

PRÁCTICO 6: COMPLEMENTO ORTOGONAL.

1. Complemento ortogonal

EJERCICIO 1. Sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno.

1. Sean  $A$  y  $B$  subconjuntos de  $V$ . Probar que:

a) Si  $A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$ ,

b)  $A^\perp = [A]^\perp$ ,

c)  $A \subset (A^\perp)^\perp$ .

2. Sean  $S$  y  $W$  subespacios de  $V$ . Probar que:

a)  $S = (S^\perp)^\perp$ ,

b)  $(S + W)^\perp = S^\perp \cap W^\perp$ ,

c)  $(S \cap W)^\perp = S^\perp + W^\perp$ .

3. Interprete geoméricamente los resultados anteriores.

EJERCICIO 2. 1. Se considera en  $\mathbb{C}^3$  con el producto interno habitual el subespacio  $S = [(i, 0, 1)]$ .

Hallar una base del subespacio  $S^\perp$ .

2. En  $\mathbb{R}^3$ , se considera el subespacio  $S = [(1, 2, 1)]$ . Calcular  $S^\perp$  con:

a) el producto interno usual de  $\mathbb{R}^3$ ;

b) el producto interno  $\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1$ .

EJERCICIO 3. En  $\mathbb{R}^3$ , con el producto interno habitual, se considera el subconjunto  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$ . Calcular  $\dim S^\perp$ .

EJERCICIO 4. Sea  $S = [(3, 5, 1)] \cup \{(0, 1, 1)\}$  un subconjunto de  $\mathbb{R}^3$ .

Se considera  $\langle (x, y, z), (x', y', z') \rangle = xx' + 2yy' + 3zz'$  producto interno en  $\mathbb{R}^3$ . Calcular  $S^\perp$ .

EJERCICIO 5. En  $\mathbb{R}^3$  con el producto interno  $\langle (x, y, z), (x', y', z') \rangle = xx' + 2yy' + 3zz'$ , consideramos el conjunto  $A = \{(n, 2n, 4n) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{(1, 1, 1)\}$ . Calcular  $A^\perp$ .

EJERCICIO 6. Se consideran el espacio  $\mathbb{R}^3$  con el producto interno definido por

$$\langle x, y \rangle = 2x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

donde  $x = (x_1, x_2, x_3)$  e  $y = (y_1, y_2, y_3)$ , y el subespacio  $S$  generado por el vector  $(1, 1, 1)$ .

Hallar una base ortogonal de  $S^\perp$ .

(1)  $\{(3, -4, 1), (1, 1, -2)\}$ .

(2)  $\{(1, 0, 1), (-1, 0, 1)\}$ .

(3)  $\{(0, 1, -1), (-1, 1, 1)\}$ .

(4)  $\{(2, -1, -1), (0, 1, -1)\}$ .

(5)  $\{(-1, 0, 2), (2, -5, 1)\}$ .

EJERCICIO 7. Sea  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  con el producto interno :  $\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^t)$ .

1. Hallar una base ortonormal de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

2. Sea  $\mathcal{D}$  el subespacio de las matrices diagonales, hallar  $\mathcal{D}^\perp$ .

3. Sea  $\mathcal{S}$  el subespacio de las matrices simétricas, hallar  $\mathcal{S}^\perp$ .

EJERCICIO 8. Sea  $V$  un espacio vectorial y  $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$  y  $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$  dos productos internos definidos en él que verifican:

$$\langle v, w \rangle_1 = 0 \Leftrightarrow \langle v, w \rangle_2 = 0 \quad \forall v, w \in V.$$

Dado  $S$  un subespacio vectorial de  $V$  llamamos  $W_1$  al complemento ortogonal de  $S$  con el producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$  y  $W_2$  al complemento ortogonal de  $S$  con el producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ .

1. Probar que  $W_1 = W_2$ .
2. Probar que si existe  $k \in \mathbb{R}$  tal que  $\langle v_i, v_i \rangle_2 = k \langle v_i, v_i \rangle_1 \quad \forall i = 1, \dots, n$ , donde  $\{v_1, \dots, v_r\}$  es una base ortogonal de  $S$  y  $\{v_{r+1}, \dots, v_n\}$  es una base ortogonal de  $W_1$ , entonces

$$\langle v, w \rangle_2 = k \langle v, w \rangle_1 \quad \forall v, w \in V$$

3. Observar que para que la primer parte se cumpla alcanzaría con que

$$\langle v, w \rangle_1 = 0 \Leftrightarrow \langle v, w \rangle_2 = 0 \quad \forall w \in S \quad \forall v \in V$$

4. Ejemplificar las condiciones anteriores y verificar los resultados.

EJERCICIO 9. 1. Sean  $V$  es un espacio vectorial con producto interno y  $S$  un subespacio vectorial de  $V$ . Si tomamos  $\{s_1, s_2, \dots, s_r\}$  una base ortonormal de  $S$  y  $\{s_1, s_2, \dots, s_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$  una base ortonormal de  $V$ , probar que  $\{v_{r+1}, \dots, v_n\}$  es una base ortonormal de  $S^\perp$ .

2. Se considera  $\mathbb{R}^3$  con el producto interno  $\langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + \alpha x_3y_3 + x_1y_3 + x_3y_1$  si  $\vec{X} = (x_1, x_2, x_3)$  y  $\vec{Y} = (y_1, y_2, y_3)$ .

