Práctico 6
Lógica de Predicados

Ejercicio 1

Considere un conjunto A de números reales que incluya al 0. Considere un lenguaje de primer orden con un símbolo de relación binario M que denota la relación $<$ de los reales y otro símbolo binario $='$ que denota la igualdad. Considere un símbolo de función binario m que denota la multiplicación.

Podemos usar el lenguaje de primer orden para expresar propiedades. Por ejemplo, la propiedad "ser neutro" puede expresarse como

$$\textsc{Ser\_neutro}(x_1) := ((\forall x_2)\ m(x_2, x_1) =' x_2)$$

Usando solamente los símbolos dados, escriba fórmulas de primer orden que expresen las siguientes nociones.

a. x_1 es el *máximo* de A.
b. x_1 es un *sucesor inmediato* de x_2.
c. No hay ningún elemento entre x_1 e x_2.
d. La función cuadrado es creciente.

Ejercicio 2

Sean PE el conjunto de las personas; la relación hermanos: $H \subseteq PE \times PE$; la relación estudiante: $E \subseteq PE$; la función madre: $m : PE \to PE$ y un elemento de PE: Juan.

Considere un lenguaje de primer orden con igualdad con los siguientes símbolos:

P_1 denota la relación H.

P_2 denota la relación E.

f_1 denota la función m

c_1 denota el elemento Juan

Usando solamente los símbolos dados, escriba fórmulas de primer orden que definan las siguientes nociones:

a. x_1 es la madre de Juan.
b. x_1 es la madre de algún estudiante.
c. Todos los estudiantes son hermanos de Juan.
d. Todos los estudiantes tienen hermanos.
e. Juan tiene por lo menos 2 hermanos.
f. x_1 es una persona tal que todos sus hermanos son estudiantes pero él no lo es.
g. No hay personas que sean estudiantes.
h. Los estudiantes no tienen hermanos.

Ejercicio 3

Considere el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales. Considere un lenguaje de primer orden con un símbolo de predicado P_1 (unario) que denota la relación "ser par", un símbolo de relación binario $='$ que denota la igualdad, dos símbolos de función f_1 y f_2 (binarios) que denotan la suma y el producto respectivamente y tres símbolos de constante c_1, c_2, c_3 que denotan las constantes $1, 2, 6$.

Traduzca a fórmulas de primer orden (utilizando solamente los símbolos definidos) cada uno de los siguientes enunciados:

a. Todo natural n cumple que $n^2 + n$ es par.
b. Para todo natural par p existe un natural m tal que $p = 2 \times m$.
c. La suma de dos naturales impares cualesquiera es un natural par.
d. Para todo natural n existe un natural m tal que $n \times (n+1) \times (n+2) = 6 \times m$.
e. No hay ningún natural que sea par e impar a la vez.
f. Hay un natural n que es par y que además cumple que $n + n = n \times n$.
g. La suma posee un neutro, que además es único.
h. La suma es una función inyectiva.

Ejercicio 4

Considere un lenguaje de primer orden del tipo $\langle 1, 2; 2; 0\rangle$ con dos símbolos de relación P_1 (unario) y P_2 (binario) y un símbolo de función f_1 (binario). Sea `FORM` el conjunto de fórmulas de dicho lenguaje. Indique cuáles de las siguientes son fórmulas bien formadas de dicho lenguaje (o sea, cuáles cumplen la definición de `FORM`).

a. $((\forall x_1)((\exists x_2)\ P_2(x_1, x_2)))$
b. $(P_1(x_1) \to (((\exists x_2)\ f_1(x_1, x_2) =' x_2) \wedge ((\exists x_1)\ P_2(x_1, x_2))))$
c. $(((\exists x_1)((\exists x_2)\ f_1(x_1, x_2))) \leftrightarrow ((\forall x_1)\ P_1(f_1(x_1, x_1))))$
d. $((\forall x_1)((\forall x_2)\ (P_1(x_1) \vee ((\exists x_1) P_2(x_1, x_2)))))$
e. $(P_1((\forall x_1)\ P_2(x_1, x_2)) \leftrightarrow ((\forall x_1)\ P_1(P_2(x_1, x_2))))$
f. $((\exists x_1) \wedge ((\forall x_2) P_2(x_1, x_2)))$
g. $((\forall x_1)\ (P_1(x_1) \to (P_1(f_1(x_1, x_2)) \wedge ((\exists x_1) P_1(f_1(x_1, f_1(x_1, x_2)))))))$

