Engenharia econômica

Vinicius Santos

Economia - ENG1 07067

26 de Junho de 2025

Anuidade diferida

- Todas as anuidades (séries uniformes) discutidas até este ponto envolvem o primeiro fluxo de caixa sendo feito ao final do primeiro período, e são chamadas de anuidades ordinárias.
- Se o fluxo de caixa não começa até uma data posterior, a anuidade é conhecida como **anuidade diferida**.
- Se a anuidade for diferida por j períodos ($j < n$), a situação é representada na Figura 1, na qual toda a anuidade ordinária em destaque foi deslocada do "tempo presente" ou "tempo zero" por j períodos.
- Lembre-se de que, em uma anuidade diferida por j períodos, o primeiro pagamento é feito ao final do período $j + 1$, assumindo que todos os períodos envolvidos tenham igual duração.
- O equivalente presente ao final do período j de uma anuidade com fluxos de caixa de valor A é $A(P/A, i\%, n - j)$.
- O equivalente presente do valor único $A(P/A, i\%, n - j)$ no tempo zero será então

$$P_0 = A(P/A, i\%, n-j)(P/F, i\%, j) \rightarrow P_0 = A\left[\frac{(1+i)^{n-j}-1}{i(1+i)^{n-j}}\right]\left[\frac{1}{(1+i)^j}\right] \qquad (1)$$

Anuidade diferida

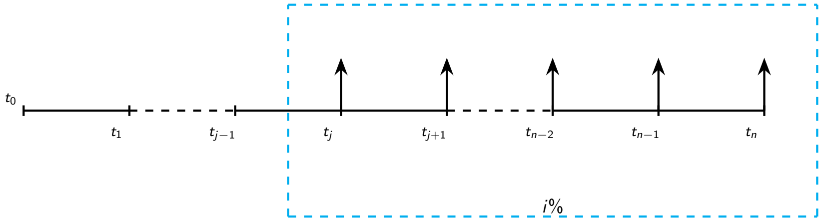
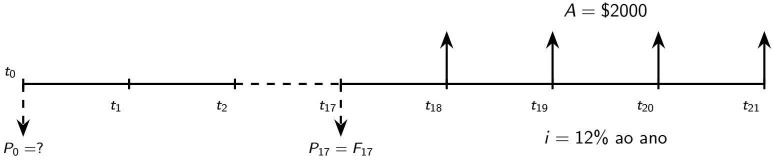


Figura 1. Fluxo de caixa com anuidade diferida

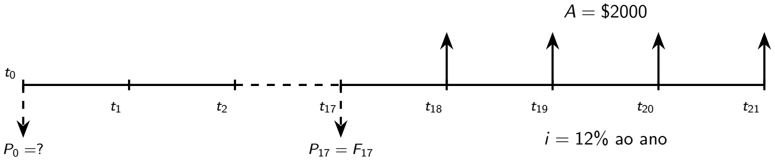
Anuidade diferida - Exemplo 1

- Para ilustrar a discussão, suponha que um pai, no dia do nascimento de seu filho, deseje determinar qual valor único deve ser depositado em uma conta com rendimento de 12% ao ano para permitir retiradas de $2.000 em cada um dos aniversários de 18, 19, 20 e 21 anos do filho.
- **Solução**
- O problema é representado no seguinte diagrama de fluxo de caixa.
- Deve-se primeiro reconhecer que há uma anuidade ordinária de quatro retiradas de $2.000 cada.
- O valor presente equivalente dessa anuidade ocorre no aniversário de 17 anos, quando se utiliza o fator $(P/A, i\%, n-j)$.
- Neste problema, $n = 21$ e $j = 17$.
- É frequentemente útil usar um subscrito com P ou F para indicar o respectivo ponto no tempo.
- Assim,

