Apuntes de OpenFING

Matemática Discreta I

Ignacio López Echetto

2020

Resumen

El presente material se basa principalmente en las clases de la edición 2016 del curso, registradas por OpenFING, proyecto a cuyos integrantes e impulsores (estudiantes y docentes que colaboran abriendo las puertas de sus clases) quiere agradecer especialmente quien escribe, entendiendo que su labor ayuda fuertemente a aumentar las posibilidades de cursar las carreras de la FIng de quienes, por motivos geográficos o laborales, no podemos asistir a todas las clases que se dictan presencialmente.

No obstante, y por motivos ajenos a la grabación de clases por parte del proyecto OpenFING, cuya labor es para esta asignatura como para otras, excelente, en ciertos casos fue necesario recurrir a otras fuentes, primordialmente el libro de cabecera *Discrete and combinational mathematics: An applied introduction*, en su quinta edición, cuyo autor es Ralph P. Grimaldi. En otras casos se hizo uso de otras fuentes, que se aclaran mediante notas al pie.

El anterior comentario tiene por cometido advertir a quien lea estas notas, acerca de que algunas definiciones pueden variar respecto de las que se convengan en tal o cual edición del curso.

Respecto de la estructura del material, a excepción de algunos *apéndices*, se encuentra alineada con las clases de esta asignatura en su edición 2016 registradas por OpenFING.

Las definiciones y axiomas se resaltan con color anaranjado, mientras que las proposiciones (teoremas, observaciones, etc.) se resaltan con color amarillo, de modo de facilitar su lectura.

Para finalizar esta introducción, el autor desea brindar a quienes vayan a utilizar este material, el enlace al proyecto original. Siguiendo dicho enlace, es posible acceder al código fuente LaTeX, el cual puede ser copiado y editado, algo que puede ser especialmente relevante teniendo en cuenta las consideraciones previas, y que además supone una interesante manera de familiarizarse con este sistema de escritura (el autor, aunque ya lo utilizaba previamente, profundizó en su uso al elaborarlas).

1. Inducción completa

Teorema (Principio de inducción matemática[1]). Sea P una propiedad que puede o no tener un natural n. $P(n)$ quiere decir "el número n cumple la propiedad P".

- Si $P(1)$ y $(P(n) \Rightarrow P(n+1))$, entonces $\forall n, P(n)$.
- Si $P(n_0)$ y $(P(n) \Rightarrow P(n+1))$, entonces $\forall n \,/\, n \geq n_0, P(n)$.

(*esta última proposición es más general*)

Observación (Formulación alternativa del principio de inducción completa). Si $P(1) \wedge (\forall k \leq n, P(k))$, entonces $P(n)$.

2. Conteo

Definición (Permutación). Dado un conjunto de n objetos, se dice que un orden (lineal) de estos es una **permutación**. Si $1 \leq r \leq n$, una permutación de tamaño r es la elección de r de estos objetos en forma ordenada.

- $P_n = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1 = n!$

(*cantidad de permutaciones de n objetos*)

- $P(n,r) = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$

(*cantidad de permutaciones de n objetos, de tamaño r*)

Observación. $r = n \Rightarrow P_n = P(n,r)$.

[1] Aunque en clase se menciona que "será tomado como un axioma", el desarrollo del libro de Grimaldi toma como axioma el principio de buena ordenación y demuestra a partir de este la validez del principio de inducción matemática.

3. Combinatoria

Definición (Combinación). Si tenemos un conjunto de n elementos y $0 \leq k \leq n$, la elección de k elementos de ese conjunto se denomina **combinación** de n de tamaño k, y la cantidad de combinaciones posibles se calcula como:

$$C(n,k) = C_k^n \overset{not.}{=} \binom{n}{k} = \frac{P(n,k)}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Observación. $C_k^n = C_{n-k}^n$.

4. Combinatoria

Teorema (Teorema binomial).

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n a^k b^{n-k}.$$

Demostración. En $(a+b)(a+b)...(a+b)$ hay tantos sumandos de la forma $a^k b^{n-k}$ como maneras posibles de elegir k de los n factores $(a+b)$, es decir, C_k^n maneras.

Observación (Corolario del teorema binomial). Si $n \geq 1$ entonces

$$C_0^n + C_1^n + ... + C_{n-1}^n + C_n^n = 2^n.$$

Demostración. Tomar $a = b = 1$ en el teorema binomial.

Observación (Corolario del corolario del teorema binomial[2]). La cantidad de subconjuntos de un conjunto con n elementos, es 2^n.

Observación (Corolario del teorema binomial). Si $n \geq 1$ entonces

$$C_0^n - C_1^n + ... + (-1)^n C_n^n = 0.$$

Demostración. $C_0^n - C_1^n + ... + (-1)^n C_n^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_k^n = (-1+1)^n$ (se toma $a = -1$ y $b = 1$ en el teorema binomial).

[2]Dado en clase n°6.

