

Algorítmica

Curso 2023-2024

Grupo Viterbi



PRÁCTICA 1-ANÁLISIS DE EFICIENCIA DE ALGORITMOS

Integrantes:

Miguel Ángel De la Vega Rodríguez	miguevrod@correo.ugr.es
Alberto De la Vera Sánchez	joaquin724@correo.ugr.es
Joaquín Avilés De la Fuente	adelaveras01@correo.ugr.es
Manuel Gomez Rubio	e.manuelgmez@go.ugr.es
Pablo Linari Perez	e.pablolinari@go.ugr.es

Facultad de Ciencias UGR
Escuela Técnica Ingeniería Informática UGR
Granada
2023-2024

Índice

1	Participación	2
2	Equipo de trabajo	2
3	Objetivos	2
4	Diseño del estudio	3
4.1	Algoritmos de ordenación de vectores	3
4.2	Otros algoritmos	3
4.3	Scripts usados para la ejecución	4
5	Algoritmos	4
5.1	Estudio teórico	4
5.2	Estudio empírico	11
5.3	Fibonacci	18
5.4	Floyd	19
6	Estudio de las gráficas	20
6.1	Algoritmos $O(n^2)$	20
6.2	Algoritmos $O(n \log(n))$	22
6.3	Algoritmos Hanoi , Floyd y Fibbonaci	23
7	Conclusiones	24

Participación

- **Miguel Ángel De la Vega Rodríguez: 20%**
 - Plantilla y estructura del documento \LaTeX
 - Cómputo de la eficiencia de los algoritmos (Resultados y Ajuste)
- **Joaquín Avilés De la Fuente: 20%**
 - Descripción del Objetivo de la práctica
 - Diseño del estudio
- **Alberto De la Vera Sánchez: 20%**
- **Manuel Gomez Rubio 20%**
- **Pablo Linari Pérez: 20%**
 - Estudio y comparación de las gráficas
 - Diseño del estudio

Equipo de trabajo

- **Miguel Ángel De la Vega Rodríguez: (Ordenador donde se ha realizado el computo)**
 - AMD Ryzen 7 2700X 8-Core
 - 16 GB RAM DDR4 3200 MHz
 - NVIDIA GeForce GTX 1660 Ti
 - 1 TB SSD NVMe

Objetivos

En esta práctica, se han implementado los siguientes algoritmos de ordenación: **quicksort**, **mergesort**, **inserción**, **burbuja**, y **selección**. Además, se han implementado los algoritmos de **Floyd**, que calcula el costo del camino mínimo entre cada par de nodos de un grafo dirigido, de **Fibonacci**, que calcula los números de la sucesión de Fibonacci, y de **Hanoi**, que resuelve el famoso problema de las torres de Hanoi. Se ha aplicado la siguiente metodología:

- En primer lugar, aunque tenemos la eficiencia teórica de estos algoritmos, se realizarán los cálculos necesarios para demostrar cómo se obtiene dicha eficiencia utilizando los distintos métodos estudiados en teoría.

- En segundo lugar, se pasará al estudio empírico de los algoritmos de ordenación de vectores para distintos tipos de datos, es decir, para datos tipo **int**, **float**, **double** y **string**. Posteriormente, se creará las gráficas para cada algoritmo en las que visualizaremos el tiempo de ejecución en función del tamaño del vector y del tipo de dato. Finalmente para esta parte, se hará un calculo de **eficiencia híbrida** que se basa en ajustar la gráfica obtenida a la función de su eficiencia teórica por mínimos cuadrados, obteniendo por tanto los literales de dicha función que ajustan la gráfica.
- En tercer lugar, se hará el estudio de los otros tres algoritmos de forma similar, es decir, se estudiará la eficiencia de estos de modo empírica, cuyo estudio se mostrará en las gráficas, y se calculará la eficiencia híbrida de estos, a partir de la eficiencia teórica.

Diseño del estudio

Los estudios empíricos han sido realizados en el ordenador con las características mencionadas anteriormente. Además, hemos realizado el estudio empírico de forma aislada para el algoritmo de ordenación de vectores quicksort en los distintos ordenadores de los participantes del grupo para ver como afectan las características hardware de cada ordenador en el tiempo de ejecución, cuyas gráficas se mostrarán en la sección de Algoritmos. En ambos casos se ha hecho uso del sistema operativo Linux, concretamente de Debian, y se ha utilizado el compilador gcc para la compilación de los programas con el flag -Og para la optimización.

4.1. Algoritmos de ordenación de vectores

Para los algoritmos de ordenación se han usado entradas de datos de tipo int, float, double y string mientras que para los algoritmos de Hanoi, Floyd y Fibonnaci solo se han usado entradas de tipo int ya que no tendría sentido usar entradas de otro tipo.

- En los algoritmos con eficiencia $O(n^2)$ como los de Burbuja, Selección e Inserción los saltos usados entre los tipos de datos int, float y double generados aleatoriamente son de 5000 en 5000 empezando con una muestra de 5000 datos y llegando a un máximo de 125000 datos.
- En los lagoritmos con eficiencia $O(n \log(n))$ como el mergesort o el quicksort los saltos usados entre los tipos de datos int, float y double generados aleatoriamente son de 50000 en 50000 empezando con una muestra de 50000 datos y llegando a un máximo de 1250000 datos.

4.2. Otros algoritmos

En los algoritmos restantes se han usado datos de tipo int generados aleatoriamente y proporcionados en la siguiente medida:

- Para el algoritmo de *Floyd* que es de orden $O(n^3)$ se han usado enteros aleatorios desde 50 hasta 1250 con saltos de 50 en 50.
- Para el algoritmo de *Fibonnaci* que es de orden $O((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n)$ se han usado enteros aleatorios desde 50 hasta 1250 con saltos de 50 en 50.
- Para el algoritmo de *Hanoi* que es de orden $O(2^n)$ se han usado enteros aleatorios desde 3 hasta 33 con saltos de 50 en 50.

Por último para el tipo de dato string se han extraído las muestras del archivo *quijote.txt* para simular una generación aleatoria de palabras, esta entrada de datos no ha sido totalmente aleatoria ya que al usar un lenguaje determinado para el texto, en este caso el español, se repiten con mas frecuencia algunas palabras por tanto esto se verá reflejado en el comportamiento de los algoritmos. En este caso el Quijote tiene un total de 202308 palabras por lo que se comenzará con una muestra de 12308 palabras con saltos de 10000 en 10000 hasta llegar a 202308 palabras.

4.3. Scripts usados para la ejecución

- **[AutoCompile.sh]** Este script se encarga de compilar todos los ficheros en una misma carpeta con las mismas opciones de compilación, para garantizar la máxima igualdad posible entre cada algoritmo y organizar la estructura de ficheros.
- **[AutoFinal.sh]** Este script es el encargado de ejecutar todos los algoritmos varias veces con las opciones respectivas para cada uno, el resultado se pasa por un programa AutoMedia.py que se encarga de realizar la media de las ejecuciones de los algoritmos, este resultado es guardado en una carpeta llamada Resultados de la que posteriormente el mismo script genera las graficas de cada algoritmo.
- **[AutoIndividual.sh]** Este script es como el descrito previamente pero unicamente ejecuta un script, esto ha sido útil para hacer pruebas sin la necesidad de esperar la gran cantidad de tiempo que requiere la ejecución de todos los algoritmos.

Algoritmos

Esta sección esta dedicada a mostrar los resultados obtenidos en el estudio de los algoritmos, la estructura seguida para mostrar los resultados consiste en mostrar, para cada algoritmo, los tiempos de ejecución, junto con las gráficas obtenidas y los ajustes correspondientes. Previo a ello, se analizará en cada caso teóricamente la eficiencia prevista para cada algoritmo.

5.1. Estudio teórico

En esta sección se calculará la eficiencia teórica de cada algoritmo, es decir, la eficiencia que se espera al hacer el estudio empírico de cada algoritmo. Para ello, se utilizarán los métodos estudiados en teoría.