Ejercicio 5

a. Escriba el tipo de similaridad de las siguientes estructuras:
   I. $\langle \mathbb{Q}, <, 0\rangle$
   II. $\langle \mathbb{N}, +, \times, S, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots\rangle$, donde $S(x) = x + 1$
   III. $\left\langle 2^{\mathbb{N}}, \subseteq, \cup, \cap, ^c, \emptyset, \{1, 2\}\right\rangle$
   IV. $\langle \mathbb{N}, \{x \in \mathbb{N}/x \text{ es impar}\}, \{x \in \mathbb{N}/x \text{ es primo}\}, +, ^2, 0, 1\rangle$
   V. $\langle \mathbb{R}, 1\rangle$
   VI. $\langle \mathbb{R}, \mathbb{N}, <, T, 0, 1, 2\rangle$, donde $T(a, b, c)$ es la relación "b está entre a y c".
   VII. $\langle \{0, 1, 2\}, \{(0, 1), (0, 2), (1, 2)\}, \{0, 2\}, 0, 1, 2\rangle$

b. Dé estructuras que tengan los siguientes tipos de similaridad:
   I. $\langle 1, 1; -; 3\rangle$
   II. $\langle 4; -; 0\rangle$
   III. $\langle 1, 2; 1, 2; 1\rangle$
   IV. $\langle -; 2, 3; 0\rangle$

c. Considere los tipos de similaridad de la parte a. Para cada uno de ellos, dé el alfabeto para un lenguaje de dicho tipo.

d.
   I. Escriba 3 términos pertenecientes al lenguaje del punto (aIII).
   II. Escriba 3 términos pertenecientes al lenguaje del punto (aIV).
   III. Escriba 3 átomos pertenecientes al lenguaje del punto (aV).
   IV. Escriba 3 átomos cerrados pertenecientes al lenguaje del punto (aVI).
   V. Escriba 3 átomos pertenecientes al lenguaje del punto (aVII).
   VI. Escriba 3 sentencias pertenecientes al lenguaje del punto (aIV).

Ejercicio 6

Considere un lenguaje de primer orden de tipo $\langle -; 2; 1\rangle$ con un símbolo de función f_1 y un símbolo de constante c_1.

a. En las siguientes fórmulas determine cuáles ocurrencias de variables son libres y cuáles son ligadas. Para aquellas que sean ligadas, señale el cuantificador al cual están ligadas.
   I. $x_2 =' x_1$
   II. $x_1 =' x_1$
   III. $x_2 =' c_1$
   IV. $((\exists x_2) f_1(x_2, x_3) =' c_1)$
   V. $(((\forall x_4)\ f_1(x_1, x_3) =' c_1) \land ((\exists x_2)\ x_3 =' x_1))$
   VI. $(((\forall x_3)\ x_3 =' x_4) \to ((\forall x_5)\ x_5 =' x_2))$
   VII. $(((\exists x_3)\ x_3 =' c_1) \lor ((\exists x_4)\ x_3 =' x_4))$

b. Realice las siguientes sustituciones:
   I. $x_2 =' x_1[x_1/x_1]$
   II. $x_1 =' x_1[x_3/x_1]$
   III. $x_2 =' c_1[f_1(x_1, x_3)/x_3]$
   IV. $(((\forall x_4)\ f_1(x_1, x_3) =' c_1) \land ((\exists x_2)\ x_3 =' x_1))[f_1(x_1, x_2)/x_3]$
   V. $(((\forall x_3)\ x_3 =' x_4) \to ((\forall x_5)\ x_5 =' x_2))[f_1(x_1, x_2)/x_5]$
   VI. $(((\exists x_3)\ x_3 =' c_1) \lor ((\exists x_4)\ x_3 =' x_4))[f_1(x_1, x_2)/x_3][x_1/x_1]$

c. Para las fórmulas resultados de las sustituciones anteriores determine cuáles ocurrencias de variables son libres y cuáles son ligadas. Para aquellas que sean ligadas, señale el cuantificador al cual están ligadas. Compare el resultado con los obtenidos en la parte a.

Ejercicio 7

Considere un lenguaje de primer orden de tipo $\langle -; 2; 1\rangle$ con un símbolo de función f_1 y un símbolo de constante c_1. Verifique cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas.

a. x_1 es libre para x_1 en la fórmula $x_2 =' x_1$.
b. x_3 es libre para x_1 en la fórmula $x_1 =' x_2$.
c. c_1 es libre para $f_1(x_1, c_1)$ en la fórmula $f_1(x_1, c_1) =' c_1$.
d. $f_1(x_1, x_3)$ es libre para x_3 en la fórmula $x_2 =' c_1$.
e. x_1 es libre para $f_1(x_1, c_1)$ en la fórmula $((\forall x_1)\ f_1(x_1, c_1) =' c_1)$.
f. $f_1(c_1, x_2)$ es libre para x_2 en la fórmula $((\exists x_2)\ x_2 =' x_1)$.
g. $f_1(c_1, x_2)$ es libre para x_1 en la fórmula $((\exists x_2)\ x_2 =' x_1)$.
h. $f_1(x_1, x_2)$ es libre para x_5 en la fórmula $(((\forall x_3)\ x_3 =' x_4) \to ((\forall x_5)\ x_5 =' x_2))$.

i. $f_1(x_1, x_2)$ es libre para x_3 en la fórmula $(((\exists x_3)\ x_3 =' c_1) \vee ((\exists x_4)\ x_3 =' x_4))$.

