

# Práctico 5

## Conjuntos Consistentes y Completitud del Cálculo Proposicional

### Ejercicio 1

Determine cuáles de los siguientes conjuntos son consistentes y cuáles no. Justifique.

- a.  $\{\neg p_1 \wedge p_2 \rightarrow p_0, p_1 \rightarrow (\neg p_0 \rightarrow p_2), p_0 \leftrightarrow \neg p_2\}$
- b.  $\{p_0 \rightarrow p_1, p_1 \rightarrow p_2, p_2 \rightarrow p_3, p_3 \rightarrow \neg p_0\}$
- c.  $\{p_0, p_1, p_1 \rightarrow \neg p_0\}$
- d.  $\{p_0 \rightarrow p_1, p_0 \wedge p_2 \rightarrow p_1 \wedge p_3, p_0 \wedge p_2 \wedge p_4 \rightarrow p_1 \wedge p_3 \wedge p_5, \dots\}$
- e.  $\{p_0, \neg p_1 \wedge p_2, p_1 \rightarrow \neg p_2\}$

### Ejercicio 2

- a. Demuestre que el conjunto  $\emptyset$  es consistente y que **PROP** es inconsistente.
- b. Dé dos conjuntos consistentes, uno de cardinal finito, no vacío y otro de cardinal infinito. Justifique su respuesta.
- c. Dé dos conjuntos inconsistentes, uno de cardinal finito mayor que uno y otro, distinto de **PROP**, de cardinal infinito. Justifique su respuesta.
- d. Para cada una de las siguientes afirmaciones indique si es verdadera o falsa, justificando en cada caso.
  - I. Para todo  $\Gamma$  y  $\Delta$  subconjuntos consistentes de **PROP**,  $\Gamma \cup \Delta$  es consistente.
  - II. Para todo  $\Gamma$  y  $\Delta$  subconjuntos de **PROP**, si  $\Gamma$  es consistente y  $\Delta$  es inconsistente, entonces  $\Gamma \cap \Delta$  es consistente.

### Ejercicio 3

Demuestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes.

- a. El conjunto  $\{\varphi_1 \dots \varphi_n\}$  es inconsistente
- b.  $\vdash \neg(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n)$
- c.  $\vdash \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_n \rightarrow \neg \varphi_1$

### Ejercicio 4 (Teorema de compacidad)

Demuestre que un conjunto  $\Gamma$  es consistente si y sólo si todo subconjunto finito  $\Delta \subseteq \Gamma$  es consistente.

**Observación**  $\Gamma$  es inconsistente si y solo si existe un subconjunto finito  $\Delta \subseteq \Gamma$  inconsistente.

### Ejercicio 5

Sea  $\Gamma \subseteq \mathbf{PROP}$  un conjunto consistente. Pruebe que:

$\Gamma$  es consistente maximal si y sólo si para toda  $\varphi \in \mathbf{PROP}$  se cumple que  $\varphi \in \Gamma$  o  $\neg \varphi \in \Gamma$ .

## Ejercicio 6

Un conjunto  $\Gamma$  es completo si y sólo si es consistente y para toda  $\varphi \in \text{PROP}$  se cumple que:  $\Gamma \vdash \varphi$  o  $\Gamma \vdash \neg\varphi$ .

- Demuestre que el conjunto  $\{p_0, p_1\}$  no es completo.
- Demuestre que el conjunto  $P = \{p_0, p_1, p_2, \dots, p_n, \dots\}$  es completo.
- De un conjunto  $R$ ,  $R \subseteq \text{PROP}$ ,  $R \cap P = \emptyset$  tal que  $R$  es completo.

## Ejercicio 7

Demuestre que  $\text{CONS}(\Gamma) = \{\sigma \mid \Gamma \vdash \sigma\}$  es consistente maximal si y sólo si  $\Gamma$  es completo.

## Ejercicio 8

Un conjunto  $\Gamma$  es una teoría si y sólo si  $\text{CONS}(\Gamma) \subseteq \Gamma$ .

