

Nº de examen	Cédula	Apellido y nombre	Salón

### Respuestas

Ej. 1.1	Ej. 1.2	Ej. 1.3	Ej. 2	Ej. 3.1	Ej. 3.2	Ej. 4
Ej. 5.1	Ej. 5.2	Ej. 5.3	Ej. 6	Ej. 7	Ej. 8	Ej. 9

### Importante

- El examen dura 3 horas y media.
- En cada ejercicio se indica la cantidad de puntos que le corresponden. El examen es de 100 puntos en total.
- Solo serán válidas las respuestas indicadas en el cuadro de respuestas.
- En cada ejercicio hay una sola opción correcta.
- No se restan puntos por respuesta incorrecta.

### Tabla de $\Phi(z)$ (normal estándar)

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9924	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9958	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986

### Tabla de $\chi^2$

GdL	Probabilidad de cola derecha $P(\chi^2 \geq c)$										
	.25	.20	.15	.10	.05	.025	.02	.01	.005	.0025	.001
1	1.32	1.64	2.07	2.71	3.84	5.02	5.41	6.63	7.88	9.14	10.83
2	2.77	3.22	3.79	4.61	5.99	7.38	7.82	9.21	10.60	11.98	13.82
3	4.11	4.64	5.32	6.25	7.81	9.35	9.84	11.34	12.84	14.32	16.27
4	5.39	5.99	6.74	7.78	9.49	11.14	11.67	13.28	14.86	16.42	18.47
5	6.63	7.29	8.12	9.24	11.07	12.83	13.39	15.09	16.75	18.39	20.52
6	7.84	8.56	9.45	10.64	12.59	14.45	15.03	16.81	18.55	20.25	22.46
7	9.04	9.80	10.75	12.02	14.07	16.01	16.62	18.48	20.28	22.04	24.32
8	10.22	11.03	12.03	13.36	15.51	17.53	18.17	20.09	21.95	23.77	26.12
9	11.39	12.24	13.29	14.68	16.92	19.02	19.68	21.67	23.59	25.46	27.88
10	12.55	13.44	14.53	15.99	18.31	20.48	21.16	23.21	25.19	27.11	29.59

#### Ejercicio 1 (12 puntos)

En un bolso se colocan 5 billetes de \$20, 7 billetes de \$50 y 10 billetes de \$100. Se sacan al azar, sin reposición, un paquete de 8 billetes. Suponiendo que cada billete tiene la misma probabilidad de ser sacado. Responder a las siguientes preguntas

1. ¿Cuál es la probabilidad de no sacar ningún billete de \$20?

(A) 0.018    (B) 0.076    (C) 0.127    (D) 0.543    (E) 0.772    (F) 0.972

2. ¿Cuál es la probabilidad de haber extraído únicamente billetes de \$100?

(A)  $1.41 \times 10^{-4}$     (D) 0.127  
 (B)  $1.12 \times 10^{-3}$     (E) 0.321  
 (C)  $1.82 \times 10^{-3}$     (F) 0.455

3. Sea  $A$  el evento no sacar ningún billete de \$20 y  $B$  el evento se sacaron solamente billetes de \$100 ¿Cuál es la probabilidad de que ocurran ambos eventos?

(A)  $P(A)$   
 (B)  $P(B)$   
 (C)  $P(A) + P(B)$   
 (D)  $P(A) + P(B) - P(A)P(B)$   
 (E)  $P(A)P(B)$   
 (F) 1

**Ejercicio 2 (11 puntos)**

El funcionamiento de una máquina depende de dos componentes eléctricos  $x$  e  $y$ , con tiempos de vida útil  $T_x, T_y$  que asumiremos exponenciales independientes con esperanzas de 2 y 3 años respectivamente. La máquina deja de funcionar cuando alguno de los componentes falla ¿Cuántos años deben pasar para que la chance de que la máquina deje de funcionar sea del 50 %?

- (A) 0.83      (B) 1.2      (C) 0.2      (D) 5      (E) 3.47      (F) 1.39

---

**Ejercicio 3 (11 puntos)**

Llenamos un vaso de volumen 20 cl de una cantidad aleatoria de agua seleccionada uniformemente entre 2 y 20 cl.

1. ¿Cuál es la probabilidad de obtener a lo sumo 5 cl de agua?

- (A)  $\frac{3}{4}$       (B)  $\frac{1}{2}$       (C)  $\frac{1}{3}$       (D)  $\frac{1}{4}$       (E)  $\frac{1}{5}$       (F)  $\frac{1}{6}$

2. Cinco vasos, que han sido llenados de la manera señalada antes, se vacían en un gran recipiente ¿Cuál es la cantidad media de agua que se obtiene en el recipiente?

- (A) 5      (B) 10      (C) 11      (D) 25      (E) 50      (F) 55

---

**Ejercicio 4 (10 puntos)**

Según un estudio reciente la altura de las mujeres de un país del Caribe se distribuye según una Gaussiana de media  $m = 1.58$  y una desviación estándar  $\sigma = 0.06$ . Para producir una línea de vestidos un fabricante desea usar esta distribución. El fabricante quiere determinar un intervalo  $[m - a, m + a]$  simétrico alrededor de la media que contenga el 90 % de las altura de las mujeres. Determinar el valor de  $a$ .