Anuidade diferida - Exemplo 1



Anuidade diferida - Exemplo 1



- Observe a seta tracejada no diagrama de fluxo de caixa indicando P_{17}.
- Agora que P_{17} é conhecido, o próximo passo é calcular P_0.
- Com relação a P_0, P_{17} é um equivalente futuro e, portanto, também pode ser denotado como F_{17}.
- O dinheiro em um determinado ponto no tempo, como no final do período 17, é o mesmo independentemente de ser chamado de equivalente presente ou equivalente futuro.

$$P_{17} = 2000\left[\frac{(1+0,12)^4 - 1}{0,12(1+0,12)^4}\right] = F17 \tag{2}$$

$$P_0 = F_{17}\left[\frac{1}{(1+0,12)^{17}}\right] \tag{3}$$

$$P_0 = 884,74 \tag{4}$$

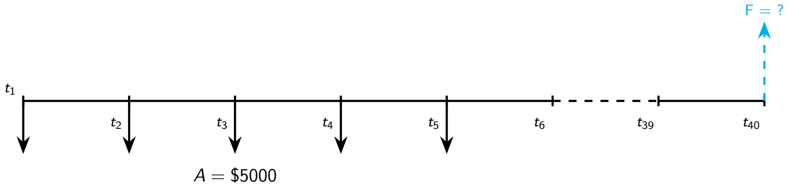
- Assim, \$884,46 é o valor que o pai teria que depositar no dia em que seu filho nasce.

Anuidade diferida - Exemplo 2

- Quando você começa seu primeiro emprego, decide começar a economizar imediatamente para a aposentadoria.
- Você deposita \$5.000 por ano no plano de previdência da empresa, que rende em média 8% de juros ao ano.
- Cinco anos depois, você muda de emprego e inicia um novo planode previdência.
- Você nunca chega a unificar os fundos dos dois planos.
- Se o primeiro plano continuasse a render juros à taxa de 8% ao ano por 35 anos após você parar de fazer contribuições, qual seria o valor da conta?

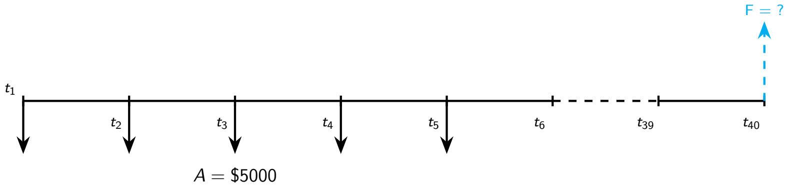
Anuidade diferida - Exemplo 2

- Quando você começa seu primeiro emprego, decide começar a economizar imediatamente para a aposentadoria.
- Você deposita $5.000 por ano no plano de previdência da empresa, que rende em média 8% de juros ao ano.
- Cinco anos depois, você muda de emprego e inicia um novo planode previdência.
- Você nunca chega a unificar os fundos dos dois planos.
- Se o primeiro plano continuasse a render juros à taxa de 8% ao ano por 35 anos após você parar de fazer contribuições, qual seria o valor da conta?



Anuidade diferida - Exemplo 2

- Quando você começa seu primeiro emprego, decide começar a economizar imediatamente para a aposentadoria.
- Você deposita \$5.000 por ano no plano de previdência da empresa, que rende em média 8% de juros ao ano.
- Cinco anos depois, você muda de emprego e inicia um novo planode previdência.
- Você nunca chega a unificar os fundos dos dois planos.
- Se o primeiro plano continuasse a render juros à taxa de 8% ao ano por 35 anos após você parar de fazer contribuições, qual seria o valor da conta?



$$F_5 = \$5.000(F/A, 8\%, 5) = \$5.000 \left[\frac{(1 + 0,08)^5 - 1}{0,08} \right] \tag{5}$$

