Juros e aplicações

Vinicius Santos

Economia - ENG1 07067

16 de Junho de 2025

O conceito de equivalência

- O valor do dinheiro no tempo e a taxa de juros, considerados em conjunto, ajudam a desenvolver o conceito de equivalência econômica, que significa que diferentes quantias de dinheiro em momentos distintos podem ser iguais em valor econômico.
- Por exemplo, se a taxa de juros for de 5% ao ano, \$1.000 hoje é equivalente a \$1.050 daqui a um ano.
- Assim, se alguém lhe oferecer \$1.000 hoje ou \$1.050 daqui a um ano, do ponto de vista econômico, não faria diferença qual oferta você aceitasse.
- Deve-se observar que \$1.000 hoje ou \$1.050 daqui a um ano são equivalentes entre si apenas quando a taxa de juros é de 5% ao ano.
- Com uma taxa de juros maior ou menor, \$1.000 hoje não é equivalente a \$1.050 daqui a um ano.
- De forma similar à equivalência futura, esse conceito também pode ser aplicado com a mesma lógica para determinar a equivalência com anos anteriores.
- Um total de \$1.000 hoje é equivalente a $\$1.000/1{,}05 = \$952{,}38$ há um ano, considerando uma taxa de juros de 5% ao ano.
- A partir dessas ilustrações, podemos afirmar o seguinte:
- \$952,38 no ano passado, \$1.000 hoje e \$1.050 daqui a um ano são equivalentes a uma taxa de juros de 5% ao ano.

Diagramas de fluxo de caixa

- Um diagrama de fluxo de caixa é uma representação gráfica dos fluxos de caixa desenhada em uma escala de tempo.
- O diagrama inclui o que é conhecido, o que é estimado e o que é necessário; ou seja, uma vez que o diagrama de fluxo de caixa esteja completo, deve ser possível resolver o problema apenas olhando para o diagrama.
- O diagrama de fluxo de caixa utiliza as seguintes convenções:
- A linha horizontal é uma escala de tempo, com a progressão do tempo indo da esquerda para a direita.
- O período (por exemplo, ano, trimestre ou mês) pode ser aplicado a intervalos de tempo.
- Considere a Fig. 1, que mostra uma escala de tempo típica de fluxo de caixa para 5 períodos.
- No diagrama de fluxo de caixa, o tempo $t = 0$ (t_0) é o presente, e o final do intervalo $t_0 - t_1$ corresponde ao final do período de tempo 1 (t_1).

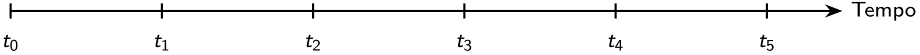

Figura 1. Fluxo de caixa para 5 períodos

Diagramas de fluxo de caixa

- As setas representam os fluxos de caixa e são posicionadas no final do período quando se utiliza a convenção de fim de período.
- A convenção de fim de período assume que todos os fluxos de caixa ocorrem no final de um período de juros.
- Para distingui-los, setas para baixo representam despesas (fluxos de caixa negativos ou saídas de caixa).
- Setas para cima representam receitas (fluxos de caixa positivos ou entradas de caixa).
- A Fig. 2 mostra uma receita (entrada de caixa) no final do ano 1 e desembolsos iguais (saídas de caixa) ao final dos anos 2, 3 e 4.

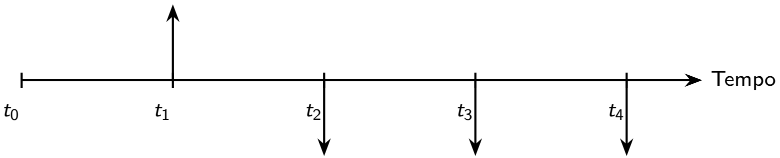

Figura 2. Fluxo de caixa positivo e negativo

Diagramas de fluxo de caixa

- O diagrama de fluxo de caixa depende do ponto de vista adotado.
- Por exemplo, se você tomar emprestado \$1.000 de um amigo agora e reembolsá-lo em prestações anuais iguais durante 3 anos, o diagrama de fluxo de caixa será diferente dependendo de quem o observa.
- Do seu ponto de vista (Fig. 3), o diagrama mostrará uma entrada de caixa no tempo 0 (empréstimo recebido) e três saídas de caixa nos anos seguintes (pagamentos).
- Do ponto de vista do seu amigo (Fig. 4), o diagrama mostrará uma saída de caixa no tempo 0 (dinheiro emprestado) e três entradas de caixa nos anos seguintes (reembolsos).

