Examen Agosto 2020 - Turno Matutino

Verdaderos/Falsos

1. Si $T : V \to V$ es una transformación lineal y existe $v \in V$ no nulo tal que $T^3(v) = 0$ entonces T no es invertible.
2. Sean $T, S\colon V \to W$ transformaciones lineales tales que $\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Im}(S)$, entonces existe $v \in V$ no nulo tal que $T(v) = S(v)$.
3. Si $V = S_1 \oplus S_2$ y $S \subset V$ es un subespacio, entonces se cumple que o bien $S \subset S_1$ o bien $S \subset S_2$.
4. Sean $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ bases de V un espacio vectorial de dimensión n y $T\colon V \to V$ una transformación lineal tal que ${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}} = \mathrm{Id}_n$. Entonces $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

Múltiple opción

1. Sea r la recta intersección de los planos π_1 y π_2 de ecuaciones $x + y - z = 0$ y $3x - z = 0$ respectivamente. Sea s la recta que pasa por $(1, 1, 2)$ y tiene vector director $(1, 0, 3)$. Considere el plano π que contiene a s y es paralelo a r. Determinar cuál de los siguientes puntos está en π.

   a) $(0, 0, 0)$.
   b) $(2, 0, 6)$.
   c) $(6, 0, -2)$.
   d) $(3, 3, 8)$.
   e) $(5, 2, 0)$.

2. Sea $w \in \mathbb{R}^3$ tal que $w \neq (0, 0, 0)$ y considere $T_w : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por $T_w(v) = (\langle v, 2w\rangle, \langle v, -w\rangle)$. Entonces:

   a) $\dim(N(T_w)) = 2$ e $\mathrm{Im}(T_w) = [(1, -2)]$.
   b) $\dim(N(T_w)) = 2$ e $\mathrm{Im}(T_w) = [(-2, 1), (1, -2)]$.
   c) $\dim(N(T_w)) = 1$ e $\mathrm{Im}(T_w) = [(-2, 1), (1, -2)]$.
   d) Existen $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^3$ no nulos tales que $\dim(N(T_{w_1})) \neq \dim(N(T_{w_2}))$.
   e) $\dim(N(T_w)) = 2$ e $\mathrm{Im}(T_w) = [(-2, 1)]$.

3. Sean $P = (2, 1, 1)$ y π un plano que pasa por el punto $(2, 2, -4)$ y tiene como vectores directores a $(1, -1, 0)$ y $(1, 0, 1)$. Considere el punto Q tal que $\operatorname{dist}(Q, \pi) = \operatorname{dist}(P, \pi)$, $\operatorname{dist}(P, Q) = 2 \operatorname{dist}(P, \pi)$ y además, la recta que pasa por P y Q es normal a π. Entonces,

   a) La suma de las entradas de Q es -6.
   b) La suma de las entradas de Q es 8.
   c) La suma de las entradas de Q es -8.
   d) La suma de las entradas de Q es 6.
   e) La suma de las entradas de Q es 0.

4. Se considera la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ que cumple las condiciones:

$$(*) \qquad T(1, 8, -2) = (-3, 1, 1, 4), \quad T(2, 1, 5) = (0, -1, 2, 5), \quad T(1, -2, 4) = (1, -1, 1, 2).$$

   Entonces:

   a) Existe una única transformación lineal T que cumple las condiciones $(*)$, y dicha transformación lineal cumple la condición $T(2, 0, 3) = (0, -2, 0, 5)$.
   b) Existe una única transformación lineal T que cumple las condiciones $(*)$, y dicha transformación lineal cumple la condición $T(2, 0, 3) = (1, 0, -2, 3)$.
   c) Existen infinitas transformaciones lineales T que cumplen las condiciones $(*)$, pero sólo una de ellas cumple la condición $T(2, 0, 3) = (-3, 2, 0, 1)$.
   d) Existen infinitas transformaciones lineales T que cumplen las condiciones $(*)$, y todas ellas cumplen la condición $T(2, 0, 3) = (-3, 2, 0, 1)$.
   e) No existe ninguna transformación lineal T que cumple las condiciones $(*)$.