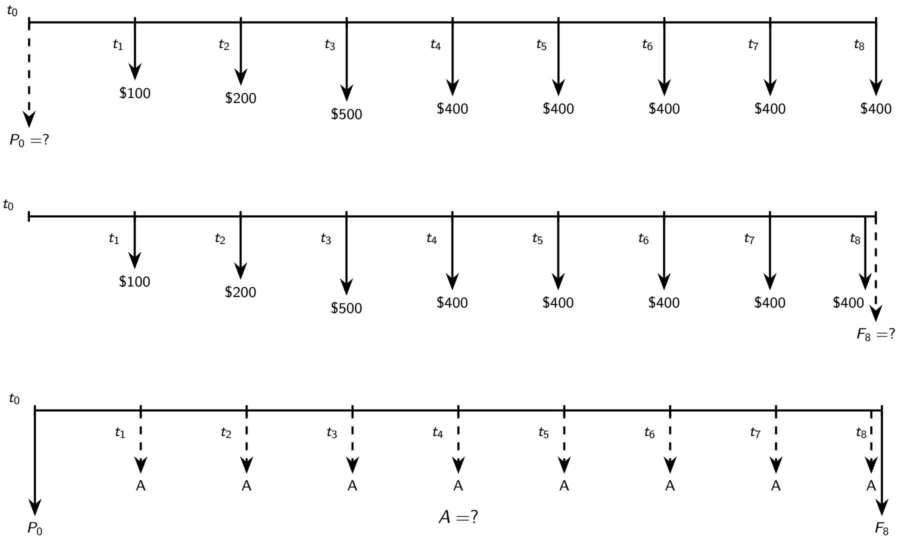
$$F_{40} = P_5(F/P, 8\%, 35) = \$29.333(1 + 0,08)^{35} \tag{6}$$

$$F_{40} = 433.697 \tag{7}$$

Cálculo com múltiplas equivalências

- A Figura 2 ilustra um problema exemplo com uma série de fluxos de caixa ao final do ano se estendendo por oito anos.
- Os valores são \$100 para o primeiro ano, \$200 para o segundo ano, \$500 para o terceiro ano e \$400 para cada ano do quarto ao oitavo.
- Esses valores poderiam representar, por exemplo, os gastos esperados com manutenção de determinado equipamento ou pagamentos para um fundo.
- Observe que os pagamentos são mostrados no final de cada ano, o que é uma convenção padrão deste livro e das análises econômicas em geral, a menos que haja informação em contrário.
- Deseja-se encontrar:
  (a) o valor presente equivalente da despesa, P_0;
  (b) o valor futuro equivalente da despesa, F_8;
  (c) a despesa equivalente anual, A
- para esses fluxos de caixa, considerando uma taxa de juros anual de 20%.

Cálculo com múltiplas equivalências - Figura 2



Cálculo com múltiplas equivalências

- (a) Para encontrar o valor equivalente P_0, precisamos somar os valores equivalentes de todos os pagamentos no início do primeiro ano (tempo zero). Dica: $j = t_3$ e $n = t_8$

$$P_0 = F_1(P/F, 20\%, 1) + F_2(P/F, 20\%, 2) + F_3(P/F, 20\%, 3) +$$
$$+ A(P/A, 20\%, 5) \times (P/F, 20\%, 3)$$
$$P_0 = \$100(0,8333) + \$200(0,6944) + \$500(0,5787) + \$400(2.9900) \times (0.5787)$$
$$P_0 = \$1.203,82$$