Algoritmo de ordenación Burbuja

Utilizaremos el siguiente fragmento de código para estudiar su eficiencia, pues es el utilizado en la práctica

```
1 void burbuja(int T[], int inicial, int final)
2 {
3     int i, j;
4     int aux;
5     for (i = inicial; i < final - 1; i++)
6         for (j = final - 1; j > i; j--)
7             if (T[j] < T[j - 1])
8                 {
9                     aux = T[j];
10                    T[j] = T[j - 1];
11                    T[j - 1] = aux;
```

```

12     }
13 }

```

El trozo de código dentro del bucle interno, es decir, de la línea 7 a la 12 tiene eficiencia $O(1)$ y por tanto tiene un tiempo de ejecución constante que anotaremos como a . Además, este trozo de código se ejecuta en concreto $(final - 1) - (i + 1) + 1$ veces, es decir, $final - i + 1$ veces. Es claro que la ejecución de la línea 3 y 4 y las comparaciones, inicializaciones y actualizaciones de los bucles tienen eficiencia $O(1)$. Sabiendo esto y que el número de veces que se ejecute el bucle interno depende del externo tenemos entonces la siguiente fórmula

$$\sum_{i=initial}^{final-2} \sum_{j=i+1}^{final-1} a$$

Tomaremos $final = n$ e $inicial = 1$ para simplificar el cálculo y veamos que obtenemos ahora

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} a &= a \cdot \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=1}^{n-i-1} 1 = a \cdot \sum_{i=1}^{n-2} (n-i-1) a \cdot \left(n \sum_{i=1}^{n-2} 1 - \sum_{i=1}^{n-2} i - \sum_{i=1}^{n-2} 1 \right) = \\ &= a \cdot (n(n-2) - \frac{(n-2)(n-1)}{2} - (n-2)) = a \cdot (n^2 - 2n - \frac{n^2 - 3n + 2}{2} - n + 2) = \\ &= a \cdot \left(\frac{n^2}{2} - \frac{3}{2}n + 1 \right) = \frac{n^2}{2}a - \frac{3}{2}na + a \end{aligned}$$

Es claro que $\frac{n^2}{2}a - \frac{3}{2}na + a \in O(n^2)$ y por tanto la eficiencia teórica del algoritmo de burbuja es $O(n^2)$.

Algoritmo de ordenación Inserción

Utilizaremos el siguiente fragmento de código para estudiar su eficiencia, pues es el utilizado en la práctica

```

1 void insercion(int T[], int inicial, int final)
2 {
3     int i, j;
4     int aux;
5     for (i = inicial + 1; i < final; i++) {
6         j = i;
7         while ((T[j] < T[j-1]) && (j > 0)) {
8             aux = T[j];
9             T[j] = T[j-1];
10            T[j-1] = aux;
11            j--;
12        };
13    };
14 }

```

El trozo de código dentro del bucle interno, es decir, de la línea 8 a la 10 tiene eficiencia $O(1)$ y por tanto tiene un tiempo de ejecución constante que anotaremos como a . Dicho trozo de código se ejecutará en el peor de los casos $i - (0 - 1) + 1 = i$ veces, mientras que el bucle while se ejecutará $(final - 1) - (inicial + 1) + 1 = final - inicial - 1$ veces. Sabiendo que la ejecución de la línea 3 y 4 y las comparaciones, inicializaciones y actualizaciones de los bucles tienen eficiencia $O(1)$, tenemos la siguiente fórmula

$$\sum_{i=inicial+1}^{final-1} \sum_{j=1}^i a$$

Tomaremos $final = n$ e $inicial = 1$ para simplificar el cálculo y veamos que obtenemos ahora

$$\sum_{i=2}^{n-1} \sum_{j=1}^i a = a \cdot \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=1}^i 1 = a \cdot \sum_{i=1}^{n-2} i = a \cdot \frac{(n-2)(n-1)}{2} = \frac{n^2}{2}a - \frac{3n}{2}a + a$$

Es claro que $\frac{n^2}{2}a - \frac{3}{2}na + a \in O(n^2)$ y por tanto la eficiencia teórica del algoritmo de inserción es $O(n^2)$.

Algoritmo de ordenación Selección

Utilizaremos el siguiente fragmento de código para estudiar su eficiencia, pues es el utilizado en la práctica

```

1 void seleccion(int T[], int inicial, int final)
2 {
3     int i, j, indice_menor;
4     int menor, aux;
5     for (i = inicial; i < final - 1; i++) {
6         indice_menor = i;
7         menor = T[i];
8         for (j = i; j < final; j++)
9             if (T[j] < menor) {
10                 indice_menor = j;
11                 menor = T[j];
12             }
13         aux = T[i];
14         T[i] = T[indice_menor];
15         T[indice_menor] = aux;
16     };
17 }
```

El trozo de código dentro del bucle interno, es decir, de la línea 9 a la 14 tiene eficiencia $O(1)$ y por tanto tiene un tiempo de ejecución constante que anotaremos como a . Este trozo de código se ejecutará en el peor de los casos $(final-1)-i+1 = final-i$ veces, mientras que el bucle for interno se ejecutará $(final-1-1)-inicial+1 = final-inicial-1$ veces. Sabiendo que la ejecución de las líneas 3, 4, 6, 7 y las comparaciones, inicializaciones y actualizaciones de los bucles tienen eficiencia $O(1)$, tenemos la siguiente fórmula

$$\sum_{i=inicial}^{final-2} \sum_{j=i}^{final-1} a$$

Tomaremos $final = n$ e $inicial = 1$ para simplificar el cálculo y veamos que obtenemos ahora

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i}^{n-1} a &= a \cdot \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=1}^{n-1-(i-1)} 1 = a \cdot \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=1}^{n-i} 1 = a \cdot \sum_{i=1}^{n-2} (n-i) = a \cdot \left(n \sum_{i=1}^{n-2} 1 - \sum_{i=1}^{n-2} i \right) \\ &= a \cdot \left(n(n-2) - \frac{(n-2)(n-1)}{2} \right) = a \cdot \left(n^2 - 2n - \frac{n^2 - 3n + 2}{2} \right) = a \cdot \left(\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} + 1 \right) \\ &= \frac{n^2}{2}a - \frac{n}{2}a + a \end{aligned}$$

Es claro que $\frac{n^2}{2}a - \frac{n}{2}a + a \in O(n^2)$ y por tanto la eficiencia teórica del algoritmo de inserción es $O(n^2)$.

Algoritmo de ordenación Mergesort

Utilizaremos el siguiente fragmento de código para estudiar su eficiencia, pues es el utilizado en la práctica

```

1      void fusion(int T[], int inicial, int final, int U[], int V[])
2      {
3          int j = 0;
4          int k = 0;
5          for (int i = inicial; i < final; i++){
6              if (U[j] < V[k]) {
7                  T[i] = U[j];
8                  j++;
9              } else{
10                 T[i] = V[k];
11                 k++;
12             };
13         };
14     };
15
16     void mergesort(int T[], int inicial, int final)
17     {
18         if (final - inicial < UMBRAL_MS){
19             insercion(T, inicial, final);
20         } else {
21             int k = (final - inicial)/2;
22
23             int * U = new int [k - inicial + 1];
24             assert(U);
25             int l, l2;
26             for (l = 0, l2 = inicial; l < k - inicial; l++, l2++){
27                 U[l] = T[l2];
28             }
29             U[l] = INT_MAX;
30
31             P * V = new P [final - k + 1];
32             assert(V);
33             for (l = 0, l2 = k; l < final - k; l++, l2++){
34                 V[l] = T[l2];
35             }
36             V[l] = INT_MAX;
37
38             mergesort_lims(U, 0, k - inicial);
39             mergesort_lims(V, 0, final - k);
40             fusion(T, inicial, final, U, V);
41             delete [] U;
42             delete [] V;
43         };
44     };

```

Destacar que tomaremos $final = n$ e $inicial = 0$. Es claro que en el caso de $n = final - inicial < UMBRAL_MS$ la eficiencia del algoritmo en el peor caso es $O(UMBRALEMS^2)$, es decir, constante, por tanto, nos centraremos en el caso en el que $n \geq UMBRAL_MS$. En este caso, el algoritmo se divide en dos partes, la primera parte es la creación de los vectores U y V y la segunda parte es la llamada recursiva a la función mergesort y el resto de código.

La primera parte la podemos dividir en dos: la creación del vector U tomando entonces de la línea 22 a la línea 29, donde podemos ver que el bucle for de la línea 27 se ejecuta $\frac{n}{2}$ veces; y la creación del vector V tomando

entonces de la línea 31 a la línea 35, donde tenemos el mismo resultado. Tenemos entonces que ambas partes tienen eficiencia $O(\frac{n}{2})$, es decir, $O(n)$ y aplicando la regla del máximo obtendríamos hasta la línea 35 un ««««< HEAD orden de $O(n)$.

En la segunda parte, observamos que la llamada recursiva a la función mergesort se hace dos veces con vectores de tamaño $\frac{n}{2}$. Además, viendo la función **fusion** vemos que el bucle for de la línea 6 se ejecuta n veces, es decir, dicha función tiene eficiencia $O(n)$.

