Examen Febrero 2015

(I) Verdadero o falso. Total: 36 puntos

Puntajes: 4 puntos si la respuesta es correcta, -4 puntos si la respuesta es incorrecta, 0 punto por no contestar.

1. Existen sistemas lineales de ecuaciones con más ecuaciones que incógnitas que son incompatibles.
2. Si $\{u, v, w\} \subset \mathbb{R}^n$ es linealmente independiente entonces también lo es $\{5u - v, 3w, w - v\}$.
3. Sea $T : \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(ax^2 + bx + c) = (2a, b, 1)$. Entonces T es lineal.
4. Existe $T : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{M}_{2\times 2}$ sobreyectiva.
5. Los planos de ecuaciones $x + z = 1$ e $y + z = 1$ son perpendiculares.
6. Sean $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}$. Si A y AB son invertibles entonces B también es invertible.
7. Sea $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} d & e & 3f \\ 2a & 2b & 6c \\ g & h & 3i \end{pmatrix}$. Si $det(A) = 5$ entonces $det(B) = 30$.
8. Hay transformaciones lineales de $\mathcal{P}_3$ en $\mathcal{M}_{2\times 2}$ que son inyectivas y otras que no lo son.
9. Sean V y W dos espacios vectoriales reales de dimensión finita, B una base de V y B' una base de W. Si $T : V \to W$ es una transfomación lineal invertible, entonces la matriz asociada a T en las bases B y B' es necesariamente una matriz invertible.

VERDADERO O FALSO   EXAMEN ENERO 2015

1. Consideremos el sistema: $\begin{cases} x+y=0 \\ x+y=1 \\ x=-1 \end{cases}$ tiene 2 incógnitas y 3 ecuaciones.

Si consideramos la matriz del sistema y escalerizamos obtenemos:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \text{El sistema es incompatible}$$

$\Rightarrow$ 1 es VERDADERO

2. Si $\{u, v, w\}$ es LI $\Rightarrow \lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = \vec{0}$ con $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

$\{5u - v, 3w, w - v\}$ es LI $\Leftrightarrow \alpha(5u - v) + \beta(3w) + \gamma(w - v) = \vec{0}$ con $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Reordenando:

$$(5\alpha)u + (-\alpha - \gamma)v + (3\beta + \gamma)w = \vec{0}$$

Pero por parte anterior, $\{u, v, w\}$ es LI

$$\Rightarrow \begin{cases} 5\alpha = 0 \\ -\alpha - \gamma = 0 \\ 3\beta + \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{array} \Rightarrow \text{El conjunto dado es LI}$$

$\Rightarrow$ 2 es VERDADERO

3. $T: \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^3 \mid T(ax^2 + bx + c) = (2a, b, 1)$

Prop: Si T es lineal $\Rightarrow T(\vec{0}) = \vec{0}$

$$T(0x^2 + 0x + 0) = (0, 0, 1)$$

$$T(\vec{0}) \neq \vec{0} \Rightarrow \text{T no es lineal}$$

$\Rightarrow$ 3 es FALSO

④ Existe $T: \mathbb{R}^3 \to M_{2x2}$ sobreyectiva.

Si T es sobreyectiva $\Rightarrow$ $\dim Im(T) = \dim M_{2x2}$

$\dim Im(T) = 4$

Pero por teorema de las dimensiones:

$$\underbrace{\dim \mathbb{R}^3}_{=3} = \dim N(T) + \dim Im(T)$$

$\Rightarrow \dim Im(T) \leq 3$

$\Rightarrow$ No existe ninguna t.l. sobreyectiva. $\Rightarrow$ ④ es FALSO

⑤ $\pi)\ x+z=1$

$\pi')\ y+z=1$

Son perpendiculares?

