MATEMÁTICA DISCRETA I - 2020 - 1$^{\text{ER}}$ SEMESTRE

Práctico 9 - Soluciones

Ejercicio 1.

a. a, b, a
b. b, e, f, g, e
c. b, a, c, d
d. a, b, a
e. b, c, d, e, g, f, e, b
f. Comenzemos contando los caminos antihorarios que empiezan en b:
1) $b, a, c, b,$
2) b, c, d, e, b
3) b, a, c, d, e, b

1) El camino puede empezar en cualquiera de los 3 vertices involucrados en él, en b como ya vimos, pero tambien en a o c. Total tenemos 3 caminos de tipo 1). A su vez estos pueden ser reccoridos en sentido horario. Así que hay **3× 2=6 ciclos** que pasan por b (de largo 3), y por los vertices a,c.
2) El camino puede empezar en b como vimos, pero tambien en c,d o e. Pueden ser recorrridos en sentido horario. Así que hay **4× 2=8 ciclos** que pasan por b (de largo 4) y por los vértices c,d,e.
3) El camino puede empezar en b como vimos, pero tambien en los vértices a,c,d,e. Pueden ser recorridos en sentido horario. Así que hay **5× 2=10 ciclos** que pasan por b (de largo 5) y por los vértices a,c,d,e.
TOTAL: 24 ciclos

g. 1) b, e, f**, 2)** b, e, g, f**, 3)** b, c, d, e, f**, 4)** b, c, d, e, g, f**, 5)** b, a, c, d, e, f**, 6)** b, a, c, d, e, g, f

Ejercicio 2

a. $dist(d, e) = dist(d, c) = dist(d, f) = 1,$
$dist(d, g) = dist(d, k) = 2,$
$dist(d, l) = dist(d, m) = dist(d, j) = dist(d, h) = 3,$
$dist(d, i) = 4.$
b. $diam(K_n) = 1, diam(K_{n,m}) = 2$ a menos que $n = m = 1$ en cuyo caso es 1, $diam(P_n) = n - 1,$ $diam(C_n) = \lfloor n/2 \rfloor$
c. La cantidad de caminos simples en P_n son $n(n-1)$ pues hay n elecciones para el vértice en el cual empieza el camino y elegido el vértice de arranque puedo llegar a los restantes $n-1$ vértices con un camino simple.
La cantidad de caminos simples en $K_{1,n}$ es $2n + n(n-1) = n^2 + n$ pues si $K_{1,n}$ consiste de el vértice $\{a\}$ y de los vértices $\{1, 2, \cdots, n\}$ entonces hay, n caminos simples de longitud 1 de la

forma a, i con $i = 1, \cdots, n$ que pueden recorrerse en el otro sentido i, a totalizando $2n$ caminos de largo 1, y hay $n(n-1)$ caminos simples de longitud 2, pues elegido i del conjunto $\{1, \cdots, n\}$ (n formas de elegirlo) hay un camino simple i, a, j para todo $j = 1, \cdots, n, j \neq i$ (hay $(n-1)j$'s disponibles).

Ejercicio 3
Como son de largo 11 no pueden pegar la vuelta, así que son como sumar cierta cantidad de H's (sentido horario) y cierta cantidad de A's (sentido antihorario) de forma tal que la cantidad de A's y H's sean 11. Supongamos x, y adyacentes e y a distancia 1 de x en sentido horario. La única forma entonces de llegar de x a y en 11 pasos es que todas las H's se cancelen con las A's salvo una H. En cualquier camino usamos entonces 5 A's y 6 H's y entonces cualquier camino esta dado por una permutación de AAAAAHHHHHH: hay $11!/(6!5!) = C_5^{11} = 462$ caminos simples de x a y de largo 11.

Ejercicio 4 La cantidad total de caminos de largo n que comienzan en un vértices es 2^n, si n es impar caigo en los adyacentes y si es par caigo en el opuesto. Así que si n es impar hay 0 formas. Si n es par, al dar $n-1$ pasos de 2^{n-1} formas caigo en alguno de los dos adyacentes, luego hay una única forma de ir al opuesto así que hay 2^{n-1} formas.

Ejercicio 5

a. $2n$
b. Hay 24 3-ciclos en W_3 y W_4
c. Hay 24 4-ciclos en W_3 y 40 4-ciclos en W_4 y W_5
d. Hay 0 5-ciclos en W_3, 40 5-ciclos en W_4 y 60 5-ciclos en W_5.
e. Hay 0 6-ciclos en W_3 y W_4 y 60 6-ciclos en W_5.
f. Para calcular ciclos de largo k, observemos que si

- $k < n$ o $k = n + 1$ un k-ciclo debe pasar por v_0. Si pensamos en los k-ciclos que empiezan en v_0 vemos que basta elegir el vértice v_i con $i = 1, \cdots, n$ que irá a continuación de v_0, pues luego el ciclo queda bien determinado (debe recorrer $k-2$ aristas por fuera del grafo rueda y regresar a v_0). Por lo tanto empezando en v_0 tenemos n ciclos de largo k. Como no importa el sentido ni tampoco si arranca en v_0 o pasa por él, tenemos $2kn$ ciclos de largo k (2 por el sentido yk por las elecciones para el vértice que comienza el ciclo).
- $k = n$ se suman al caso anterior $2n$ k-ciclos más, pues la rueda exterior puede ser recorrida en dos sentidos y empezar en cualquiera de los n vértices $v_1, \cdots, v_n$. Por lo tanto en este caso tendríamos $2nk + 2n = 2n(k+1)$ k-ciclos.
- $k > n + 1$ hay 0 k-ciclos.