- Dé dos conjuntos  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  que sean teorías.
- Indique cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas y cuáles no. Justifique su respuesta:
  - Si  $\Gamma$  es teoría entonces  $\Gamma$  es consistente.
  - Si  $\Gamma$  es teoría entonces  $\Gamma$  es inconsistente.
  - Si  $\Gamma$  es una teoría inconsistente entonces  $\Gamma = \text{PROP}$ .
  - $\text{CONS}(\Gamma)$  es consistente si y sólo si  $\Gamma$  es consistente.

## Ejercicio 9

Sea  $\Gamma \subseteq \text{PROP}$ . Demuestre que  $\Gamma$  es consistente maximal si y sólo si  $\Gamma$  es una teoría y además existe una única valuación  $v$  tal que  $v(\Gamma) = 1$ .

(Nota:  $v(\Gamma) = 1$  denota que para toda  $\varphi \in \Gamma$  se cumple que  $v(\varphi) = 1$ )

## Ejercicio 10

- Demuestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:
  - $\Gamma$  es completo.
  - $\Gamma$  es consistente y para cualquier  $\varphi, \psi \in \text{PROP}$  se cumple que:  $\Gamma \vdash \varphi \vee \psi$  si y sólo si  $\Gamma \vdash \varphi$  o  $\Gamma \vdash \psi$ .
- Demuestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:
  - $\Gamma$  es consistente maximal.
  - $\Gamma$  es una teoría consistente y para cualquier  $\varphi, \psi \in \text{PROP}$  se cumple que:  $\varphi \vee \psi \in \Gamma$  si y sólo si  $\varphi \in \Gamma$  o  $\psi \in \Gamma$ .

## Ejercicio 11

Decimos que  $\varphi$  es independiente de  $\Gamma$  si  $\Gamma \not\vdash \varphi$  y  $\Gamma \not\vdash \neg\varphi$ .

- Dé un conjunto  $\Gamma$  y una fórmula  $\varphi$  tales que  $\varphi$  sea independiente de  $\Gamma$ . Justifique su respuesta.
- Demuestre que  $p_1 \rightarrow p_2$  es independiente de  $\{p_1 \leftrightarrow p_0 \wedge \neg p_2, p_2 \rightarrow p_0\}$

## Ejercicio 12

Dados los siguientes conjuntos:

- $\Gamma_k = \{p_i : i \text{ es múltiplo de } k\}$
- $\Delta_k = \{\neg p_i : i \text{ no es múltiplo de } k\}$

a. Demuestre que

- I.  $(\forall k \in \mathbb{N}) \Gamma_k \not\vdash \perp$
- II.  $(\forall k \in \mathbb{N}) \Delta_k \not\vdash \perp$
- III.  $(\forall n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N})$  si  $n < m$  y  $n > 0$  entonces  $\Gamma_n \cup \Delta_m \vdash \perp$   
(Observar que  $n$  no es múltiplo de  $m$ .)

b. Indique si se cumple la siguiente afirmación. Demuestre o dé un contraejemplo según corresponda.

$(\forall k \in \mathbb{N}) \text{CONS}(\Gamma_k \cup \Delta_k)$  es consistente maximal.

## Ejercicio 13

Sea  $P = \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$  el conjunto de letras proposicionales. Para cada  $I \subseteq \mathbb{N}$  considere el conjunto  $L(I) = \{p_i \mid i \in I\} \cup \{\neg p_i \mid i \notin I\}$

- a. Pruebe que  $L(\{2\}) \cup \{p_0\}$  es inconsistente.
- b. Pruebe que para todo  $I \subseteq \mathbb{N}$ ,  $\text{CONS}(L(I))$  es consistente maximal.

## Ejercicio 14

Considere el siguiente conjunto  $\Gamma = \{p_0, p_1\}$

- a. Pruebe que  $\neg p_2 \notin \text{Cons}(\Gamma)$ .
- b. Defina una teoría  $T$  consistente que cumpla las siguientes condiciones:

- $\text{Cons}(\Gamma) \subset T$
- $\neg p_2 \in T$
- $T$  no es consistente maximal.

Justifique su respuesta.

- c. Defina un conjunto consistente maximal  $\Delta_0$  tal que  $T \subset \Delta_0$ .
- d. Defina un conjunto consistente maximal  $\Delta_1$  tal que  $\Gamma \subset \Delta_1$  pero  $T \not\subset \Delta_1$ .
- e. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas.
  - I.  $\Delta_0 \cup \Delta_1$  es teoría.
  - II.  $\Delta_0 \cup \Delta_1$  es consistente.