Teniendo en cuenta el razonamiento hecho y aplicando la regla de la suma, obtenemos la siguiente ecuación

$$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n$$

Pasemos ahora a resolver dicha ecuación de recurrencia. Aplicando el siguiente cambio de variable $n = 2^m$ obtenemos

$$T(2^m) = 2T(2^{m-1}) + 2^m \implies T(2^m) - 2T(2^{m-1}) = 2^m$$

Resolvamos la parte homogénea de la ecuación, es decir, la ecuación $T(2^m) - 2T(2^{m-1}) = 0$. Obtenemos el polinomio característico de la parte homogénea que es $p_H(x) = x - 2$ cuya raíz es $x = 2$.

Obtengamos ahora la parte no homogénea

$$2^m = b_1^m q_1(m) \implies b_1 = 2 \wedge q_1(m) = 1 \text{ con grado } d_1 = 0$$

Tenemos entonces el siguiente polinomio característico

$$p(x) = (x - 2)(x - b_1)^{d_1+1} = (x - 2)^2$$

Por tanto la solución general es

$$t_m = c_{10}2^m m^0 + c_{11}2^m m^1 \xrightarrow{*} t_n = c_{10}n + c_{11}n \log_2(n) \implies T(n) = c_{10}n + c_{11}n \log_2(n)$$

donde en (*) hemos deshecho el cambio de variable

Aplicando la regla del máximo tenemos $T(n) \in O(n \log(n))$

Algoritmo de ordenación quicksort

Para el estudio de eficiencia de este algoritmo hemos usado el siguiente código:

```

1 void quicksort(int T[], int inicial, int final){
2     int k;
3     if (final - inicial < UMBRAL_QS) {
4         insercion(T, inicial, final);
5     } else {
6         dividir_qs(T, inicial, final, k);    <--- O(n)
7
8         //peor caso
9         O(n-1) ---> quicksort(T, inicial, k);    <--- O(n/2)
10        O(1) ---> quicksort(T, k + 1, final);    <--- O(n/2)
11    }
12 }
13
14 void dividir_qs(int T[], int inicial, int final, int & pp){
15     int pivote, aux;
16     int k, l;
17
18     pivote = T[inicial];

```

```

19     k = inicial;
20     l = final;
21     do {
22         k++;
23     } while ((T[k] <= pivote) && (k < final-1));    <--- O(n)
24     do {
25         l--;
26     } while (T[l] > pivote);
27     while (k < l) {                                <--- O(n)
28         aux = T[k];
29         T[k] = T[l];
30         T[l] = aux;
31         do k++; while (T[k] <= pivote);
32         do l--; while (T[l] > pivote);
33     };
34     aux = T[inicial];
35     T[inicial] = T[l];
36     T[l] = aux;
37     pp = l;
38 };

```

Para el estudio de la eficiencia se ha ido estudiando cada método por separado. El método llamado inserción no se tiene en cuenta para la eficiencia ya que solo se usa cuando el problema es de un tamaño menor a UMBRAL_QS. A simple vista es fácil comprobar que el propósito del algoritmo es dividir la ordenación del vector de tamaño original en otros dos de un tamaño más reducido, en el mejor de los casos este será a la mitad si el pivote es justo la mediana. La parte de la llamada recursiva, es $O(\frac{n}{2})$, y la llamada a `dividir_qs` es $O(n)$, por tanto obtenemos la siguiente expresión:

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n$$

usando el cambio de variable $n = 2^k$ obtenemos:

$$t_k - 2t_{k-1} = 2^k$$

cuyo polinomio característico es:

$$p(x) = (x - 2)^2 \Rightarrow t_k = c_1 2^k + c_2 2^k k$$

Finalmente, desacemos el cambio obteniendo:

$$t_n = c_1 n + c_2 n \log_2 n \in O(n \log_2 n)$$

Donde vemos que el algoritmo es $O(n \log n)$.

En el peor caso, lo que ocurre es que el algoritmo no puede establecer un buen pivote, lo que hace que se obtenga la siguiente ecuación:

$$T(n) = T(n-1) + n + 1 = T(n-2) + 2n + 2 = \dots = T(n-k) + kn + k$$

tomando $k = n - 1$ para llegar al caso base tenemos que:

$$T(n) = T(n-n+1) + (n-1)n + n - 1 = T(1) + (n-1)n + n - 1 \in O(n^2)$$

Donde se ve que en el peor de los casos el algoritmo es $O(n^2)$ que es lo que ocurre con los string por tener un mayor coste de operación, o con los vectores de números ya ordenados o casi ordenados.

Algoritmo de Floyd

Para analizar la eficiencia de este algoritmo se ha usado este fragmento del código:

```

1 void Floyd(int **M, int dim){
2   for (int k = 0; k < dim; k++)
3     for (int i = 0; i < dim; i++)
4       for (int j = 0; j < dim; j++)
5         {
6           int sum = M[i][k] + M[k][j];
7           M[i][j] = (M[i][j] > sum) ? sum : M[i][j];
8         }
9   }

```

Para el estudio de la eficiencia de este algoritmo es bastante simple ya que a simple vista ya se puede comprobar que es $O(n^3)$ porque hay tres bucles for anidados y cada uno es $O(n)$ por lo que el algoritmo es $O(n^3)$ como se había mencionado.

$$T(n) \in O(n^3)$$

Algoritmo de Fibonacci

Para el estudio de la eficiencia de este algoritmo se ha usado el siguiente código:

```

1 int fibo(int n){
2   if (n < 2)
3     return 1;
4   else
5     return fibo(n-1) + fibo(n-2);
6 }

```

Estudiando este código se pueden observar dos llamadas recursivas con $n-1$ y $n-2$ respectivamente, por lo que si obtenemos la ecuación de la eficiencia del algoritmo, al ser la condición del if constante, tenemos que:

$$T(n) = T(n-1) + T(n-2) + 1$$

tomando $T(n) = x^n$ obtenemos:

$$x^n = x^{n-1} + x^{n-2} + 1 \Leftrightarrow x^n - x^{n-1} - x^{n-2} = 1 \Leftrightarrow x^{n-2}(x^2 - x - 1) = 1 = 1^n n^0$$

como $x^{n-2} \neq 0$ tenemos que calcular las raíces del polinomio característico:

$$p(x) = \left(x - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)(x - 1)$$

de donde obtenemos:

$$t(n) = c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n + c_3 1^n \Rightarrow T(n) \in O\left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

Por tanto se comprueba que el algoritmo es $O\left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$

Algoritmo de Hanoi

Para el estudio de la eficiencia de este algoritmo se ha usado el siguiente código:

```

1      void hanoi (int M, int i, int j){
2          if (M > 0)
3          {
4              hanoi(M-1, i, 6-i-j);
5              hanoi (M-1, 6-i-j, j);
6          }
7      }

```

Vemos que se llama recursivamente dos veces a la función hanoi con $M-1$, y sabiendo que la eficiencia del if es constante tenemos la siguiente ecuación de recurrencia:

$$T(n) = 2T(n-1) + 1 \wedge T(0) = 1$$

Destacar que hemos tomado $n=M$. Resolviendo la ecuación de recurrencia obtenemos:

$$\begin{aligned}
 T(n) &= 2T(n-1) + 1 = 2(2T(n-2) + 1) + 1 = 2^2T(n-2) + 3 = 2(2^2T(n-3) + 3) + 1 = 2^3T(n-3) + 7 = \\
 &= \dots = 2^kT(n-k) + 2k - 1
 \end{aligned}$$

Habiendo obtenido el caso general, veamos que obtenemos con $k = n$

$$T(n) = 2^n T(n-n) + 2n - 1 = 2^n T(0) + 2n - 1 = 2^n + 2n - 1 \implies T(n) \in O(2^n)$$