Teorema (Teorema multinomial)**.** Dada la expresión $(a_1 + a_2 + ... + a_t)^n$, el coeficiente de $a_1^{n_1} a_2^{n_2} ... a_t^{n_t}$ es

$$\frac{n!}{n_1!\, n_2! \dots n_t!}.$$

Demostración. $(a_1+a_2+...+a_t)(a_1+a_2+...+a_t)...(a_1+a_2+...+a_t)$ tiene n factores. El coeficiente de $a_1^{n_1} a_2^{n_2} ... a_t^{n_t}$ es igual a

$$C_{n_1}^{n} \times C_{n_2}^{n-n_1} \times C_{n_3}^{n-n_1-n_2} \times ... \times C_{n_t}^{n-n_1-...-n_{t-1}}$$

que es, por definición, igual a

$$\frac{n!}{(n-n_1)!\, n_1!} \times \frac{(n-n_1)!}{(n-n_1-n_2)!\, n_2!} \times ... \times \frac{(n-n_1-...-n_{t-2})!}{(n-n_1-...-n_{t-1})!\, n_{t-1}!} \times \frac{(n-n_1-...-n_{t-1})!}{(n-n_1-...-n_t)!\, n_t!}$$

Usando que $(n - n_1 - ... - n_t)! = 0! = 1$ y cancelando, se tiene que la expresión es igual a

$$\frac{n!}{n_1!\, n_2! ... n_t!}.$$

5. Combinatoria

Definición (Combinaciones con repetición)**.** Si queremos elegir r objetos con repetición de un conjunto de n objetos distintos, podemos hacerlo de

$$CR_r^n = C_r^{n+r-1}$$

maneras.

(*Ejemplo: la cantidad de maneras de distribuir diez galletas entre cuatro niñas es* CR_{10}^4)

Teorema (Fórmula de Stifel[3])**.** $C_n^m + C_{n+1}^m = C_{n+1}^{m+1}$

6. Funciones

Definición (Función (informal))**.** Se llama **función** $f : A \to B$ a una manera de asignar a un elemento de A un elemento de B.
Notación: $f(a) = b$, donde $a \in A$ y $b \in B$.

- A recibe el nombre de **dominio** de f.

[3]Extraído de Desarrollo de una forma cerrada para la expresión combinatoria $\sum_{j=0}^{n} jC_r^j$.

- B recibe el nombre de **codominio** de f.
- La **imagen** de f se define como $Im(f) = \{b \in B \,/\, b = f(a)$ para algún $a \in A\}$.

Definición (Sobreyectividad)**.** Una función se dice **sobreyectiva** $\Leftrightarrow$ su codominio es igual a su imagen.

Definición (Inyectividad)**.** $f : A \to B$ se dice **inyectiva** $\Leftrightarrow$ $(a, a' \in A \wedge f(a) = f(a')) \Rightarrow a = a'$.
Es decir, debe cumplirse que $\forall a, a' \in A$, $(a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a'))$.

Definición (Producto cartesiano)**.** Sean A y B conjuntos. El **producto cartesiano** de A y B se define como

$$A \times B = \{(a,b) \,/\, a \in A \wedge b \in B\}.$$

Definición (Relación)**.** Una **relación** R de A en B se define como un subconjunto de $A \times B$ ($R \subset A \times B$).
Notación: $(a,b) \in R \Leftrightarrow a\,R\,b$.

Definición (Función (formal))**.** Una **función** f de A en B se define como una relación de A en B tal que $\forall a \in A$, $\exists!\, b \in B \,/\, (a,b) \in f$. [4]

Definición (Cardinal de un conjunto)**.** El **cardinal** de un conjunto se define como su cantidad de elementos.
Notación: $|A|$ o $\#A$.

Observación. Sean $A = \{a_1, ..., a_m\}$ y $B = \{b_1, ..., b_n\}$, con $\#A = m$ y $\#B = n$.

- $\#(A \times B) = m \times n = \#A \times \#B$.
- Hay $2^{m \times n}$ relaciones de A en B (*porque una relación es un subconjunto cualquiera de* $A \times B$).
- Hay n^m funciones de A en B.
- Si $n \geq m$, hay $\frac{n!}{(n-m)!}$ funciones inyectivas de A en B.

[4] Léase $\exists!$ como "existe y es único".

7. Funciones

Teorema. Sean A y B conjuntos, tales que $\#A = m$ y $\#B = n$, con $m \geq n$. La cantidad de funciones sobreyectivas de A en B es

$$\begin{aligned} Sob(m,n) &= n^m - C_1^n(n-1)^m + C_2^n(n-2)^m - C_3^n(n-3)^m + \ldots + \underbrace{C_n^n(n-n)^m}_{=0} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k C_k^n (n-k)^m. \end{aligned}$$

Demostración[5]. Sea $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$. Para $i = 1, \ldots, n$, sea C_i la condición "f no toma el valor b_i" (es decir que b_i no está en el recorrido de f). Entonces

$$f \text{ es sobreyectiva} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ no cumple ninguna de las condiciones } C_1, \ldots, C_n$$

de modo que $Sob(m,n) = N(\overline{C_1}\ldots\overline{C_n})$. Trabajamos en la parte derecha de la igualdad:

- $N = n^m$
- $$\begin{aligned} N(C_1) &= \text{cantidad de funciones que no toman el valor } b_1 \\ &= \text{cantidad de funciones de } A \text{ en } \{b_2, \ldots, b_n\} \\ &= \underline{(n-1)^m} \end{aligned}$$
- $N(C_1) = N(C_2) = \ldots = N(C_n)$
- $$\begin{aligned} N(C_1\,C_2) &= \text{cantidad de funciones de } A \text{ en } \{b_3, \ldots, b_n\} \\ &= \underline{(n-2)^m} \end{aligned}$$
- $N(C_i\,C_j) = N(C_1\,C_2)$
- $N(C_i\,C_j\,C_k) = \underline{(n-3)^m}$
- $\vdots$

Por lo tanto, retomando:

$$\begin{aligned} Sob(m,n) &= N(\overline{C_1}\ldots\overline{C_n}) \\ &= N - \sum_{1\leq i\leq n} N(C_i) + \sum_{1\leq i<j\leq n} N(C_i\,C_j) + \ldots + (-1)^n N(C_1\ldots C_n) \\ &= n^m - C_1^n(n-1)^m + C_2^n(n-2)^m - C_3^n(n-3)^m + \ldots + \underbrace{C_n^n(n-n)^m}_{=0} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k C_k^n (n-k)^m. \end{aligned}$$

Axioma (Principio del palomar). Si hay m palomas en n palomares y $m > n$, entonces hay al menos un palomar con más de una paloma.

[5] Dada en la clase n°10.

8. Principio de inclusión y exclusión

Teorema (Principio de inclusión y exclusión)**.** Sea S un conjunto de N elementos.
Notación previa:

- $C_1 \dots C_t \to$ condiciones.
- $N(C_i) \to$ cantidad de elementos de S que satisfacen la condición C_i.
- $N(C_i C_j) \to$ cantidad de elementos de S que satisfacen las condiciones C_i y C_j simultáneamente.
- $N(\overline{C_i}) \to$ cantidad de elementos de S que <u>no</u> satisfacen la condición C_i.

Enunciado del teorema:[6]

$$\begin{aligned} N(\overline{C_1}\,\overline{C_2}\dots\overline{C_t}) &= N \\ &\quad -[N(C_1)+N(C_2)+\dots+N(C_t)] \\ &\quad +[N(C_1 C_2)+N(C_1 C_3)+\dots+N(C_{t-1} C_t)] \\ &\quad -[N(C_1 C_2 C_3)+N(C_1 C_2 C_4)+\dots+N(C_{t-2} C_{t-1} C_t)] \\ &\quad + \\ &\quad \vdots \\ &\quad +(-1)^t N(C_1 C_2 \dots C_t) \\ &= N - \sum_{1\le i\le t} N(C_i) + \sum_{1\le i<j\le t} N(C_i C_j) - \dots + (-1)^t N(C_1 C_2 \dots C_t) \\ &\underset{(not.)}{=} N - S_1 + S_2 - \dots + S_t. \end{aligned}$$

Demostración.

- Si $x \in S$ no satisface ninguna condición $C_1, \dots, C_t$, entonces x contribuye al lado derecho de la ecuación con un 1 (por el término N, ya que para ser contado por alguno de los términos S_i debería cumplir al menos una condición).
- Si $x \in S$ satisface exactamente r condiciones $(1 \le r \le t)$:
  - x es contado 1 vez en N.
  - x es contado r $(= C_1^r)$ veces en S_1.
  - x es contado C_2^r veces en S_2.
  - $\vdots$
  - x es contado 1 $(= C_r^r)$ veces en S_r.
  - x <u>no</u> es contado en $S_{r+1}, \dots, S_t$.

Entonces, si $x \in S$ satisface exactamente r condiciones, contribuye al lado derecho de la ecuación con $1 - C_1^r + C_2^r - C_3^r + \dots + (-1)^r C_r^r$ unidades, es decir, con $\sum_{k=0}^{r} C_k^r (-1^k)\, 1^k$ unidades, lo que (por el teorema binomial tomando $a = -1$ y $b = 1$) es igual a 0.

[6]Este enunciado, así como su demostración, se formalizaron en la clase n°9.

9. Principio de inclusión y exclusión

Teorema (Lema). Sean $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $m \leq n$.
La cantidad de múltiplos de m que hay entre 1 y n es $\left[\frac{n}{m}\right]$ ("parte entera de $\frac{n}{m}$").

10. Principio de inclusión y exclusión

Definición (Números de Stirling de 2° grado). Se definen los **números de Stirling de 2° grado** como

$$S(m,n) = \frac{Sob(m,n)}{n!}.$$

(*Ejemplo: la cantidad de maneras de distribuir jugadores en camionetas indistinguibles, con al menos un jugador en cada camioneta*)

Observación. La cantidad de maneras de distribuir m objetos distintos en n contenedores iguales (sin dejar ninguno vacío) es $S(m,n)$.

Observación. La cantidad de maneras de distribuir m objetos distintos en n contenedores iguales (posiblemente dejando alguno vacío) es

$$S(m,n) + S(m,n-1) + \ldots + S(m,1)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} S(m,i).$$

11. Principio de inclusión y exclusión y funciones generatrices

Definición (Desorden). Una permutación de $\{1, \ldots, n\}$ en la que ningún elemento queda en su lugar se llama **desorden** de $\{1, \ldots, n\}$.
La cantidad de desórdenes de $\{1, \ldots, n\}$ se denota d_n.