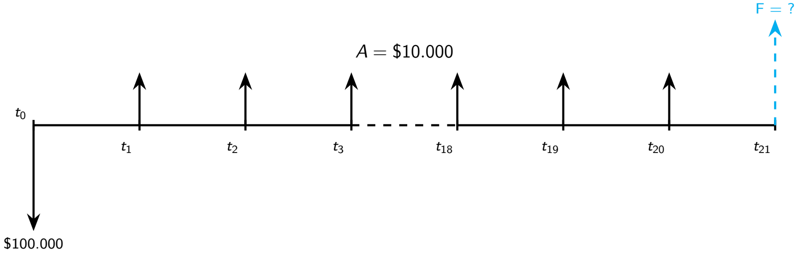
- (b) Para encontrar o valor equivalente F_8, podemos somar os valores equivalentes de todos os pagamentos no final do oitavo ano (tempo oito). A Figura 2 (2º painel) indica esses movimentos de dinheiro ao longo do tempo. No entanto, como P_0 já é conhecido como sendo \$1.203,82, podemos calcular diretamente:

$$F_8 = P_0(F/P, 20\%, 8) = \$1.203{,}82 \times 4{,}2998 = \$5.176{,}19$$

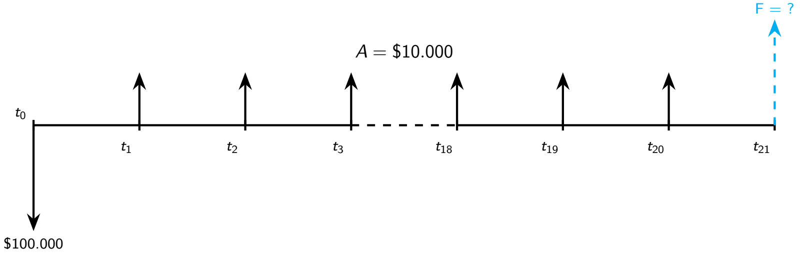
Cálculo com múltiplas equivalências - Exemplo 3

- Na aula passada, trabalhamos um exemplo analisando a quitação antecipada de um empréstimo por meio do aumento do pagamento anual.
- O empréstimo de \$100.000 seria quitado em 30 parcelas anuais de \$8.880 a uma taxa de juros de 8% ao ano.
- Como parte do exemplo, determinamos que o empréstimo poderia ser totalmente quitado após 21 anos se o pagamento anual fosse aumentado para \$10.000.
- Como na maioria dos empréstimos reais, o pagamento final será algo diferente (geralmente menor) do valor da anuidade.
- Isso ocorre devido ao efeito de arredondamento nos cálculos de juros – não se pode pagar frações de centavo!
- Para este exemplo, determine o valor do 21º (e último) pagamento do empréstimo de \$100.000, quando 20 pagamentos de \$10.000 já foram feitos.
- A taxa de juros permanece em 8% ao ano.
- O diagrama de fluxo de caixa para este exemplo é mostrado abaixo.
- Ele é desenhado do ponto de vista do credor.

Cálculo com múltiplas equivalências - Exemplo 3



Cálculo com múltiplas equivalências - Exemplo 3



- Precisamos determinar o valor de F que tornará o valor presente de todos os pagamentos do empréstimo igual ao valor emprestado.
- Podemos fazer isso descontando todos os pagamentos até o tempo 0 (incluindo o pagamento final, F) e igualando seu valor a \$100.000.

$$\begin{aligned} \$10.000(P/A, 8\%, 20) + F(P/F, 8\%, 21) &= \$100.000 \\ \$10.000(9{,}8181) + F(0{,}1987) &= \$100.000 \\ F &= \$9.154{,}50 \end{aligned}$$

- Assim, um pagamento de \$9.154,50 é necessário ao final do 21º ano para quitar o empréstimo.

Exercício

Dois recebimentos de \$1.000 cada são desejados ao final dos anos 10 e 11. Para viabilizar esses recebimentos, quatro depósitos anuais em forma de anuidade serão realizados no banco ao final dos anos 2, 3, 4 e 5. A taxa de juros do banco (i) é de 12% ao ano.

a) Desenhe um diagrama de fluxo de caixa para essa situação.

b) Determine o valor de A que estabelece a equivalência no seu diagrama de fluxo de caixa.

c) Determine o valor de montante único ao final do ano 11 do diagrama de fluxo de caixa completo, com base em suas respostas às partes (a) e (b).