5. Sean los subespacios

$$S_1 = \{p \in \mathbb{R}_3[x] \colon p(0) + p'(0) + p''(0) = 0\}, \quad S_2 = \{p \in \mathbb{R}_3[x] \colon p(0) + p'(0) = 0\},$$

   y

$$S_3 = \{p \in \mathbb{R}_3[x] \colon p''(0) = 0\}.$$

   Entonces:

   a) $S_1 = S_2 + S_3$ pero la suma no es directa.
   b) $S_1 = S_2 \oplus S_3$.
   c) $\mathbb{R}_3[x] = S_1 \oplus [x^3]$.
   d) $\mathbb{R}_3[x] = S_1 \oplus [x^3 + 1]$.
   e) $\mathbb{R}_3[x] = S_2 \oplus [x^3]$.

6. Sean $T\colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^4$ y $S\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ transformaciones lineales definidas por:

$$_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix},$$

siendo $\mathcal{B} = \{(1,0,1,0), (0,1,1,0), (0,0,-1,1), (0,0,0,-1)\}$ y $\mathcal{C} = \{1, x, x^2\}$, y

$$S(1,0,1,0) = (1,2,3,-1), \qquad S(0,1,1,0) = (1,3,2,0),$$

$$S(0,0,-1,1) = (0,-1,-1,2), \qquad S(0,0,0,-1) = (0,0,-1,-2).$$

Sea $p \in \mathbb{R}_2[x]$ tal que $S \circ T(p) = (5,11,3,-12)$. Entonces:

a) $p(1) = -2$.

b) $p(1) = 1$.

c) $p(1) = 0$.

d) $p(1) = -1$.

e) $p(1) = 2$.

7. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $T_\alpha\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ una transformación lineal cuya matriz asociada en la base canónica $\mathcal{C}$ es:

$$_{\mathcal{C}}(T_\alpha)_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha+2 & -2 \\ 1 & \alpha+3 & 4 & -2\alpha \\ -2 & -2 & \alpha-4 & 3 \\ -2 & \alpha & -2 & \alpha^2+3 \end{pmatrix}.$$

a) Si T_α no es sobreyectiva entonces $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 3$.

b) Si T_α no es sobreyectiva entonces $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 2$.

c) T_α es sobreyectiva para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

d) Si T_α no es sobreyectiva entonces hay valores de α para los que $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 3$ y otros valores para los $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 2$.

e) Si T_α no es sobreyectiva entonces $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 1$.

VERDADERO O FALSO / EXAMEN AGOSTO 2020 VIRTUAL TURNO MATUTINO /

1) Si $T: V \to V$ es una t.l y $\exists v \neq 0 \;/\; T^3(v) = 0 \Rightarrow T$ no invertible

VERDADERO

$$0 = T^3(v) = T^2(\underbrace{T(v)}_{w}) = T(\underbrace{T(w)}_{u}) = T(u) = 0 \Rightarrow u \in N(T).$$

→ Si $u \neq 0 \Rightarrow \dim N(T) \neq 0 \Rightarrow T$ no inyectiva $\Rightarrow T$ no invertible.

→ Si $u = 0 \to T(w) = 0 \Rightarrow w \in N(T)$. → Si $w \neq 0 \Rightarrow T$ no invertible

→ Si $w = 0 \Rightarrow T(v) = 0$

como $v \neq 0$, $v \in N(T)$ y $\dim N(T) \neq 0 \Rightarrow T$ no invertible.

2) Sean $T, S: V \to W$ t.l tales que $Im(T) = Im(S)$ entonces $\exists v \neq 0 \;/\; T(v) = S(v)$.

FALSO Contraejemplo: Sea $T(x,y) = (x,y) \to Im(T) = \mathbb{R}^2$

$S(x,y) = (-x,-y) \to Im(S) = \mathbb{R}^2$

No existe $v \neq 0$ tal que $T(v) = S(v)$.

