Universidad de la República **Matemática Discreta 2**
Facultad de Ingeniería **Curso 2021**
Instituto de Matemática y Estadística

PRÁCTICO 8: Teoría de Grupos - Teorema de Lagrange, órdenes, homomorfismos.

Ejercicio 1. Dados dos grupos $(G, \times, e_G)$ y $(K, *, e_K)$ se define la siguiente operación en el *producto cartesiano* $G \times K$: $(g, k)(g', k') = (g \times g', k * k')$ para todo $g, g' \in G$ y para todo $k, k' \in K$ (operaciones coordenada a coordenada). Probar que $G \times K$ con esta operación es un grupo.

Ejercicio 2. Sea $(G, \cdot)$ un grupo, $H \leq G$ y $a, b \in G$. Se define la congruencia (a derecha) módulo H como $a \equiv b \pmod{H} \Leftrightarrow ab^{-1} \in H$.

i) Probar que la congruencia módulo H define una relación de equivalencia.

ii) Probar que la clase de equivalencia de a es $Ha = \{ha : h \in H\}$.

iii) Probar el **Teorema de Lagrange**: si G es finito y $H \leq G$ entonces $|H|$ divide a $|G|$.

Ejercicio 3.

a. Sean $G = \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ el grupo multiplicativo de las matrices invertibles 2×2 con coeficientes en $\mathbb{R}$, $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ y $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Probar que $o(A) = 4$, B orden $o(B) = 3$ y que AB tiene orden infinito.

b. Hallar elementos $a, b \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$ de orden infinito tales que $a + b$ tiene orden finito (suma coordenada a coordenada).

Ejercicio 4. Escriba la tabla de multiplicación de $U(18)$. Hallar los órdenes de los elementos de $U(18)$. ¿Es $U(18)$ cíclico?

Ejercicio 5. Sea G un grupo, $g \in G$ y $n > 1$.

i) Probar que si $g^n = e_G$ y $g^{n/p} \neq e_G$ para todo primo $p \mid n$ entonces $o(g) = n$.

ii) Hallar el orden de $\overline{11}$ en $U(257)$ (obs. 257 es primo).

Ejercicio 6. Sea G un grupo. Probar que $o(xy) = o(yx)$, $\forall\, x, y \in G$.

Ejercicio 7. Sean H y K subgrupos de un grupo G y e la unidad de G.

a. Probar que si $|H|$ y $|K|$ son coprimos entonces $H \cap K = \{e\}$.

b. Hallar los posibles valores de $|H|$ si $K \subsetneq H \subsetneq G$, $|G| = 660$ y $|K| = 66$.

Ejercicio 8. Sea G un grupo. Probar las siguientes afirmaciones.

a. Si G es cíclico todo subgrupo de G también es cíclico.

b. Si G no tiene subgrupos no triviales entonces G es cíclico, finito y $|G|$ es primo.

Ejercicio 9. Verificar si las siguientes funciones son o no morfismos de grupo.

a. La función traza $tr : (M_{n\times n}(\mathbb{R}), +) \to (\mathbb{R}, +)$

b. La función $f:(M_{n\times n}(\mathbb{R}),+)\to(\mathbb{R},+)$ dada por $f(A)=tr(A^2)$.

c. La función determinante $det:(\mathsf{GL}_n(\mathbb{R}),\cdot)\to(\mathbb{R}^*,\cdot)$ (recordar que $\mathsf{GL}_n(\mathbb{R})$ es el conjunto de matrices invertibles $n\times n$ con coeficientes en $\mathbb{R}$).

d. La función $f:(\mathsf{GL}_n(\mathbb{R}),\cdot)\to(\mathbb{R}^*,\cdot)$ dada por $f(A)=det(A^2)$.

e. La función $f:(\mathbb{R}^*,\cdot)\to(\mathsf{GL}_n(\mathbb{R}),\cdot)$ dada por $f(\lambda)=\lambda A$ donde $A\in\mathsf{GL}_n(\mathbb{R})$ es una matriz dada (en caso de no serlo siempre, hallar condiciones sobre A para que f sea morfismo).

f. La función trasponer $T:(M_{n\times n}(\mathbb{R}),+)\to(M_{n\times n}(\mathbb{R}),+)$ dada por $T(A)=A^t$.

g. La función trasponer $T:(\mathsf{GL}_n(\mathbb{R}),\cdot)\to(\mathsf{GL}_n(\mathbb{R}),\cdot)$ dada por $T(A)=A^t$.

h. La función $f:(\mathbb{R}^3,+)\to(\mathbb{R}^*,\cdot)$ dada por $f(x,y,z)=e^{x-2y+z}$ (sug. pensarlo como composición de dos morfismos).

Ejercicio 10. Sea $\varphi:G_1\to G_2$ un morfismo de grupos finitos.

a. Sea $g\in G_1$, probar que $o(\varphi(g))$ divide a $\mathrm{mcd}(|G_1|,|\mathsf{Im}(\varphi)|)$.

b. Probar que si $|G_1|$ y $|G_2|$ son coprimos, entonces φ es trivial.

c. Si φ es un isomorfismo de grupos y $g\in G_1$. Probar que el orden de g en G_1 es igual al orden de $\varphi(g)$ en G_2.

d. Probar que $\mathbb{Z}_4$ y $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ no son isomorfos.

e. Hallar todos los homomorfismos $\phi:\mathbb{Z}_2\to U(8)$.

f. Hallar p sabiendo que p es primo, y existe un homomorfismo no trivial $\phi:\mathbb{Z}_{51}\to\mathbb{Z}_p$ tal que $\phi(\overline{17})=\overline{0}$.

Ejercicio 11. En cada caso verificar si los siguientes grupos son isomorfos o no; en caso que lo sean, encontrar un isomorfismo entre ellos.

a. Los grupos $(\mathbb{Z}_4,+)$ y $(U_{10},\cdot)$.

b. Los grupos D_3 y S_3 (ambos con la composición).

Ejercicio 12. Sea G un grupo con 4 elementos.

a. Probar que G es abeliano.

b. Probar que o bien $G\simeq\mathbb{Z}_4$ o bien $G\simeq\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$.

Ejercicio 13. En cada parte, ver si existe un morfismo no trivial (es decir, que no mande todos los elementos al neutro) entre los siguientes pares de grupos $G\to K$. En caso de que existan construir dicho morfismo, y si no existe explicar por qué.

a. $G=\mathbb{Z}_7$ con la suma y $K=S_6$ con la composición.

b. $G=\mathbb{Z}_8$, $K=U(24)$. Sugerencia: construir la tabla de Cayley de K y hallar el orden de todos sus elementos.

c. $G=U(9)$, $K=\mathbb{Z}_{12}$. Sugerencia: G es cíclico.

d. $G=U(15)$, $K=\mathbb{Z}_6$. Sugerencia: construir la tabla de Cayley de G y hallar el orden de todos sus elementos.