$\pi \perp \pi' \Leftrightarrow \langle (1,0,1), (0,1,1) \rangle = 0$

normal a π — normal a π'

pero $\langle (1,0,1),(0,1,1) \rangle = 1$

$1 \neq 0$

$\Rightarrow$ No son perpendiculares

$\Rightarrow$ ⑤ es FALSO

⑥ $A, B \in M_{nxn}$ Si A y AB son invertibles $\Rightarrow$ B es invertible

Como AB es invertible $\Rightarrow |AB| \neq 0$

Por teorema, $|AB| = \underbrace{|A|}_{\neq 0} . |B| \neq 0$

$\Rightarrow |B| \neq 0$

$\Rightarrow$ B es invertible

$\Rightarrow$ ⑥ es VERDADERO

7) $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ $\det(A) = 5$

$B = \begin{pmatrix} d & e & 3f \\ 2a & 2b & 6c \\ g & h & 3i \end{pmatrix}$ $\det(B) = 30$?

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} d & e & 3f \\ 2a & 2b & 6c \\ g & h & 3i \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{intercambio} \\ \text{filas } 1 \text{ y } 2}}{=} - \begin{vmatrix} 2a & 2b & 6c \\ d & e & 3f \\ g & h & 3i \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{sale de la} \\ \text{primera fila}}}{=} - \overset{\substack{\text{sale de la} \\ \text{tercera columna}}}{2 \cdot 3} \underbrace{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}_{\substack{= 5 \\ \text{(por letra)}}} = -30$$

$\Rightarrow \det B = -30$

$\Rightarrow$ 7) es FALSO

8) $T: \mathcal{P}_3 \to \mathcal{M}_{2\times2}$ inyectivas y otras que no.

Si T es inyectiva $\Rightarrow \dim N(T) = 0$

Por teorema de las dimensiones: $\dim \mathcal{P}_3 = \dim N(T) + \dim Im(T)$

$4 = \dim N(T) + \dim Im(T)$

Como $\underset{\substack{\| \\ \text{codominio}}}{\dim \mathcal{M}_{2\times2}} = 4$ $\Rightarrow$ Pueden existir t.l. inyectivas (y en ese caso $\dim Im(T) = 4$) pero no necesariamente todas deben serlo.

$\Rightarrow$ 8) es VERDADERO

9) V, W dos ev de dim finita. $B \xrightarrow{b} V$, $B' \xrightarrow{b} W$.

Si $T: V \to W$ es una t.l. invertible $\Rightarrow$ ${}_{B'}(T)_B$ es invertible

Es una propiedad (del teórico)

$\Rightarrow$ 9) es VERDADERO

(II) Múltiple opción. Total: 64 puntos

Puntajes: 8 puntos si la respuesta es correcta, -4 puntos si la respuesta es incorrecta, 0 punto por no contestar.

1. Considere un espacio vectorial V con base $\{v_1, v_2, v_3\}$, y la transformación lineal $T : V \to V$ definida por:

$$T(v_1) = v_1 + v_2 - v_3\ ,\ T(v_2 + v_3) = -v_1 + 5v_2\ ,\ T(v_3) = v_1 + 2v_2 + 3v_3.$$

Entonces:

A) $dim(N(T)) = 2$.

B) $dim(N(T)) = 1$.

C) $dim(N(T)) = 0$.

2. Considere los siguientes subespacios, S_1 y S_2, de $\mathcal{P}_2$:

$$S_1 = [x^2 + 1, 2x - 2, 3x^2 + x + 2]\ ,\ S_2 = [2x^2 + x, 1].$$

Indique la opción correcta:

A) $S_1 \cap S_2 = \{0\}$.

B) $S_1 \cap S_2 = [2x^2 + x + 1]$.

C) $S_1 \cap S_2 = [x^2 + 2x - 1]$.

3. Una matriz cuadrada A se dice cortogonal si $A^t.A = \mathbb{I}$. Considere dos matrices cuadradas, A y B, del mismo tamaño, y considere las siguientes afirmaciones:

I) Si A y B son ortogonales entonces $A + B$ es ortogonal.

II) Si A y B son ortogonales entonces AB es ortogonal.

III) Si A y AB son ortogonales entonces B es ortogonal.

Entonces:

A) Sólo las afirmaciones I y II son correctas.

