MATEMÁTICA DISCRETA I - 2020 - 1$^{\text{ER}}$ SEMESTRE

Práctico 10 - Soluciones

Árboles.

Ejercicio 1
En un árbol siempre se cumple que $|V| = |E| + 1$, entonces aplicando esto a los árboles T_1 y T_2 obtenemos que

$$|V_1| = |E_1| + 1 = 17 + 1 = 18 \Rightarrow |V_1| = 18 \Rightarrow |V_2| = 2|V_1| = 36 \Rightarrow |E_2| = |V_2| - 1 = 35.$$

Ejercicio 2

a. Si G_i con $i = 1, \cdots, 7$ son las componentes conexas del grafo F_1, sabemos por definición de bosque que cada G_i es un árbol. Luego, para cada G_i vale que $|V(G_i)| = |E(G_i)| + 1$. Entonces

$$|V_1| = \sum_{i=1}^{7} |V(G_i)| = \sum_{i=1}^{7} (|E(G_i)| + 1) = \sum_{i=1}^{7} |E(G_i)| + 7 = |E(F_1)| + 7 = |E_1| + 7 = 40 + 7 = 47.$$

Podemos concluir, con un razonamiento análogo que, en general, si tengo un bosque con k árboles entonces $|V| = |E| + k$.

b. Si llamamos k a la cantidad de árboles del bosque F_2 por la observación anterior,

$$|V_2| = |E_2| + k \Rightarrow k = |V_2| - |E_2| = 62 - 51 = 11.$$

Ejercicio 3 Son los de la forma P_n.

Ejercicio 4
Un ejemplo de un grafo que no es un árbol y tiene un vértice mas que el número de aristas es $K_3 \cup K_1$. Ahora hay que probar que si G no es un árbol y $|V| = |E| + 1$ entonces G no puede ser conexo. Para esto, supongamos por absurdo que G fuera conexo, entonces existiria T un árbol recubridor de G. Luego:

$$|E| + 1 = |V| = |V(T)| = |E(T)| + 1 \Rightarrow |E| = |E(T)| \Rightarrow T = G$$

pues T es un subgrafo de G con la misma cantidad de vértices y aristas que G. Entonces G sería un árbol. ABSURDO.
Concluimos que G no puede ser conexo.

Ejercicio 5
Hay que probar que si $G = (V, E)$ con $|V| = n$ y $|E| = m$ entonces $|\kappa(G)| \geq n - m$.
Supongamos que $|\kappa(G)| = t$ es decir que G tiene t componentes conexas $G_1, \cdots, G_t$. Para cada $i = 1, \cdots, t-1$ agrego una arista e_i " que conecte" a G_i con G_{i+1}. Es decir, para cada i, elijo un vértice

$v_i \in G_i$ un vértice $w_i \in G_{i+1}$ y considero $e_i = \{v_i, w_i\}$. Luego el grafo $G' = (V', E')$ con $V' = V$ y $E' = E \cup \{e_1, \cdots, e_{t-1}\}$ es conexo y por lo tanto G' tiene un árbol recubridor T. Entonces

$$n = |V| = |V'| = |V(T)| = |E(T)|+1 \leq |E(G')|+1 = (|E|+t-1)+1 = |E|+t = m+t \Rightarrow n \leq m+t \Rightarrow n-m \leq t$$

como queríamos demostrar.

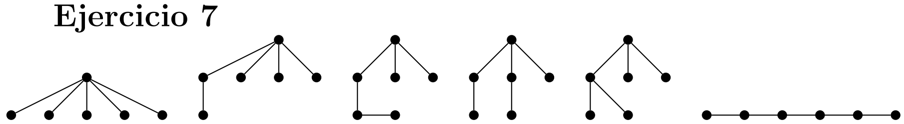
Ejercicio 6

Como $G = (V, E)$ es conexo, G tiene un árbol recubridor T. Entonces

$$|V| = |V(T)| = |E(T)| + 1 \leq |E| + 1 = 30 + 1 = 31 \Rightarrow |V| \leq 31.$$