3) Si $V = S_1 \oplus S_2$ y $S \subset V$ es un sev entonces $S \subset S_1$ o $S \subset S_2$.

FALSO Contraejemplo: $V = \mathbb{R}^3$, $S_1 = [(1,0,0)]$, $S_2 = [(0,1,0)\,(0,0,1)]$

Sea $S = [(1,0,0),(0,0,1)]$.

$S \subset V$ es un sev pero $S \not\subset S_1$ y $S \not\subset S_2$.

4) Sean $A, B \xrightarrow{b} V$, $\dim V = n$ y $T: V \to V$ una t.l tal que ${}_B(T)_A = I_n$. Entonces $A = B$.

FALSO Contraejemplo: $T(x,y) = (2x, 2y)$

$A = \{(1/2, 0)(0, 1/2)\}$

$B = \{(1,0)\,(0,1)\}$

$\Bigg\}\; {}_B(T)_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

pero $A \neq B$.

MULTIPLE OPCIÓN

EXAMEN AGOSTO 2020 VIRTUAL
TURNO MATUTINO

EJERCICIO 1

$\Pi_1)\ x+y-z=0$

$\Pi_2)\ 3x-z=0$

$\Pi_1 \cap \Pi_2 = r$

$s: (x,y,z) = (1,1,2) + \lambda(1,0,3)$

$s \subset \Pi$, $\Pi \parallel r$. Hay que hallar Π.

- Como $\Pi \parallel r$, un vector director de r también será de Π.

A partir de las ecuaciones de Π_1 y Π_2: $\vec{n}_{\Pi_1} = (1,1,-1)$ y $\vec{n}_{\Pi_2} = (3,0,-1)$

$$\vec{n}_{\Pi_1} \times \vec{n}_{\Pi_2} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1,-2,-3)$$

↓ vector director de r ⇒ vector director de Π.

- Como $s \subset \Pi \Rightarrow (1,1,2) \in \Pi$ y $(1,0,3)$ es vector director de Π

- Los vectores directores de Π $(-1,-2,-3)$ y $(1,0,3)$ no son colineales ⇒ tenemos un punto de paso y dos vectores de Π:

$$\Pi: (x,y,z) = (1,1,2) + \lambda(1,0,3) + \mu(-1,-2,-3).$$

Pasamos Π a reducida: $\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 0$

$\Pi: 6(x-1) + (z-2)(-2) = 0 \Rightarrow \boxed{\Pi: 6x - 2z - 2 = 0}$ Ecuación reducida de Π

Luego probamos si los puntos dados en las opciones están en Π sustituyendo en la ecuación reducida del plano.

Vemos que $(3,3,8) \in \Pi$ pues $6(3) - 2(8) - 2 = 0$

⇒ OPCIÓN CORRECTA (D)

MULTIPLE OPCIÓN

EXAMEN AGOSTO 2020 VIRTUAL
TURNO MATUTINO

EJERCICIO 2

$w \in \mathbb{R}^3 \;/\; w \neq \vec{0}$

$T_w : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \;/\; T_w(v) = (\langle v, 2w \rangle, \langle v, -w \rangle)$

dim $N(T_w)$ y $Im(T_w)$ = ?

$\downarrow$ por prop del prod. interno

$$T_w(v) = (2\langle v, w \rangle, -\langle v, w \rangle)$$

$$T_w(v) = \underbrace{\langle v, w \rangle}_{\text{es un número real}} (2, -1) \Rightarrow Im(T_w) = [(2,-1)]$$

Por teorema de las dimensiones: $\underset{3}{\dim \mathbb{R}^3} = \dim N(T_w) + \underset{1}{\dim Im(T_w)}$