B) Sólo las afirmaciones II y III son correctas.

C) Sólo la afirmación III es correcta.

4. Considere $\mathbb{R}^4$ y los subespacios

$$T = [(0, 0, 1, 1), (1, 2, 2, 1)]\ \text{ y }\ S = [(1, 1, 0, 1), (2, 3, 1, 1)].$$

Entonces:

A) $S \oplus T = \mathbb{R}^4$.

B) $dim(S + T) = 2$.

C) $dim(S + T) = 3$.

EJERCICIO 1 — **EXAMEN ENERO 2015**

Sea V un ev. $\{v_1, v_2, v_3\} \xrightarrow{b} V$. $T: V \longrightarrow V$.

$T(v_1) = v_1 + v_2 - v_3$

$T(v_2 + v_3) = -v_1 + 5v_2$ — $\dim N(T) = ?$

$T(v_3) = v_1 + 2v_2 + 3v_3$

PRIMER FORMA DE RESOLVERLO:

- $v \in N(T) \iff \underbrace{T(v)}_{?} = \vec{0}$ $\Rightarrow$ Como no sé $T(v)$ tengo dos opciones
  - $\rightarrow$ Saco expresión general de $T(v)$ y hallo $N(T)$
  - $\rightarrow$ Uso teoremas

2da opción

> Teorema: $\dim N(T) = \dim N(_B(T)_B)$.
>
> Y además $v \in N(_B(T)_B) \iff {}_B(T)_B \cdot v = \vec{0}$.

Sea $B = \{v_1, v_2, v_3\} \xrightarrow{b} V$. Vamos a hallar $_B(T)_B$.

$$_B(T)_B = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \text{coord}_B T(v_1) & \text{coord}_B T(v_2) & \text{coord}_B T(v_3) \\ | & | & | \end{pmatrix}.$$ (por def de matriz asociada).

La letra nos da $T(v_1)$ y $T(v_3)$ pero falta $T(v_2)$ para formar la $_B(T)_B$.

Como T es lineal: $T(v_2 + v_3) = T(v_2) + T(v_3)$
(por letra)

$T(v_2) = -v_1 + 5v_2 - (v_1 + 2v_2 + 3v_3)$

$\Rightarrow T(v_2) = -2v_1 + 3v_2 - 3v_3$

Entonces:

$$_B(T)_B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Vamos a hallar el núcleo de esa matriz y por el teorema anterior, su dimensión será la dimensión del $N(T)$.

Hallo $N({}_B(T)_B)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{array}\right)$$

Sistema compatible determinado

$\Rightarrow \dim N({}_B(T)_B) = 0 \quad \Rightarrow \dim N(T) = 0$

$\Rightarrow$ OPCIÓN CORRECTA C

SEGUNDA FORMA DE RESOLVERLO:

Por teorema de las dimensiones: $\dim V = \dim N(T) + \dim Im(T)$

$\dim V = 3$ (por letra).

Si hallo $\dim Im(T) \Rightarrow$ saco $\dim N(T)$.

Las columnas de una matriz asociada a T generan a la $Im(T)$.

Como $\{v_1, v_2, v_3\} \xrightarrow{b} V \Rightarrow A = \{v_1, v_2+v_3, v_3\} \xrightarrow{b} V$ (verificar).

Entonces una matriz asociada a T es:

$$_A(T)_A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ -2 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

$coord_A T(v_1) = (1,1,-2)$

$coord_A T(v_2+v_3) = (-1,5,-5)$

$coord_A T(v_3) = (1,2,1)$

$\Rightarrow \{(1,1,-2),(-1,5,-5),(1,2,1)\}$ es un generador de $Im(T)$.

Si ese conjunto es LI $\Rightarrow$ es una base de $Im(T)$.