Por tanto se comprueba que el algoritmo es $O(2^n)$

5.2. Estudio empírico

Burbuja

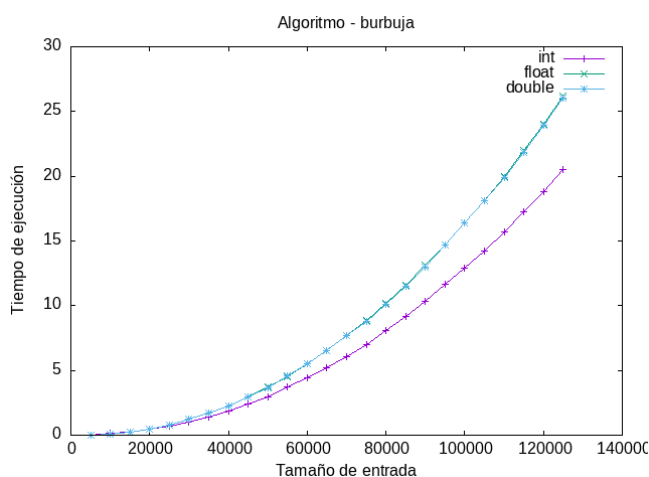


Figura 1: Ejecución algoritmo burbuja

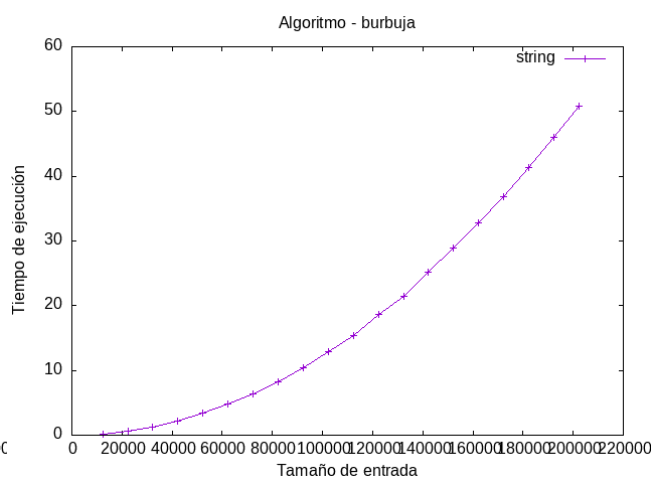


Figura 2: Ejecución algoritmo burbuja con string

Burbuja							
Tipo Int		Tipo Float		Tipo Double		Tipo String	
Tamaño	Tiempo	Tamaño	Tiempo	Tamaño	Tiempo	Tamaño	Tiempo
5000	0,0349211	5000	0,0217027	5000	0,021847	12308	0,211221
10000	0,120458	10000	0,102747	10000	0,101877	22308	0,615473
15000	0,245185	15000	0,258293	15000	0,25446	32308	1,28107
20000	0,441264	20000	0,492039	20000	0,49134	42308	2,1949
25000	0,683406	25000	0,812521	25000	0,802523	52308	3,34899
30000	1,04181	30000	1,20884	30000	1,22906	62308	4,76194
35000	1,38162	35000	1,69518	35000	1,69937	72308	6,41449
40000	1,84603	40000	2,27424	40000	2,25218	82308	8,29372
45000	2,38588	45000	2,93436	45000	2,91507	92308	10,4296
50000	2,98525	50000	3,69289	50000	3,66562	102308	12,827
55000	3,69388	55000	4,53819	55000	4,58012	112308	15,4556
60000	4,39556	60000	5,52096	60000	5,49872	122308	18,6297
65000	5,17327	65000	6,56449	65000	6,50195	132308	21,4492
70000	6,06058	70000	7,6747	70000	7,66039	142308	25,1843
75000	7,0144	75000	8,89351	75000	8,79687	152308	28,8384
80000	8,04692	80000	10,2096	80000	10,1098	162308	32,7271
85000	9,15881	85000	11,6127	85000	11,5094	172308	36,8875
90000	10,3159	90000	13,1071	90000	12,9876	182308	41,3668
95000	11,6496	95000	14,6642	95000	14,7154	192308	46,0167
100000	12,8843	100000	16,3917	100000	16,3819	202308	50,8681
105000	14,2458	105000	18,1445	105000	18,1415		
110000	15,7108	110000	19,9994	110000	19,9348		
115000	17,2545	115000	21,9713	115000	21,8762		
120000	18,8423	120000	24,0176	120000	23,9177		
125000	20,5122	125000	26,1758	125000	26,0694		

Seleccion

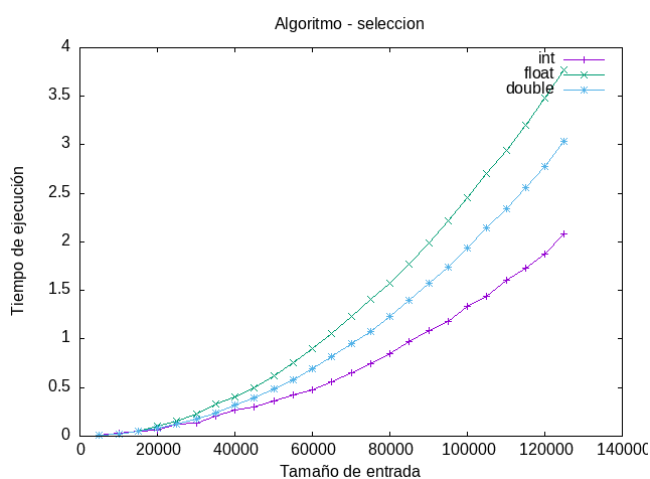


Figura 3: Ejecución algoritmo seleccion

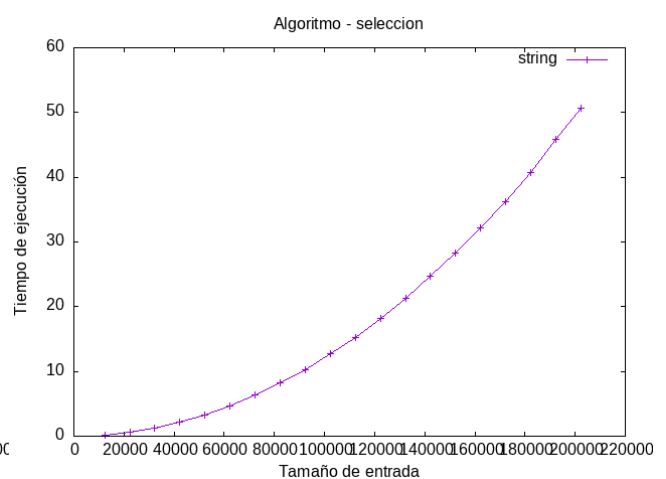


Figura 4: Ejecución algoritmo seleccion con string

Selección							
Tipo Int		Tipo Float		Tipo Double		Tipo String	
Tamaño	Tiempo	Tamaño	Tiempo	Tamaño	Tiempo	Tamaño	Tiempo
5000	0,00742912	5000	0,00656798	5000	0,00592686	12308	0,183608
10000	0,028543	10000	0,0255079	10000	0,021291	22308	0,60529
15000	0,0552547	15000	0,0567478	15000	0,0473479	32308	1,26893
20000	0,0576667	20000	0,1013	20000	0,079274	42308	2,17589
25000	0,119985	25000	0,155952	25000	0,123864	52308	3,32206
30000	0,136593	30000	0,22519	30000	0,17523	62308	4,71574
35000	0,211097	35000	0,3326	35000	0,24262	72308	6,34248
40000	0,266688	40000	0,399363	40000	0,318302	82308	8,21518
45000	0,303022	45000	0,50144	45000	0,393314	92308	10,3325
50000	0,365775	50000	0,622559	50000	0,488219	102308	12,6803
55000	0,425585	55000	0,752239	55000	0,583393	112308	15,3029
60000	0,481344	60000	0,902525	60000	0,696681	122308	18,1543
65000	0,560598	65000	1,0589	65000	0,815409	132308	21,2342
70000	0,648472	70000	1,23376	70000	0,951775	142308	24,7701
75000	0,745198	75000	1,40422	75000	1,08181	152308	28,326
80000	0,851962	80000	1,5725	80000	1,22849	162308	32,1693
85000	0,970841	85000	1,77537	85000	1,39556	172308	36,2288
90000	1,0899	90000	1,99127	90000	1,57202	182308	40,7869
95000	1,18203	95000	2,21625	95000	1,74023	192308	45,8192
100000	1,33268	100000	2,45637	100000	1,94182	202308	50,7106
105000	1,44115	105000	2,70612	105000	2,14333		
110000	1,60109	110000	2,94571	110000	2,34173		
115000	1,73173	115000	3,19926	115000	2,55887		
120000	1,87346	120000	3,47832	120000	2,77209		
125000	2,07954	125000	3,77295	125000	3,03284		

