

# Engenharia econômica

Vinicius Santos

*Economia - ENG1 07067*

23 de Junho de 2025

# Relacionando uma série uniforme (anuidade) ao seu valor presente e futuro equivalentes

- A Figura 1 mostra um diagrama geral de fluxo de caixa envolvendo uma série de recebimentos uniformes (iguais), cada um de valor  $A$ , ocorrendo no final de cada período por  $n$  períodos, com juros de  $i\%$  por período.
- Essa série uniforme é frequentemente chamada de anuidade.
- Deve-se observar que as fórmulas e tabelas a serem apresentadas são derivadas de modo que  $A$  ocorra no final de cada período e, portanto,
  - $P$  (valor presente equivalente) ocorre um período de juros antes do primeiro  $A$  (valor uniforme),
  - $F$  (valor futuro equivalente) ocorre ao mesmo tempo que o último  $A$  e  $n$  períodos após  $P$ ,
  - e  $A$  (valor anual equivalente) ocorre no final dos períodos 1 até  $n$ , inclusive.
- A relação temporal entre  $P$ ,  $A$  e  $F$  pode ser observada na Figura 1.
- Quatro fórmulas que relacionam  $A$  a  $F$  e  $P$  serão desenvolvidas.

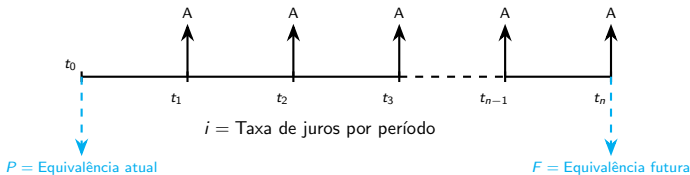


Figura 1. Fluxo de caixa com anuidade

# Encontrando $P$ quando dado $A$

- A fórmula para o valor presente  $P$  pode ser determinada considerando cada valor  $A$  como um valor futuro  $F$ , calculando seu valor presente com o fator  $P/F$ , e somando os resultados.
- A equação assim obtida é:

$$P = \left[ A \frac{1}{(1+i)^1} \right] + \left[ A \frac{1}{(1+i)^2} \right] + \cdots + \left[ A \frac{1}{(1+i)^{n-1}} \right] + \left[ A \frac{1}{(1+i)^n} \right]$$

- Os termos entre colchetes são os fatores  $P/F$  para os períodos de 1 até  $n$ , respectivamente;
- como  $A$  é comum a todos, ele pode ser colocado em evidência. Assim,

$$P = A \left[ \frac{1}{(1+i)^1} + \frac{1}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^{n-1}} + \frac{1}{(1+i)^n} \right] \quad (1)$$

- Para simplificar a Eq. 1 e obter o fator  $P/A$ , multiplicamos cada termo da equação por  $1/(1+i)$ :

$$\frac{P}{(1+i)} = A \left[ \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^n} + \frac{1}{(1+i)^{n+1}} \right] \quad (2)$$

# Encontrando P quando dado A

- Então, subtraímos a Eq. 1 da Eq. 2 e simplificamos para obter a seguinte relação:

$$\begin{aligned} \frac{P}{(1+i)} - P &= \frac{A}{(1+i)^2} + \frac{A}{(1+i)^3} + \cdots \frac{A}{(1+i)^n} + \frac{A}{(1+i)^{n+1}} \\ &\quad - \frac{A}{(1+i)^1} - \frac{A}{(1+i)^2} - \cdots \frac{A}{(1+i)^{n-1}} - \frac{A}{(1+i)^n} \\ P \left[ \frac{-i}{(1+i)} \right] &= A \left[ \frac{1}{(1+i)^{n+1}} - \frac{1}{(1+i)^1} \right] \\ P &= \frac{A}{-i} \left[ \frac{1}{(1+i)^n} - 1 \right] \end{aligned}$$

$$P = A \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \right] \quad i \neq 0 \quad (3)$$

- O termo entre colchetes na Equação 3 é chamado de fator de valor presente de série uniforme (FVPSU).
- Sua notação é  $P/A$ .

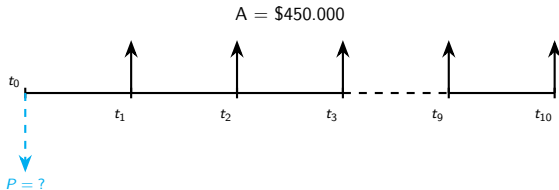
$$P = A(P/A, i\%, n) \quad (4)$$

## Encontrando P quando dado A - Exemplo 1

Uma microcervejaria está considerando a instalação de um sistema de caldeira recém-projetado. Esse sistema queima os resíduos secos de malte e cevada do processo de fabricação da cerveja. A caldeira produzirá vapor de processo que alimenta a maior parte das operações energéticas da cervejaria. Isso resultará em uma economia de \$450.000 por ano durante a vida útil esperada de 10 anos da caldeira. Se a taxa de juros for de 12% ao ano, quanto a cervejaria pode investir no novo sistema de caldeira?