(*Ejemplo: cantidad de jugadas perdedoras en Maroñas (ningún caballo termina en la posición apostada)*)

Observación.

$$\begin{aligned} d_n &= n! - C_1^n(n-1)! + C_2^n(n-2)! - C_3^n(n-3)! + \ldots + (-1)^n(n-n)! \\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_k^n (n-k)! \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$d_n = n!P_{n,0}(-1) \sim \frac{n!}{e}.$$

[7] (el error de esta aproximación es menor a $\frac{1}{n+1}$)

12. Funciones generatrices

Definición (Función generatriz). Sea $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ una sucesión de números reales. Su **función generatriz** se define como

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \ldots$$

Observación. Si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$ ($f(x)$ es función generatriz de la sucesión $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$), entonces $xf(x) = a_0x + a_1x^2 + a_2x^3 + \ldots$ ($xf(x)$ es función generatriz de la sucesión $(0, a_0, a_1, \ldots)$).

Observación (Tabla de funciones generatrices).

Función generatriz	Sucesión	
$(1+x)^n$	$(C_0^n, C_1^n, \ldots C_n^n, 0, 0, \ldots)$	*Por teorema binomial con* $a = 1$ *y* $b = x$
$\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$	$(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n}, 0, 0, \ldots)$	*Porque* $(1-x)(1+x+x^2+\ldots+x^n) = 1-x^{n+1}$
$\frac{1}{1-x}$	$(1, 1, 1, \ldots)$	*Porque* $(1-x)(1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots) = 1$

[7] $P_{n,0}$ refiere al polinomio de Taylor de grado n desarrollado en 0, para la función $f \,/\, f(x) = e^x$.

Función generatriz	Sucesión	
$\dfrac{x}{1-x}$	$(0,1,1,1,\ldots)$	*Por la última Observación*
$\dfrac{1}{(1-x)^2}$	$(1,2,3,\ldots)$	*Derivando en la fila de arriba*
$\dfrac{x}{(1-x)^2}$	$(0,1,2,\ldots)$	*Por la última Observación*
$\dfrac{1+x}{(1-x)^3}$	$(1,2^2,3^2,\ldots)$	*Derivando en la fila de arriba*
$\dfrac{1+x}{(1-x)^3}-8x$	$(1,-4,3^2,\ldots)$	$-8x$ *solo afecta el segundo término de la sucesión, correspondiente a* x^1
$x\dfrac{1+x}{(1-x)^3}+\dfrac{x}{(1-x)^2}$	$a_n=n^2+n$	$x\frac{1+x}{(1-x)^3}$ *es f.g. de la sucesión* $b_n=n^2$ *y* $\frac{x}{(1-x)^2}$ *es f.g. de la sucesión* $c_n=n$
$(1+x)^{-n}$	$(C_0^{-n},C_1^{-n},C_2^{-n},\ldots)$	*Por desarrollo de Taylor de* $(1+x)^{-n}$ *y la Definición a continuación*

Definición. Si $n,r\in\mathbb{Z}$, $n\geq 0$, $r\geq 0$,

$$C_r^{-n}=\frac{(-n)(-n-1)(-n-2)\ldots(-n-r+1)}{r!}.$$

Definición. $\forall n\in\mathbb{R}$, $C_0^n=1$.

Observación.

$$\begin{aligned}C_r^{-n}&=(-1)^r\tfrac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}\\&=(-1)^rC_r^{n+r-1}\\&=(-1)^rCR_r^n.\end{aligned}$$

13. Funciones generatrices

Observación. $C_n^{2n} = \sum_{k=0}^{n} (C_k^n)^2 = (C_0^n)^2 + (C_1^n)^2 + ... + (C_n^n)^2$.

14. Fracciones simples

Ver clase n°14 para ejemplos.

15. Convoluciones

Definición (Convolución)**.** Se define la **convolución** de las sucesiones $(a_n)_{n\geq 0}$ y $(b_n)_{n\geq 0}$ como la sucesión $(c_n)_{n\geq 0}$ dada por

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Notación: $(c_n)_{n\geq 0} = (a_n)_{n\geq 0} * (b_n)_{n\geq 0}$.

Observación.

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ f.g. de } (a_n)_{n\geq 0} \\ g \text{ f.g. de } (b_n)_{n\geq 0} \end{array}\right\} \Rightarrow h(x) = f(x)g(x) \text{ es la f.g. de la convolución } (a_n)_{n\geq 0} * (b_n)_{n\geq 0}.$$

Observación (Operador suma)**.** Sean $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (una serie de potencias cualquiera) y $g(x) = \frac{1}{1-x}$ (f.g. de la sucesión constante 1).

$h(x) = f(x)g(x) = \dfrac{f(x)}{1-x}$ es la f.g. de la sucesión cuyo término general es $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot 1 = \sum_{k=0}^{n} a_k$.

