Matemática Discreta I - 2020 - $2^{\text{do}}$ semestre

# Práctico 7: Relaciones ($1^{\text{ra}}$ Parte).

Ref. Grimaldi 5.1, 7.1 y 7.2

*Aclaración:* En todos los ejercicios $R^{-1}$ denota la relación inversa, i.e. $R^{-1} = \{(x,y) : (y,x) \in R\}$, $\overline{R}$ la relación complementaria, i.e., $\overline{R} = \{(x,y) : (x,y) \notin R\}$ y $RS$ el producto de las relaciones $R$ y $S$ (denotado como $R \circ S$ en el libro de Grimaldi), i.e. $RS = \{(x,z) : \exists y, (x,y) \in R \text{ y } (y,z) \in S\}$.

**Ejercicio 1** Determine si las siguientes relaciones son reflexivas, *irreflexivas* ($\forall x, (x,x) \notin R$), simétricas, antisimétricas, *asimétricas* ($(x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \notin R$) o transitivas en $A = \{1,2,3,4\}$:

**a**. $R = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (3,4), (4,3), (4,4)\}$.

**b**. $R = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4)\}$.

**c**. $R = \{(1,3), (1,1), (3,1), (1,2), (3,3), (4,4)\}$.

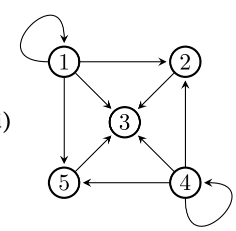
**d**. $R = \emptyset$.

**e**. $R = A \times A$.

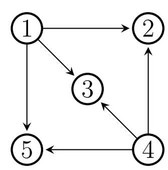
**f**. Las relaciones cuyas matrices son i) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, ii) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

**g**. Para $A = \{1,2,3,4,5\}$ y las relaciones dadas por los grafos dirigidos siguientes

**i)**



**ii)**



**Ejercicio 2** Considere el conjunto de propiedades $P = \{\text{reflexiva, simétrica, transitiva}\}$. Para cada subconjunto $T$ de $P$, encuentre una relación que cumpla las propiedades de $T$ y no cumpla las de $P \setminus T$.

**Ejercicio 3** Sean $R$ y $S$ relaciones en un conjunto $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$.

**a**. Elabore un criterio para decidir si $R$ es o no *simétrica* basándose en la matriz de $R$.

**b**. Si $R$ y $S$ son *simétricas*: ¿lo serán también $\overline{R}$, $R^{-1}$, $RS$, $R \cup S$, $R \cap S$?

**c**. Ídem a los casos anteriores sustituyendo *simétrica* por *reflexivas, irreflexivas, antisimétricas, asimétricas y transitivas.*

**Ejercicio 4** (Parcial 2000) Halle el número de relaciones $R$ en el conjunto $A = \{a, b, c, d\}$ que verifican simultáneamente las tres condiciones siguientes: $R$ es simétrica; $(a, b) \in R$; $(c, c) \in R$. Construya la matriz y el diagrama de flechas (o digrafo) de una de estas relaciones.

**Ejercicio 5** ¿Cuántas relaciones binarias

**a**. reflexivas, **b**. simétricas, **c**. asimétricas, **d**. antisimétricas

son definibles sobre un conjunto con $n$ elementos?

**Ejercicio 6** Sea $A$ un conjunto con $n$ elementos y $R$ una relación sobre $A$. Considere cada una de las siguientes proposiciones. Demuéstrela en caso que sea verdadera y encuentre un contraejemplo en el caso que sea falsa.

**a**. Si $R$ es reflexiva sobre $A$, entonces $|R| \geq n$.

**b**. Si $|R| \geq n^2 - k$, con $k < n$ entonces $\exists a \in A$ tal que $(a, a) \in R$.

## Ejercicios Complementarios

**Ejercicio 7** (Parcial 2001) Sea $R$ una relación *compatible* (es decir, es no vacia, reflexiva y transitiva). Considere las relaciones $R^{-1}$ y $S = (RR^{-1}) \cup (R^{-1}R)$. Investigar si $R^{-1}$ es compatible o un orden parcial, si $S$ es simétrica, si $S$ es irreflexiva y si $R \subseteq S$.

**Ejercicio 8** Demuestre o halle un contraejemplo a las siguientes afirmaciones:

**a**. El producto de dos relaciones puede ser una función sin que ninguna de ellas lo sea.

**b**. La inversa de una relación puede ser una función sin que ella misma lo sea.

**c**. El producto de dos relaciones puede dar la relación vacía sin que ninguna de ellas lo sea

**Ejercicio 9** Sea $R$ relación reflexiva y simétrica; $T$ relación desconocida, y $S$ relación antisimétrica. Indique verdadero o falso, justifique:

**a**. $R^2$ es reflexiva.

**b**. $R^2$ es simétrica.

**c**. Si $SR$ es simétrica entonces S es reflexiva.

**d**. $T \cap T^{-1}$ es reflexiva si y solo si $T$ es reflexiva.

**e**. $T^2$ es simétrica si y solo si T es simétrica.

**Ejercicio 10** (Examen febrero de 2016 Ej2) Sean $R$ y $S$ relaciones sobre un conjunto $A$, con $S$ reflexiva y antisimétrica. Decir cual de las siguientes afirmaciones son verdaderas:

**a**. $R \cap R^{-1}$ es relación simétrica, y es reflexiva si y solo si $R$ lo es.

**b**. $RS$ es reflexiva entonces $R$ lo es.