Práctico 3 - Sistemas Lineales

En este práctico se analiza cómo obtener soluciones de un sistema lineal $Ax = b$

Ejercicio 1

Sea A una matriz de tamaño $n \times n$ no singular. Sea α la solución del sistema $Ax = b$. Para estimar α se propone la siguiente Iteración Estacionaria de orden uno:

$$\begin{cases} x^{k+1} = Qx^k + r & , k \geq 0 \\ x^0 \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{IE}$$

siendo r un vector fijo de $\mathbb{R}^n$ y Q una matriz $n \times n$, tal que $\alpha = Q\alpha + r$.

En estas condiciones, demostrar que la sucesión $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge a α para cualquier x^0 si y solamente si el radio espectral de Q es $\rho(Q) < 1$.

Ejercicio 2

1. Mostrar que el método de Jacobi es estacionario de orden uno, hallando la matriz Q_J y el vector r_J que permite expresarlo según la ecuación (**??**).

2. Dar una condición suficiente de convergencia al utilizar el método de Jacobi.

3. Sin hallar Q_J, indicar si Jacobi converge para las siguientes matrices:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & -10 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ -1 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & -10 \end{pmatrix}$$

4. Verificar que la siguiente matriz no es diagonal dominante y sin embargo Jacobi es convergente:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 8 & -5 \end{pmatrix}$$

5. Repetir los puntos anteriores para el metodo de Gauss-Seidel.

Ejercicio 3

Se considera el siguiente sistema lineal S:

$$\begin{cases} 5x - 3y & = 2 \\ 8x - 5y & = 3 \end{cases}$$

1. Resolverlo exactamente.

2. Estudiar la convergencia al aplicar los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel. ¿Depende la convergencia del punto inicial?

3. Calcular el error cometido en los primeros tres pasos en ambos métodos.

4. Implementar programas Jacobi y GS que implementan los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel. Introducir el Sistema S a ambos programas y comparar sus desempeños.

Ejercicio 4

El objetivo de este ejercicio es analizar qué ocurre con una sucesión x^k, generada mediante la iteración (**??**), en el caso en que Q es tal que $\rho(Q) \geq 1$.

1. Se define el error absoluto en el paso k-ésimo como: $e^k = x^k - \alpha$, siendo α la solución del sistema $Ax = b$, con A invertible. Pruebe que $e^{k+1} = Qe^k$ y por lo tanto $e^k = Q^k e^0$, $\forall k \geq 0$.

2. Pruebe que si $e^0 \neq \vec{0}$ es vector propio de Q, asociado al valor propio λ, entonces $e^k = \lambda^k e^0$.

3. Pruebe que si existe algún λ valor propio de Q con:

   a) $|\lambda| < 1$, entonces existe x^0 tal que la sucesión x^k converge a la solución α.

   b) $|\lambda| = 1$, entonces existe x^0 tal que $||e^k||_2$ se mantiene constante. En particular x^k no converge a la solución α.

   c) $|\lambda| > 1$, entonces existe x^0 tal que $||e^k||_2 \to \infty$. Por lo tanto x^k no converge a la solución α.

4. Supongamos que $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, por lo que la solución es $\alpha = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Para el método de Jacobi:

   a) Halle Q_J y pruebe que $\rho(Q_J) > 1$.

   b) Pruebe que existe x^0 tal que la sucesión x^k converge a la solución α (no se pide hallar x^0).

   c) Halle un x^0 tal que $||e^k||_2 \to \infty$ y por lo tanto x^k no converge a α.

Ejercicio 5

Se desea resolver el sistema lineal $Ax = b$, siendo A una matriz no singular de tamaño $n \times n$, y b un vector de $\mathbb{R}^n$.

1. Calcular la cantidad de operaciones necesarias para resolver el sistema lineal en forma exacta, utilizando el método de escalerización Gaussiana, junto con sustitución hacia atrás.

2. Explicar la descomposición LU de la matriz A. ¿Esta descomposición es única?

3. Calcular la cantidad de operaciones necesarias para resolver el sistema lineal en forma exacta, utilizando la descomposición LU junto con sustitución hacia adelante y hacia atrás.

4. Comparar ambos métodos directos de resolución, si se desea resolver m sistemas lineales con la misma matriz A pero distintos vectores independientes $\{b_1, \ldots, b_m\}$.

5. Implementar la descomposición LU y el método de escalerización Gaussiana.

6. Resolver el Sistema S definido anteriormente mediante ambos métodos.

Ejercicio 6

Se considera una matriz $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ no singular de tamaño $n \times n$, que es tridiagonal ($a_{ij} = 0$ siempre que $|i - j| > 1$), y $b \in \mathbb{R}^n$ arbitrario.

1. Encontrar las matrices L y U correspondientes a la descomposición $A = LU$, en términos de las entradas no nulas de la matriz A.

2. Implementar el algoritmo de Thomas para resolver eficientemente el sistema $Ax = b$ utilizando la descomposición LU.

3. Hallar analíticamente la cantidad de operaciones elementales que requiere la ejecución del algoritmo de Thomas.

Ejercicio 7

Se desea resolver la ecuación diferencial $y''(x) + g(x)y(x) = f(x)$ con condiciones de borde $y(a) = \alpha$, $y(b) = \beta$ en el intervalo $[a, b]$, siendo f y g dos funciones C^∞ en el intervalo $[a, b]$.
Se divide el intervalo $[a, b]$ en N intervalos iguales de largo $h = \frac{b-a}{N}$.

1. Construir un sistema lineal, utilizando una estimación de la derivada del Práctico 1 y la identidad que debe cumplir $y(x)$ en las abscisas $x_i = a + ih$, con $i \in \{0, 1, \ldots, N\}$.

2. Considere la ecuación diferencial anterior en el intervalo $[a, b] = [0, 5]$, cuando
$f(x) = sen(x)(e^x - 1)$, $g(x) = e^x$, $\alpha = 0$ y $\beta = sin(5)$.
Demostrar que $y(x) = sen(x)$ es la solución exacta.

3. Resolver la ecuación diferencial anterior mediante discretización, comparando con la solución exacta. Utilizar distintos valores para N.