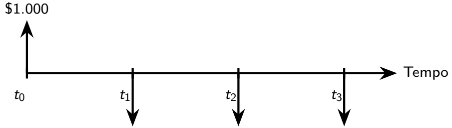

Figura 3. Fluxo de caixa pelo seu ponto de vista

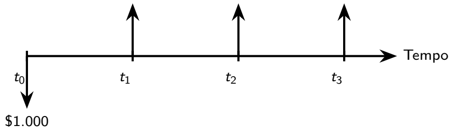

Figura 4. Fluxo de caixa pelo ponto de vista do amigo

Diagramas de fluxo de caixa

- Quando entradas e saídas de caixa ocorrem ao final de um determinado período de juros, o fluxo de caixa líquido pode ser determinado pela seguinte relação:
- Fluxo de caixa líquido = Recebimentos – Desembolsos
- Fluxo de caixa líquido = Entradas de caixa – Saídas de caixa
- Por exemplo, considere o diagrama de fluxo de caixa mostrado na Fig. 5.

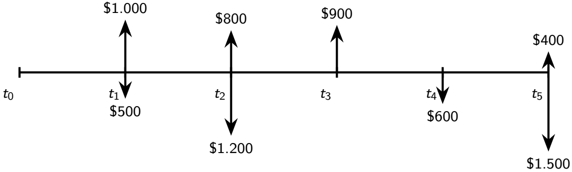

Figura 5. Fluxo de caixa com entradas e saídas de caixa

Diagramas de fluxo de caixa

- O fluxo de caixa líquido ao final do período de juros 1 é \$1.000 – \$500 = \$500.
- O fluxo de caixa líquido ao final do período de juros 2 é \$800 – \$1.200 = –\$400.
- O fluxo de caixa líquido ao final do período de juros 3 é \$900 – \$0 = \$900.
- O fluxo de caixa líquido ao final do período de juros 4 é \$0 – \$600 = –\$600.
- O fluxo de caixa líquido ao final do período de juros 5 é \$400 – \$1.500 = –\$1.100.
- O diagrama de fluxo de caixa em termos de fluxos de caixa líquidos é mostrado na Fig. 6.

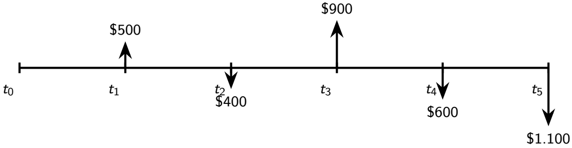

Figura 6. Fluxo de caixa com entradas e saídas de caixa

Terminologia

- As equações e procedimentos utilizados na economia da engenharia empregam os seguintes termos e símbolos.
- $P =$ Valor equivalente de um ou mais fluxos de caixa em um ponto de referência no tempo chamado de presente ou tempo 0. P também é conhecido como valor presente (VP), valor presente líquido (VPL), fluxo de caixa descontado (FCD) e custo capitalizado (CC). Sua unidade é em reais.
- $F =$ Valor equivalente de um ou mais fluxos de caixa em um ponto de referência no tempo chamado de futuro. F também é conhecido como valor futuro (VF). Sua unidade também é em reais.
- $A =$ Série de valores iguais e consecutivos no final de cada período. A também é conhecido como valor anual (VA), anuidade e valor anual uniforme equivalente (VAUE). Sua unidade é reais por ano ou reais por mês.
- $n =$ Número de períodos de juros. Sua unidade pode ser anos, meses ou dias.
- $i =$ taxa de juros ou retorno por período de tempo. Sua unidade é percentual ao ano, percentual ao mês ou percentual ao dia.