$\alpha(1,1,-2) + \beta(-1,5,-5) + \gamma(1,2,1) = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 2 & 0 \\ -2 & -5 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 19 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{array}}$$

El conjunto es LI $\Rightarrow$ es una base de $Im(T)$

$\Rightarrow \dim Im(T) = 3 \quad \Rightarrow \dim N(T) = 0$

(por teo dim)

EJERCICIO 2 EXAMEN ENERO 2015

$V = \mathcal{P}_2$

$S_1 \cap S_2 = ?$

$S_1 = [x^2+1,\ 2x+2,\ 3x^2+x+2]$

$S_2 = [2x^2+x,\ 1]$

Por teorema, sabemos que si $V = S_1 \oplus S_2$ $(\dim S_1 \cap S_2 = \vec{o})$ $\Rightarrow$ la unión de las bases es base de V

Pero si unimos las bases de S_1 y S_2 obtenemos una base de dimensión 5 (y $\dim V = 3$)

$\Rightarrow$ La suma no es directa $\Rightarrow \dim S_1 \cap S_2 \neq \{\vec{o}\}$

DESCARTO A

Si observamos la opción C:

$S_1 \cap S_2 = [x^2+2x+1]$. Si x^2+2x+1 perteneciera a $S_1 \cap S_2$ entonces debe pertenecer a S_1 y S_2 simultáneamente.

Entonces x^2+2x+1 se podría escribir como c.l. de la base de S_2:

$$x^2+2x+1 = \alpha(2x^2+x) + \beta(1)$$

Reordeno: $$x^2+2x+1 = (2\alpha)x^2 + (\alpha)x + \beta$$

$$\begin{cases} 2\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 1/2 \\ \alpha = 2 \\ \beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{SISTEMA INCOMPATIBLE}$$

$\Rightarrow x^2+2x+1$ no pertenece a $S_2 \Rightarrow x^2+2x+1$ no pertenece a $S_1 \cap S_2$

$\Rightarrow$ DESCARTO C

$\Rightarrow$ OPCIÓN CORRECTA B

EJERCICIO 3 — EXAMEN ENERO 2015

Una matriz cuadrada A se dice ortogonal si $A^t . A = I$ (matriz identidad)

Sean A, B dos matrices cuadradas del mismo tamaño.
($A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}$).

Entonces:

I) Si A y B ortogonales $\Rightarrow$ $A+B$ ortogonal

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ortogonal, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ortogonal $\Big\}$ $A+B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ no es ortogonal.

pues $A+B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$(A+B)^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \neq I$

$\Rightarrow$ I) es FALSO.

II) Si A y B ortogonales $\Rightarrow$ AB ortogonal

AB es ortogonal $\Leftrightarrow (AB)^t (AB) = I \Leftrightarrow \underbrace{B^t A^t}_{\text{por prop traspuesta}} (AB) = I$

$\underbrace{A^t A}_{I}$ (pues A es ortogonal)

$\Leftrightarrow \underbrace{B^t B}_{I} = I$ (pues B es ortogonal)

$\Rightarrow$ II) es VERDADERO

III) Si A y AB ortogonales $\Rightarrow$ B es ortogonal

Se prueba igual a II) (seguir los $\Leftrightarrow$ a la izquierda en II)).

$\Rightarrow$ III) es VERDADERO

$\Rightarrow$ OPCIÓN CORRECTA (B)

EJERCICIO 4 EXAMEN ENERO 2015

$V = \mathbb{R}^4$

$T = [(0,0,1,1),(1,2,2,1)]$

$S = [(1,1,0,1),(2,3,1,1)]$

El conjunto $\{(0,0,1,1),(1,2,2,1)\}$ es una base de T → (pues no son colineales los vectores)
y el conjunto $\{(1,1,0,1)(2,3,1,1)\}$ es una base de S

