Engenharia econômica

Vinicius Santos

Economia - ENG1 07067

03 de Julho de 2025

Sequências geométricas de fluxos de caixa

- Alguns problemas de equivalência econômica envolvem padrões projetados de fluxo de caixa que variam a uma taxa média, $\overline{f}$, a cada período.
- Uma quantidade fixa de uma mercadoria cujo preço infla a uma taxa constante a cada ano é uma situação típica que pode ser modelada com uma sequência geométrica de fluxos de caixa.
- O padrão resultante de fluxo de caixa no final de cada ano é chamado de série de gradiente geométrico e possui a aparência geral mostrada na Figura 1.
- Observe que o fluxo de caixa inicial nessa série, A_1, ocorre no final do primeiro período e que $A_k = (A_{k-1})(1+\overline{f}),\ 2 \leq k \leq n$.
- O N-ésimo termo dessa sequência geométrica é $A_n = A_1(1+\overline{f})^{n-1}$, e a razão comum ao longo da sequência é $(A_k - A_{k-1})/A_{k-1} = \overline{f}$.
- É importante notar que $\overline{f}$ pode ser positiva ou negativa.
- Cada termo da Figura 1 poderia ser descontado ou capitalizado à taxa de juros i por período para obter um valor de P ou F, respectivamente.
- No entanto, isso se torna bastante trabalhoso para n grande, sendo conveniente, portanto, dispor de uma equação única.
- O valor presente equivalente da série de gradiente geométrico mostrada na Figura 1 é

Sequências geométricas de fluxos de caixa

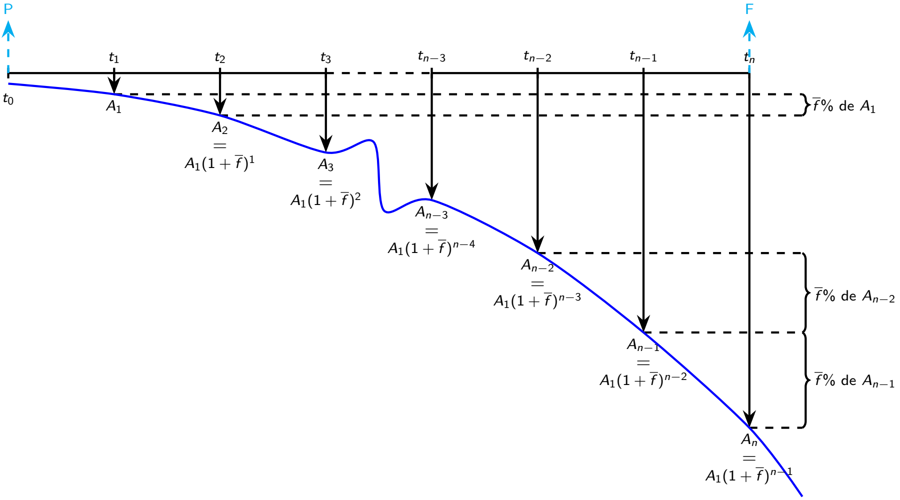


Figura 1. Diagrama de Fluxo de Caixa para uma Sequência Geométrica de Pagamentos Crescendo à uma Taxa Constante de $\overline{f}$ por Período.

Sequências geométricas de fluxos de caixa

- O valor presente equivalente da série de gradiente geométrico mostrada na Figura 1 é

$$\begin{aligned} P &= A_1(P/F, i\%, 1) + A_2(P/F, i\%, 2) + A_3(P/F, i\%, 3) + \cdots + A_n(P/F, i\%, n) \\ &= A_1(1+i)^{-1} + A_2(1+i)^{-2} + A_3(1+i)^{-3} + \cdots + A_n(1+i)^{-n} \\ &= A_1(1+\overline{f})(1+i)^{-1} + A_1(1+\overline{f})(1+i)^{-2} + A_1(1+\overline{f})(1+i)^{-3} + \cdots \\ &+ A_1(1+\overline{f})(1+i)^{-n} \\ &= A_1(1+i)^{-1}[1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}], \end{aligned} \tag{1}$$

  onde $x = (1+\overline{f})/(1+i)$.
- A expressão em colchetes na Equação 1 se reduz a $(1+x^n)/(1-x)$quando $x \neq 1$ ou $\overline{f} \neq i$.
- Se $\overline{f} = i$, então $x = 1$ e a expressão em colchetes se reduz a n, o número de termos no somatório.