$\Rightarrow \dim N(T_w) = 2$

$\Rightarrow$ OPCIÓN CORRECTA E

Otra forma de ver el $N(T_w)$:

$$v \in N(T_w) \Leftrightarrow T_w(v) = (0,0)$$

$$\Updownarrow$$

$$\langle v, w \rangle (2, -1) = (0,0) \Leftrightarrow \langle v, w \rangle = 0$$

condición para que $v \in N(T_w)$.

$$\Rightarrow \dim N(T_w) = \underset{3}{\dim \mathbb{R}^3} - \underset{1}{\#\text{ condiciones}}$$

$$\Rightarrow \dim N(T_w) = 2$$

MÚLTIPLE OPCIÓN

EXAMEN AGOSTO 2020 VIRTUAL
TURNO MATUTINO

EJERCICIO 3

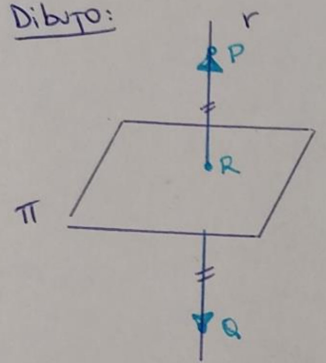
$P=(2,1,1)$ $\quad \pi: (x,y,z)=(2,2,-4)+\lambda(1,-1,0)+\mu(1,0,1)$

$d(Q,\pi)=d(P,\pi)$ $\quad d(P,Q)=2\,d(P,\pi)$

La recta que pasa por P y Q es normal a π.

Suma de las entradas de Q?

Dibujo:



Como $r \perp \pi \Rightarrow$ la normal a π será vector director de r.

Paso π a reducida:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z+4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0$$

$$\pi: -(x-2)-(y-2)+z+4=0$$

Ecuación reducida de π: $\boxed{\pi: -x-y+z+8=0}$ $\Rightarrow \vec{n}_\pi: (-1,-1,1)$ es vector director de r, y como $P\in r$

Entonces: $\boxed{r=\begin{cases} x=2-t \\ y=1-t \\ z=1+t \end{cases}}$ Ecuación paramétrica de r

Vamos a hallar $\pi \cap r=\{R\}$. Sustituyo x,y,z de r en π:

$-(2-t)-(1-t)+(1+t)+8=0 \Rightarrow \boxed{t=-2} \rightarrow$ Sustituyo t en la ec. de r

$\boxed{R=(4,3,-1)}$

Como $d(P,\pi)=d(Q,\pi)$, se cumple que $\vec{RP}=-\vec{RQ}$. De donde: $\vec{RP}=P-R=(-2,-2,2)$

$\vec{RQ}=Q-R=(q_1-4,\ q_2-3,\ q_3+1)$. Entonces: $\begin{cases} -q_1+4=-2 & \Rightarrow q_1=6 \\ -q_2+3=-2 & \Rightarrow q_2=5 \\ -q_3-1=2 & \Rightarrow q_3=-3 \end{cases}$

$Q=(6,5,-3)$

$q_1+q_2+q_3=8$

$\Rightarrow$ OPCIÓN CORRECTA B

MÚLTIPLE OPCIÓN

EXAMEN AGOSTO 2020 VIRT
TURNO MATUTINO

EJERCICIO 4

Sea $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ que cumple
$$T(1,8,-2) = (-3,1,1,4)$$
$$T(2,1,5) = (0,-1,2,5)$$
$$T(1,-2,4) = (1,-1,1,2)$$

$\{(1,8,-2)(2,1,5)(1,-2,4)\}$ es base de $\mathbb{R}^3$?

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 8 & 1 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ F_2-8F_1 \\ F_3+2F_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -15 & -10 & 0 \\ 0 & 9 & 6 & 0 \end{array}\right)_{15F_3+9F_2} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -15 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Sist. compatible indeterm.

$\Rightarrow$ No es base de $\mathbb{R}^3$

$\Rightarrow$ No existe una única t.l. que cumpla las condiciones.

DESCARTO (A) y (B).

O existen infinitas t.l o bien no existe ninguna.