Sean los vectores  $v_1 = (1, 1, 1)$ ,  $v_2 = (1, 0, -1)$  y  $v_3 = (0, 0, 1)$ .

- a) Hallar  $\alpha$  para que  $v_1$  y  $v_2$  sean ortogonales.

En las partes siguientes se trabajará con el producto interno dado por el  $\alpha$  hallado.

- b) Utilizar el método de Gram-Schmidt para hallar una base ortonormal de  $\mathbb{R}^3$  a partir de  $\{v_1, v_2, v_3\}$ .
- c) Hallar una base de  $S^\perp$ , si  $S = [(1, 1, 1)]$ .

EJERCICIO 10. Considerando el producto interno usual en  $\mathbb{R}^4$ , sea  $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  un operador lineal,  $U$  y  $V$  dos subespacios vectoriales no triviales de  $\mathbb{R}^4$  tales que

$$T|_U = Id, \quad T|_V = -Id, \quad N(T - 2Id) = (U + V)^\perp, \quad rg(T - 2Id) = 2.$$

1. Hallar una base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^4$  formada por vectores propios de  $T$ .
2. Probar que  $T$  es invertible.
3. Sea  $S : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  tal que  $S = T^3 + 4T^{-1} + 2Id$ . Probar que  $S$  es diagonalizable y calcular sus valores propios.
4. Si  $\langle u, v \rangle = 0, \forall u \in U$  y  $\forall v \in V$ , ¿es posible hallar una base ortonormal de  $\mathbb{R}^4$  formada por vectores propios de  $T$ ? Justificar.

## 2. Proyección ortogonal

EJERCICIO 11. Sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno,  $S \subset V$  un subespacio vectorial y  $P_S(v)$  la proyección ortogonal de  $v$  sobre  $S$ ; es decir  $P_S(v)$  es el único vector que verifica que  $P_S(v) \in S$  y  $v - P_S(v) \in S^\perp$ .

Probar que:

1.  $P_S(s) = s \quad \forall s \in S$ .
2.  $P_S(v) = \vec{0} \quad \forall v \in S^\perp$ .
3. La función  $P_S : V \rightarrow V$  dada por  $v \mapsto P_S(v)$  es una transformación lineal.

4. Hallar la matriz asociada de  $P_S$  en una base construída uniendo una base de  $S$  con una de  $S^\perp$ .
5. Hallar el núcleo y la imagen de  $P_S$ .
6. Hallar valores propios y subespacios propios de  $P_S$ , ¿Es  $P_S$  diagonalizable?
7.  $\|v\|^2 = \|P_S(v)\|^2 + \|P_{S^\perp}(v)\|^2 \quad \forall v \in V$ .
8.  $\|P_S(v)\| \leq \|v\|$ .
9.  $\langle v, P_S(v) \rangle = \|P_S(v)\|^2 \quad \forall v \in V$ .

EJERCICIO 12. En cada caso, dado el producto interno, el subespacio  $S$  y el vector  $v$ , hallar  $P_S(v)$ .

1. En  $\mathbb{R}^4$  con el producto interno habitual;  $S = [(1, -1, 1, 1), (2, 1, 0, 3)]$  y  $v = (1, 2, 3, 4)$ .
2. En  $\mathbb{R}^4$  con el producto interno habitual;  $S = [(1, -1, 1, 1), (2, 1, 0, 3)]$  y  $v = (x, y, z, t)$  cualquiera.
3. En  $\mathbb{R}^3$  con el producto interno dado por

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 4x_2y_2 + x_3y_3,$$

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y - z = 0\} \text{ y } v = (1, -1, 0).$$

4. En  $\mathbb{C}^3$  con el producto interno usual;  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 : x + (1+i)y - z = 0\}$  y  $v = (0, 1, i)$ .

EJERCICIO 13. En los siguientes casos consideramos los productos internos usuales.

1. Sea  $P_S : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la proyección ortogonal sobre el plano  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + z = 0\}$ . Hallar la matriz asociada a  $P_S$  en las bases canónicas de  $\mathbb{R}^3$ .
2. Hallar la matriz asociada en la base canónica de la proyección (en  $\mathbb{R}^2$ ), sobre la recta  $y = 3x$ .

EJERCICIO 14. Consideramos en  $\mathbb{R}_3[t]$  el producto interno dado por  $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(t)q(t) dt$ .

1. Hallar una base ortonormal del subespacio  $\mathbb{R}_2[t] \subset \mathbb{R}_3[t]$ .
2. Hallar la proyección ortogonal del polinomio  $p : p(t) = t^3$  sobre el subespacio  $\mathbb{R}_2[t]$ .
3. Sea  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$F(a, b, c) = \int_{-1}^1 (at^2 + bt + c - t^3)^2 dt$$

Hallar el mínimo de  $F$  en  $\mathbb{R}^3$ .

Nota: Resolverlo como un problema de proyección.

EJERCICIO 15. En el espacio  $C[-\pi, \pi]$  con el producto interno  $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt$ :

1. Aplicar el proceso de Gramm-Schmidt al conjunto  $\{1, \cos t, \sin t\}$ .
2. Sea  $S$  el subespacio de  $C[-\pi, \pi]$  generado por  $B$ . Hallar el elemento de  $S$  más próximo a la función  $f(t) = t$ .