Sequências geométricas de fluxos de caixa

- Assim

$$P = \begin{cases} A_1(1+i)^{-1}(1-x^n)/(1-x), & \overline{f} \neq i \\ A_1 n(1+i)^{-1}, & \overline{f} = i \end{cases}$$

Que se reduz a

$$P = \begin{cases} \frac{A_1[1-(1+i)^{-n}(1+\overline{f})^n]}{i-\overline{f}}, & \overline{f} \neq i \\ A_1 n(1+i)^{-1}, & \overline{f} = i \end{cases} \tag{2}$$

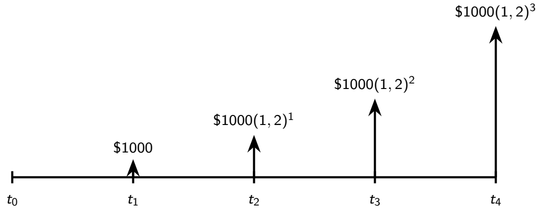
Ou

$$P = \begin{cases} \frac{A_1[1-(P/F,i\%,n)(F/P,\overline{f}\%,n)]}{i-\overline{f}} = \frac{A_1}{(1+\overline{f})}\Big(P/A, \frac{1+i}{1+\overline{f}} - 1, n\Big), & \overline{f} \neq i \\ A_1 n(P/F, i\%, 1), & \overline{f} = i \end{cases} \tag{3}$$

- Uma vez conhecido o valor presente equivalente de uma série geométrica em gradiente, podemos facilmente calcular a série uniforme equivalente ou o valor futuro utilizando os fatores de juros básicos $(A/P, i\%, n)$ e $(F/P, i\%, n)$.

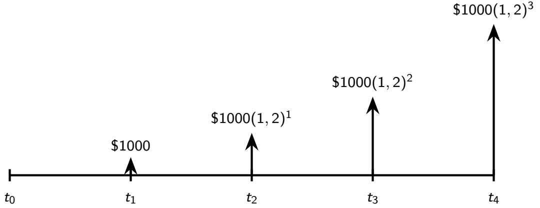
Sequências geométricas de fluxos de caixa - Exemplo 1

Considere a seguinte sequência geométrica de fluxos de caixa no final de cada ano e determine os valores equivalentes de P, A e F. A taxa de crescimento é de 20% ao ano após o primeiro ano. A taxa de juros é de 25% ao ano.



Sequências geométricas de fluxos de caixa - Exemplo 1

Considere a seguinte sequência geométrica de fluxos de caixa no final de cada ano e determine os valores equivalentes de P, A e F. A taxa de crescimento é de 20% ao ano após o primeiro ano. A taxa de juros é de 25% ao ano.



$$P = \frac{\$1.000[1-(P/F, 25\%, 4)(F/P, 20\%, 4)]}{0,25-0,20}$$

$$P = \frac{\$1.000}{0,05}[1-(0,4096)(2,0736)]$$

$$P = \$20.000(0,15065)$$

$$P = \$3.013;$$

$$A = \$3.013(A/P, 25\%, 4) = \$1.275,70;$$

$$F = \$3.013(F/P, 25\%, 4) = \$7.355,94.$$

Sequências geométricas de fluxos de caixa - Exemplo 2

Suponha que o gradiente geométrico no Exemplo 1 comece com \$1.000 no final do primeiro ano. A sequência decresce 20% ao ano após o primeiro ano. Determine os valores de P, A e F sob essa condição.

Sequências geométricas de fluxos de caixa - Exemplo 2

Suponha que o gradiente geométrico no Exemplo 1 comece com \$1.000 no final do primeiro ano. A sequência decresce 20% ao ano após o primeiro ano. Determine os valores de P, A e F sob essa condição. O valor de $\overline{f}$ nesse caso é -20%.

$$
\begin{aligned}
P &= \frac{\$1.000[1-(P/F,25\%,4)(F/P,-20\%,4)]}{0,25-(-0,20)} \\
P &= \frac{\$1.000}{0,45}[1-(0,4096)(1-0,20)^4] \\
P &= \$2.222,22(0,83222) \\
P &= \$1.849,38; \\
A &= \$1.849,38(A/P,25\%,4) = \$783,03; \\
F &= \$1.849,38(F/P,25\%,4) = \$4.515,08.
\end{aligned}
$$

Sequências geométricas de fluxos de caixa - Exercícios

1. No seu 23º aniversário, você decide investir \$4.500 (10% do seu salário anual) em um fundo mútuo que rende 7% ao ano. Você continuará fazendo depósitos anuais iguais a 10% do seu salário anual até se aposentar aos 62 anos (40 anos após iniciar o trabalho). Você espera que seu salário aumente em média 4% ao ano durante esse período. Quanto dinheiro você terá acumulado no fundo mútuo quando se aposentar?
2. O valor futuro no ano 10 de uma série de fluxos de caixa com gradiente geométrico foi de \$400.000. A taxa de juros era de 10% ao ano. A taxa de crescimento anual dos fluxos de caixa era de 8% ao ano. Qual foi o valor do fluxo de caixa no ano 1?