A partir del sistema escalerizado: $\lambda_2 = -\frac{2}{3}\lambda_3$, $\lambda_1 = \frac{1}{3}\lambda_3$, $\lambda_3 \in \mathbb{R}$

Por lo tanto $(1,-2,4)$ es c.l. de $(1,8,-2)$ y $(2,1,5)$.

A partir de esto veo si T es lineal según:

$$(-1)(1,-2,4) = (1/3)(1,8,-2) + (-2/3)(2,1,5)$$

Aplico T:
$$(-1)T(1,-2,4) = (1/3)T(1,8,-2) + (-2/3)T(2,1,5)$$
$$(-1,1,-1,-2) = (1/3)(-3,1,1,4) + (-2/3)(0,-1,2,5)$$
$$(-1,1,-1,-2) = (-1,1,-1,-2) \checkmark$$

$\Rightarrow$ Existe alguna t.l que cumple las condiciones.

DESCARTO (E)

Sabemos que existen ∞ t.l que cumplen las cond. dadas

tenemos que ver ahora cuántas cumplen que

$T(2,0,3) = (-3,2,0,1)$. Para eso, veo si $(2,0,3)$

es c.l. de $\{(1,8,-2),(2,1,5)\}$.

$$(2,0,3) = \alpha(1,8,-2) + \beta(2,1,5)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 8 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} F_2 - 8F_1 \\ F_3 + 2F_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -15 & -16 \\ 0 & 9 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -15 & -16 \\ 0 & 0 & -9 \end{array}\right)$$

sistema incompatible ($\nexists\ \alpha$ y β)

$\Rightarrow (2,0,3)$ no es c.l. de los vectores dados.

Por lo tanto el conjunto $\{(1,8,-2)\,(2,1,5)\,(2,0,3)\}$ forma una base de $\mathbb{R}^3$ y por ende existe una única transformación lineal que cumple la condición dada.

$\Rightarrow$ OPCIÓN CORRECTA C

MÚLTIPLE OPCIÓN

EXAMEN AGOSTO 2020 VIRTUAL
TURNO MATUTINO

EJERCICIO (5)

$S_1 = \{p \in \mathbb{R}_3[x] : p(0) + p'(0) + p''(0) = 0\}$

$S_2 = \{p \in \mathbb{R}_3[x] : p(0) + p'(0) = 0\}$

$S_3 = \{p \in \mathbb{R}_3[x] : p''(0) = 0\}$

Vamos a hallar bases de cada subespacio:

$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \longrightarrow p(0) = d$

$p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \longrightarrow p'(0) = c$

$p''(x) = 6ax + 2b \longrightarrow p''(0) = 2b$

Base de S_1: $S_1 = \{p \in \mathbb{R}_3[x] : d + c + 2b = 0\}$
$\hookrightarrow d = -c - 2b$

$\Rightarrow S_1 = \{ax^3 + bx^2 + cx - c - 2b\}$
$= \{a(x^3) + b(x^2 - 2) + c(x-1)\}$ $\Rightarrow S_1 = [x^3, x^2 - 2, x - 1]$

$\dim S_1 = 3$

Base de S_2:

$S_2 = \{p \in \mathbb{R}_3[x] : c + d = 0\}$
$\hookrightarrow d = -c$

$S_2 = \{ax^3 + bx^2 + cx - c\} = \{a(x^3) + b(x^2) + c(x-1)\}$
$\Rightarrow S_2 = [x^3, x^2, x - 1]$

$\dim S_2 = 3$

Base de S_3:

$S_3 = \{p \in \mathbb{R}_3[x] : 2b = 0\}$

$S_3 = \{ax^3 + cx + d\} \rightarrow S_3 = [x^3, x, 1]$ $\dim S_3 = 3$

- Como $\dim S_1 = \dim S_2 = \dim S_3 = 3 \Rightarrow$ La unión de las bases de S_2 y S_3 no es base de S_1

$\Rightarrow$ DESCARTO (B)

