

# Inducción

## Lógica

# Inducción - Plan

## Conjuntos inductivos

Inducción como mecanismo primitivo para definir conjuntos

## Pruebas inductivas

Principios de inducción asociados a los conjuntos inductivos como mecanismo de prueba

## Definiciones recursivas

- Esquemas de recursión primitiva como mecanismo de definición de funciones sobre conjuntos inductivos
- Esquema de recursión general

# Contenidos

- Conjuntos inductivos
- Pruebas inductivas

# Formas de definir conjuntos

## Por extensión

Dando cada uno de los elementos del conjunto.

Ej:  $A = \{0, 2, 4\}$

## Por comprensión

Dando una condición que deben cumplir los elementos del conjunto.

Ej:  $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ es par y } x < 5\}$

Ej:  $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 0 \text{ o } x = 2 \text{ o } x = 4\}$

## Por inducción

Mediante reglas o cláusulas.

# Definición inductiva de conjuntos

## Idea

- Asumir cierto universo.
- Elegir ciertos elementos individuales del universo como elementos básicos del conjunto.
- Agregar nuevos elementos al conjunto combinando los elementos agregados anteriormente.

Las definiciones se escriben como reglas que debe cumplir el conjunto que se está definiendo.

# Definición inductiva de conjuntos

## ¿Cómo definir los naturales?

- Indicando el universo en el que nos paramos.
- Dando una regla que diga que 0 es un natural.
- Dando otra regla que diga que si tenemos un natural  $n$ , se puede construir otro natural aplicando el operador sucesor ( o sumando 1).

## Definición inductiva de los naturales.

Se define  $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$  con las siguientes reglas:

1.  $0 \in \mathbb{N}$ .
2. Si  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $n + 1 \in \mathbb{N}$

# Diferentes visiones

## Visión declarativa

Se considera la familia de subconjuntos del universo que cumplen con las reglas.

El conjunto inductivo definido es la intersección de dicha familia.

## Visión constructiva

Las reglas identifican elementos del universo a partir de ciertos elementos básicos y de mecanismos que usan otros elementos previamente identificados.

El conjunto inductivo definido está formado por todos los elementos identificados en ese proceso.

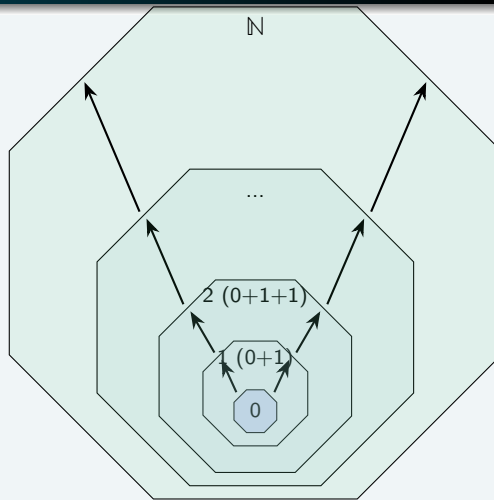
# Visión declarativa de las definiciones inductivas

- Dado un grupo de reglas, hay varios subconjuntos del universo que cumplen con ellas.
- Cuál de todos esos es el que se está definiendo?
- Se define el *mínimo* conjunto que cumple con las reglas.
- O lo que es lo mismo la intersección de todos los conjuntos que cumplen con las reglas.



# Visión constructiva de una definición inductiva

- Dado un conjunto inicial  $B$ , se aplican las reglas y se agranda  $B$ .
- El conjunto que se define es el de todos los elementos que se pueden construir con la reglas.
- Este conjunto cumple con las reglas dadas.



# Significado de una definición inductiva

Cuando damos una definición inductiva de un conjunto :

1. Consideramos un universo
2. Identificamos un conjunto básico
3. Definimos una manera de recorrer (construir) sus elementos
4. Todos los elementos del conjunto se recorren con las reglas dadas
5. El orden al aplicar las reglas es relevante, dado que un orden distinto puede dar (y en general lo hace) elementos distintos

# Ejemplo: los naturales pares $\mathbb{P}$

Consideremos las siguientes reglas para definir un subconjunto de  $\mathbb{R}$ :

1.  $0 \in \mathbb{P}$
2. Si  $n \in \mathbb{P}$ , entonces  $n + 2 \in \mathbb{P}$

Queda definido inductivamente el conjunto  $\mathbb{P}$  de los pares

- $\mathbb{P} = \{0, 2, 4, 6, 8, \dots\}$

El conjunto base es el conjunto  $\{0\}$ .

