MATEMÁTICA DISCRETA I - 2020 - 1$^{\text{ER}}$ SEMESTRE

Práctico 7 - Soluciones

Ejercicio 1.

	reflexiva	irreflexiva	simétrica	antisimétrica	asimétrica	transitiva
a)	V	F	V	F	F	V
b)	F	V	F	V	V	V
c)	F	F	F	F	F	F
d)	F	V	V	V	V	V
e)	V	F	V	F	F	V
f) i)	F	V	V	F	F	F
f) ii)	V	F	V	F	F	V
g) i)	F	F	F	V	F	V
g) ii)	F	V	F	V	V	V

Ejercicio 2.

Todas son R sobre $\{1, 2, 3\}$

T	$P \setminus T$	R
$\emptyset$	P	$\{(1,2),(2,3)\}$
{reflexiva}	{simétrica, transitiva}	$\{(1,2),(2,3),(1,1),(2,2),(3,3)\}$
{simétrica}	{reflexiva, transitiva}	$\{(1,2),(2,3),(2,1),(3,2)\}$
{transitiva}	{reflexiva, simétrica}	$\{(1,2),(2,3),(1,3)\}$
{reflexiva, simétrica}	{transitiva}	$\{(1,2),(2,3),(2,1),(3,2),(1,1),(2,2),(3,3)\}$
{reflexiva, transitiva}	{simétrica}	$\{(1,2),(2,3),(1,3),(1,1),(2,2),(3,3)\}$
{simétrica, transitiva}	{reflexiva}	$\{(1,2),(2,1),(1,1),(2,2)\}$
P	$\emptyset$	$\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$

Ejercicio 3.

a. Que la matriz se simétrica;

b. $\overline{R}$ sí, R^{-1} sí, RS no necesariamente, por ejemplo $R = \{(1,1),(1,2),(2,1)\}$ y $S = \{(2,3),(3,2)\}$ son simétricas pero $RS = \{(1,3)\}$ que no lo es, $R \cup S$ sí , $R \cap S$ sí.

c.

1. reflexiva: $\overline{R}$ no, R^{-1} sí, RS sí, $R \cup S$ sí , $R \cap S$ sí.
2. irreflexiva: $\overline{R}$ no, R^{-1} sí, RS no necesariamente, ejemplo $R = S = \{(1,2),(2,1)\}$, $R \cup S$ sí , $R \cap S$ sí.
3. antisimétrica: $\overline{R}$ no necesariamente, ejemplo $R = \emptyset$ en $A = \{1,2\}$, R^{-1} sí, RS no necesariamente, ejemplo $R = \{(1,2),(3,1)\}$ y $S = \{(2,3),(1,1)\}$ son antisimétricas pero $RS = \{(1,3),(3,1)\}$ no lo es, $R \cup S$ no necesariamente, ejemplo $R = \{(1,2)\}$ y $S = \bar{R}$, $R \cap S$ sí.

4. asimétrica: $\overline{R}$ no, R^{-1} sí, RS no necesariamente, ejemplo $R = \{(1,2),(2,3)\}$ y $S = R^{-1}$, $R \cup S$ no necesariamente, ejemplo $R = \{(1,2)\}$ y $S = \bar{R}$, $R \cap S$ sí.

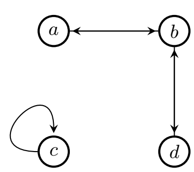
5. transitiva: $\overline{R}$ no necesariamente, ejemplo $R = \{(3,1)\}$ en $A = \{1,2,3\}$, R^{-1} sí, RS no necesariamente, ejemplo $R = \{(1,2),(3,4)\}$ y $S = \{(2,3),(4,5)\}$, $R \cup S$ no necesariamente, ejemplo $R = \{(1,2)\}$ y $S = \{(2,3)\}$, $R \cap S$ sí.

Ejercicio 4. Hay $2^8 = 256$ relaciones en el conjunto A que verifican las condiciones.

Si consideramos, por ejemplo, la relación $R = \{(c,c),(a,b),(b,a),(b,d),(d,b)\}$, la matriz que la representa es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y el diagrama es:



Ejercicio 5.

a. 2^{n^2-n}

b. $2^n 2^{\frac{n^2-n}{2}}$

c. $3^{\frac{n^2-n}{2}}$

d. $2^n 3^{\frac{n^2-n}{2}}$

Ejercicio 6.

a. Verdadero.

b. Verdadero.

Ejercicio 7 (Obs. se asume siempre que R es compatible)

¿R^{-1} es compatible? Sí.

¿R^{-1} es un orden parcial? No necesariamente. Por ejemplo si $A = \{1,2,3\}$ y $R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(2,3),(3,2)\}$ R es compatible y simétrica, y $R^{-1} = R$, por lo tanto R no es un orden parcial (reflexiva, antisimetrica y transitiva).

¿S es simétrica? Sí.

¿S es irreflexiva? No. Para todo $x \in A, (x,x) \in R$ y $(x,x) \in R^{-1}$ pues son ambas reflexivas. Luego $(x,x) \in RR^{-1}$ pues $xRx, xR^{-1}x$. Como $RR^{-1} \subset S$, concluimos que $(x,x) \in S$.

¿$R \subseteq S$? Sí.

Ejercicio 8.

a. Sí, ejemplo $A = \{1,2\}$, $R = \{(1,2),(1,1),(2,2)\}$, $S = \{(2,2)\}$, entonces $RS = \{(1,2),(2,2)\}$ que es una función, pero ni R ni S lo son.

b. Sí, por ejemplo la relación $R = \{(1,2),(1,1)\}$ en $A = \{1,2\}$.

c. Sí, por ejemplo $A = \{1,2\}$ $R = \{(1,2)\}, S = \{(1,1)\}$.

Ejercicio 9.

a. Verdadero.

b. Verdadero.

c. Falso.

d. Verdadero.

e. Si T es simétrica entonces T^2 también lo es, pero si T^2 es simétrica no necesariamente T lo es.

Ejercicio 10.

a. $R \cap R^{-1}$ es reflexiva si y sólo si R es reflexiva. Por otro lado, $R \cap R^{-1}$ simpre es simétrica aunque R no lo sea.

b. Falso.