(*sucesión cuyo término general es la suma parcial de los términos de* a_n)

16. Relaciones de recurrencia: ejemplos

- Suceción de Fibonacci (reproducción de conejos).

$$(a_n = a_{n-1} + a_{n-2})$$

- Cálculo del determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} b & b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b & b & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b & b & b & 0 & \dots & 0 \\ & & & \dots & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b & b & b \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b & b \end{pmatrix}$$

$$(D_n = bD_{n-1} - b^2 D_{n-2})$$

- Saludos en la clase.

$$(a_n = a_{n-1} + n - 1)$$

- Cantidad mínima de pasos para resolver el juego de las torres de Hanoi.

$$(a_n = 2a_{n-1} + 1)$$

- Cantidad de subconjuntos sin elementos consecutivos, tomados de $I_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$. Se considera $a_1 = 2$ $(\varnothing, \{1\})$.

$$(a_n = a_{n-1} + a_{n-2})$$

- Interés compuesto.

$$(a_n = (1 + x) \cdot a_{n-1}, \text{ con } x \text{ la tasa de interés})$$

17. Relaciones de recurrencia: ecuación característica

Definición (Relaciones de recurrencia homogéneas, lineales, con coeficientes constantes y de primer orden). Se denominan así aquellas de la forma

$$a \cdot a_n + b \cdot a_{n-1} = 0, \qquad \forall n \geq 1, \forall a, b \in \mathbb{R}^* \text{ (u otro cuerpo sin el elemento nulo, como } \mathbb{C}^*) .$$

Apuntes sobre algunos términos:

- Es homogénea, por la igualdad a 0.

- Es lineal, interpretando a_n y a_{n-1} como variables, y a y b como escalares.
- Sus coeficientes son constantes, ya que no dependen de n.
- Es de primer orden, ya que el cálculo de a_n involucra solamente el término inmediato anterior (a_{n-1}).

Observación (Fórmula asociada a una relación de recurrencia homogénea, lineal, con coeficientes constantes y de primer orden). $a \cdot a_n + b \cdot a_{n-1} = 0 \Rightarrow a_n = \underbrace{\left(\frac{-b}{a}\right)}_{r} \cdot a_{n-1}$, de modo que

$$a_n = r^n a_0.$$

Definición (Progresión geométrica). Si $\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = r$ constante, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se llama **progresión geométrica de razón** r.

Definición (Relaciones de recurrencia homogéneas, lineales, con coeficientes constantes y de segundo orden). Se denominan así aquellas de la forma

$$a \cdot a_n + b \cdot a_{n-1} + c \cdot a_{n-2} = 0, \qquad \forall n \geq 2, a \neq 0 \wedge c \neq 0.$$

Teorema (Soluciones forman un subespacio vectorial). Si $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son dos sucesiones que verifican la relación de recurrencia $a \cdot a_n + b \cdot a_{n-1} + c \cdot a_{n-2} = 0$ y $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es la sucesión dada por $d_n = \alpha \cdot b_n + \beta \cdot c_n$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (u otro cuerpo como $\mathbb{C}$), entonces $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ verifica la relación de recurrencia $a \cdot a_n + b \cdot a_{n-1} + c \cdot a_{n-2} = 0$
Demostración.

$$\begin{aligned} a \cdot b_n + b \cdot b_{n-1} + c \cdot b_{n-2} = 0 &\Rightarrow \alpha(a \cdot b_n + b \cdot b_{n-1} + c \cdot b_{n-2}) = 0 \qquad (1)\\ a \cdot c_n + b \cdot c_{n-1} + c \cdot c_{n-2} = 0 &\Rightarrow \beta(a \cdot c_n + b \cdot c_{n-1} + c \cdot c_{n-2}) = 0 \qquad (2)\end{aligned}$$

Sumando término a término las ecuaciones (1) y (2) se obtiene

$$a \cdot (\underbrace{\alpha b_n + \beta c_n}_{d_n}) + b(\underbrace{\alpha b_{n-1} + \beta c_{n-1}}_{d_{n-1}}) + c(\underbrace{\alpha b_{n-2} + \beta c_{n-2}}_{d_{n-2}}) = 0.$$

Observación. El resultado anterior es válido para recurrencias lineales de cualquier orden, siempre que sean homogéneas.

Observación. $(a_n = r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ (con $r \neq 0$) es solución de la recurrencia $a \cdot a_n + b \cdot a_{n-1} + c \cdot a_{n-2} = 0\ \forall n \geq 2$ si, y solo si

$$\begin{aligned} & a \cdot r^n + b \cdot r^{n-1} + c \cdot r^{n-2} = 0 \qquad \forall n \geq 2 \\ \Leftrightarrow\ & ar^2 + br + c = 0. \end{aligned}$$

Definición (Ecuación característica de la recurrencia). La ecuación $ar^2 + br + c = 0$ obtenida en la observación anterior, es llamada **ecuación característica de la recurrencia** (para este tipo de relaciones de recurrencia).

Observación. $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ es solución de la recurrencia si, y solo si, r es raíz de su ecuación característica.

Observación. Si una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cumple una relación de recurrencia de segundo orden, entonces los valores de a_0 y a_1 determinan la sucesión.