Terminologia

- Deve-se observar que P e F representam ocorrências únicas, enquanto A ocorre com o mesmo valor em cada período de juros por um número especificado de períodos.
- O valor presente P, de fato, representa uma quantia única em algum momento anterior a um valor futuro F ou anterior à primeira ocorrência de um valor equivalente em série A.
- Deve-se observar também que o símbolo A sempre representa um valor uniforme que se estende por períodos de juros consecutivos. Ambas as condições devem existir para que uma série possa ser representada por A.
- A taxa de juros i é assumida como uma taxa composta, a menos que seja especificamente declarada como juros simples.
- i é expressa em percentual por período de juros, por exemplo, 10% ao ano. A menos que seja indicado de outra forma, assume-se que a taxa se aplica durante todos os n anos ou períodos de juros.

Terminologia - Exemplo 5

Você planeja tomar emprestado \$15.000 para ajudar na compra de uma motocicleta. Foi acordado que o valor total (principal + juros) será devolvido após 5 anos. Neste caso, os símbolos envolvidos são:

- $P = \$15,000$
- $i = 8,5\%$ ao ano
- $n = 5$ anos
- $F = ?$

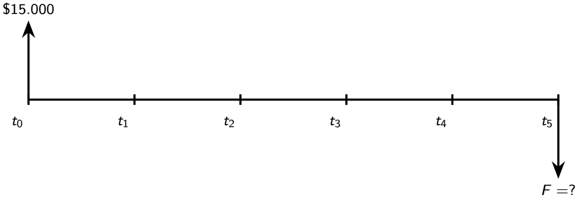

Figura 7. Fluxo de caixa (ponto de vista do tomador)

Terminologia - Exemplo 6

Suponha que você pegue emprestado \$50.000 agora a uma taxa de 8% ao ano por 10 anos. Você deve reembolsar o valor emprestado em pagamentos anuais iguais. Determine os símbolos envolvidos e seus valores. Desenhe o diagrama de fluxo de caixa do ponto de vista do credor.

- $P = 50{,}000$ (valor presente do empréstimo concedido)
- $n = 10$ anos (número de períodos)
- $i = 8\%$ ao ano (taxa de juros composta)
- $A =?$ (valor da anuidade, ou seja, pagamento anual uniforme a ser recebido pelo credor)

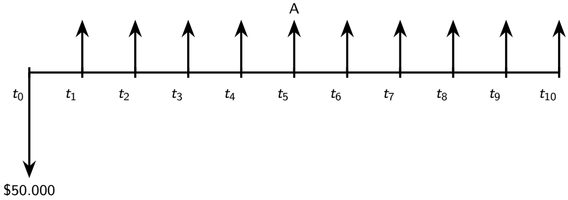

Figura 8. Fluxo de caixa (ponto de vista do credor)

Encontrando F quando dado P

- Se um valor de P dólares for investido em um determinado momento e $i\%$ for a taxa de juros (lucro ou crescimento) por período, o montante crescerá para $P + Pi = P(1 + i)$ ao final de um período.
- Ao final de dois períodos, o montante crescerá para $P(1 + i)(1 + i) = P(1 + i)^2$.
- Ao final de três períodos, o montante crescerá para $P(1 + i)^2(1 + i) = P(1 + i)^3$.
- Ao final de n períodos, o montante crescerá para

$$F = P(1 + i)^n. \tag{1}$$

- A quantidade $(1 + i)^n$ na Equação 1 é comumente chamada de fator de montante composto de pagamento único.

Encontrando P quando dado F

- A partir da Equação 1, resolvendo para P, chegamos no seguinte resultado

$$P = F(1+i)^{-n}. \tag{2}$$

- A quantidade $(1+i)^{-n}$ é chamada de fator de valor presente de pagamento único.
- **Exemplo**: Um investidor (proprietário) tem a opção de comprar um terreno que valerá \$10.000 em seis anos. Se o valor do terreno aumenta a uma taxa de 8% ao ano, quanto o investidor deve estar disposto a pagar agora por essa propriedade?