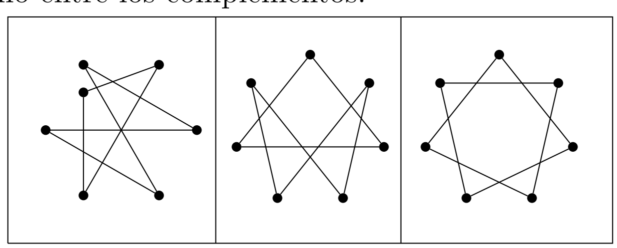
Isomorfismo

Ejercicio 7



Los recubridores de $K_{3,3}$ son los tres últimos.

Ejercicio 8

- **a**. Sea $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$, son isomorfos sii existe $f : V_1 \to V_2$ tal que $\{x, y\} \in E_1 \iff \{f(x), f(y)\} \in E_2$ lo cual sucede sii $\{x, y\} \notin E_1 \iff \{f(x), f(y)\} \notin E_2$ o sea $\{x, y\} \in \bar{E}_1 \iff \{f(x), f(y)\} \in \bar{E}_2$ siendo $\bar{E}_i$ el conjunto de aristas del complemento de G_i, por lo que f es un isomorfismo entre los complementos.
- **b**. Tomamos los complementos: 
  Vemos que los dos primeros son la unión de dos ciclos, $C_3 \cup C_4$ y el último es C_7, por lo tanto los dos primeros son isomorfos y el último no es isomorfo a ninguno.
- **c**. Si $|E(G)| = m$ y $|V(G)| = n$, entonces $|E(\bar{G})| = |E(K_{|V(G)|})| - |E(G)| = \binom{n}{2} - m$.
- **d**. Si G es isomorfo a $\bar{G}$ entonces $|E(\bar{G})| = |E(G)|$, entonces $\binom{n}{2} - m = m \implies m = \binom{n}{2}/2 = n(n-1)/4$.
- **e**. P_4 y C_5.
- **f**. Si existe un grafo autocomplementario de orden n entonces $|E(\bar{G})| + |E(G)| = |K_n| = \frac{n(n-1)}{2}$, en este caso como $|E(\bar{G})| = \frac{n(n-1)}{4} \in \mathbb{N}$, luego $n = \dot{4}$ o $n = \dot{4} + 1$.
  El recíproco también es cierto y para ello basta construir un grafo autocomplementario para cada valor de n tal que $n = \dot{4}$ o $n = \dot{4} + 1$.

Para construir un autocomplementario de orden múltiplo de 4, si $n = 4k$ dividamos el conjunto de vértices V de G en 4 subconjuntos de k elementos: $V = \{a_1, \cdots, a_k\} \cup \{b_1, \cdots, b_k\} \cup \{c_1, \cdots, c_k\} \cup \{d_1, \cdots, d_k\}$ y definimos los siguientes grafos:
$G_1 = K_{k,k}$ grafo bipartito (completo) de vértices los conjuntos $\{a_1, \cdots, a_k\}$ y $\{b_1, \cdots, b_k\}$,
$G_2 = K_{2k}$ grafo completo de vértices $\{b_1, \cdots, b_k\} \cup \{c_1, \cdots, c_k\}$
$G_3 = K_{k,k}$ grafo bipartito (completo) de vértices los conjuntos $\{c_1, \cdots, c_k\}$ y $\{d_1, \cdots, d_k\}$ y definimos $G = G_1 \cup G_2 \cup G_3$. Este G es isomorfo a $\bar{G}$ por lo que es autocomplementario de orden $4k$.
Para construir un autocomplementario de orden $n = 4k + 1$, al grafo G del caso anterior le agregamos un vértice más v (así tenemos $4k + 1$ vértices como queremos) y lo conectamos con todos los vértices de $\{b_1, \cdots, b_k\} \cup \{c_1, \cdots, c_k\}$.