- (A) 0.0600      (C) 0.0987      (E) 1.6450  
(B) 0.0771      (D) 0.1176      (F) 1.6787
-

**Ejercicio 5 (12 puntos)**

Ana y Beto vuelven de la facultad siempre en el mismo omnibus y se bajan en la misma parada. El tiempo (en minutos) que demora el omnibus en ir desde la facultad hasta la parada es una variable aleatoria  $T_O$  con distribución normal de media 20 y desvío 3. Luego Ana y Beto siguen sus caminos por separado hasta sus respectivas casas. Los tiempos  $T_A$  y  $T_B$  representan lo que demoran en llegar Ana y Beto, respectivamente, desde la parada hasta sus casas. Se asume que ambas tienen distribución normal de media 6 y desvío 1. Además se asume que  $T_A$ ,  $T_B$  y  $T_O$  son independientes.

Denotamos por  $(X_A, X_B)$  el par de variables que representa los tiempos totales que les lleva recorrer desde la facultad hasta sus casas a Ana y Beto respectivamente, señalamos que  $X_A = T_O + T_A$  y que  $X_B = T_O + T_B$ .

1. De las siguientes opciones indicar la opción correcta. El par  $(X_A, X_B)$  tiene distribución normal bi-variada de parámetros:

- (A)  $\mu_A = 6, \mu_B = 6, \sigma_A = 1, \sigma_B = 3.16, \rho = 0.9$   
(B)  $\mu_A = 6, \mu_B = 6, \sigma_A = 1, \sigma_B = 3.16, \rho = 1.73$   
(C)  $\mu_A = 20, \mu_B = 20, \sigma_A = 3, \sigma_B = 3.16, \rho = 0.9$   
(D)  $\mu_A = 20, \mu_B = 20, \sigma_A = 3, \sigma_B = 3.16, \rho = 1.73$   
(E)  $\mu_A = 26, \mu_B = 26, \sigma_A = 3.16, \sigma_B = 3.16, \rho = 0.9$   
(F)  $\mu_A = 26, \mu_B = 26, \sigma_A = 3.16, \sigma_B = 3.16, \rho = 1.73$

2. Un día Ana demora 28 minutos en hacer el recorrido desde la facultad hasta su casa (esto es  $X_A = 28$ ). Calcular la recta de regresión entre los dos tiempos totales y luego estimar el tiempo que demoró Beto.

- (A) 25.5      (B) 26      (C) 27.8      (D) 28      (E) 51      (F) 51.2

3. Calcular la probabilidad de que la estimación hecha en el punto 2 sea errónea en más de 1 minuto.

- (A) 0.2358      (C) 0.4654      (E) 0.7642  
(B) 0.2714      (D) 0.5284      (F) 0.8413

---

**Ejercicio 6 (11 puntos)**

En un bolillero hay  $\theta$  bolillas, numeradas del 1 a  $\theta$ . Se extraen al azar y con reposición tres bolillas de la urna, obteniéndose la muestra  $(13, 5, 9)$ . Dar una estimación de  $\theta$  basada en el método de los momentos y hallar el sesgo del estimador.

- (A)  $\bar{\theta} = 9$  y  $s = 0$       (D)  $\bar{\theta} = 9$  y  $s = -1$   
(B)  $\bar{\theta} = 13$  y  $s = 0$       (E)  $\bar{\theta} = 13$  y  $s = -1$   
(C)  $\bar{\theta} = 17$  y  $s = 0$       (F)  $\bar{\theta} = 17$  y  $s = -1$
-

### Ejercicio 7 (11 puntos)

Se desea estudiar el efecto de un nuevo químico sobre la tensión disruptiva (en kV) de un material. Para esto se divide al azar un lote de 16 muestras del material en dos grupos de 8, unas reciben el tratamiento con el nuevo químico (Tratamiento) y las otras se usan de control. Los resultados se muestran en el diagrama de tallos (espalda con espalda) que se muestra abajo.

Tratamiento		Control
00	53	
0000	54	0
0	55	0
0	56	000
	57	00
	58	0

Considere la hipótesis nula.