18. Relaciones de recurrencia: ecuación característica

Observación (Discusión de la solución de una ecuación característica asociada a una recurrencia homogénea, lineal, con coeficientes constantes, de segundo orden). Sea

$$c_{n+2}r^2 + c_{n+1}r + c_n = 0$$

[8] una ecuación característica. Para analizar su solución planteamos

$$r = \frac{-c_{n+1} \pm \sqrt{(c_{n+1})^2 - 4 \cdot c_n \cdot c_{n+2}}}{2c_{n+2}}$$

obteniendo el determinante

$$\Delta = (c_{n+1})^2 - 4 \cdot c_n \cdot c_{n+2}$$

Existen en este punto tres opciones:

- <u>$\Delta > 0$: dos raíces reales distintas r_1 y r_2</u>
  - $\Rightarrow$ $(k \cdot {r_1}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(k \cdot {r_2}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ son soluciones, por lo que todas las soluciones son de la forma $\boxed{\lambda_1 {r_1}^n + \lambda_2 {r_2}^n}$.
- <u>$\Delta < 0$: dos raíces complejas conjugadas $a + bi$ y $a - bi$</u>
  - $\Rightarrow$ siguiendo el mismo razonamiento que en el caso anterior, se tiene que todas las soluciones son de la forma $\boxed{\lambda_1(a+bi)^n + \lambda_2(a-bi)^n}$.

[8] Los factores c_{n+2}, c_{n+1} y c_n son constantes, no términos generales de sucesiones (pese a su "apariencia").

- $\Delta = 0$: una raíz real r_1 doble [9]
  - $\Rightarrow$ siguiendo el mismo razonamiento, todas las soluciones son de la forma $\boxed{\lambda_1 {r_1}^n + \lambda_2 n {r_1}^n}$.

(*Se prueba antes que, si* ${r_1}^n$ *es solución y* r_1 *es raíz doble de la ecuación característica, entonces* $n{r_1}^n$ *también lo es*)

19. Relaciones de recurrencia: ecuación característica

Observación (Repaso sobre números complejos, distintas interpretaciones).

$$\begin{aligned}(r(\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta)))^n &= r^n \underline{/n\theta} && (r \textit{ es el módulo del número complejo}) \\ &= r^n \cdot (\cos(n\theta) + i\,\mathrm{sen}(n\theta)) \\ &= \underbrace{e^{\lambda n}}_{=(e^{\lambda})^n} \cdot \underbrace{e^{i(n\theta)}}_{=(e^{i\theta})^n} && (\textit{siendo } \lambda \textit{ tal que } r = e^{\lambda})\end{aligned}$$

Definición (Relaciones de recurrencia homogéneas, lineales, con coeficientes constantes y de orden t). Se denominan así aquellas de la forma

$$c_n a_n + c_{n-1} a_{n-1} + \ldots + c_{n-t} a_{n-t} = 0 \qquad \text{con } c_n \neq 0,\ c_{n-t} \neq 0 \text{ y } c_i \in \mathbb{R}\ \forall i \,/\, n-t < i < n.$$

Observación. La ecuación característica (o "polinomio característico") asociada a una relación de recurrencia homogénea, lineal, con coeficientes constantes y de orden t es

$$c_n r^t + c_{n-1} r^{t-1} + \ldots + c_{n-t+1} r + c_{n-t} = 0.$$

Sea r_1 raíz de multiplicidad m de dicha ecuación característica (puede haber otras raíces diferentes). Entonces, las soluciones correspondientes a r_1 son de la forma

$$\lambda_1({r_1}^n) + \lambda_2(n{r_1}^n) + \lambda_3(n^2{r_1}^n) + \ldots + \lambda_m(n^{m-1}{r_1}^n).$$

Definición (Relaciones de recurrencia no homogéneas, lineales, con coeficientes constantes). Para los casos de orden 1 y 2, se denominan así aquellas de la forma:

- $a_n + c_{n-1} \cdot a_{n-1} = f(n)$
- $a_n + c_{n-1} \cdot a_{n-1} + c_{n-2} \cdot a_{n-2} = f(n)$

Observación. Para hallar las soluciones "generales" S_g de una relación de recurrencia no homogénea, se suman las soluciones λS_h de la homogénea asociada, a una solución particular S_p.

$$S_g = \lambda S_h + S_p$$

[9] Tratamiento de este ítem y formalización corresponden a la clase n°19.

20. Relaciones de recurrencia no homogéneas

Observación. Sea

$$a_n + c_{n-1} \cdot a_{n-1} = \underbrace{k \cdot r^n}_{f(n)}$$

- Si r^n no es solución de la homogénea asociada, retomando la observación de la última clase, estamos buscando la solución particular S_p tal que $S_g = \lambda S_h + S_p$.
  Para encontrarla, buscamos una solución de la forma $S_p = \alpha \cdot r^n$, donde $\alpha = \frac{k \cdot r}{r + c_{n-1}}$.
- Si r^n es solución de la homogénea asociada, también siguiendo la observación de la última clase, buscamos ahora una solución de la forma $S_p = \alpha \cdot n \cdot r^n$, donde $\alpha = \frac{-k \cdot r}{c_{n-1}}$.