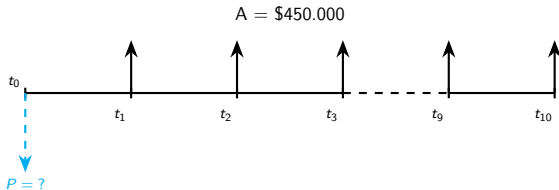
# Encontrando P quando dado A - Exemplo 1

Uma microcervejaria está considerando a instalação de um sistema de caldeira recém-projetado. Esse sistema queima os resíduos secos de malte e cevada do processo de fabricação da cerveja. A caldeira produzirá vapor de processo que alimenta a maior parte das operações energéticas da cervejaria. Isso resultará em uma economia de \$450.000 por ano durante a vida útil esperada de 10 anos da caldeira. Se a taxa de juros for de 12% ao ano, quanto a cervejaria pode investir no novo sistema de caldeira?



# Encontrando P quando dado A - Exemplo 1

Uma microcervejaria está considerando a instalação de um sistema de caldeira recém-projetado. Esse sistema queima os resíduos secos de malte e cevada do processo de fabricação da cerveja. A caldeira produzirá vapor de processo que alimenta a maior parte das operações energéticas da cervejaria. Isso resultará em uma economia de \$450.000 por ano durante a vida útil esperada de 10 anos da caldeira. Se a taxa de juros for de 12% ao ano, quanto a cervejaria pode investir no novo sistema de caldeira?



O aumento no fluxo de caixa anual é \$450.000, e ele continua por 10 anos a uma taxa de juros de 12% ao ano. O limite superior sobre o qual a cervejaria pode gastar na nova caldeira é:

$$P = 450.000 \left[ \frac{(1 + 0,12)^{10} - 1}{0,12(1 + 0,12)^{10}} \right]$$

$$P \approx \$2.542.600$$

# Encontrando A quando dado P

- A fórmula para encontrar A quando temos P é obtida por inverter a Equação 3, isto é,

$$A = P \left[ \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \right] \quad i \neq 0 \quad (5)$$

- O termo entre colchetes é chamado de fator de recuperação de capital (FRC) e sua notação é A/P,

$$A = P(A/P, i\%, n) \quad (6)$$

- As fórmulas dadas pela Equação 3 e pela Equação 5 são derivadas considerando o valor presente  $P$  e o primeiro valor anual uniforme  $A$ , separados por um ano (período).
- Ou seja, o valor presente  $P$  deve sempre estar localizado um período antes do primeiro  $A$ .

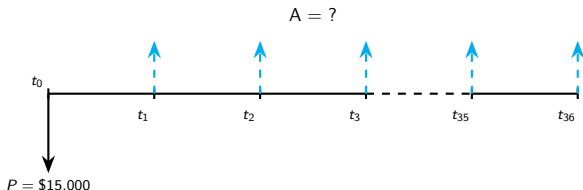


## Encontrando A quando dado P - Exemplo 2

Você toma emprestado \$15.000 da sua cooperativa de crédito para comprar um carro usado. A taxa de juros do seu empréstimo é de 0,25% ao mês. Você fará um total de 36 pagamentos mensais. Qual é o seu pagamento mensal?

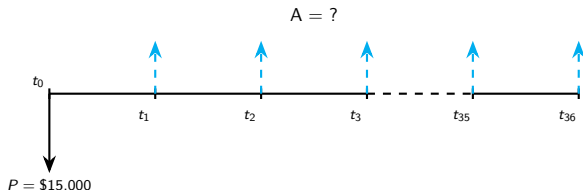
## Encontrando A quando dado P - Exemplo 2

Você toma emprestado \$15.000 da sua cooperativa de crédito para comprar um carro usado. A taxa de juros do seu empréstimo é de 0,25% ao mês. Você fará um total de 36 pagamentos mensais. Qual é o seu pagamento mensal? O diagrama de fluxo de caixa mostrado abaixo é desenhado do ponto de vista do banco. Note que o valor presente de \$15.000 ocorre um mês (período de juros) antes do primeiro fluxo de caixa da série de pagamentos uniformes.



## Encontrando A quando dado P - Exemplo 2

Você toma emprestado \$15.000 da sua cooperativa de crédito para comprar um carro usado. A taxa de juros do seu empréstimo é de 0,25% ao mês. Você fará um total de 36 pagamentos mensais. Qual é o seu pagamento mensal? O diagrama de fluxo de caixa mostrado abaixo é desenhado do ponto de vista do banco. Note que o valor presente de \$15.000 ocorre um mês (período de juros) antes do primeiro fluxo de caixa da série de pagamentos uniformes.



$$A = \$15.000 \left[ \frac{0,0025(1 + 0,0025)^{36}}{(1 + 0,0025)^{36} - 1} \right]$$

$$A = \$436,50 \text{ por mês}$$

# Encontrando F quando dado A

- Se um fluxo de caixa no valor de A dólares ocorre ao final de cada período durante n períodos, e  $i\%$  é a taxa de juros (lucro ou crescimento) por período, o valor equivalente futuro, F, ao final do n-ésimo período, é obtido somando os valores futuros equivalentes de cada um dos fluxos de caixa.
- Assim,

$$F = A[(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-3} + \dots + (1+i)^1 + (1+i)^0]$$