Ejercicio 6 Si no lo tuvieran, eligiendo un camino que una un vértice del primero a un vértices del segundo podríamos construir un camino más largo que cualquiera de los dos. En efecto, sea $v_0, v_1, \ldots, v_k$ uno de los caminos y $u_0, u_1, \ldots, u_k$ el otro tomemos $v_i, x_1, x_2, \ldots, x_a = u_j$ el camino más corto que une un vértices del primer camino con uno del segundo. Como es el más corto no puede tener vértices internos en dichos caminos. Entonces puedo construir cuatro caminos uno de los cuales al menos tendrá longitud mayor que los primeros, a saber: $C_1 = v_0, v_1, \ldots, v_i, x_1, x_2, \ldots, x_k = u_j, u_{j+1}, \ldots, u_k$ de longitud $i + a + (k - j)$, $C_2 = v_0, v_1, \ldots, v_i, x_1, x_2, \ldots, x_k = u_j, u_{j-1}, \ldots, u_0$ de longitud $i + a + j$,

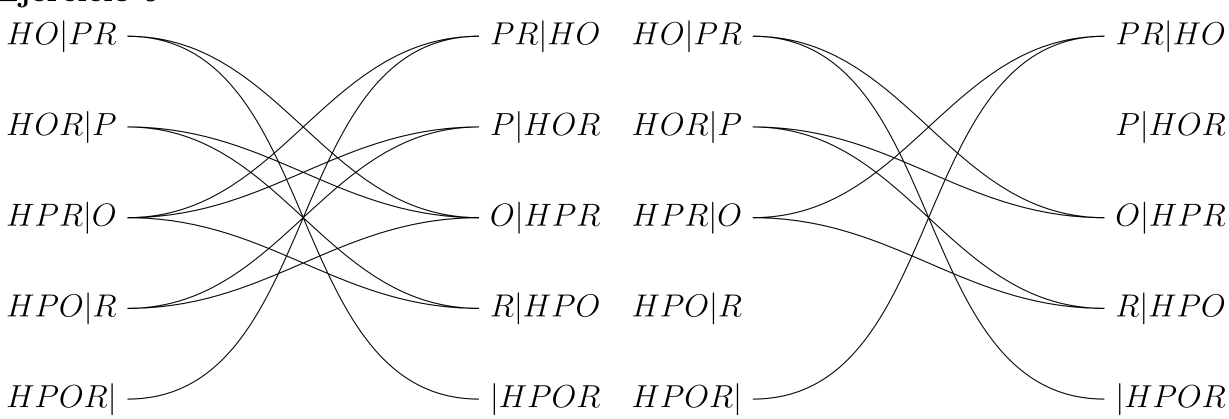
$C_3 = v_k, v_{k-1}, \ldots, v_i, x_1, x_2, \ldots, x_k = u_j, u_{j+1}, \ldots, u_k$ de longitud $(k-(i-1)) + a + (k-j)$, $C_1 = v_k, v_{k-1}, \ldots, v_i, x_1, x_2, \ldots, x_k = u_j, u_{j-1}, \ldots, u_0$ de longitud $(k-i+1)+a+j$. Sumando las longitudes y dividiendo entre 4 tenemos:
$i+a+(k-j)+i+a+j+(k-(i-1))+a+(k-j)+(k-i+1)+a+j = 4k+4a$ que dividido 4 es $k+a$, así que por el principio del palomar, alguno de los cuatro caminos tiene longitud mayor o igual a $k+a > k$.

Ejercicio 7 1 está aislado, 2 se conecta con los pares, de los impares, 3, 5 y 7 se contectan con 6, 10 y 14, respectivamente. Los primos 11, 13 no se conectan con ningún otro y 15 se conecta con 5, así que tenemos cuatro componentes conexas, la del 1, la del 2, la del 11 y la del 13.

Ejercicio 8

- $K(G-u) = K(G)$: tomo $G = (V, E)$ con $V = \{u, v, w\}$ y $E = \{\{v, w\}, \{u, w\}\}$.
- $K(G-v) > K(G)$: tomo $G = (V, E)$ con $V = \{u, v, w\}$ y $E = \{\{u, v\}, \{v, w\}\}$.
- $K(G-w) < K(G)$: tomo $G = (V, E)$ con $V = \{u, v, w\}$ y $E = \{\{u, v\}\}$.

