg q$: x é par

$\neg p$: $7x + 9$ é ímpar

Demonstração por Contraposição

2. Demonstre pelo método direto e por contraposição que, dado um inteiro *x*, se 7*x*+9 é par, então *x* é ímpar.

Demonstração direta:

$p: 7x + 9$ é par

$q: x$ é ímpar

$7x + 9 = 2k$

$7x + 9 - 6x = 2k - 6x$

Demonstração por contraposição:

$\neg q: x$ é par

$\neg p: 7x + 9$ é ímpar

Demonstração por Contraposição

2. Demonstre pelo método direto e por contraposição que, dado um inteiro *x*, se 7*x*+9 é par, então *x* é ímpar.

Demonstração direta:

$p: 7x + 9$ é par

$q: x$ é ímpar

$7x + 9 = 2k$

$7x + 9 - 6x = 2k - 6x$

$x = 2k - 6x - 9$

Demonstração por contraposição:

$\neg q: x$ é par

$\neg p: 7x + 9$ é ímpar

Demonstração por Contraposição

2. Demonstre pelo método direto e por contraposição que, dado um inteiro *x*, se 7*x*+9 é par, então *x* é ímpar.

Demonstração direta:

p: $7x + 9$ é par

q: x é ímpar

$7x + 9 = 2k$

$7x + 9 - 6x = 2k - 6x$

$x = 2k - 6x - 9$

$x = 2k - 6x - 10 + 1$

Demonstração por contraposição:

$\neg q$: x é par

$\neg p$: $7x + 9$ é ímpar

Demonstração por Contraposição

2. Demonstre pelo método direto e por contraposição que, dado um inteiro *x*, se 7*x*+9 é par, então *x* é ímpar.

Demonstração direta:

p: $7x + 9$ é par

q: x é ímpar

$7x + 9 = 2k$

$7x + 9 - 6x = 2k - 6x$

$x = 2k - 6x - 9$

$x = 2k - 6x - 10 + 1$

$x = 2(k - 3x - 5) + 1$

$x = 2t + 1$

Demonstração por contraposição:

$\neg q$: x é par

$\neg p$: $7x + 9$ é ímpar

Demonstração por Contraposição

2. Demonstre pelo método direto e por contraposição que, dado um inteiro *x*, se 7*x*+9 é par, então *x* é ímpar.

Demonstração direta:

p: $7x + 9$ é par

q: x é ímpar

Demonstração por contraposição:

$\neg q$: x é par

$\neg p$: $7x + 9$ é ímpar

$x = 2k$

Demonstração por Contraposição

2. Demonstre pelo método direto e por contraposição que, dado um inteiro *x*, se 7*x*+9 é par, então *x* é ímpar.

Demonstração direta:

p: $7x + 9$ é par

q: x é ímpar

Demonstração por contraposição:

$\neg q$: x é par

$\neg p$: $7x + 9$ é ímpar

$x = 2k$

$7x + 9 = 7(2k) + 9$

Demonstração por Contraposição

2. Demonstre pelo método direto e por contraposição que, dado um inteiro *x*, se 7*x*+9 é par, então *x* é ímpar.

Demonstração direta:
p: $7x + 9$ é par
q: x é ímpar

Demonstração por contraposição:
$\neg q$: x é par
$\neg p$: $7x + 9$ é ímpar

$x = 2k$
$7x + 9 = 7(2k) + 9$
$7x + 9x = 14k + 8 + 1$

Demonstração por Contraposição

2. Demonstre pelo método direto e por contraposição que, dado um inteiro *x*, se 7*x*+9 é par, então *x* é ímpar.

Demonstração direta:

$p: 7x + 9$ é par

$q: x$ é ímpar

Demonstração por contraposição:

$\neg q: x$ é par

$\neg p: 7x + 9$ é ímpar

$x = 2k$

$7x + 9 = 7(2k) + 9$

$7x + 9x = 14k + 8 + 1$

$7x + 9 = 2(7k + 4) + 1$

$7x + 9 = 2t + 1$

Demonstração por Contraposição

2. Demonstre pelo método direto e por contraposição que, dado um inteiro *x*, se 7*x*+9 é par, então *x* é ímpar.

Demonstração direta:

$p: 7x + 9$ é par

$q: x$ é ímpar

$7x + 9 = 2k$

$7x + 9 - 6x = 2k - 6x$

$x = 2k - 6x - 9$

$x = 2k - 6x - 10 + 1$

$x = 2(k - 3x - 5) + 1$

$x = 2t + 1$

Demonstração por contraposição:

$\neg q: x$ é par

$\neg p: 7x + 9$ é ímpar

$x = 2k$

$7x + 9 = 7(2k) + 9$

$7x + 9x = 14k + 8 + 1$

$7x + 9 = 2(7k + 4) + 1$

$7x + 9 = 2t + 1$

Demonstrações por contraposição

- **Exercícios -** Prove usando demonstração por contraposição:

a) Supondo que a é inteiro, se $a^2 - 2a + 7$ é par, então a é ímpar.

b) Supondo que x e y são inteiros, se xy não é divisível por 5, então x não é divisível por 5 e y não é divisível por 5.

c) Sendo a um inteiro, se a^2 não é divisível por 4, então a é ímpar.