Matemática Discreta I - 2020 - 2do semestre

Práctico 1: Inducción Completa.

Ref. Grimaldi 4.1

Ejercicio 1 Demuestre, usando el principio de buen orden, que todo entero $n \geq 2$ puede ser escrito de la forma $n = 2i + 3j$ con $i, j \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 2 Encuentre (y demuestre) cuáles números naturales n pueden expresarse como suma de treses y/o cincos (i.e. existen naturales i, j tales que $n = 3i + 5j$).

Ejercicio 3 Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Conjeture una fórmula para A^n y demuéstrela.

Ejercicio 4 Conjeture una fórmula para la suma de los primeros n enteros positivos impares y demuéstrela por inducción.

Ejercicio 5

a. Demuestre la siguiente igualdad: $\sum_{i=1}^{n} i^2 = n(n+1)(2n+1)/6$, para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.

b. Demuestre que $7^n - 2^n$ es divisible por 5, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 6 (1er parcial octubre 2000 Ej16)
Sea m el menor número natural que verifica $2^m > m^2 + 1$. Halle m y pruebe por inducción que si $n \geq m$ entonces $2^n > n^2 + 1$.

Ejercicio 7 Demuestre que $2020! > 2^{2020}$.

Ejercicio 8 Sean $f(x) = xe^x$ y $g(x) = 1/x$, demuestre las siguientes igualdades para las derivadas n-ésimas:

$$f^{(n)}(x) = e^x(x+n), \qquad g^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}.$$

Ejercicio 9 Para $n \in \mathbb{N}$ sea S un subconjunto de números reales con $|S| = 2^n$. Demuestre que el número de comparaciones necesarias para ordenar en forma ascendente los elementos de S es menor o igual que $n \times 2^n$.

Ejercicios Complementarios

Ejercicio 10 (Exam. diciembre 2009 Ej6)
Demuestre por inducción completa que $10^{n+1} + 3 \times 10^n + 5$ es múltiplo de 9 para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 11 Demuestre que:

a. $n^3 - n$ es divisible por 3 para todo n natural.

b. La suma de los cubos de tres enteros consecutivos es divisible por 9.

Ejercicio 12 Demuestre que todo natural n puede expresarse como la suma de cinco y/o sietes siempre que n sea mayor o igual a 24, es decir para todo $n \geq 24$ existen $i, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tales que $n = 5i + 7j$.

Ejercicio 13 (Exam. octubre 2001 Ej8a)
Demuestre que si

$$a_n = 2a_{n-1} + 7a_{n-2} + a_{n-3} \qquad \forall n \geq 4$$

y $a_1 = 3, a_2 = 10, a_3 = 30$, entonces $a_n \geqslant 3^n$ para todo $n \geqslant 1$.

Ejercicio 14 Se define

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} i!.i \qquad \text{para todo } n \geq 1.$$

Demuestre que $S_n = (n+1)! - 1$.

Ejercicio 15 Considere un tablero cuadriculado de 2^n cuadrados por lado al cual le falta un cuadradito en algún lugar. Demuestre que se puede cubrir dicho tablero con piezas en forma de L formadas por 3 cuadraditos cada una.

Ejercicio 16 La sucesión F_n de Fibonacci se define recursivamente del siguiente modo:
$F_0 = 0, F_1 = 1$ y

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \qquad \text{para todo } n \geqslant 2.$$

Pruebe que:

a. $\sum\limits_{i=0}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$. **b.** $\sum\limits_{i=1}^{2n} F_i F_{i-1} = F_{2n}^2$. **c.** $\sum\limits_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}$.

Ejercicio 17 Se considera la función f definida sobre $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\}$ por:

$$f(x) = \frac{1}{3x+2}.$$

Demuestre que la derivada n-ésima de f es:

$$f^{(n)}(x) = \frac{3^n (-1)^n n!}{(3x+2)^{n+1}}.$$