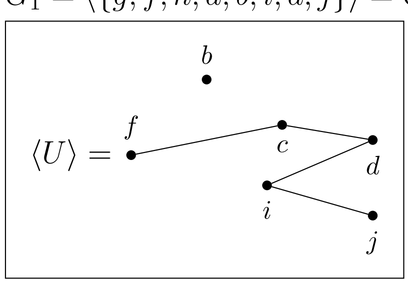
Ejercicio 9

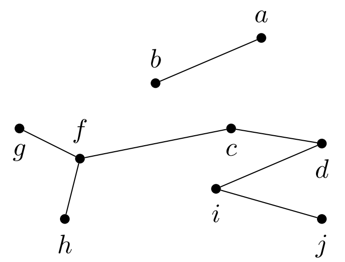


a. Un viaje posible es $HPOR|, PR|HO, HPR|O, R|HPO, HOR|P, O|HPR, HO|PR, |HPOR$.
b. No se puede porque queda un grafo bipartito por lo que la cantidad de viajes para ir de una orilla a la otra debe ser impar.

Ejercicio 10

a. 3
b. $G_1 = \langle\{g, f, h, a, b, i, d, j\}\rangle = G - c$, $G_2 = \langle\{b, f, h, c, i, d, j\}\rangle = G - g - a$,
c.



d. 

$(G - e_1) - e_2 = (G - e_2) - e_1 = G - \{e_1, e_2\}$

e. $(\{a, b\}, \emptyset)$

f. $2^9 = 512$ porque cada arista en E puedo elegir ponerla o no en el grafo recubridor. Hay 9 aristas en E y 2 elecciones posibles para cada arista.

g. 4

h. ninguno.

Ejercicio 11 (Examen marzo 2001)

El hipercubo H_n de dimensión n, es el grafo cuyos vértices son las n-uplas de ceros y unos, tales que dos n-uplas son adyacentes si coinciden en todas sus coordenadas salvo exactamente en una de ellas, por ejemplo $(0, 0, \ldots, 0)$ es adyacente a $(1, 0, \ldots, 0)$ pero no a $(1, 0, \ldots, 0, 1)$.

a. Halle los conjuntos de vértices de H_1, H_2, H_3 y dibuje dichos grafos.

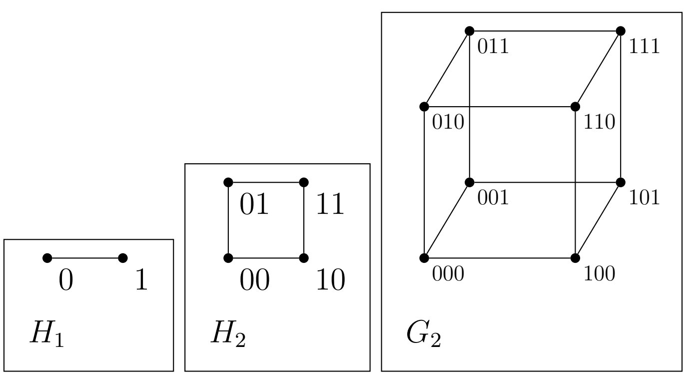
b. ¿Cuántos vértices y aristas tiene H_n?

c. Halle 2 caminos simples en H_5 de $(0, 0, 1, 1, 0)$ a $(0, 0, 0, 1, 0)$.

d. Demuestre que H_n no tiene 3–ciclos.

e. ¿Cuántos 4–ciclos tiene H_n? (*Sugerencia*: cuente cuántos 4–ciclos pasan por un vértice fijo.)

Solución:

a. 

b. 2^n

c. $00110, 00010$ y $00110, 00100, 00000, 00010$

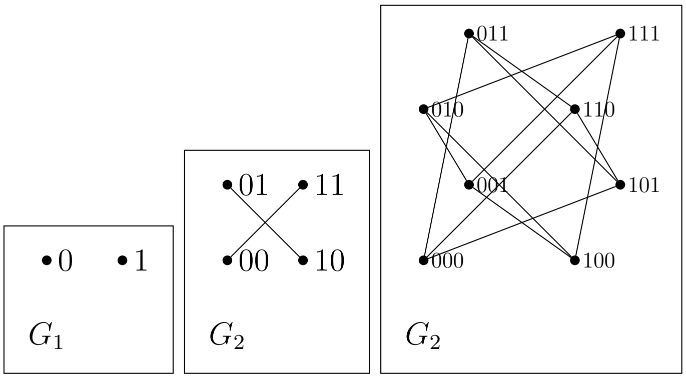
d. Por ser bipartito al no ser adyacentes entre sí aquellos vértices con cantidad par de 1s ni aquellos con una cantidad impar de unos.

e. Por cada vértices pasan $\binom{n}{2}$ 4-ciclos a saber, los de la forma
$x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n$,
$x_1, \ldots, (1 - x_i), \ldots, x_j, \ldots, x_n$,
$x_1, \ldots, (1 - x_i), \ldots, (1 - x_j), \ldots, x_n$,

$x_1, \ldots, x_i, \ldots, (1 - x_j), \ldots, x_n,$
$x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n,$
para cada $\{i, j\}$. Como cada ciclo puede recorrerse en dos sentidos, la cantidad es

$$2 \times 2^n \binom{n}{2}$$

Ejercicio 12

a. 

b. Ninguno

c. 2