Encontrando P quando dado F

- A partir da Equação 1, resolvendo para P, chegamos no seguinte resultado

$$P = F(1+i)^{-n}. \tag{2}$$

- A quantidade $(1+i)^{-n}$ é chamada de fator de valor presente de pagamento único.
- **Exemplo**: Um investidor (proprietário) tem a opção de comprar um terreno que valerá \$10.000 em seis anos. Se o valor do terreno aumenta a uma taxa de 8% ao ano, quanto o investidor deve estar disposto a pagar agora por essa propriedade?

$$P = \$10.000(1+0,08)^{-6}$$
$$P = 6.301,7$$

Encontrando a taxa de juros quando dado P, F e n

- Existem situações em que conhecemos duas quantias de dinheiro (P e F) e quanto tempo as separa (n), mas não sabemos a taxa de juros (i) que as torna equivalentes.
- Por exemplo, se quisermos transformar \$500 em \$1.000 ao longo de 10 anos, a que taxa de juros deveríamos investir esse valor?
- Podemos resolver facilmente a Equação 1 para obter uma expressão para i.

$$i = \left(\frac{F}{P}\right)^{1/n} - 1 \tag{3}$$

- Assim, para nosso exemplo simples, $i = \left(\frac{\$1.000}{\$500}\right)^{1/10} - 1 = 0,0718$ ou 7,18% ao ano.
- A inflação é outro exemplo em que pode ser necessário resolver para uma taxa de juros.
- Suponha que o preço médio da gasolina em 2005 era \$2,31 por galão. Em 1993, o preço médio era \$1,07. Qual foi a taxa média anual de aumento do preço da gasolina nesse período de 12 anos?

Encontrando a taxa de juros quando dado P, F e n

- Existem situações em que conhecemos duas quantias de dinheiro (P e F) e quanto tempo as separa (n), mas não sabemos a taxa de juros (i) que as torna equivalentes.
- Por exemplo, se quisermos transformar \$500 em \$1.000 ao longo de 10 anos, a que taxa de juros deveríamos investir esse valor?
- Podemos resolver facilmente a Equação 1 para obter uma expressão para i.

$$i = \left(\frac{F}{P}\right)^{1/n} - 1 \tag{3}$$

- Assim, para nosso exemplo simples, $i = \left(\frac{\$1.000}{\$500}\right)^{1/10} - 1 = 0,0718$ ou 7,18% ao ano.
- A inflação é outro exemplo em que pode ser necessário resolver para uma taxa de juros.
- Suponha que o preço médio da gasolina em 2005 era \$2,31 por galão. Em 1993, o preço médio era \$1,07. Qual foi a taxa média anual de aumento do preço da gasolina nesse período de 12 anos? Com relação ao ano de 1993, o ano de 2005 está no futuro. Assim, $P = \$1{,}07$, $F = \$2{,}31$, e $n = 12$. Utilizando a Equação 3, obtemos:
  $i = \left(\frac{2{,}31}{1{,}07}\right)^{1/12} - 1 = 0{,}0662$ ou 6,62% ao ano.

Encontrando n quando dado P, F e i

- Às vezes estamos interessados em descobrir o tempo necessário para que um valor presente cresça até um valor futuro a uma determinada taxa de juros.
- Por exemplo, quanto tempo levaria para \$500 investidos hoje a uma taxa de 15% ao ano se tornarem \$1.000?
- Podemos usar a relação de equivalência dada na Equação 1 [$F = P(1+i)^n$] para obter uma expressão para n:
  $(1+i)^n = \frac{F}{P}$.
  Usando logaritmos: $n \log(1+i) = \log\left(\frac{F}{P}\right)$. Portanto,

$$n = \frac{\log(F/P)}{\log(1+i)} \tag{4}$$

- No exemplo dado: $n = \frac{\log(1{,}000/500)}{\log(1{,}15)} = 4{,}96 \approx 5$ anos