Inserción

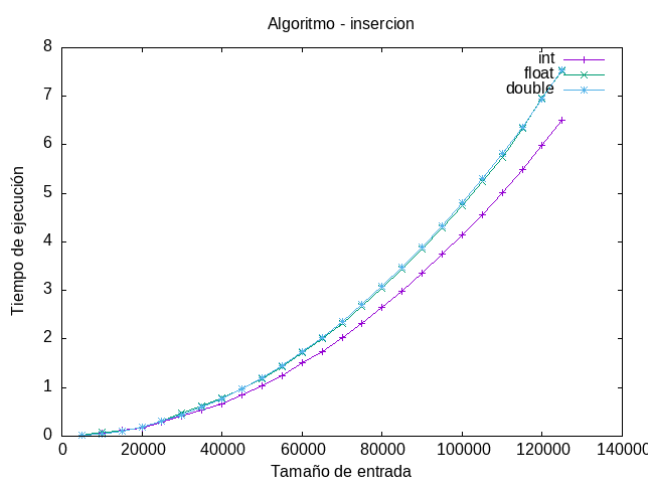


Figura 5: Ejecución algoritmo insercion

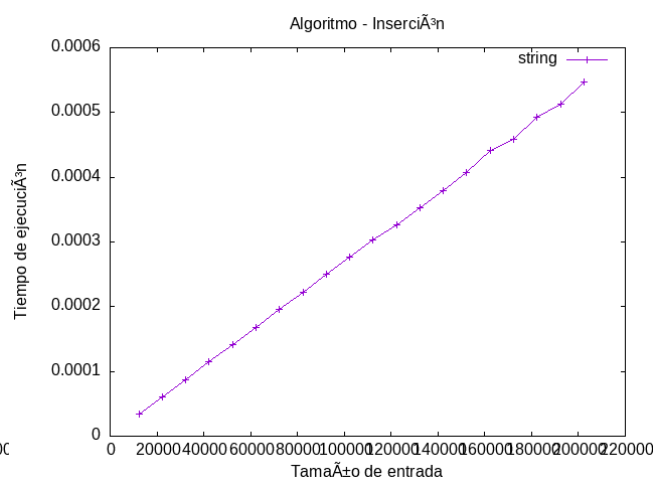


Figura 6: Ejecución algoritmo inserción con string

Inserción							
Tipo Int		Tipo Float		Tipo Double		Tipo String	
Tamaño	Tiempo	Tamaño	Tiempo	Tamaño	Tiempo	Tamaño	Tiempo
5000	0,0202083	5000	0,0231026	5000	0,0123225	12308	3,45E-05
10000	0,0669288	10000	0,083436	10000	0,0489249	22308	6,10E-05
15000	0,118554	15000	0,109163	15000	0,10909	32308	8,77E-05
20000	0,171463	20000	0,194157	20000	0,194458	42308	0,000114708
25000	0,290236	25000	0,303104	25000	0,303342	52308	0,000141829
30000	0,4179	30000	0,474516	30000	0,437655	62308	0,000168388
35000	0,546578	35000	0,611683	35000	0,591596	72308	0,000195308
40000	0,664381	40000	0,788565	40000	0,772917	82308	0,000222477
45000	0,844561	45000	0,967047	45000	0,97772	92308	0,000249857
50000	1,03853	50000	1,1911	50000	1,20692	102308	0,000276907
55000	1,25102	55000	1,43977	55000	1,45909	112308	0,000303237
60000	1,51964	60000	1,71672	60000	1,73629	122308	0,000326027
65000	1,7472	65000	2,00781	65000	2,03246	132308	0,000353216
70000	2,03282	70000	2,32859	70000	2,35687	142308	0,000379146
75000	2,32695	75000	2,67209	75000	2,70622	152308	0,000406996
80000	2,64902	80000	3,04303	80000	3,0808	162308	0,000441945
85000	2,99459	85000	3,43543	85000	3,47801	172308	0,000459225
90000	3,35945	90000	3,8531	90000	3,90283	182308	0,000492385
95000	3,74271	95000	4,28721	95000	4,34073	192308	0,000513575
100000	4,14988	100000	4,75486	100000	4,81364	202308	0,000547894
105000	4,56802	105000	5,23354	105000	5,30147		
110000	5,01684	110000	5,74715	110000	5,8236		
115000	5,48697	115000	6,3353	115000	6,36572		
120000	5,98221	120000	6,95729	120000	6,93946		
125000	6,51173	125000	7,53129	125000	7,54045		

Mergesort

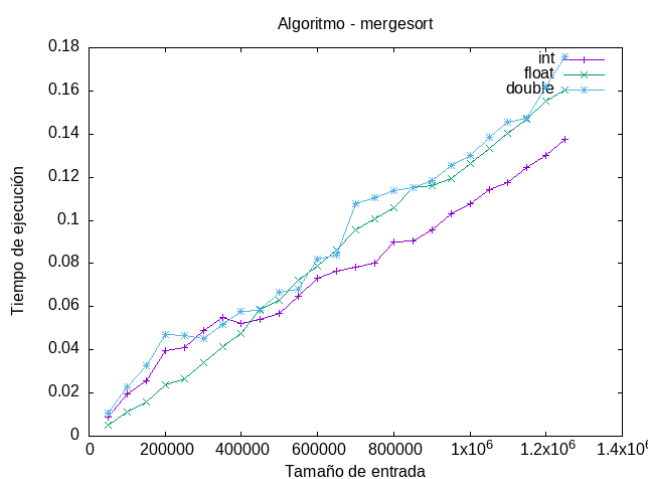


Figura 7: Ejecución algoritmo Mergesort

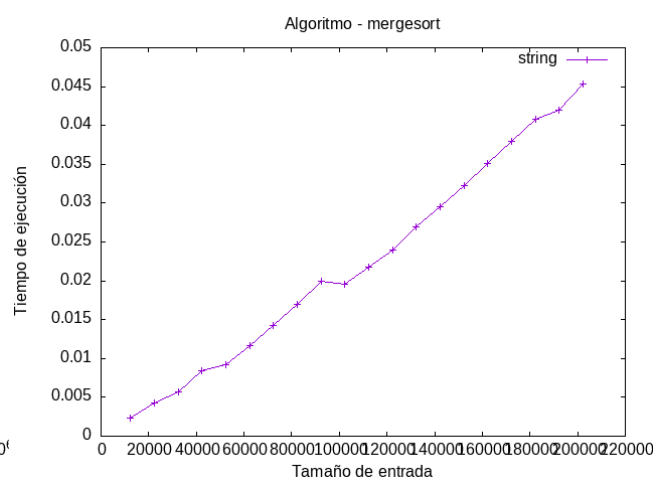


Figura 8: Ejecución algoritmo Mergesort con string

Mergesort							
Tipo Int		Tipo Float		Tipo Double		Tipo String	
Tamaño	Tiempo	Tamaño	Tiempo	Tamaño	Tiempo	Tamaño	Tiempo
50000	0,00885563	50000	0,00535974	50000	0,0109506	12308	0,00232464
100000	0,0197725	100000	0,0113207	100000	0,0229505	22308	0,00426666
150000	0,0256754	150000	0,0159655	150000	0,032702	32308	0,00570479
200000	0,0396519	200000	0,0238364	200000	0,0470055	42308	0,00839818
250000	0,0408458	250000	0,0263662	250000	0,0465912	52308	0,00923186
300000	0,0487663	300000	0,0338221	300000	0,045297	62308	0,0115959
350000	0,0550213	350000	0,0412734	350000	0,0516928	72308	0,0142777
400000	0,0522138	400000	0,0473443	400000	0,0576073	82308	0,0169875
450000	0,0539998	450000	0,0587599	450000	0,0581018	92308	0,0199003
500000	0,0567018	500000	0,0631239	500000	0,0668968	102308	0,0195291
550000	0,0649299	550000	0,0721455	550000	0,0680914	112308	0,0217157
600000	0,0730137	600000	0,078831	600000	0,0821479	122308	0,0240279
650000	0,0765446	650000	0,0864586	650000	0,0840685	132308	0,0269058
700000	0,0783553	700000	0,095748	700000	0,107731	142308	0,0295147
750000	0,0801539	750000	0,1006187	750000	0,110418	152308	0,0322954
800000	0,0898059	800000	0,105794	800000	0,113999	162308	0,0350564
850000	0,0904214	850000	0,11503	850000	0,115276	172308	0,0379305
900000	0,0957652	900000	0,115988	900000	0,118358	182308	0,040835
950000	0,102922	950000	0,119324	950000	0,125308	192308	0,041929
1000000	0,10751	1000000	0,126549	1000000	0,130252	202308	0,0454001
1050000	0,114045	1050000	0,133461	1050000	0,138512		
1100000	0,117457	1100000	0,140533	1100000	0,145543		
1150000	0,124595	1150000	0,147092	1150000	0,147466		
1200000	0,130175	1200000	0,155134	1200000	0,161852		
1250000	0,137581	1250000	0,160264	1250000	0,175689		