Por lo tanto el conjunto

$\{(0,0,1,1),(1,2,2,1)(1,1,0,1)(2,3,1,1)\}$ es un generador de $S+T$

Ahora quiero ver si ese conjunto es o no LI para determinar si es una base de $S+T$:

$$\lambda_1(0,0,1,1)+\lambda_2(1,2,2,1)+\lambda_3(1,1,0,1)+\lambda_4(2,3,1,1)=(0,0,0,0).$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2+\lambda_3+2\lambda_4=0 \\ 2\lambda_2+\lambda_3+3\lambda_4=0 \\ \lambda_1+2\lambda_2+\lambda_4=0 \\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=0 \end{cases} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&1&1&0 \\ 1&2&0&1&0 \\ 0&1&1&2&0 \\ 0&2&1&3&0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&1&1&0 \\ 0&1&-1&0&0 \\ 0&1&1&2&0 \\ 0&2&1&3&0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&1&1&0 \\ 0&1&-1&0&0 \\ 0&0&2&2&0 \\ 0&0&3&3&0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&1&1&0 \\ 0&1&-1&0&0 \\ 0&0&2&2&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{array}\right) \Rightarrow \boxed{\lambda_4=-\lambda_3}$$

$\lambda_2-\lambda_3=0 \Rightarrow \boxed{\lambda_2=\lambda_3}$

$\lambda_1+\lambda_3+\lambda_3-\lambda_3=0 \Rightarrow \boxed{\lambda_1=-\lambda_3}$

⇒ El conjunto no es una base pues el tercer vector es c.l. de los otros.

$\Rightarrow \{(0,0,1,1)(1,2,2,1)(2,3,1,1)\} \xrightarrow{b} S+T$ $\Rightarrow \dim S+T=3$

⇒ OPCIÓN CORRECTA C

5. Considere $T_i : \mathcal{P}_3 \to \mathbb{R}^3$, $i = 1, 2$, dos transformaciones lineales definidas por: $T_1(p) = (p(0), p(1), 0)$ y $T_2(p) = (p(0), p(1), p(-1))$, para cada $p \in \mathcal{P}_3$.

   Indique la opción correcta:

   A) $N(T_2) = [x^3 - x]$ y $dim(Im(T_1)) = 3$.

   B) $N(T_2) = [x^3 - x]$, $N(T_1) = [x^3 - x, x^2 - x]$ y $Im(T_1) \subset Im(T_2)$.

   C) $N(T_1) = [x^3 - x, x^2 - x]$ y $dim(N(T_2)) = 2$.

6. Considere la recta $r) \begin{cases} y - az = 2 \\ ax + z = 1 \end{cases}$, donde $a \in \mathbb{R}$, y el plano $\pi) \begin{cases} x = 2 + 2\mu - \lambda \\ y = -1 + \mu \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$

   Indique la opción correcta:

   A) r es perpendicular a π exactamente para un valor de a.

   B) r es perpendicular a π exactamente para dos valores de a.

   C) r no es perpendicular a π para ningún valor de a.

7. Sea V es un espacio vectorial de dimensión finita y $T : V \to V$ una transformación lineal que satisface $T \circ T = \mathbb{I}$. Considere las siguientes afirmaciones:

   I) T es biyectiva.

   II) $N(T + \mathbb{I}) \oplus N(T - \mathbb{I}) = V$.

   III) $det(T) = 1$.

   Entonces:

   A) Sólo las afirmaciones I y II son correctas.

   B) Sólo la afirmación I es correcta.

   C) Todas las afirmaciones son correctas.

8. Sean $B = \{1, 1+x, 1+x^2\}$ y $B' = \{(1,0,0), (1,2,0), (1,2,3)\}$ bases de $\mathcal{P}_2$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente. Considere la transformación lineal $T : \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada en las bases B y B' es

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Entonces:

   A) $T(2 + x - x^2) = (-2, 2, 1)$.

   B) $T(2 + x - x^2) = (0, 2, 2)$.

   C) $T(2 + x - x^2) = (0, 2, -3)$.