- Opción C: como $x^3 \in S_1 \Rightarrow S_1 \oplus [x^3] = S_1$
  y $\dim S_1 \neq \dim \mathbb{R}_3[x]$
  $\Rightarrow$ DESCARTO C

- Opción E: Mismo argumento que opción C pero para S_2.
  $\Rightarrow$ DESCARTO E

- Opción A: $S_1 \neq S_2 + S_3$ pues el conjunto $\{x^3, x^2, x-1, x, 1\}$ gen. $S_2 + S_3$. Luego, una base de $S_2 + S_3$ es $\{x^3, x^2, x, 1\}$. $\Rightarrow \dim S_2 + S_3 = 4 \neq \dim S_1$
  $\Rightarrow$ DESCARTO A

- Opción D: $\mathbb{R}_3[x] = S_2 \oplus [x^3 + 1]$
  pues x^3+1 no puedo escribirlo como c.l de los vectores de S_1
  $\Rightarrow S_1 \cap [x^3+1] = \{\vec{0}\} \Rightarrow \mathbb{R}_3[x] = S_1 \oplus [x^3+1]$
  $\Rightarrow$ OPCIÓN CORRECTA D

MÚLTIPLE OPCIÓN

EJERCICIO 6

EXAMEN AGOSTO 2020 VIRTUAL

TURNO MATUTINO

$T: \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^4$

$S: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$

$$B(T)_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$S(\overbrace{1,0,1,0}^{v_1}) = (1,2,3,-1)$

$S(\overbrace{0,1,1,0}^{v_2}) = (1,3,2,0)$

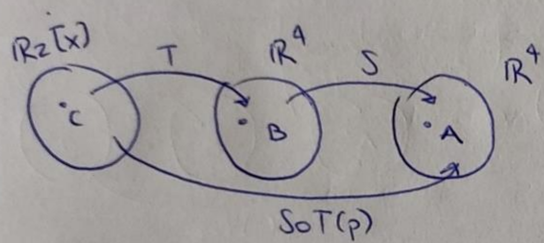
$S(\overbrace{0,0,-1,1}^{v_3}) = (0,-1,-1,2)$

$S(\overbrace{0,0,0,-1}^{v_4}) = (0,0,-1,-2)$

$B = \{ \overbrace{(1,0,1,0)}^{v_1} \overbrace{(0,1,1,0)}^{v_2} \overbrace{(0,0,-1,1)}^{v_3} \overbrace{(0,0,0,-1)}^{v_4} \}$

$C = \{1, x, x^2\}$

$p \in \mathbb{R}_2[x] \;/\; S \circ T(p) = (5, 11, 3, -12)$. $p(1) = ?$



Prop:

$${}_A(S \circ T)_C = {}_A(S)_{BB}(T)_C$$

Hallamos ${}_A(S)_B$ siendo A la base canónica de $\mathbb{R}^4$.

Por def matriz asociada:

$${}_A(S)_B = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ \text{coord}_A S(v_1) & \text{coord}_A S(v_2) & \text{coord}_A S(v_3) & \text{coord}_A S(v_4) \\ | & | & | & | \end{pmatrix}$$

A partir de los datos dados de la letra:

$${}_A(S)_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Multiplicando ${}_A(S)_B$ y ${}_B(T)_C$ obtenemos:

$${}_A(S \circ T)_C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 9 & 2 & 10 \\ 5 & -2 & 2 \\ -9 & -3 & -19 \end{pmatrix}$$

Ahora debemos hallar p tal que $S \circ T(p) = (5, 11, 3, -12)$

$\rightarrow$

Usando el teorema: $\underbrace{coord_A\, S\circ T(p)}_{(5,11,3,-12)} = {}_A(S\circ T)_C\ coord_C\, P$

