Matemática Discreta I - 2020 - 2^{DO} semestre

Práctico 3: Funciones y número de Stirling.

Ref. Grimaldi Secciones 5.2 y 5.3

Repaso de definiciones: Dados dos conjuntos A y B, su *producto cartesiano* es $A \times B := \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$. Una función $f : A \to B$ es un subconjunto de $A \times B$ tal que para cada $a \in A$ existe un único $b \in B$ tal que $(a,b) \in f$ (denotamos ese $b = f(a)$). El *conjunto imagen* es $f(A) := \{f(a) : a \in A\} \subseteq B$. Cuando se cumple que $f(A) = B$ decimos que f es *sobreyectiva*. Si $\forall a, a' \in A$, $a \neq a'$ se tiene que $f(a) \neq f(a')$ entonces decimos que f es *inyectiva*. Una función es *biyectiva* si es inyectiva y sobreyectiva. Denotamos por $Sob(m,n) := \#\{f : A \to B : f \text{ sobreyectiva}\}$ donde $|A| = m, |B| = n$.

Ejercicio 1 Sean $A = \{-2,-1,0,1,2\}$ y $B = \mathbb{Z}$.

a. Exprese la función $f : A \to B$ dada por $f(x) = x^2 - 1$ como un subconjunto de $A \times B$.

b. Sea $f = \{(-2,5),(-1,-1),(0,-3),(1,-1),(2,5)\}$. Hallar $a, b \in \mathbb{Z}$ tal que $f(x) = ax^2 + b, \forall x \in A$.

Ejercicio 2 Sean $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ dos funciones y $g \circ f$ la composición de f con g, es decir que $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Si considera que los conjuntos A, B y C son finitos, pruebe o encuentre un contraejemplo a las siguientes afirmaciones:

a. Si f y g son inyectivas también lo es $g \circ f$.

b. Si f y g son sobreyectivas también lo es $g \circ f$.

c. Si $g \circ f$ es inyectiva también lo es f.

d. Si $g \circ f$ es inyectiva también lo es g.

e. Si $g \circ f$ es sobreyectiva también lo es f.

f. Si $g \circ f$ es sobreyectiva también lo es g.

Ejercicio 3 Sean m', m, n enteros positivos con $m' \leq m$ y sean $A = \{1,2,\ldots,m\}$ y $B = \{1,2,\ldots,n\}$. Calcule el número de funciones $f : A \to B$ tales que:

a. no hay restricciones para f.

b. $f(x) = 1$ para todo $x \in \{1,2,\ldots,m'\}$.

c. f es inyectiva.

d. f es biyectiva.

e. $f(i) < f(j)$ para todo $i < j$ en A.

f. $f(i) \leqslant f(j)$ para todo $i \leqslant j$ en A.

Ejercicio 4 Sea $\mathcal{P}(A) := \{X : X \subseteq A\}$ el conjunto potencia de A.

a. Considere las funciones $f : A \longrightarrow \mathcal{P}(A)$ que verifican $f(x) \neq \{x\}, \forall x \in A$. ¿Cuántas de dichas funciones hay? (Examen Agosto 2003)

b. Considere las funciones $f : \{1,2,\ldots,6\} \to \mathcal{P}(\{1,2,\ldots,6\})$ inyectivas, tales que $1 \notin f(1), 2 \notin f(2)$. ¿Cuántas de dichas funciones hay? (Parcial de mayo de 2018)

c. Calcule el número de funciones $f : \mathcal{P}(\{1,2,3\}) \to \mathcal{P}(\{1,2,3\})$ tales que $f(X) \subseteq X$ para todo $X \subseteq \{1,2,3\}$. (Parcial Julio 2020)

Ejercicio 5 (Parcial 2000) Considere los conjuntos $A = \{1,2,3,\ldots,10\}$ y $B = \{1,2,3,4,5,6,7\}$. ¿Cuántas funciones $f : A \to B$ satisfacen $|f(A)| \leq 3$? Indique la opción correcta:

a. $\mathrm{Sob}(10,3)$.

b. $3^{10} - \mathrm{Sob}(10,3)$.

c. $\binom{7}{3}\mathrm{Sob}(10,3) - \binom{7}{2}\mathrm{Sob}(10,2) + \binom{7}{1}\mathrm{Sob}(10,1)$.

d. $\binom{7}{3}\mathrm{Sob}(10,3) + \binom{7}{2}\mathrm{Sob}(10,2) + \binom{7}{1}\mathrm{Sob}(10,1)$.

e. $\binom{7}{3}\mathrm{Sob}(10,3)$.

Ejercicio 6 El número de Stirling de 2da especie $\mathrm{S}(m,n)$ se define como $\mathrm{S}(m,n) = \mathrm{Sob}(m,n)/n!$. Un desarreglo de tamaño k es una biyección $f : \{1,2,\ldots,k\} \to \{1,2,\ldots,k\}$ sin puntos fijos (i.e. $\forall x : f(x) \neq x$). Dé un argumento combinatorio para probar que para todo n y m naturales vale:

a. $n^m = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \mathrm{Sob}(m,i)$.

b. $\mathrm{Sob}(m+1,n) = n(\mathrm{Sob}(m,n-1) + \mathrm{Sob}(m,n))$.

c. $\mathrm{S}(m+1,n) = \mathrm{S}(m,n-1) + n\,\mathrm{S}(m,n)$.

d. $\mathrm{Sob}(m,n) = \sum_{i=1}^{m-(n-1)} \binom{m}{i} \mathrm{Sob}(m-i,n-1)$.

e. $n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k$, donde $d_0 = 1$ y d_k es el número de desarreglos de tamaño k.

Ejercicio 7 (Parcial 2016) Juan quiere guardar 10 libros diferentes en 7 estantes vacíos diferentes y quiere que al menos 5 de ellos posean un libro. ¿De cuántas maneras puede realizar esta tarea?

a. $\mathrm{Sob}(10,7) + \mathrm{Sob}(10,6)\binom{7}{6} + \mathrm{Sob}(10,5)\binom{7}{5}$.

b. $\mathrm{CR}(7,5) = \binom{11}{6}$.

c. $\mathrm{CR}(5,7) = \binom{11}{4}$.

d. $\mathrm{S}(10,7) + \mathrm{S}(10,6)\binom{7}{6} + \mathrm{S}(10,5)\binom{7}{5}$.

e. $\mathrm{Sob}(10,7) + \mathrm{Sob}(10,6) + \mathrm{Sob}(10,5)$.