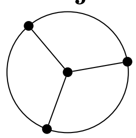
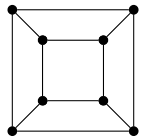
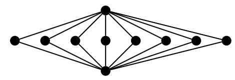
Práctico 11 - Soluciones

Ejercicio 1

Ejercicio 2

Vemos que hay tres filas con 6 en la primera, 4 en la segunda y 2 en la tercera, son homeomorfos el $F1C1$ con $F2C2$ y $F2C4$, el $F1C2$ con $F2C1$ $F3C2$, el $F1C3$ con $F1C5, F1C6, F3C1$, el $F1C4$ con $F2C3$.

Ejercicio 3

$K_{1,3}$, C_3 con una hoja en cada vértice, C_3, K_5.

Ejercicio 4

a. Hay 3×4 pues si enumeramos por $1, 2, 3, 4$ los vértices de C_4 en sentido horario "empezando " en el vértice 1 (es decir, recorriendo la rueda empezando en 1 en sentido horario) tenemos tres subgrafos : el subrgrafo que tiene una sola arista $\{1, 2\}$, el subgrafo de dos aristas $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$ y el subgrafo de tres aristas $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}\}$. Haciendo lo mismo pero empezando en los otros tres vértices tenemos en total 3 subgrafos para cada vértice y son 4 vértices, lo que da un total de 12 subgrafos homeomorfos a K_2.

b. Hay 28 subgrafos homeomorfos a $K_{1,3}$. Recordemos que en W_4 hay 5 vértices v_0, v_1, v_2, v_3, v_4 donde v_0 lo podemos pensar en el centro de la rueda con una arista de éste vértice a cada vértice v_i de la rueda, $i = 1, \cdots, 4$. Elegido v_1 tenemos 4 subgrafos homeomorfos a $K_{1,3}$:

- $G = (V, E)$ con $V = \{v_1\} \cup \{v_0, v_2, v_4\}$ y $E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_0\}, \{v_1, v_4\}\}$
- $G = (V, E)$ con $V = \{v_1\} \cup \{v_0, v_2, v_3, v_4\}$ y $E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_0\}, \{v_1, v_4\}, \{v_4, v_3\}\}$
- $G = (V, E)$ con $V = \{v_1\} \cup \{v_0, v_2, v_3, v_4\}$ y $E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_0\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_3\}\}$
- $G = (V, E)$ con $V = \{v_1\} \cup \{v_0, v_2, v_3, v_4\}$ y $E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_0\}, \{v_1, v_4\}, \{v_0, v_3\}\}$

Razonando análogamente para v_i con $i = 2, 3, 4$ tenemos $4 \times 4 = 16$ subgrafos homeomorfos a $K_{1,3}$.
Ahora para el vértice v_0 las posibilidades son: primero elegimos 3 de los cuatro vértices v_i con $i = 1, \cdots, 4$ para poner adyacentes a v_0 en el subgrafo. Esta elección podemos hacerla de $\binom{4}{3} = 4$ formas. Luego de elegidos esos tres vértices tenemos tres subgrafos homeos a $K_{1,3}$, por ejemplo si elegimos $\{v_1, v_2, v_3\}$ los tres subgrafos serián:

- $G_1 = (V, E)$ con $V = \{v_0\} \cup \{v_1, v_2, v_3\}$ y $E = \{\{v_0, v_1\}, \{v_0, v_2\}, \{v_0, v_3\}\}$

- G_2 es el grafo G_1 al cual le agregamos el vértice v_4 y la arista $\{v_1, v_4\}$
- G_3 es el grafo G_1 alcual le agregamos el vértice v_4 y la arista $\{v_3, v_4\}$

En total tendremos entonces $\binom{4}{3} \times 3 = 4 \times 3 = 12$ subgrafos.
Total: 16+12=28.

c. Hay $\binom{n}{2}$ pues hay $\binom{n}{2}$ formas de elegir 2 vértices de los n y dados esos 2 vértices hay un camino simple que los conecta en el árbol y ese camino simple será entonces un subgrafo homeomorfo a K_2.