Observación. Sea

$$a_n + c_{n-1} \cdot a_{n-1} + c_{n-2} \cdot a_{n-2} = \underbrace{k \cdot r^n}_{f(n)}$$

- Si r^n no es solución de la homogénea asociada, buscamos una solución de la forma $S_p = \alpha \cdot r^n$, donde $\alpha = \frac{k \cdot r^2}{r^2 + c_{n-1} r + c_{n-2}}$.
- Si r^n es solución de la homogénea con r raíz simple de la ecuación característica, buscamos una solución de la forma $S_p = \alpha \cdot n \cdot r^n$, donde $\alpha = \frac{k \cdot r}{2r + c_{n-1}}$.
- Si r^n es solución de la homogénea con r raíz doble, buscamos una solución de la forma $S_p = \alpha \cdot n^2 \cdot r^n$, donde $\alpha = \frac{k \cdot r^2}{c_{n-1} \cdot r + 4c_{n-2}}$.

Observación (Generalización de resultados anteriores, y más). Sea

$$a_n + c_{n-1} \cdot a_{n-1} + \ldots + c_{n-m} \cdot a_{n-m} = f(n)$$

Entonces se tiene la siguiente tabla para $f(n)$ de alguna de las formas indicadas:

$f(n)$	S_p
$P_k(n) \cdot r^n$	$Q_k(n) \cdot r^n \cdot n^l$ [10]
$\operatorname{sen}(\alpha n)$	$A \operatorname{sen}(\alpha n) + B \cos(\alpha n)$
$\cos(\alpha n)$	$A \operatorname{sen}(\alpha n) + B \cos(\alpha n)$
$r^n \operatorname{sen}(\alpha n)$	$r^n (A \operatorname{sen}(\alpha n) + B \cos(\alpha n))$
$r^n \cos(\alpha n)$	$r^n (A \operatorname{sen}(\alpha n) + B \cos(\alpha n))$

[10] $P_k(n)$ refiere a un polinomio que depende de n, cuyo grado es k. l representa la multiplicidad de r como raíz de la ecuación característica, y $Q_k(n)$ refiere a un polinomio genérico de grado k sobre la variable n (por ejemplo para $k = 1$, $Q_k(n) = \alpha \cdot n + \beta$).

21. Método de funciones generatrices, sistemas de recurrencia

Observación (Aplicación de funciones generatrices a la resolución de relaciones de recurrencia: un ejemplo). Sea

$$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 2 \qquad \forall n \geq 0$$

con $a_0 = 3$ y $a_1 = 7$. Para esta ecuación, escribimos

$$a_{n+2}x^{n+2} - 5a_{n+1}x^{n+2} + 6a_n x^{n+2} = 2x^{n+2}$$

(*Se multiplica cada miembro por* x^{n+2})

Como vale $\forall n \geq 0$, tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}x^{n+2} - \sum_{n=0}^{\infty} 5a_{n+1}x^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} 6a_n x^{n+2} &= 2x^2 \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ &= \frac{2x^2}{1-x} \qquad (\textit{ver tabla de clase n°12}) \end{aligned}$$

Definamos por practicidad $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ con lo que, luego de hacer algunos cálculos, obtenemos

$$(f(x) - a_0 - a_1 x) - 5x(f(x) - a_0 x^0) + 6x^2 f(x) = \frac{2x^2}{1-x}$$

Despejando obtenemos

$$f(x) = \frac{10x^2 - 11x + 3}{(1-x)(6x^2 - 5x + 1)}$$

Como $\frac{1}{2}$ es raíz tanto del numerador como del denominador, simplificamos la fracción, de modo que

$$f(x) = \frac{10x - 6}{(1-x)(6x-2)} = \frac{5x-3}{(1-x)(3x-1)}$$

Por el método de fracciones simples, obtenemos

$$f(x) = \frac{1}{1-x} + 2\frac{1}{1-3x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty}(3x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(1 + 2\cdot 3^n)x^n$$

Finalmente

$$\boxed{a_n = 1 + 2\cdot 3^n}$$

22. Producto cartesiano y relaciones

Definición (Congruencias). Sea $n \in \mathbb{Z}$ fijo, y la relación $R \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

$$(x, y) \in R \Leftrightarrow x - y = \dot{n}$$

que puede anotarse como

$$x \, R \, y$$

o como

$$x \equiv y \text{ mód } (n).$$

Definición (Propiedad simétrica). Una relación R no vacía de A en A se dice **simétrica** si se cumple

$$x \, R \, y \Rightarrow y \, R \, x.$$

Definición (Propiedad antisimétrica). Una relación R no vacía de A en A se dice **antisimétrica** si se cumple

$$\left.\begin{array}{l} x \, R \, y \\ y \, R \, x \end{array}\right\} \Rightarrow x = y.$$

Definición (Propiedad transitiva). Una relación R no vacía de A en A se dice **transitiva** si se cumple

$$\left.\begin{array}{l} x \, R \, y \\ y \, R \, z \end{array}\right\} \Rightarrow x \, R \, z.$$

Definición (Propiedad reflexiva). Una relación R no vacía de A en A se dice **reflexiva** si se cumple

$$\underline{\forall x \in A}, \, x \, R \, x.$$

Definición (Propiedad asimétrica). Una relación R no vacía de A en A se dice **asimétrica** si se cumple

$$x \, R \, y \Rightarrow y \not R \, x.$$

(*x puede considerarse igual a y, de modo que una relación asimétrica no puede ser reflexiva*)

Definición (Propiedad irreflexiva). Una relación R no vacía de A en A se dice **irreflexiva** si se cumple

$$\forall x \in A, \, x \not R \, x.$$

Observación. Si una relación es asimétrica no puede ser simétrica, y viceversa.