EJERCICIO 5 EXAMEN ENERO 2015

$T_1: \mathcal{P}_3 \to \mathbb{R}^3 \quad / \quad T_1(p) = (p(0), p(1), 0)$

$T_2: \mathcal{P}_3 \to \mathbb{R}^3 \quad / \quad T_2(p) = (p(0), p(1), p(-1))$

$$\left.\begin{array}{l} p(x) = ax^3+bx^2+cx+d \\ p(0) = d \\ p(1) = a+b+c+d \\ p(-1) = -a+b-c+d \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} T_1(p) = (d,\ a+b+c+d,\ 0) \quad (*) \\ T_2(p) = (d,\ a+b+c+d,\ -a+b-c+d) \end{array}$$

Vamos a hallar $N(T_2)$.

$p \in N(T_2) \iff T_2(p) = (0,0,0) \iff (d,\ a+b+c+d,\ -a+b-c+d) = (0,0,0)$

$$\iff \begin{cases} d = 0 \\ a+b+c+d = 0 \Rightarrow a = -b-c \\ -a+b-c+d = 0 \Rightarrow b+\cancel{c}+b-\cancel{c} = 0 \Rightarrow b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} a = -c \\ b = 0 \\ c \in \mathbb{R} \\ d = 0 \end{array}$$

$\Rightarrow N(T_2) = [-cx^3+cx] = [-x^3+x]$ $\Rightarrow$ DESCARTO (C) pues $\dim N(T_2) = 1$

Si observamos $T_1(p)$ vemos que es igual a $T_2(p)$ excepto en la última entrada (*). Pero $Im(T_1) \subset Im(T_2)$ pues se puede formar la $Im(T_1)$ a partir de la $Im(T_2)$ tomando $-a+b-c+d = 0$.

Si no, hallamos $N(T_1)$ (igual que como hicimos para $N(T_2)$) y vemos que $N(T_1) = [x^3-x,\ x^2-x]$

$\Rightarrow$ OPCIÓN CORRECTA (B)

EJERCICIO 6 EXAMEN ENERO 20

$r) \begin{cases} y - az = 2 \\ ax + z = 1 \end{cases} \quad a \in \mathbb{R}$ $\qquad \pi) \begin{cases} x = 2 + 2\mu - \lambda \\ y = -1 + \mu \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$

Consideramos v un vector director de r y u, w los vectores directores de π. Entonces:

$$\boxed{r \perp \pi \iff \langle v, u \rangle = 0 \text{ y } \langle v, w \rangle = 0} \quad \text{(simultáneamente)}$$

Vamos a hallar un vector director de r, para eso pasamos la ecuación reducida de r a paramétrica:

$z = t$

$y = 2 + at$

$x = \frac{1-t}{a}$

$\Rightarrow r): \begin{cases} x = 1/a - 1/a\, t \\ y = 2 + at \\ z = t \end{cases} \Rightarrow$ vector director de r: $v = (-1/a, a, 1)$

A partir de la ecuación dada del plano π sacamos que $u = (2, 1, 0)$ y $w = (-1, 0, 1)$. Ahora hacemos el producto interno:

$\langle u, v \rangle = \langle (2,1,0), (-1/a, a, 1) \rangle = 0$

$-2/a + a = 0 \iff a = \frac{2}{a} \iff a^2 = 2 \iff \boxed{\begin{matrix} a = \sqrt{2} \\ a = -\sqrt{2} \end{matrix}}$

$\neq$

$\langle w, v \rangle = \langle (-1,0,1), (-1/a, a, 1) \rangle = 0$

$1/a + 1 = 0 \iff \frac{1}{a} = -1 \iff 1 = -a \iff \boxed{a = -1}$

$\Rightarrow$ No hay ningún valor de a que verifique las dos condiciones a la vez. Por lo tanto, r no es perpendicular a π para ningún valor de a.

$\Rightarrow$ OPCIÓN CORRECTA (C)

EJERCICIO 7 EXAMEN, ENERO 2015

Sea V un ev de dim finita. $T: V \to V$ una t.l / $T \circ T = Id$ ↳ iden

I) T es biyectiva

II) $N(T+Id) \oplus N(T-Id) = V$

III) $det(T) = 1$

I) Sean las matrices A y B dos matrices asociadas a T.