Ejercicio 5

Por simetría, si eliminamos cualquier arista de K_5 queda siempre el mismo grafo, que es fácil de ver que es plano. También por Kuratowski, pues con 9 aristas solo podría ser homeomorfo a $K_{3,3}$ lo cual es falso. Por lo tanto debe ser plano. Si a $K_{3,3}$ se le elimina una arista nuevamente es fácil encontrar una inmersión plana de lo que queda, pero además quedaría con 8 aristas y no podría tener un subgrafo(que tendría 8 aristas o menos) homeomorfo ni a K_5 (que tiene 10 aristas) ni a $K_{3,3}$(que tiene 9 aristas).

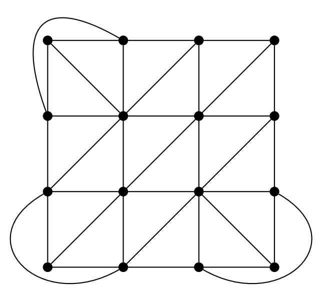
Ejercicio 6

Basta demostrarlo para G grafo aciclíco y conexo, es decir para un árbol.
Lo demostraremos por inducción en la cantidad n de vértices del árbol.
Para $n = 2$ tenemos que G debe ser K_2 que es plano. Supongamos ahora que el resultado es cierto para n, es decir que todo árbol con n vértices es plano, y demostremos que vale el resultado para un árbol con $n + 1$ vértices.
Sea G un árbol con $n + 1$ vértices. Como G es un árbol, sabemos que tiene por lo menos dos vértices colgantes. Sea v uno de esos vértices colgantes. Entonces el grafo $G - v$ es un árbol con n vértices, y por hipótesis inductiva, $G - v$ es plano. Luego si a $G - v$ le agregamos un segmento (una arista) colgando de un vértice, este segmento puede sumergirse en el plano sin cortar aristas de $G - v$. Por lo tanto al agregar v con su arista colgando del correspondiente vértice, obtenemos el árbol G que será entonces plano.

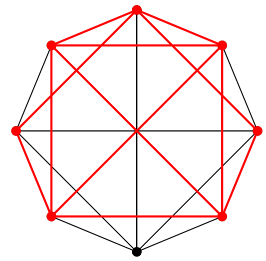
Ejercicio 7

El grafo G_1 es plano y una inmersion en el plano es:

G_1



Los grafos G_2 y G_3 no son planos.



Para G_3, tenemos un subgrafo homeomorfo a K_5 pintado en rojo en la figura de arriba.

Para G_2, si numeramos sus vértices de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo, un subgrafo de G_2 homeomorfo a $K_{3,3}$ es el que tiene como conjunto de vértices a $V = \{6, 7, 14\} \cup \{5, 10, 11\}$ y como conjunto de aristas a

$E = \{\{6, 5\}, \{6, 10\}, \{6, 11\}, \{7, 10\}, \{7, 11\}, \{7, 3\}, \{3, 2\}, \{2, 5\}, \{14, 10\}, \{14, 11\}, \{14, 13\}, \{13, 9\}, \{9, 5\}\}$

Ejercicio 8
$|E| = 9$.

Ejercicio 9
$|V| = 4 \times 4 = 16, |E| = 3.4.2 + 9 + 3 = 36, |R| = 1 + 3 + 3.3.2 = 22$

$$16 - 36 + 22 = 2\checkmark$$

Ejercicio 10
$3.8 = 2e \Longrightarrow e = 12$. Uno plano es el cubo, uno no plano es $K_{3,3}$ con dos subdivisiones elementales en dos aristas y una arista uniendo los correspondientes vértices de grado 2 para que queden de grado 3.

Ejercicio 11
En este ejercicio usaremos la notacion e para indicar $|E|$, r para indicar el número de regiones determinadas en una inmersión plana de un grafo y n para $|V|$.

a. Por absurdo si así no fuera entonces $2e = \sum gr(v) \geq n6$ de donde $e \geq 3n$, por otro lado $2e = \sum gr(R) \geq 3r$ con $n - e + r = 2$ de donde $e = n + r - 2 \leq n + (2/3)e - 2 \Longrightarrow (1/3)e \leq n - 2 \Longrightarrow e \leq 3n - 6 \leq 3(1/3)e - 6 = e - 6 \Longrightarrow 0 \leq -6$ ABSURDO.