Quicksort

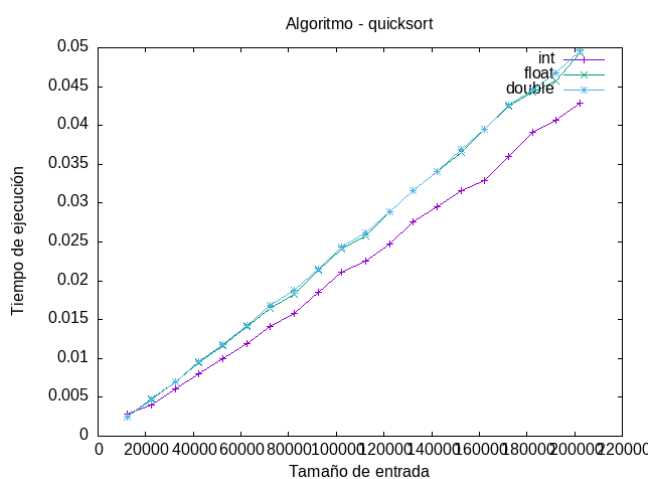


Figura 9: Ejecución algoritmo quicksort

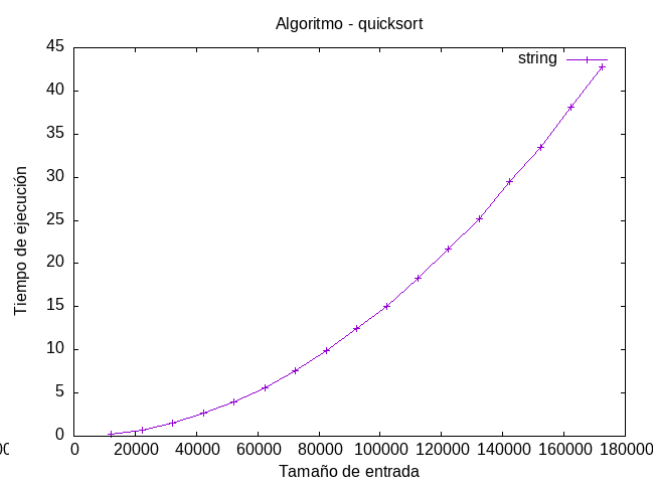


Figura 10: Ejecución algoritmo quicksort con string

Quicksort							
Tipo Int		Tipo Float		Tipo Double		Tipo String	
Tamaño	Tiempo	Tamaño	Tiempo	Tamaño	Tiempo	Tamaño	Tiempo
50000	0,005404063	50000	0,00656497	50000	0,006872607	12308	0,331982
100000	0,011849567	100000	0,013940933	100000	0,014531567	22308	0,433525
150000	0,017589967	150000	0,021820767	150000	0,022618533	32308	0,810498
200000	0,0238955	200000	0,0290163	200000	0,030920433	42308	1,16745
250000	0,030245667	250000	0,036930167	250000	0,036553033	52308	1,97952
300000	0,035111167	300000	0,0380422	300000	0,039921433	62308	2,74097
350000	0,038264933	350000	0,038178767	350000	0,0424273	72308	3,55831
400000	0,0422403	400000	0,0424919	400000	0,043377433	82308	4,67599
450000	0,043866967	450000	0,0473254	450000	0,046259633	92308	5,73606
500000	0,04426	500000	0,048482467	500000	0,048961533	102308	7,04456
550000	0,048515033	550000	0,054502367	550000	0,052008133	112308	8,1903
600000	0,053473367	600000	0,0560969	600000	0,054563333	122308	10,0859
650000	0,058109467	650000	0,059735933	650000	0,055753933	132308	11,609
700000	0,061405633	700000	0,063045867	700000	0,058111633	142308	13,1231
750000	0,063922067	750000	0,0668639	750000	0,062652933	152308	15,4072
800000	0,065804867	800000	0,067741133	800000	0,066167833	162308	17,1388
850000	0,069073833	850000	0,073830267	850000	0,072807833	172308	19,0906
900000	0,073182433	900000	0,077997333	900000	0,0773843		
950000	0,0761217	950000	0,081192567	950000	0,0808991		
1000000	0,079173767	1000000	0,085758067	1000000	0,087570933		
1050000	0,082858733	1050000	0,0920956	1050000	0,095611733		
1100000	0,0841312	1100000	0,097475333	1100000	0,098788367		
1150000	0,0922743	1150000	0,100609	1150000	0,100115767		
1200000	0,095589967	1200000	0,104688333	1200000	0,103156333		
1250000	0,096988633	1250000	0,109222	1250000	0,10996		

Hanoi

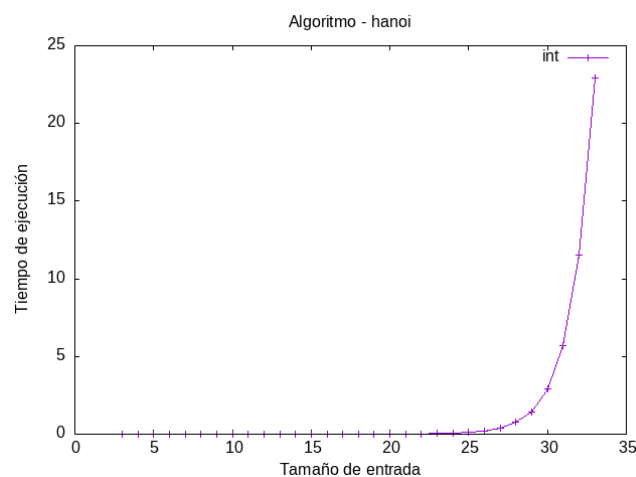


Figura 11: Ejecución algoritmo Hanoi

Hanoi	
Tamaño	Tiempo
3	3.3e-07
4	3.7e-07
5	6.4e-07
6	9.1e-07
7	1.31e-06
8	2.13e-06
9	0,003659
10	0,006809
11	9.15e-06
12	0,02484
13	0,43039
14	0,91049
15	180597
16	370175
17	728411
18	143246
19	283343
20	583306
21	113207
22	23259
23	446832
24	678575
25	115696
26	205652
27	387235
28	757241
29	145715
30	291489
31	573008
32	1279385
33	229485

5.3. Fibonacci

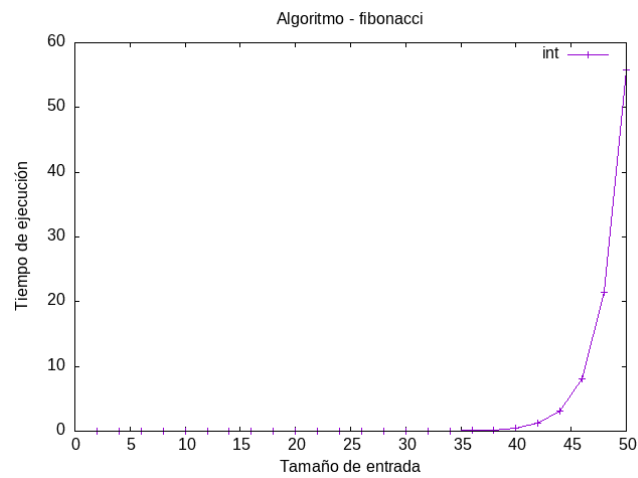


Figura 12: Ejecución algoritmo Fibonacci

Fibonacci	
Tamaño	Tiempo
2	1,90E-07
4	2,50E-07
6	3,10E-07
8	6,20E-07
10	1,13E-06
12	2,11E-06
14	4,42E-06
16	9,70E-06
18	2,34E-05
20	5,86E-05
22	0,000155419
24	0,000392447
26	0,00103918
28	0,00269092
30	0,00702187
32	0,0188891
34	0,0493608
36	0,101751
38	0,173823
40	0,466558
42	1,23353
44	3,14718
46	8,09745
48	21,4575
50	55,7656

5.4. Floyd

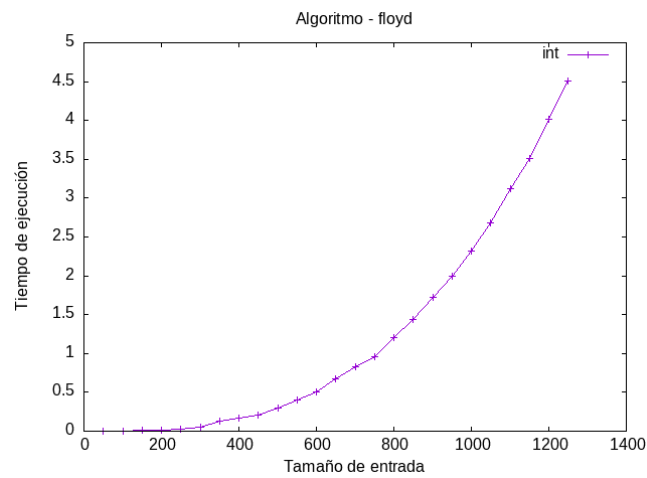


Figura 13: Ejecución algoritmo Floyd

Floyd	
Tamaño	Tiempo
50	0,000317337
100	0,00221242
150	0,006823
200	0,0089683
250	0,0301016
300	0,0513097
350	0,133839
400	0,174386
450	0,207949
500	0,297192
550	0,399401
600	0,509953
650	0,667422
700	0,824563
750	0,956399
800	1,19819
850	1,4429
900	1,71932
950	1,99518
1000	2,31279
1050	2,67816
1100	3,11671
1150	3,51038
1200	4,01139
1250	4,50535

Estudio de las gráficas

En esta sección se mostrarán las gráficas obtenidas en el estudio empírico de los algoritmos.