# Ejemplo: los naturales pares $\mathbb{P}'$

Consideremos las siguientes reglas para definir un subconjunto de  $\mathbb{R}$ :

1.  $0 \in \mathbb{P}'$
2.  $2 \in \mathbb{P}'$
3. Si  $n \in \mathbb{P}'$ , entonces  $n + 4 \in \mathbb{P}'$

Queda definido inductivamente el conjunto  $\mathbb{P}'$  de los pares

$$\bullet \mathbb{P}' = \{0, 4, 8, \dots 2, 6, 10, \dots\}$$

El conjunto base es el conjunto  $\{0, 2\}$ .

# Pares: $\mathbb{P}$ versus $\mathbb{P}'$

## Con respecto al significado de las definiciones

- Dimos dos definiciones inductivas diferentes, porque las reglas usadas son diferentes.
- Sin embargo, los conjuntos  $\mathbb{P}$  y  $\mathbb{P}'$  son iguales.
- El reconocimiento de los elementos es diferente cuando usamos la definición  $\mathbb{P}$  de cuando usamos la definición  $\mathbb{P}'$

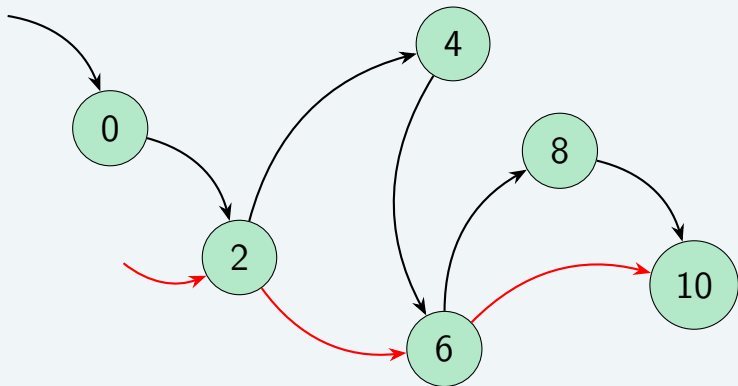
## Precaución

Usualmente presuponemos la definición inductiva usada y decimos “las reglas que definen el conjunto  $S$ ” en lugar de “las reglas que definen el conjunto  $S$  de acuerdo a la definición  $\mathcal{D}$ ”

# $\mathbb{P}$ versus $\mathbb{P}'$

¿Cómo se demuestra que 10 es par en términos de los conjuntos que manejamos?

- Se construye el 10 de  $\mathbb{P}$
- Se construye el 10 de  $\mathbb{P}'$



# Conjuntos Inductivos, reglas y definiciones

- ¿Cuántas aplicaciones de reglas son necesarias para obtener el 10?
  - En  $\mathbb{P}$ : 0, 2, 4, 6, 8, 10
  - En  $\mathbb{P}'$ : 2, 6, 10
- Distintas definiciones inductivas llevan a funciones con distinto costo en el cómputo.
- El costo de obtener cada elemento de un conjunto puede variar dependiendo de las distintas definiciones de ese mismo conjunto
- Cada elemento complejo se compone de elementos menos complejos de acuerdo a una definición dada

# Resumen: Definición inductiva de un conjunto

- Se define inductivamente el conjunto como el menor subconjunto de un universo dado que cumple con las reglas.
- En el caso de los pares, subconjunto de los reales:
  1. 0 está en  $\mathbb{P}$
  2. Si  $n$  está en  $\mathbb{P}$ , entonces  $n + 2$  también lo está
- También se puede ver como reglas de construcción de los elementos del conjunto y por lo tanto del propio conjunto.



# Ejemplos numéricos incluidos en $\mathbb{R}$

## Naturales

- i  $0 \in \mathbb{N}$
- ii Si  $n \in \mathbb{N}$ ,  
entonces  
 $n + 1 \in \mathbb{N}$

## Naturales pares

- i  $0 \in \mathbb{P}$
- ii Si  $n \in \mathbb{P}$ ,  
entonces  
 $n + 2 \in \mathbb{P}$

## Impares

- i  $1 \in \mathbb{I}_{\mathbb{Z}}$
- ii Si  $n \in \mathbb{I}_{\mathbb{Z}}$ ,  
entonces  
 $n + 2 \in \mathbb{I}_{\mathbb{Z}}$
- iii Si  $n \in \mathbb{I}_{\mathbb{Z}}$ ,  
entonces  
 $n - 2 \in \mathbb{I}_{\mathbb{Z}}$

En las reglas inductivas, las metavariables ( $n$  en este caso) representan elementos que necesitan menos reglas para su construcción.

