Universidad de la República **Geometría y Álgebra Lineal 2**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Segundo Semestre 2021**

PRÁCTICO 11: Formas cuadráticas.

Ejercicio 1. Sea Q una forma cuadrática en $\mathbb{R}^n$ y A en $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ simétrica su matriz asociada. Recordemos que $A = PDP^t$ con D diagonal y P ortogonal y que

$$Q(x) = x^t A x = (P^t x)^t D (P^t x).$$

A. Probar que Q es definida positiva (negativa) $\Leftrightarrow$ todos los valores propios de A son positivos (negativos).

B. Probar que Q es semidefinida positiva (negativa) $\Leftrightarrow$ todos los valores propios de A son no negativos (no positivos) y existe algún valor propio nulo.

C. Probar que Q es indefinida $\Leftrightarrow$ existe algún valor propio de A negativo y existe algún valor propio de A positivo.

Ejercicio 2. Sea Q una forma cuadrática en $\mathbb{R}^2$ y A en $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ simétrica la matriz asociada.

A.
  a) Probar que Q es definida positiva $\Leftrightarrow \det(A) > 0$ y $tr(A) > 0$.
  b) Probar que Q es definida negativa $\Leftrightarrow \det(A) > 0$ y $tr(A) < 0$.
  c) Probar que Q es semidefinida positiva $\Leftrightarrow \det(A) = 0$ y $tr(A) \geq 0$.
  d) Probar que Q es semidefinida negativa $\Leftrightarrow \det(A) = 0$ y $tr(A) \leq 0$.
  e) Probar que Q es indefinida $\Leftrightarrow \det(A) < 0$

B. Clasificar las siguientes formas cuadráticas:
  a) $Q(x, y) = x^2 - xy + y^2$
  b) $Q(x, y) = \alpha x^2 - 2xy + y^2$ discutiendo según α en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 3. Para cada una de las siguientes matrices simétricas A,

A. Hallar una matriz <u>ortogonal</u> P tal que $P^t A P$ sea diagonal.

B. Clasificar la forma cuadrática cuya matriz asociada es A.

  (i) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

  (ii) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

  (iii) $A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$

  (iv) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Ejercicio 4. Clasificar las siguientes formas cuadráticas

A. $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $Q(x, y, z) = 6x^2 + 5y^2 + 7z^2 - 4xy + 4xz$.

B. $Q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ tal que $Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = 7x_1^2 + 10x_2^2 + 7x_3^2 + x_4^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3$.

EJERCICIO 5. Clasificar la forma cuadrática $Q : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}$ tal que su matriz simétrica asociada es

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 9 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 6 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 6 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 7 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 2 & 9 \end{pmatrix}.$$

Sugerencia: Aplicar el Teorema de Gershgorin.

EJERCICIO 6. Sea Q es una forma cuadrática en $\mathbb{R}^n$ cuya matriz asociada es A.

A. Probar que si Q es no indefinida entonces $S = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ Q(x) = 0\} = \ker(A)$.

B. Probar con un ejemplo que el resultado anterior es falso para Q indefinida.

C. Hallar el signo del polinomio p donde

$$p(x, y, z) = 5x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4yz.$$