FURG
UNIVERSIDADE FEDERAL
DO RIO GRANDE

Engenharia econômica

Vinicius Santos

Economia - ENG1 07067

30 de Junho de 2025

Gradiente uniforme (aritmético) de fluxos de caixa

- Alguns problemas envolvem recebimentos ou despesas que se projetam para aumentar ou diminuir por uma quantia uniforme a cada período, constituindo assim uma sequência aritmética de fluxos de caixa.
- Por exemplo, devido ao arrendamento de um certo tipo de equipamento, as economias com manutenção e reparos, em relação à compra do equipamento, podem aumentar por uma quantia aproximadamente constante a cada período.
- Essa situação pode ser modelada como um gradiente uniforme de fluxos de caixa.
- A Figura 1 é um diagrama de fluxo de caixa de uma sequência de fluxos de caixa no final do período que aumentam por uma quantia constante, G, em cada período.
- O G é conhecido como a quantia do gradiente uniforme.
- Note que o cronograma dos fluxos de caixa nos quais as fórmulas derivadas e os valores tabelados são baseados é o seguinte:

Fim de período	Fluxo de caixa
1	(0)G
2	(1)G
3	(2)G
$\vdots$	$\vdots$
$n-1$	$(n-2)$G
n	$(n-1)$G

Gradiente uniforme (aritmético) de fluxos de caixa

- Observe que o primeiro fluxo de caixa com gradiente uniforme, G, ocorre no final do segundo período.

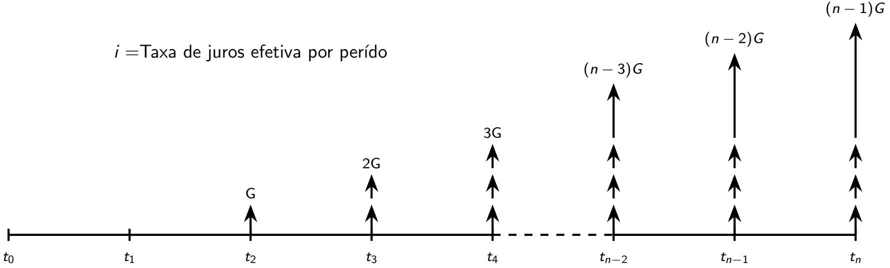


Figura 1. Fluxo de caixa com gradiente uniforme crescente em G reais por período.

Encontrando P quando dado G

- O valor presente equivalente, P, da sequência aritmética de fluxos de caixa mostrada na Figura 1 é

$$P = \frac{G(1)}{(1+i)^2} + \frac{G(2)}{(1+i)^3} + \frac{G(3)}{(1+i)^4} + \cdots + \frac{G(n-2)}{(1+i)^{n-1}} + \frac{G(n-1)}{(1+i)^n}$$

- Se adicionarmos o termo fictício $\frac{G(0)}{(1+i)^1}$ para representar o fluxo de caixa "ausente" no tempo um, podemos reescrever a equação acima como:

$$P = G \sum_{t=1}^{n} \frac{(t-1)}{(1+i)^t}$$

- Reconhecendo a equação acima como a soma de uma sequência geométrica, podemos fazer as substituições apropriadas e com alguma manipulação algébrica, temos

$$P = G \left\{ \frac{1}{i} \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} - \frac{n}{(1+i)^n} \right] \right\} \rightarrow P = G \cdot (P/G, i\%, n) \tag{1}$$

- O termo entre chaves na Equação 1 é chamado de fator de conversão de gradiente para equivalente presente.
- Ele também pode ser expresso como $\frac{1}{i}\left[(P/A, i\%, n) - n(P/F, i\%, n)\right]$.

Encontrando A quando dado G

- A partir da Equação 1, é fácil desenvolver uma expressão para A da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
A &= P(A/P, i\%, n) \\
&= G\left\{\frac{1}{i}\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} - \frac{n}{(1+i)^n}\right]\right\}(A/P, i\%, n) \\
&= \frac{G}{i}\left[(P/A, i\%, n) - \frac{n}{(1+i)^n}\right](A/P, i\%, n) \\
&= \frac{G}{i}\left[1 - \frac{ni(1+i)^n}{(1+i)^n[(1+i)^n - 1]}\right] \\
&= \frac{G}{i} - G\left[\frac{n}{(1+i)^n - 1}\right] \\
A &= G\left[\frac{1}{i} - \frac{n}{(1+i)^n - 1}\right] \rightarrow A = G(A/G, i\%, n) \qquad (2)
\end{aligned}$$

- O termo entre colchetes na Equação 2 é chamado de fator de conversão de gradiente para série uniforme.