# Lenguajes

- Un **Lenguaje** es un sistema de comunicación estructurado.
- En este sistema, típicamente hay tres elementos básicos:
  - **Sintaxis:** Compuesta por un **conjunto de símbolos** o **alfabeto** y un **conjunto de reglas** para combinar símbolos del alfabeto para formar una frase (o mensaje) correcta en algún sentido.
  - **Semántica:** Compuesta por un conjunto de elementos que se quieren referenciar en los mensajes y el significado de los mensajes correctos.
  - **Interpretación** Es un mecanismo por el cual **a cada frase correcta del lenguaje se le asigna algún significado.**

# Lenguajes

- No se debe confundir la sintaxis con la semántica.
  - Qué son las siguientes cosas ? :
    - 5
    - 101
    - 11111
    - V
  - Cuál es la diferencia entre esas cosas ?
- Observar que:
  - Lo símbolos no tienen significado propio.
  - El significado de un símbolo depende de qué es lo consideramos semántica y cuál es el resultado de aplicar el mecanismo de interpretación al símbolo.
    - Qué significa 5 ?
    - Qué significa 101 ?
    - Qué significa VI ?

# Lenguajes

- En informática y en matemáticas, se le llama lenguaje al **conjunto de todas las frases correctas** que se pueden formar usando las reglas de la sintaxis.
- De aquí en adelante se le va a dar ese significado al término Lenguaje. Más adelante, se va a considerar la semántica y la interpretación de un lenguaje.

# Universo de las palabras de $\Sigma$

- Sea  $\Sigma$  un conjunto conocido de cosas distinguibles (símbolos, letras, marcas)
- Una palabra (o secuencia, o tira, o string) sobre  $\Sigma$  es una secuencia finita de elementos de  $\Sigma$
- Dadas dos palabras  $u$  y  $w$ , la palabra  $uw$  es la que resulta de encadenar ambas
- Existe una palabra vacía  $\varepsilon$ , que no tiene ninguna letra, y es el neutro del encadenamiento
- Llamamos  $\Sigma^*$  al conjunto de todas las palabras formadas por elementos de  $\Sigma$

# Lenguajes sobre un alfabeto $\Sigma$

- Se llama *lenguaje sobre  $\Sigma$*  a cualquier subconjunto de  $\Sigma^*$
- Hay lenguajes que se pueden definir inductivamente y tratar como conjuntos inductivos.

# Ejemplos

$L_1 \subseteq \{a, b\}^*$  definido inductivamente por

1.  $a \in L_1$
2. Si  $w \in L_1$  entonces  $bwb \in L_1$

Es el conjunto de las tiras que tienen una sola  $a$  y la misma cantidad de  $b$  antes y después de la  $a$ .

$L_2 \subseteq \{a, b, c\}^*$  definido inductivamente por

1.  $b \in L_2$
2. Si  $w \in L_2$  entonces  $awc \in L_2$

# $\{a, b\}^*$ puede definirse inductivamente

- Sea el alfabeto  $\{a, b\}$
- Definimos inductivamente  $S \subseteq \{a, b\}^*$  con las siguientes reglas:
  1.  $\epsilon \in S$  (palabra vacía)
  2. Si  $w \in S$ , entonces  $aw \in S$
  3. Si  $w \in S$ , entonces  $bw \in S$
- El lenguaje  $S$  es precisamente  $\{a, b\}^*$
- ¡Observar que  $\epsilon$  es una palabra y no un símbolo del alfabeto!



Definimos inductivamente  $S \subseteq \Sigma^*$  con las siguientes reglas:

1.  $\epsilon \in S$  (palabra vacía)
2. Si  $w \in S$  y  $a \in \Sigma$ , entonces  $aw \in S$

El lenguaje  $S$  es precisamente  $\Sigma^*$

# Pertenencia a un conjunto inductivo

Para probar que un objeto pertenece a un conjunto inductivo basta con mostrar cómo lo formamos. Su *secuencia de formación* indica cuáles reglas se usan y cómo.

Ejemplo:  $bbabb \in L_1$  porque

1.  $a \in L_1$  por i)
2. luego  $bab \in L_1$  por ii)
3. y finalmente  $bbabb \in L_1$  por ii)

# Contenidos

- Conjuntos inductivos
- Pruebas inductivas

# Probar propiedades de conjuntos

Hay dos formas típicas de definir conjuntos

- Por extensión
- Por comprensión

Cada forma sugiere una forma de probar propiedades sobre el conjunto

**Por extensión** Se prueba que cada uno de los elementos del conjunto cumple la propiedad

**Por comprensión** Se prueba que los elementos que cumplen con la definición del conjunto cumplen la propiedad

# Principio de inducción

Sabemos exactamente cómo se construyen los elementos de un conjunto inductivo. Podemos usar esta información para probar propiedades de ellos.