b. Por absurdo si $gr(v) \geq 5 \Longrightarrow 5n \leq \sum gr(v) = 2e \leq 2.29 \Longrightarrow n \leq 58/5 = 11,6 \Longrightarrow n \leq 11 \Longrightarrow e \leq 3.11 - 6 = 27 \Longrightarrow n \leq 2.27/5 = 10,8 \Longrightarrow n \leq 10 \Longrightarrow e \leq 30 - 6 = 24 \Longrightarrow n \leq 2.24/5 = 9,6 \Longrightarrow n \leq 9 \Longrightarrow e \leq 3.9 - 6 = 21 \Longrightarrow n \leq 2.21/5 = 8,4 \Longrightarrow n \leq 8 \Longrightarrow e \leq 3.8 - 6 = 18 \Longrightarrow n \leq 2.18/5 = 7,2 \Longrightarrow n \leq 7 \Longrightarrow e \leq 3.7 - 6 = 15 \Longrightarrow n \leq 2.15/5 = 6 \Longrightarrow e \leq 3.6 - 6 = 12 \Longrightarrow n \leq 2.12/5 = 4,8 \Longrightarrow n \leq 4$ que es ABSURDO, pues estabamos asumiendo que $gr(v) \geq 5$ para todo $v \in V$ por lo tanto en cada vértice inciden por lo menos 5 aristas así que debe ser $n \geq 6$.

c. $2.e = 24 = \sum gr(R) \geq 3r = 3(2 + 12 - 6) = 24 \Longrightarrow gr(R) = 3$

d. Alguno de los dos grafos tendrá $\binom{n}{2}/2$ aristas o más, pero éstas deberían ser a lo sumo $3n-6$, por lo tanto debería suceder que

$$\frac{n(n-1)}{4} \leq 3n-6 \Longrightarrow n^2-n \leq 12n-24 \Longrightarrow q(n)=n^2-13n+24 \leq 0$$

La raíz más alta de $q(n)$ es $n=10,7..$ por lo tanto si $n=11$, el polinomio $q(n)>0$ o sea que no puede ser plano.

Ejercicio 12

$2|E|=\sum gr(R) \geq 5r = 5.53 \Longrightarrow |E| \geq (5.53)/2 \Longrightarrow |E| \geq 133$. Como es plano $|V|-|E|+r \geq 2 \Longrightarrow |V| \geq 2+|E|-r \geq 2+133-53=82$.
(Recordar: $v-e+r=1+k$ siendo k el numero de componentes conexas del grafo.)

Ejercicio 13

$2|E|=4|V| \Longrightarrow 32=4|V| \Longrightarrow |V|=8 \Longrightarrow r=2-|V|+|E|=2-8+16=10$.

Ejercicio 14

a. Primero vamos a probar que en toda inmersión plana de G, toda región R tiene grado $\mathrm{gr}(R) \geq 6$, para ello debemos considerar dos casos según el grafo sea o no acíclico. Si el grafo G es acíclico, entonces G es un árbol (porque es conexo por hipótesis) y por lo tanto tiene una única región de grado $2e \geq 6$ (pues por hipótesis $e \geq 3$). Si el grafo no es acíclico entonces por hipótesis, todos sus ciclos son de largo al menos 6 lo cual implica que toda región tendrá grado mayor o igual a 6. Luego aplicamos que la suma de los grados de las regiones es el doble que el número de aristas: $2e=\sum \mathrm{gr}(R) \geq 6r$ por lo que $e/3 \geq r$.

b. Aplicamos la fórmula de Euler para grafos planos conexos y la desigualdad obtenida en la parte anterior: $2=v-e+r \leq v-e+e/3=v-\frac{2e}{3}$, multiplicando todo por 3 obtenemos: $6 \leq 3v-2e$ de donde $2e+6 \leq 3v$.

c. Por absurdo, suponemos que exista un grafo G tal que G es 3-regular, plano, simple y conexo, pero que no posea ningún ciclo de largo $\ell \leq 5$. Entonces por la parte anterior tenemos que $3v \geq 2e+6$. Como G es 3-regular, entonces $3v=\sum_{v \in V} \mathrm{gr}(v)=2e$. Juntando ambas relaciones tenemos que $2e=3v \geq 2e+6 \Rightarrow 0 \geq 6$ lo cual es una contradicción.