6.1. Algoritmos $O(n^2)$

Comenzaremos comparando las gráficas obtenidas para los algoritmos de ordenación con eficiencia $O(n^2)$

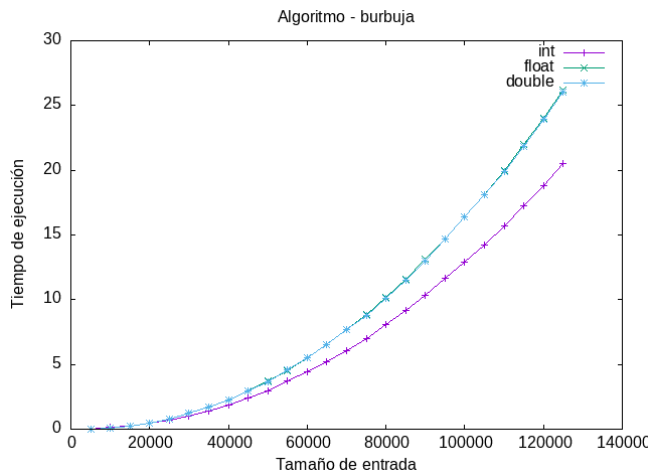


Figura 14: Ejecución algoritmo burbuja

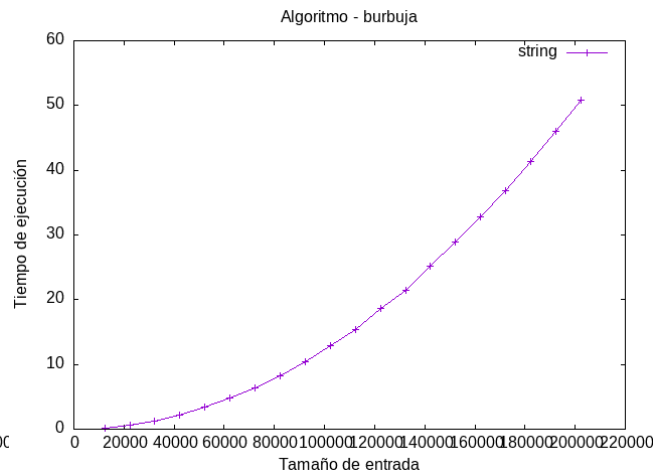


Figura 15: Ejecución algoritmo burbuja con string

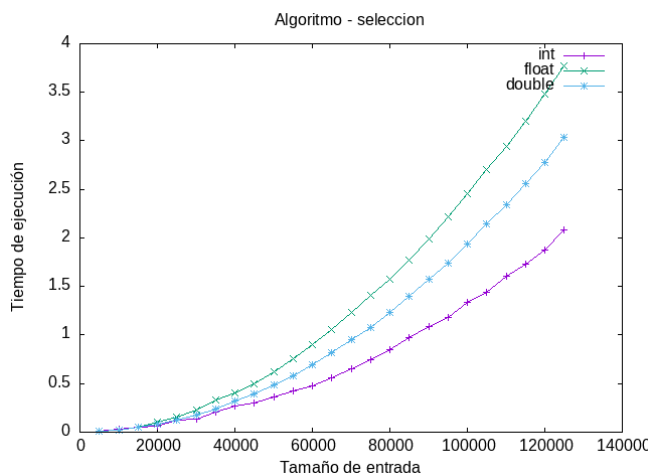


Figura 16: Ejecución algoritmo seleccion

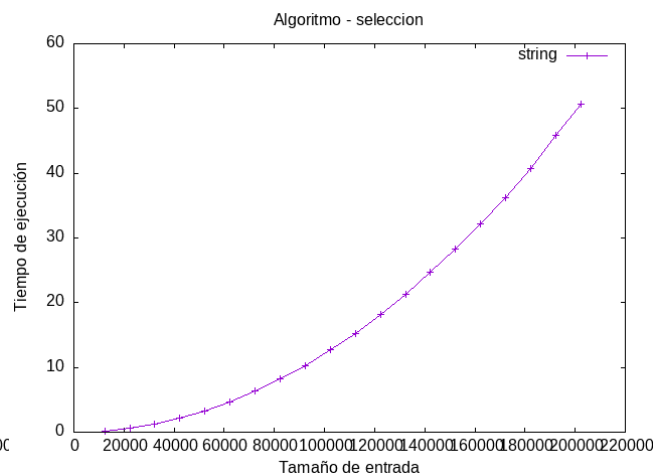


Figura 17: Ejecución algoritmo seleccion con string

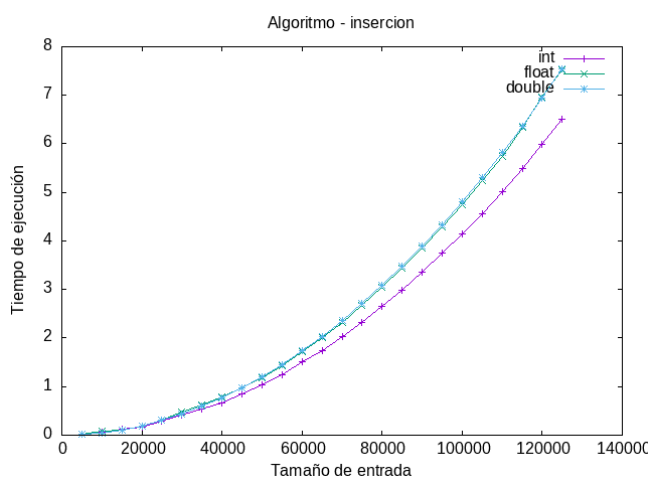


Figura 18: Ejecución algoritmo insercion

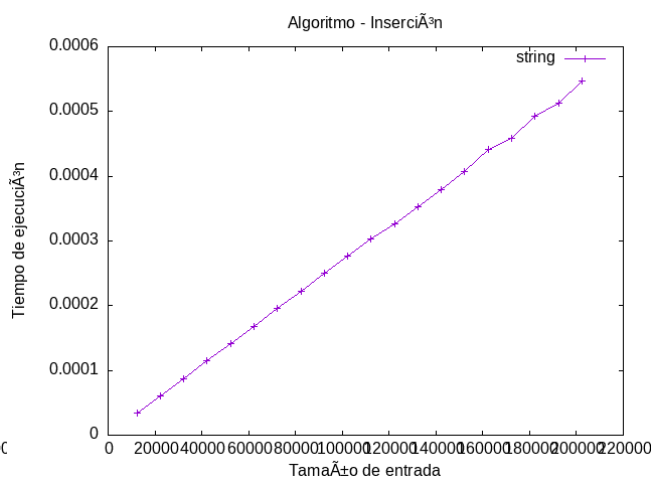


Figura 19: Ejecución algoritmo inserción con string

Comenzaremos analizando primero los casos con tipos de datos int, float y double. Si nos fijamos en los tiempos de ejecución de cada algoritmo podemos ver que el algoritmo de burbuja es el que peor se comporta en todos los casos, seguido del algoritmo de Inserción y finalmente el algoritmo de selección. Dejando así el algoritmo de burbuja como el peor de los tres y el de Inserción como el mejor. En el algoritmo de burbuja y de insercion se puede ver que el tiempo de ejecución es muy similar en todos los casos llegando a ser prácticamente el mismo en los casos con datos double y float . mientras que el algoritmo de seleccion si se ve mas afectado por el tipo de dato que se le pasa siendo los datos int los mas rápidos y los datos float los mas lentos.

si nos fijamos en las graficas de los algoritmos con string podemos ver que los algoritmos de burbuja y seleccion son los que peor se comportan ya que se usa como entrada el libro del quijote en español lo cual hace que haya muchas palabras repetidas y por tanto el algoritmo de burbuja y seleccion tengan que hacer mas comparaciones y por tanto mas tiempo de ejecución. En el caso del algoritmo de inserción vemos que esto le favorece y su tiempo de ejecución se reduce drásticamente en comparación con los datos int, float y double.