Como $T \circ T = Id \Rightarrow A \cdot B = Id \Rightarrow T$ es invertible

pues la matriz asociada a la composición es el producto de las matrices asociadas

por def T invertible

$\Downarrow$

T es biyectiva

$\Rightarrow$ I) es verdadero.

II) Vamos a usar el teorema: $\boxed{V_1 \cap V_2 = \{\vec{0}\} \Leftrightarrow V = V_1 \oplus V_2}$

• $v_1 \in N(T+Id) \Leftrightarrow (T+Id)(v_1) = \vec{0} \Leftrightarrow T(v_1) + Id(v_1) = \vec{0} \Leftrightarrow T(v_1) + v_1 = \vec{0}$

por def núcleo

por suma de t.l.

es la transformación identidad

$\Updownarrow$

$T(v_1) = -v_1$.

• $v_2 \in N(T-Id) \Leftrightarrow (T-Id)(v_2) = \vec{0} \Leftrightarrow T(v_2) - Id(v_2) = \vec{0} \Leftrightarrow T(v_2) - v_2 = \vec{0}$

$\Updownarrow$

$T(v_2) = v_2$.

Ahora vemos que $w \in N(T+Id) \cap N(T-Id)$

$\Leftrightarrow w \in N(T+Id)$ y $w \in N(T-Id)$ simultáneamente

pues $w \in N(T+Id)$

$\Leftrightarrow T(w) = -w$ y $T(w) = w$ $\Leftrightarrow w = 0 \Rightarrow N(T+Id) \cap N(T-Id) = \vec{0}$

pues $w \in N(T-Id)$

$\Rightarrow \boxed{V = N(T+Id) \oplus N(T-Id)}$

$\Rightarrow$ II) es VERDADERO

III $\det(T) = 1 \Leftrightarrow$ Cualquier matriz asociada a T tiene determinante 1.

Sea A una matriz asociada a T

Como $T \circ T = Id \Rightarrow A^2 = Id \longrightarrow$ MATRIZ INVOLUTIVA

Son las matrices que cumplen que $A^2 = Id$.

El determinante de una matriz involutiva es siempre 1 o -1.

$\Rightarrow$ No necesariamente todas las matrices asociadas a T tienen determinante 1 (algunas pueden tener determinante -1)

$\Rightarrow$ III es FALSO.

Un contraejemplo:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ es una matriz involutiva ($A^2 = Id$) y $\det(A) = -1$

EJERCICIO 8

EXAMEN ENERO 2015

$T: \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^3$

$B = \{1,\ 1+x,\ 1+x^2\} \xrightarrow{b} \mathcal{P}_2$

$B' = \{(1,0,0)\ (1,2,0)\ (1,2,3)\} \xrightarrow{b} \mathbb{R}^3$

$${}_{B'}(T)_B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Hallar $T(2+x-x^2)$

Uso teorema:

$$\boxed{{}_{B'}(T)_B \ \mathrm{coord}_B v = \mathrm{coord}_{B'} T(v)}$$

$v = (2+x-x^2)$

$\mathrm{coord}_B(2+x-x^2) = \alpha(1) + \beta(1+x) + \gamma(1+x^2)$

$2+x-x^2 = (\ \gamma\ )x^2 + (\ \beta\ )x + \alpha+\beta+\gamma$

$\Rightarrow \gamma = -1$

$\beta = 1$

$\alpha+\beta+\gamma = 2 \Rightarrow \alpha = 2$

$\Rightarrow \mathrm{coord}_B v = (2,1,-1)$

Ahora multiplico la matriz asociada por $\mathrm{coord}_B v$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{{}_{B'}(T)_B} \overbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}^{\mathrm{coord}_B v} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\mathrm{coord}_{B'} T(v)}$$

$\Rightarrow \mathrm{coord}_{B'} T(v) = (-1, 2, -1)$

$\Rightarrow T(2+x-x^2) = (-1)(1,0,0) + (2)(1,2,0) + (-1)(1,2,3)$

$T(2+x-x^2) = (0,2,-3)$

$\Rightarrow$ OPCIÓN CORRECTA C