Encontrando F quando dado G

- Podemos desenvolver uma equação para o valor futuro, F, de uma série aritmética usando a Equação 1:

$$
\begin{aligned}
F &= P(F/P, i\%, n) \\
&= G\left\{\frac{1}{i}\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} - \frac{n}{(1+i)^n}\right]\right\}(1+i)^n \\
&= G\left\{\frac{1}{i}\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} - n\right]\right\} \\
&= \frac{G}{i}(F/A, i\%, n) - \frac{nG}{i}
\end{aligned}
\tag{3}
$$

- Geralmente, é mais prático lidar com equivalentes presentes e anuais de séries aritméticas.

Cálculos usando G

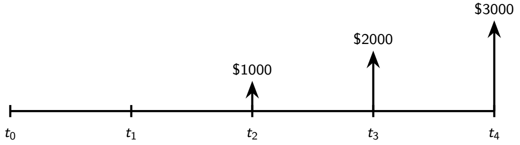
- Certifique-se de notar que o uso direto dos fatores de conversão de gradiente se aplica quando não há fluxo de caixa no final do primeiro período, como no Exemplo 1.
- Pode haver um valor A no final do primeiro período, mas ele é tratado separadamente, como ilustrado nos Exemplos 2 e 3.
- Uma grande vantagem do uso dos fatores de conversão de gradiente (isto é, economia de tempo computacional) é percebida quando n se torna grande.

Cálculos usando G - Exemplo 1

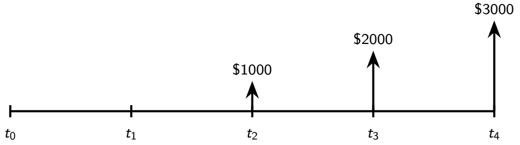
- Como exemplo do uso direto dos fatores de conversão de gradiente, suponha que certos fluxos de caixa ao final do ano (FDA) sejam esperados em \$1.000 no segundo ano, \$2.000 no terceiro ano e \$3.000 no quarto ano.
- Suponha que a taxa de juros seja de 15% ao ano.
- Deseja-se encontrar:
  (a) o valor equivalente presente no início do primeiro ano,
  (b) o valor equivalente anual uniforme ao final de cada um dos quatro anos.

Cálculos usando G - Exemplo 1

- Como exemplo do uso direto dos fatores de conversão de gradiente, suponha que certos fluxos de caixa ao final do ano (FDA) sejam esperados em \$1.000 no segundo ano, \$2.000 no terceiro ano e \$3.000 no quarto ano.
- Suponha que a taxa de juros seja de 15% ao ano.
- Deseja-se encontrar:
  (a) o valor equivalente presente no início do primeiro ano,
  (b) o valor equivalente anual uniforme ao final de cada um dos quatro anos.



Cálculos usando G - Exemplo 1



- Observe que este cronograma de fluxos de caixa se encaixa no modelo das fórmulas de gradiente aritmético com $G = \$1.000$ e $n = 4$.
- Note que não há fluxo de caixa ao final do primeiro período.
- (a) O valor presente equivalente pode ser calculado como:

$$P_0 = G(P/G, 15\%, 4) = \$1.000 \times 3{,}79 = \$3.790.$$

- (b) O valor anual equivalente pode ser calculado pela Equação 2 como:

$$A = G(A/G, 15\%, 4) = \$1.000 \times 1{,}3263 = \$1.326{,}30.$$

- Naturalmente, uma vez conhecido P_0, o valor de A pode ser calculado por:

$$A = P_0(A/P, 15\%, 4) = \$3.790 \times 0{,}3503 = \$1.326{,}30.$$

Cálculos usando G - Exemplo 2

- Como outro exemplo do uso das fórmulas de gradiente aritmético, suponha que tenhamos os seguintes fluxos de caixa:

Fim de período	Fluxo de caixa
1	5000
2	6000
3	7000
4	8000

- Além disso, suponha que desejamos calcular o valor presente equivalente desses fluxos de caixa com uma taxa de juros de 15% ao ano, utilizando fatores de conversão de gradiente.