Ejercicio 9

Los primeros dos (figura (a)) no son isomorfos porque los grafos inducidos por los vértices de grado 3 son distintos: en el primero son dos K_2($G[I] = G[\{b, d, e, g\}]$) y en el segundo es C_4 ($G[I] = G[\{e, f, g, h\}]$).

Para el segundo (figura (b)) vemos que el complemento de ambos es C_6, por lo tanto son isomorfos.

Ejercicio 10

Para el directo, si K_n posee tres subgrafos dos a dos isomorfos cuyos conjuntos de aristas son una partición del conjunto de aristas de K_n, entonces si G_1, G_2 y G_3 son dichos subgrafos, $|E(G_1)| = |E(G_2)| = |E(G_3)|$ pues son isomorfos, y además $|E(G_1)| + |E(G_2)| + |E(G_3)| = |E(K_n)|$ pues los conjuntos de aristas de G_1, G_2, G_3 son una partición del conjunto de aristas de K_n. Por lo tanto si $h = |E(G_1)|$ tenemos que $3h = |E(K_n)| = \dfrac{n(n-1)}{2}$, es decir $\dfrac{n(n-1)}{2}$ es múltiplo de 3, y eso solo es posible si n es múltiplo de 3 o $n - 1$ es múltiplo de 3, es decir si n es de la forma $3k$ o $3k + 1$.
Para el reciproco, supongamos que $n = 3k$, entonces si $V(K_n) = \{a_1, \ldots, a_k\} \cup \{b_1, \ldots, b_k\} \cup \{c_1, \ldots, c_k\}$, tres subgrafos que verifican lo dicho son:
$(V(K_n), \{\{a_i, b_j\} : \forall i, j\})$
$(V(K_n), \{\{a_i, c_j\} : \forall i, j\})$
$(V(K_n), \{\{c_i, b_j\} : \forall i, j\})$

Supongamos que $n = 3k + 1$, entonces si $V(K_n) = \{a_1, \ldots, a_k\} \cup \{b_1, \ldots, b_k\} \cup \{c_1, \ldots, c_k\} \cup \{d\}$, tres subgrafos que verifican lo dicho son:
$(V(K_n), \{\{a_i, b_j\} : \forall i, j\} \cup \{\{d, a_i\} : \forall i\})$
$(V(K_n), \{\{b_i, c_j\} : \forall i, j\} \cup \{\{d, b_i\} : \forall i\})$
$(V(K_n), \{\{c_i, a_j\} : \forall i, j\} \cup \{\{d, c_i\} : \forall i\})$

Grado

Ejercicio 11

a. $3n = 2.9 \Longrightarrow n = 6$.
b. $2.10 = 2.4 + (n - 2).3 \Longrightarrow n = 6$.
c. Tomando el complemento, tenemos que el complemento es un grado 2-regular. Hay dos grafos 2-regulares de orden 6, C_6 y $C_3 \cup C_3$.

Para el segundo si tomamos el complemento $\bar{G}$ tendremos dos vértices de grado 1 y cuatro de grado 2. Hay dos casos: o bien los de grado 1 son adyacentes entonces $\bar{G} = K_2 \cup C_4$ o bien no son adyacentes, de donde $\bar{G} = P_6$.

Ejercicio 12

Cada envio se intepreta como un arco en un grafo dirigido, pero al recibir del mismo que se envia el arco es bidireccional y se puede interpretar como la arista de un grafo. Sería un grafo 3-regular con 9 vértices, que no puede existir pues $3n = 27 \neq \dot{2}$.

Ejercicio 13
$gr_{\bar{G}}(v) = n - 1 - gr_G(v)$ de donde si $n = \dot{2}$ entonces solo tendrá grado impar el vértice de grado par, sino todos serán impares menos dicho vértices, o sea que si $n = \dot{2}$ hay $n-1$ de grado par en $\bar{G}$, y sino, si n es impar, hay 1 solo vértice de grado par en $\bar{G}$.