6.2. Algoritmos $O(n \log(n))$

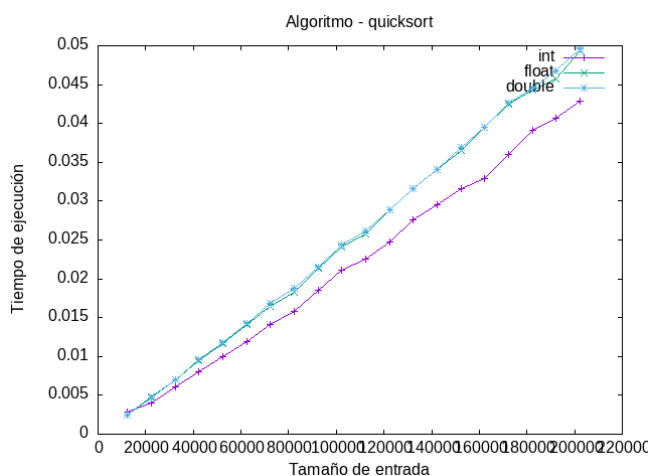


Figura 20: Ejecución algoritmo quicksort

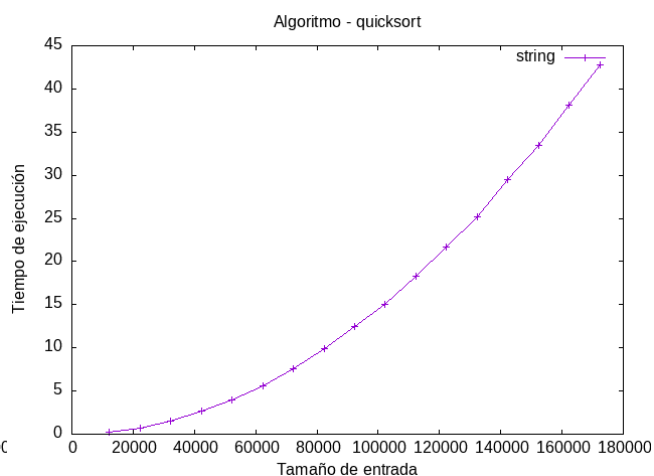


Figura 21: Ejecución algoritmo quicksort con string

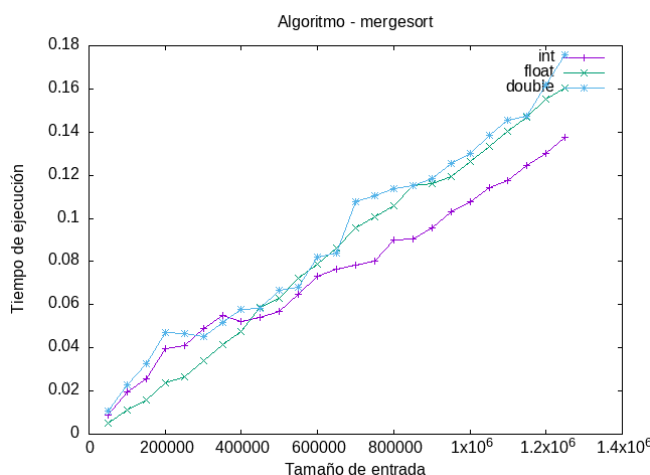


Figura 22: Ejecución algoritmo mergesort

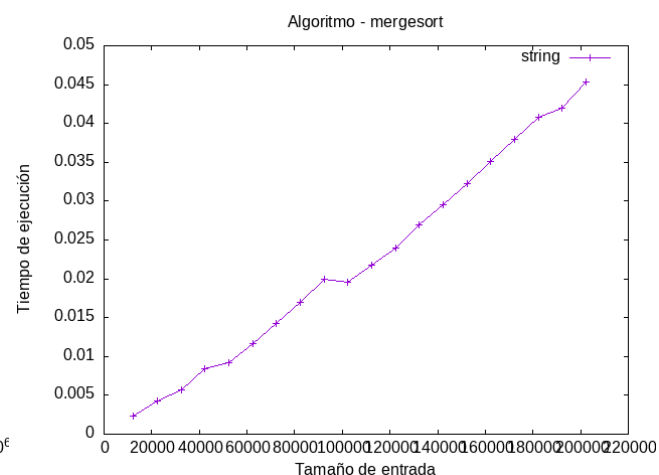


Figura 23: Ejecución algoritmo mergesort con string

Pasamos ahora a estudiar los algoritmos con eficiencia $O(n \log(n))$ los cuales veremos que son más eficientes que los $O(n^2)$. Si nos fijamos en la gráfica del quicksort vemos que no hay casi diferencia entre los datos tipo float y double mientras que los datos tipo int son más rápidos, en el mergesort pasa justamente lo contrario, los tipos de datos double y float tardan menos en ser ordenados que los datos tipo int. Pero ambos son más eficientes que los anteriormente vistos.

Si nos fijamos en las gráficas de los algoritmos cuando los ejecutamos con datos de tipo string vemos que el mergesort gana en tiempo de ejecución al quicksort ya que en los casos donde hay datos repetidos el mergesort se comporta mejor que el quicksort debido a su implementación.

6.3. Algoritmos Hanoi , Floyd y Fibbonaci

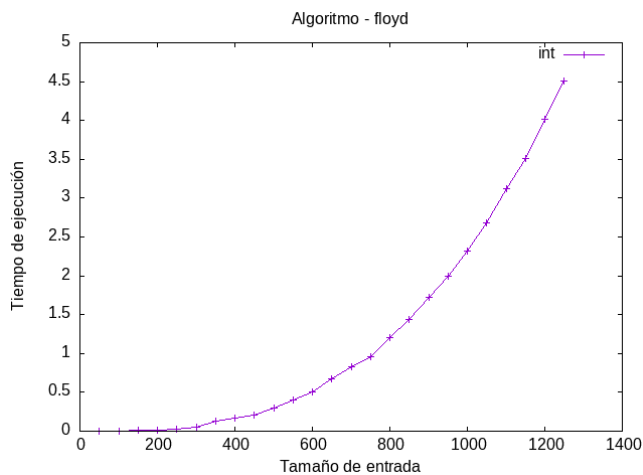


Figura 24: Ejecución algoritmo Floyd

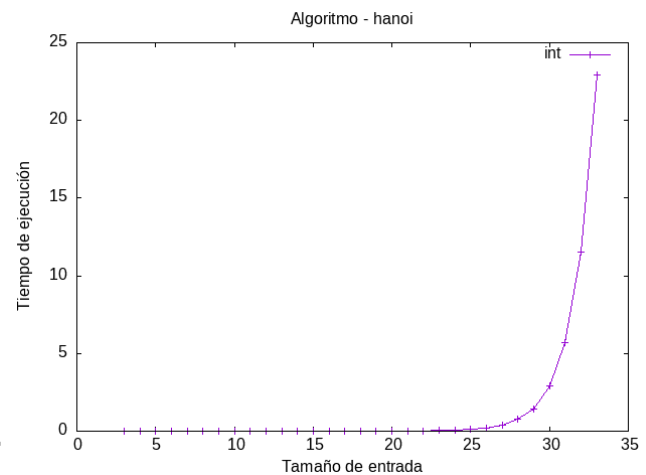


Figura 25: Ejecución algoritmo Hanoi

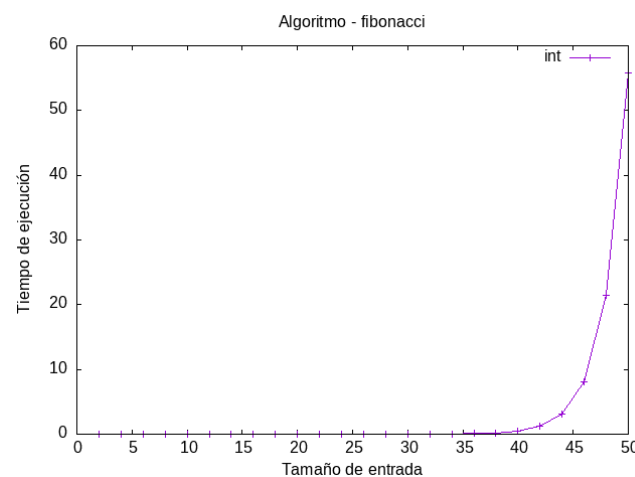


Figura 26: Ejecución algoritmo Fibonacci

Por último pasamos a estudiar los algoritmos de Hanoi, Floyd y Fibonacci. Si nos fijamos en las gráficas de estos algoritmos vemos que el algoritmo de Floyd es el mas rapido ya que se trata de una algoritmo del orden $O(n^3)$ por tanto supera en velocidad a el algoritmo de Hanoi que es del orden $O(2^n)$ y al algoritmo de Fibonacci que es del orden $O((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n)$ siendo este ultimo el mas lento de todos.

Como conclusion a este apartado hemos podido observar que los algoritmos de ordenación con eficiencia $O(n^2)$ son mas lentos que los de eficiencia $O(n \log(n))$ y que dependiendo del tipo de dato con el que se trabaje y de si hay datos repetidos o no habrá algoritmos a los que les afecte de manera positiva como al mergesort o el de Inserción que pasa a ser practicamente logaritmico y otros como el de burbuja o seleccion que se vean perjudicados por estos datos.

Conclusiones