Cálculos usando G - Exemplo 2

- O cronograma de fluxos de caixa é representado no diagrama no topo da Figura 2.
- Os dois diagramas debaixo da Figura 2 mostram como o cronograma original pode ser decomposto em dois conjuntos distintos de fluxos de caixa: uma série de anuidade de \$5.000 mais um gradiente aritmético de \$1.000 que se ajusta ao modelo geral de gradiente para o qual existem fatores tabelados.
- As somas dos valores presentes equivalentes desses dois conjuntos separados de fluxos de caixa são iguais ao valor presente equivalente do problema original.
- Assim, utilizando os símbolos mostrados na Figura 2, temos:

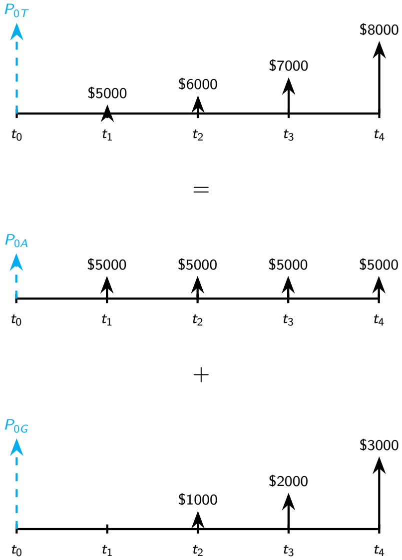
$$\begin{aligned} P_{0T} &= P_{0A} + P_{0G} \\ &= A(P/A, 15\%, 4) + G(P/G, 15\%, 4) \\ &= 5000(2,8550) + 1000(3,79) = 14275 + 3790 = \$18.065 \end{aligned} \tag{4}$$

- O valor anual equivalente dos fluxos de caixa originais pode ser calculado com o auxílio da Equação 2 da seguinte forma:

$$\begin{aligned} A_T &= A + A_G \\ &= 5000 + 1000(A/G, 15\%, 4) = \$6.326,30 \end{aligned}$$

- A_T é equivalente a P_{0T} porque \$6.326,30 $(P/A, 15\%, 4) = \$18.061$, que é o mesmo valor obtido anteriormente (sujeito a erro de arredondamento).

Cálculos usando G - Exemplo 2 (Figura 2)



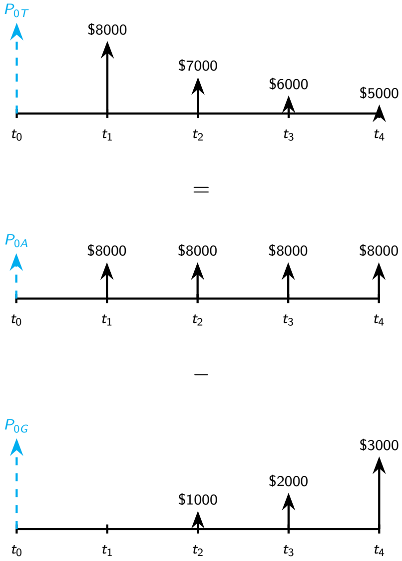
Cálculos usando G - Exemplo 3

- Para outro exemplo do uso de fórmulas de gradiente aritmético, suponha que tenhamos fluxos de caixa exatamente ao contrário da situação retratada no Exemplo 2.
- O diagrama no topo da Figura 3 mostra a seguinte sequência de fluxos de caixa:

Fim de período	Fluxo de caixa
1	8000
2	7000
3	6000
4	5000

- Calcule o valor presente equivalente a uma taxa de juros de 15% ao ano, utilizando os fatores de juros do gradiente aritmético.

Cálculos usando G - Exemplo 3 (Figura 3)



Cálculos usando G - Exemplo 3

- Os dois diagramas na parte de baixo da Figura 3 mostram como o gradiente uniforme pode ser decomposto em dois diagramas de fluxo de caixa separados.
- Neste exemplo, estamos subtraindo um gradiente aritmético de \$1.000 de uma série de anuidade de \$8.000. Assim,

$$\begin{aligned} P_{0T} &= P_{0A} - P_{0G} \\ &= A(P/A, 15\%, 4) - G(P/G, 15\%, 4) \\ &= 8000(2,8550) - 1000(3,79) = 22840 - 3790 = \$19050 \end{aligned} \tag{5}$$

- Novamente, o valor anual equivalente da série original decrescente de fluxos de caixa pode ser calculado pela mesma lógica:

$$\begin{aligned} A_T &= A - A_G \\ &= 8000 - 1000(A/G, 15\%, 4) = \$6673,70 \end{aligned}$$

- Observe, pelos Exemplos 2 e 3, que o valor presente equivalente de \$18.065 para uma série crescente de pagamentos em gradiente aritmético é diferente do valor presente equivalente de \$19.050 para um gradiente aritmético com pagamentos de valores idênticos, mas com cronologia invertida (série decrescente de pagamentos).
- Essa diferença seria ainda maior para taxas de juros e valores de gradiente mais elevados e exemplifica o efeito significativo da cronologia dos fluxos de caixa sobre os valores equivalentes.