Ejercicio 14 Si n es la cantidad de vértices del grafo entonces $2.17 = \sum gr(v) \geq 3n \implies n \leq 34/3 = 11 + 1/3 \implies n \leq 11$. Por lo tanto el máximo orden posible es 11.

Sí, existe un grafo con dicha cantidad de vértices. Si tomamos C_{11} le agregamos 5 aristas más entre vértices casi opuestos, de forma tal que queden todos de grado 3 salvo uno de grado 2. Hasta ahí tenemos $11 + 5 = 16$ aristas, así que nos falta una que se la agregamos al vértices de grado 2 y a cualquier otro vértices no adyacente al mismo.

Ejercicio 15
Basta tomar un ciclo y unir sus vértices opuestos.

Ejercicio 16
Los grados posibles en un grafo conexo con n vértices van de 1 a $n-1$ (por ser conexo hay al menos una arista incidente en cada vértice, no hay vértices aislados). Por lo tanto tenemos $n-1$ grados posibles (palomares) pasa usar entre n vértices (palomas) así que habrán dos vértices con el mismo grado.

Ejercicio 17
$2(n-1) = h + 4.2 + 1.3 + 2.4 + 1.5$ con $n = h + 4 + 1 + 2 + 1$ de donde $h = 10$ hojas.

Circuitos y Recorridos Eulerianos, Ciclos y Caminos Hamiltonianos

Ejercicio 18

Recorrido euleriano para el primero: $1, 2, 4, 1, 3, 4, 5, 3$
Recorrido euleriano para el segundo: $2, 6, 1, 2, 4, 1, 3, 4, 5, 3$
Circuito euleriano para el tercero: $1, 2, 9, 1, 8, 2, 4, 3, 7, 4, 6, 5, 3, 1$

Ejercicio 19
$g, h, i, j, a, b, c, i, a, c, d, e, f, g, d, f, h, d$

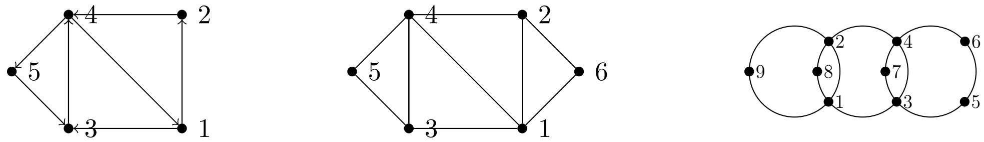


Figura 1:

Ejercicio 20

K_n es conexo y $n-1$-regular, por lo que tendrá un circuito euleriado sii n impar. Si n es par, tendrá un recorrido euleriano solo par $n = 2$.

Ejercicio 21

a) Basta sacar dos aristas no adyacentes y observar que lo que queda es conexo y tiene dos vértices impares y los demás pares, así que la longitud máxima será $6.5/2 - 2 = 13$.

b) Nuevamente consideramos tres aristas no adyacentes y tendremos un recorrido de largo $8.7/2 - 3 = 25$

c) Será de $10.9/2 - 4 = 41$

d) $2n(2n-1)/2 - (n-1) = 2n^2 - 2n + 1$.

Ejercicio 22

$\mathcal{E} \setminus \mathcal{H}$: dos C_3 con un vértice en común.

$\mathcal{H} \setminus \mathcal{E}$: $K_4 - e$ el completo con 4 vértices menos una arista.

$\mathcal{E} \cap \mathcal{H}$: C_4.

Ejercicio 23

El primero no tiene ciclo hamiltoniano pues los vértices de grado 2 fuerzan 6 aristas tres de la cuales son incidientes con el vértices del medio, de modo que éste con dichas aristas on puede ser parte de un ciclo.

El segundo no puede ser hamiltoniano porque es bipartito con una cantidad impar de vértices.

El tercero lo es y el siguiente es un posible ciclo hamiltoniano: