Universidad de la República
Facultad de Ingeniería
Instituto de Matemática y Estadística

Matemática Discreta 2
Curso 2021

PRÁCTICO 4: Números primos, Teorema fundamental de la Aritmética.

I. Ejercicios de práctica:

Ejercicio 1. Se consideran los siguientes números:

$$a = 1485000; \quad b = 15^4 \cdot 42^3 \cdot 56^5; \quad c = 15!; \quad d = 1485000^3; \quad e = 15!^5$$

a. Halllar la descomposición factorial de esos números.

b. ¿Cuántos divisores tienen?

c. ¿Es alguno de ellos cuadrado perfecto?

Ejercicio 2. Hallar el menor número natural n tal que $6552 \times n$ sea un cuadrado y el menor número natural m para el cual $1260 \times m$ sea un cubo perfecto.

Ejercicio 3. Decidir si existen enteros positivos a y b que satisfagan

a. $a^2 = 8b^2$. **b**. $a^2 = 3b^3$. **c**. $7a^2 = 11b^2$.

Ejercicio 4. Determinar el menor cuadrado perfecto que es divisible entre $7!$.

Ejercicio 5. Hallar los números naturales $n \leq 1000$ que verifican $\#\,\mathrm{Div}_+(\mathrm{n}) = 3$.

Ejercicio 6.

i) Hallar los números naturales a y b sabiendo que $\mathrm{mcd}(a, b) = 18$, que a tiene 21 divisores positivos y que b tiene 10.

ii) Hallar los números naturales a tales que a^2 tiene 77 divisores positivos y $80 \mid a$.

iii) Hallar todos los números naturales a tales que a divide a alguna potencia de 6, es divisible entre 6 y además satisface $\#\,\mathrm{Div}_+(\mathrm{a}^2) = 2\#\,\mathrm{Div}_+(\mathrm{a}) - 1$.

Ejercicio 7. Demostrar que $\mathrm{mcd}(a^n, b^n) = \mathrm{mcd}(a, b)^n$ para todo $a, b, n \in \mathbb{Z}^+$.

Ejercicio 8. Demostrar que $\sqrt{n} \in \mathbb{Z}$ si y solamente si n tiene un número impar de divisores positivos.

Ejercicio 9. Demostrar que $\sqrt{pq}$ y $\log_{30}(pq)$ son irracionales para cualquier par de primos distintos p, q.

II. Ejercicios para pensar un poco más...

Ejercicio 10. Sea (p_n) la sucesión de los números primos, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, etc. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $p_1p_2 \dots p_n + 1 \geq p_{n+1}$. ¿Es cierto que $p_1p_2 \dots p_n + 1$ es primo para todo $n \in \mathbb{N}$?

Ejercicio 11. ¿Existen dos cuadrados perfectos cuya diferencia sea 311? ¿Y dos cubos cuya suma sea 311? (Sug. Observar que $f(x) = x^3 + y^3$ tiene raíz $x = -y$ y usar esto para factorizar $x^3 + y^3$).

Ejercicio 12. En un manicomio hay 2021 habitaciones numeradas con los números $1, 2, 3, \dots, 2021$. En un principio están todas las puertas cerradas. Cuando pasa el primer paciente abre la puerta de cada habitación, luego pasa el segundo paciente y cierra las puertas $2, 4, 6, 8, \dots$. Pasa el tercer paciente y cambia de estado las puertas $3, 6, 9, 12, \dots$ (es decir, la cierra si estaba abierta y la abre si estaba cerrada) y así hasta que pasa el paciente 2021 que cambia de estado la puerta 2021. ¿Cuántas puertas abiertas quedan luego de pasar los 2021 pacientes?

Ejercicio 13.

a. Probar que si $p > 2$ es primo, entonces es de la forma $4k \pm 1$, para algún $k \in \mathbb{Z}$.

b. Probar que si $p > 3$ es primo, entonces es de la forma $6k \pm 1$, para algún $k \in \mathbb{Z}$.

c. Probar que existen infinitos primos de la forma $4k - 1$.
Sugerencia: imitar la prueba de Euclides sobre la infinitud de primos.