- Os termos entre colchetes formam uma sequência geométrica com razão comum igual a  $(1+i)^{-1}$ .
- Lembre-se de que a soma dos primeiros  $n$  termos de uma sequência geométrica é:

$$S_n = \frac{a_1 - ba_n}{1 - b} \quad (b \neq 1)$$

onde  $a_1$  é o primeiro termo na sequência,  $a_n$  é o último termo, e  $b$  é a razão comum. Se  $b = (1+i)^{-1}$ ,  $a_1 = (1+i)^{n-1}$ , e  $a_n = (1+i)^0$ , então

$$F = A \left[ \frac{(1+i)^{n-1} - \frac{1}{(1+i)}}{1 - \frac{1}{(1+i)}} \right] \rightarrow F = A \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] \rightarrow F = A(F/A, i\%, n) \quad (7)$$

- A quantidade entre colchetes é chamada de fator de montante composto de série uniforme.

## Encontrando F quando dado A - Exemplo 3

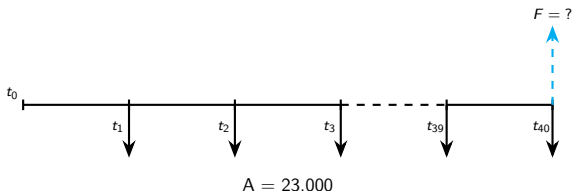
Um estudo recente do governo relatou que um diploma universitário vale um adicional de \$23.000 por ano em renda (A), em comparação ao que um graduado do ensino médio ganha. Se a taxa de juros ( $i$ ) for de 6% ao ano e você trabalhar por 40 anos ( $n$ ), qual é o montante composto futuro (F) dessa renda extra?

O ponto de vista que usaremos para resolver esse problema é o de “emprestar” os \$23.000 de renda anual extra a uma conta de poupança (ou algum outro veículo de investimento). O equivalente futuro é o valor que pode ser retirado após o 40º depósito ser realizado.

## Encontrando F quando dado A - Exemplo 3

Um estudo recente do governo relatou que um diploma universitário vale um adicional de \$23.000 por ano em renda (A), em comparação ao que um graduado do ensino médio ganha. Se a taxa de juros (i) for de 6% ao ano e você trabalhar por 40 anos (n), qual é o montante composto futuro (F) dessa renda extra?

O ponto de vista que usaremos para resolver esse problema é o de “emprestar” os \$23.000 de renda anual extra a uma conta de poupança (ou algum outro veículo de investimento). O equivalente futuro é o valor que pode ser retirado após o 40º depósito ser realizado.



Note que o futuro equivalente ocorre ao mesmo tempo que o último depósito de \$23.000.

$$F = \$23,000 \left[ \frac{(1 + 0,06)^{40} - 1}{0,06} \right] \rightarrow F = 3.559.525,20$$

# Encontrando A quando dado F

- Tomando a Equação 7 e resolvendo para A, temos

$$A = F \left[ \frac{i}{(1+i)^n - 1} \right] \rightarrow A = F(A/F, i\%, n) \quad (8)$$

- Assim, a Equação 8 é a relação para encontrar o valor A de uma série uniforme de fluxos de caixa ocorrendo ao final de  $n$  períodos de juros, que seria equivalente (teria o mesmo valor que) ao seu valor futuro ocorrendo ao final do último período.
- A quantidade entre colchetes é chamada de fator de fundo de amortização.

# Exercícios

- ① Uma empresa de energia elétrica realizará auditorias energéticas em residências com pelo menos 30 anos de idade. A empresa estima que os proprietários podem economizar \$5 por metro quadrado anualmente como resultado da vedação, isolamento do sótão, novos dutos e bombas de calor de alta eficiência. Quinze anos é a vida útil esperada desse incentivo de melhorias energéticas. A taxa de juros anual é de 8%. Quanto seria justificável gastar agora nesse projeto para uma residência de 1.500 metros quadrados?
- ② Para ilustrar ainda mais os efeitos impressionantes dos juros compostos, consideramos a credibilidade da seguinte afirmação: “Se você tem 20 anos e economiza \$1,00 por dia pelo resto da vida, pode se tornar milionário.” Vamos supor que você viva até os 80 anos e que a taxa de juros anual seja de 10% ( $i = 10\%$ ). Nessas condições específicas, qual o montante composto futuro (F)?
- ③ Quanto dinheiro você deve depositar a cada ano, começando 1 ano a partir de agora, a uma taxa de 6% ao ano, para acumular \$30.000 em cinco anos?
- ④ Uma empresa investe 5 milhões a cada ano durante 10 anos, começando 1 ano a partir de agora. Qual é o valor futuro equivalente se a taxa de juros for de 10% ao ano?