Todos los elementos de  $L_1$  tienen una cantidad impar de símbolos

Una prueba que aprovecha el conocimiento de cómo se generan los objetos de  $L_1$  sería de la forma:

- i  $a$  tiene una cantidad impar de símbolos
- ii Si  $w$  tiene una cantidad impar de símbolos, entonces  $bwb$  también

# Ejemplo: Principio de inducción Primitiva

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$  definido inductivamente por:

- i  $0 \in \mathbb{N}$
- ii Si  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $S(n) \in \mathbb{N}$

Principio de Inducción Primitiva para  $\mathbb{N}$

Sea  $P$  una propiedad sobre los elementos de  $\mathbb{N}$  que cumple lo siguiente:

- i  $P(0)$  se cumple
- ii Si  $n \in \mathbb{N}$  y  $P(n)$  se cumple, entonces  $P(S(n))$  se cumple

Entonces, todos los elementos de  $\mathbb{N}$  cumplen  $P$ .

# Principio de Inducción Primitiva para $\mathbb{N}$

**H)** Sea  $P$  una propiedad sobre los elementos de  $\mathbb{N}$  que cumple lo siguiente:

- i  $P(0)$  se cumple
- ii Si  $n \in \mathbb{N}$  y  $P(n)$  se cumple, entonces  $P(S(n))$  se cumple

**T)**  $P$  se cumple para todos los elementos de  $\mathbb{N}$ .  
**Dem.**

1. Sea  $X = \{x \in \mathbb{N} \mid P(x)\}$
2. Por hipótesis,  $X$  cumple las reglas i y ii que definen a  $\mathbb{N}$
3. Como  $\mathbb{N}$  es el *mínimo* conjunto que cumple con esas reglas entonces  $\mathbb{N} \subseteq X$
4. Entonces todos los naturales cumplen  $P$

# Aplicación del Principio de Inducción

## Aplicar el PIP

Se debe probar que la propiedad a demostrar está en las hipótesis del PIP.

Para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\sum_{0 \leq k \leq n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

Hay que probar que se cumplen las hipótesis del PIP. O sea,

- i  $\sum_{0 \leq k \leq 0} k = \frac{0(0+1)}{2}$
- ii Si  $\sum_{0 \leq k \leq n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ , entonces  
 $\sum_{0 \leq k \leq n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

Y luego aplicando el PIP, concluir que todo  $n \in \mathbb{N}$  lo cumple.



# Principio de Inducción Primitiva para un conjunto inductivo

Sea  $A$  un conjunto definido inductivamente. Para probar que una propiedad se cumple para todos los objetos de  $A$  es suficiente con

- Probar que la propiedad se cumple para los objetos de  $A$  obtenidos de aplicar reglas base
- Probar que la propiedad se cumple para los objetos de  $A$  obtenidos de aplicar reglas inductivas, suponiendo que la misma se cumple para el (los) objeto(s) anterior(es) (*hipótesis inductiva*)

# Ejemplo: PIP para conjunto inductivo

$L_1 \subseteq \{a, b\}^*$  definido inductivamente

1.  $a \in L_1$
2. Si  $w \in L_1$  entonces  $bwb \in L_1$

Principio de Inducción Primitiva para  $L_1$

Sea  $P$  una propiedad sobre los elementos de  $L_1$  que cumple lo siguiente:

- i  $P(a)$  se cumple
- ii Si  $w \in L_1$  y  $P(w)$  se cumple, entonces  $P(bwb)$  se cumple

Entonces, todos los elementos de  $L_1$  cumplen  $P$ .

# Usos del PIP

## Aplicaciones

- Probar que todos los elementos de  $L_1$  tienen una cantidad impar de símbolos
- Probar que todos los elementos de  $L_1$  son palíndromos

# Ejemplo: PIP de $\Sigma^*$

## $\Sigma^*$ definido inductivamente

- i  $\epsilon \in \Sigma^*$
- ii Si  $w \in \Sigma^*$  y  $x \in \Sigma$ , entonces  $xw \in \Sigma^*$

## Principio de Inducción Primitiva para $\Sigma^*$

Sea  $P$  una propiedad sobre los elementos de  $\Sigma^*$  que cumple lo siguiente:

- i  $P(\epsilon)$  se cumple
- ii Si  $w \in \Sigma^*$  y  $x \in \Sigma$  y  $P(w)$  se cumple, entonces  $P(xw)$  se cumple

Entonces, todos los elementos de  $\Sigma^*$  cumplen  $P$ .