Sea $p = a + bx + cx^2 \Rightarrow coord_C\, P = (a, b, c)$

Entonces; resuelvo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 3 & 5 \\ 9 & 2 & 10 & 11 \\ 5 & -2 & 2 & 3 \\ -9 & -3 & -19 & -12 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ F_2 - 3F_1 \\ 3F_3 - 5F_1 \\ F_4 + 3F_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & -4 & 1 & -4 \\ 0 & -16 & -9 & -16 \\ 0 & 3 & -10 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ F_3 - 4F_2 \\ 4F_4 + 3F_2 \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & -4 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -13 & 0 \\ 0 & 0 & -37 & 0 \end{array}\right)$$

$-13c = 0 \Rightarrow c = 0$

$-4b = -4 \Rightarrow b = 1$

$3a + 2 = 5 \Rightarrow a = 1$

$\Rightarrow coord_C\, P = (1, 1, 0)$

$\Rightarrow p(x) = 1(1) + 1(x) + 0(x^2) \Rightarrow p(x) = 1 + x$

Por último, evalúo el polinomio en $x = 1$: $p(1) = 2$

$\Rightarrow$ OPCIÓN CORRECTA (E)

MÚLTIPLE OPCIÓN

EXAMEN AGOSTO 2020 VIRTUAL
TURNO MATUTINO

EJERCICIO 7

$\alpha \in \mathbb{R}$ / $T_\alpha : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ / $\quad {}_{\mathcal{E}}(T_\alpha)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha+2 & -2 \\ 1 & \alpha+3 & 4 & -2\alpha \\ -2 & -2 & \alpha-4 & 3 \\ -2 & \alpha & -2 & \alpha^2+3 \end{pmatrix}$

- Como la matriz asociada está dada en la base canónica, las columnas de la matriz generan a la $Im(T)$.

- Observando la matriz, vemos que si $\alpha=-2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 4 & 4 \\ -2 & -2 & -6 & 3 \\ -2 & -2 & -2 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{la primera y segunda columna son iguales}$$

$\Rightarrow$ T no es sobreyectiva para $\alpha=-2$

$\Rightarrow$ DESCARTO (C)

A su vez el conjunto $\{(1,1,-2,-2)(0,4,-6,-2)(-2,4,3,7)\}$ es LI

$\Rightarrow \dim Im(T) = 3$

$\Rightarrow$ DESCARTO (B) y (E)

Falta ver si $\dim Im(T) = 3$ (cuando T no es sobreyectiva) o si pueden haber $\alpha \in \mathbb{R}$ / $\dim Im(T) = 2$.

Escalerización de ${}_{\mathcal{E}}(T_\alpha)_{\mathcal{E}}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha+2 & -2 \\ 1 & \alpha+3 & 4 & -2\alpha \\ -2 & -2 & \alpha-4 & 3 \\ -2 & \alpha & -2 & \alpha^2+3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ F_2-F_1 \\ F_3+2F_1 \\ F_4+2F_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha+2 & -2 \\ 0 & \alpha+2 & -\alpha+2 & -2\alpha+2 \\ 0 & 0 & 3\alpha & -1 \\ 0 & \alpha+2 & 2\alpha+2 & \alpha^2-1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ F_4-F_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha+2 & -2 \\ 0 & \alpha+2 & -\alpha+2 & -2\alpha+2 \\ 0 & 0 & 3\alpha & -1 \\ 0 & 0 & 3\alpha & \alpha^2+2\alpha-3 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha+2 & -2 \\ 0 & \alpha+2 & -\alpha+2 & -2\alpha+2 \\ 0 & 0 & 3\alpha & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^2+2\alpha-2 \end{pmatrix}$$

- Si $\alpha^2+2\alpha-2 \neq 0 \Rightarrow$ T es sobreyectiva
- Si $\alpha^2+2\alpha-2 = 0 \Rightarrow$
  - $\alpha = -1+\sqrt{3}$
  - $\alpha = -1-\sqrt{3}$

$\Rightarrow$ T no sobreyectiva y además $\dim Im(T) = 3$ siempre pues el rango queda igual a 3.

$\Rightarrow$ OPCIÓN CORRECTA (A)