Justifique su respuesta.

## Ejercicio 15

Considere un conjunto infinito  $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots\} \subseteq \text{PROP}$ . Demuestre que si para toda valuación  $v$  existe un natural  $n$  tal que  $v(\varphi_n) = 1$ , entonces existe un natural  $m$  tal que  $\vdash \neg(\neg\varphi_1 \wedge \dots \wedge \neg\varphi_m)$ . Sugerencia: aplique el teorema de compacidad.

## Ejercicio 16

Considere el lenguaje proposicional  $\mathcal{L}_0$  con una única letra proposicional:  $p_0$  y conectivos  $\{\wedge, \vee\}$ .

- De una definición inductiva de  $\mathcal{L}_0$ .
- Considere la definición de valuación de forma análoga a PROP. ¿Cuántas valuaciones distintas existen?
- Análogamente a PROP se define

$$\alpha \text{ eq } \beta \text{ si y solo si } (\forall v : \text{valuacion}) v(\alpha) = v(\beta)$$

Demuestre que para cualquier  $\alpha \in \mathcal{L}_0$ ,  $\alpha \text{ eq } p_0$ .

- Se define un cálculo  $\text{DER}_0$ , y se pretende demostrar la corrección y completitud de  $\mathcal{L}_0$  con el cálculo  $\text{DER}_0$ .

- Si  $\varphi \in \mathcal{L}_0$ , entonces  $\varphi \in \text{DER}_0$

$$\begin{array}{c} \Gamma \\ \swarrow \quad \searrow \\ \varphi \end{array} \in \text{DER}_0, \text{ entonces } \begin{array}{c} \Gamma \\ \swarrow \quad \searrow \\ \varphi \\ \hline p_0 \end{array} \in \text{DER}_0$$

$$\begin{array}{c} \Gamma \\ \swarrow \quad \searrow \\ p_0 \end{array} \in \text{DER}_0 \text{ y } \varphi \in \mathcal{L}_0, \text{ entonces } \begin{array}{c} \Gamma \\ \swarrow \quad \searrow \\ p_0 \\ \hline \varphi \end{array} \in \text{DER}_0$$

Para cualquier derivación  $\mathcal{D} \in \text{DER}_0$  se definen, análogamente a DER, el conjunto de hipótesis  $\text{Hip}(\mathcal{D})$  y la conclusión  $\text{Conc}(\mathcal{D})$ . Asimismo, se define la relación  $\Gamma \vdash \varphi$ .

- Demuestre que para cualquier  $\varphi \in \mathcal{L}_0$  y  $\Gamma \subseteq \mathcal{L}_0$  se cumple que:  $\Gamma \vdash \varphi$  si y solamente si  $\Gamma \neq \emptyset$ .
- Demuestre que el sistema es correcto y completo, es decir,

$$\text{para cualquier } \varphi \in \mathcal{L}_0 \text{ y } \Gamma \subseteq \mathcal{L}_0 : \quad \Gamma \vdash \varphi \text{ si y solamente si } \Gamma \models \varphi.$$

## Ejercicio 17

Se considera  $\Gamma \subseteq \text{PROP}$ .

En el teórico se dan las definiciones de **conjunto consistente** y **consistente maximal** basados en la relación de derivación  $\vdash$ . También se dan caracterizaciones equivalentes expresadas en términos semánticos:

**Caracterización semántica de la consistencia.**  $\Gamma$  es consistente si y solo si existe una valuación  $v$  tal que  $v(\Gamma) = 1$

**Caracterización semántica de la consistencia maximal.**  $\Gamma$  es consistente maximal si y solo si existe una valuación  $v$  tal que  $\Gamma = \{\varphi \in \text{PROP} \mid v(\varphi) = 1\}$

Demostrar la siguiente caracterización semántica para la definición de **conjunto completo** vista en el ejercicio 6:

**Caracterización semántica de completitud.**  $\Gamma$  es **completo** si y solo si existe una **única** valuación  $v$  que cumple  $v(\Gamma) = 1$ .