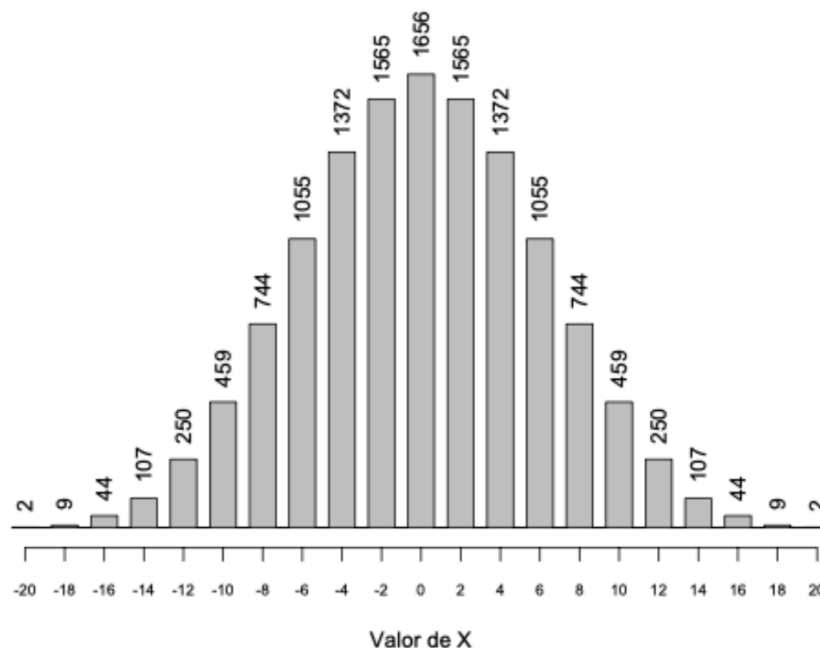
$H_0$ : El tratamiento no tiene efecto sobre la tensión disruptiva del material.

Y el estadístico  $X = (\text{suma de respuestas del tratamiento}) - (\text{suma de respuestas en control})$ . Se supone que el tratamiento no aumenta la tensión disruptiva del material.

Usando la Figura, calcular el  $p$ -valor  $pval(X_{obs})$  y decidir si rechazar o no  $H_0$  al nivel  $\alpha = 0.05$ .

- (A)  $pval(X_{obs}) = 0,00427$  y se rechaza  $H_0$       (D)  $pval(X_{obs}) = 0.00854$  y se acepta  $H_0$   
 (B)  $pval(X_{obs}) = 0.00854$  y se rechaza  $H_0$       (E)  $pval(X_{obs}) = -16$  y se rechaza  $H_0$   
 (C)  $pval(X_{obs}) = 0,00427$  y se acepta  $H_0$       (F)  $pval(X_{obs}) = -16$  y se acepta  $H_0$

Distribucion de aleatorizacion de X



**Ejercicio 8 (11 puntos)**

En un estudio, realizado con bebés de cierta edad, se ha podido determinar qué en los bebés que han nacido a término se observan los siguientes porcentajes

50 % caminan    12 % comienzan a caminar    38 % no caminan.

Se ha tomado una muestra de 80 bebés prematuros y se observa que

35 caminan    4 comienzan a caminar    41 no caminan.

Haga un test de bondad de ajuste Chi-cuadrado para ver si existe una diferencia con el 5 % de confianza de si los bebés prematuros tienen una evolución hacia el caminar igual a la de los bebés normales. Se quiere hacer el test de hipótesis que contraste:

$H_0$ -Los bebés prematuros no se diferencian de los nacidos a término.

$H_1$ -Los bebés prematuros exhiben una diferencia con los nacidos a término.

- (A) La región de rechazo es  $[3.84, \infty]$ , por lo tanto se acepta  $H_0$
- (B) La región de rechazo es  $[3.84, \infty]$ , por lo tanto se rechaza  $H_0$
- (C) La región de rechazo es  $[5.99, \infty]$ , por lo tanto se acepta  $H_0$
- (D) La región de rechazo es  $[5.99, \infty]$ , por lo tanto se rechaza  $H_0$
- (E) La región de rechazo es  $[7.81, \infty]$ , por lo tanto se acepta  $H_0$
- (F) La región de rechazo es  $[7.81, \infty]$ , por lo tanto se rechaza  $H_0$

**Ejercicio 9 (11 puntos)**

Una moneda tiene probabilidad de cara igual a  $\theta$ . Se desea hacer el siguiente test de hipótesis sobre el valor de  $\theta$ :

$$\begin{cases} H_0 : \theta = 0.3 \\ H_A : \theta = 0.5 \end{cases}$$

Para esto se la lanza 12 veces, y se usa como estadístico la cantidad de caras.

A continuación se muestra la f.p.p. de una  $\text{Bin}(12, \theta)$  para los dos valores de  $\theta$ :

Función de probabilidad puntual $p(x; \theta)$													
$\theta$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0.3	.014	.071	.168	.240	.231	.158	.079	.029	.008	.001	.000	.000	.000
0.5	.000	.003	.016	.054	.121	.193	.226	.193	.121	.054	.016	.003	.000

Se toma como región de rechazo  $\{0, 1, 2, 8, 9, 10, 11, 12\}$ . Luego de lanzar la moneda, no se rechaza  $H_0$  ya que el número observado de caras es 7.

Al tomar esta decisión se puede estar cometiendo un error. Decidir si es un error de tipo I o un error de tipo II y calcular la probabilidad de dicho error.

- (A) 0.029                                      (C) 0.213                                      (E) 0.738
- (B) 0.193                                      (D) 0.262                                      (F) 0.787