Ejercicio 8

Sean $\varphi \in \texttt{FORM}$, $x \in \texttt{VAR}$, $t \in \texttt{TERM}$. Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique.

a. x está libre para x en φ
b. Si $x \notin V(\varphi)$, entonces t está libre para x en φ.
c. Si $x \notin BV(\varphi)$, entonces t está libre para x en φ.
d. Si $x \notin FV(\varphi)$, entonces t está libre para x en φ.

Ejercicio 9

Considere un lenguaje de primer orden del tipo $\langle -; 1, 2; 1\rangle$ con dos símbolos de función f_1 (unario) y f_2 (binario) y un símbolo de constante c_1.

a. Defina inductivamente el conjunto $\texttt{TERM}_C$ de los términos *cerrados* pertenecientes a dicho lenguaje.
b. Defina recursivamente la función $F : \texttt{TERM}_C \to \mathbb{N}$ que calcula la cantidad de *ocurrencias* de c_1 en un término $t \in \texttt{TERM}_C$.
c. Demuestre por inducción que para todo $t \in \texttt{TERM}_C$ se cumple que $F(t) > 0$.

Ejercicio 10

Sean el lenguaje de primer orden con igualdad definido por el tipo de similaridad $\langle 1; -; 0\rangle$ y la siguiente definición de la función $\#_{x_1} : \texttt{TERM} \to \mathbb{N}$, que cuenta las ocurrencias de la variable x_1 en un término del lenguaje:

$$\#_{x_1}(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_i \neq x_1 \\ 1 & \text{si } x_i = x_1 \end{cases}$$

a. Definir la función $\#_{x_1} : \texttt{FORM} \to \mathbb{N}$, que cuenta las ocurrencias de la variable x_1 en una fórmula del lenguaje.
b. Definir la función $\#^b_{x_1} : \texttt{FORM} \to \mathbb{N}$, que cuenta las ocurrencias ligadas de la variable x_1 en una fórmula del lenguaje.
c. Demuestre que $((\forall \varphi \in \texttt{FORM}))$ (x_1 está libre para y en φ entonces $\#^b_{x_1}(\varphi[x_1/y]) = \#^b_{x_1}(\varphi)$).

Ejercicio 11

Sea L un lenguaje de primer orden con igualdad de tipo de similaridad $\langle 1; 1; 0\rangle$ cuyo alfabeto cuenta con los símbolos de relación P y $='$, el símbolo de función f, las variables $\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$, los conectivos $\neg$ y $\to$, el cuantificador universal $\forall$, y los símbolos auxiliares) y (.

a. Enuncie el PIP para las fórmulas del lenguaje L.
b. Para cualquier fórmula $\varphi \in L$ y variables x_i, x_j tales que x_i no aparece en φ ($x_i \notin V(\varphi)$), pruebe que: $(\varphi[x_i/x_j])[x_j/x_i] = \varphi$.
c. Muestre que la condición sobre la variable x_i es necesaria para que se cumpla la propiedad anterior.

Ejercicio 12

Considere un lenguaje de primer orden del tipo $\langle 1; -; 0\rangle$ con un símbolo de predicado P (unario). Sea $Var = \{x_1, x_2, \ldots\}$ el conjunto de variables del lenguaje y sea $\texttt{FORM}$ el conjunto de fórmulas del lenguaje.

a. Defina recursivamente la función $V : \texttt{FORM} \to 2^{Var}$, tal que $V(\alpha)$ denota el conjunto de variables que ocurren en la fórmula α.
b. Defina recursivamente la función $FV : \texttt{FORM} \to 2^{Var}$, tal que $FV(\alpha)$ denota el conjunto de variables que ocurren libres en la fórmula α.
c. Demuestre por inducción que para todo $\alpha \in \texttt{FORM}$ se cumple que: $FV(\alpha) \subseteq V(\alpha)$.

Ejercicio 13

Sea un lenguaje de primer orden con tipo de similaridad $\langle -; 1, 2, 2; 0\rangle$ y símbolos de función f de aridad 1, g y h de aridad 2.

Sea $\texttt{PROP}_{\neg,\wedge,\vee}$ el conjunto de las fórmulas proposicionales que sólo emplean los conectivos $\neg$, $\wedge$ y $\vee$.

a. Defina inductivamente el conjunto $\texttt{TERM}$ de los términos del lenguaje.
b. Defina recursivamente una función biyectiva $C : \texttt{TERM} \to \texttt{PROP}_{\neg,\wedge,\vee}$, que cumpla:

$$C(g(x_1, x_3)) = (p_1 \wedge p_3)$$

c. Defina recursivamente una función $R : \texttt{TERM} \to \texttt{TERM}$ tal que para todo término t se cumpla $C(t)\ eq\ C(R(t))$ y el conectivo $\vee$ no ocurre en $C(R(t))$.
d. Demuestre que para todo término t, $C(t)\ eq\ C(R(t))$.