Observación. La propiedad asimétrica implica la antisimétrica.

Definición (Relación de equivalencia). Se dice que una relación es **de equivalencia** si cumple las siguientes propiedades:

- Simétrica
- Reflexiva
- Transitiva

Definición (Relación de orden parcial). Se dice que una relación es **de orden parcial** si cumple las siguientes propiedades:

- Antisimétrica
- Reflexiva
- Transitiva

23. Relaciones de equivalencia

Definición (Partición). Se dice que $\{X_i\}_{i\in I}$ es una **partición** de un conjunto A, si se cumple:

- $\forall i \in I, X_i \neq \varnothing$
- $\bigcup\limits_{i\in I} X_i = A$
- $\forall i, j \in I \,/\, i \neq j, X_i \cap X_j = \varnothing$

Observación. Una relación de equivalencia determina una partición, y una participación determina una relación de equivalencia.

Definición (Composición de relaciones). Sean $R_1 \subseteq A \times B$ y $R_2 \subseteq B \times C$. Se define la **composición** de R_1 con R_2 como

$$R_1 \circ R_2 = \{(x, z) \,/\, x \in A, z \in C, \exists y \in B \text{ tal que } (x, y) \in R_1 \wedge (y, z) \in R_2\}.$$

Definición (Matriz asociada a una relación). Está formada por unos y ceros. La fila a la que corresponde cada entrada representa el primer elemento del par ordenado de la relación, mientras que la columna a la que corresponde cada entrada representa el segundo elemento del par ordenado.
Ejemplo. Sean $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, $B = \{b_1, b_2\}$, y R de A en B tal que $R = \{(a_3, b_2)\}$. En este caso, la matriz asociada es:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} b_1 & b_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Observación. $M(R_1 \circ R_2) = M(R_1) \cdot M(R_2)$.

Observación. Sean el conjunto A tal que $\#A = n$, la relación $R \subseteq A \times A$, y $M(R)$ su matriz asociada. Se cumple:

- $M(R) = 0$ (*la matriz nula*) $\Leftrightarrow R = \varnothing$
- $M(R) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow R = A \times A$
- $M(R^n) = M(R)^n$

24. Representación de relaciones

Definición (Relación de orden entre matrices asociadas a relaciones). Sean $M_1 = (r_{ij})_{i=1\ldots m}^{j=1\ldots n}$ y $M_2 = (t_{ij})_{i=1\ldots m}^{j=1\ldots n}$.
Se define la relación de orden entre M_1 y M_2 como

$$M_1 \leq M_2 \;\Leftrightarrow\; r_{ij} \leq t_{ij}, \forall i \in \{1, \ldots, m\}, \forall j \in \{1, \ldots n\}.$$

Observación. Sean $R_1 \subseteq A \times B$ y $R_2 \subseteq A \times B$.

$$M(R_1) \leq M(R_2) \;\Leftrightarrow\; R_1 \subseteq R_2 \;.$$

Definición. $M_1 \cap M_2$ se define como el producto coordenada a coordenada de M_1 y M_2.

Teorema. Sea $R \subseteq A \times A$, con $\#A = n$. Se cumple:

- R es reflexiva $\Leftrightarrow$ $M(R) \geq I_n$
- R es simétrica $\Leftrightarrow$ $M(R) = M(R)^t$
- R es transitiva $\Leftrightarrow$ $M(R) \cdot M(R) \leq M(R)$
- R es antisimétrica $\Leftrightarrow$ $M(R) \cap M(R)^t \leq I_n$

Definición (Relación inversa). Se define la **relación inversa** de R como

$$R^{-1} = \{(y, x) \,/\, (x, y) \in R\}.$$

Definición (Relación complementaria). Se define la **relación complementaria** de R como

$$\overline{R} = \{(x, y) \,/\, (x, y) \notin R\}.$$

Definición (Digrafo fuertemente conexo). Un digrafo se dice **fuertemente conexo** si, respetando el sentido de las flechas, se puede "ir" de cualquier vértice a cualquier vértice.

Definición (Grafo conexo). Un grafo se dice **conexo** si se puede "ir" de cualquier vértice a cualquier vértice (sin importar el sentido de las flechas en el caso de que no sean aristas no dirigidas).

Observación. Sean el conjunto A, la relación $R \subseteq A \times A$, y G su grafo asociado.

- R es reflexiva $\Leftrightarrow$ en cada vértice hay un lazo
- R es simétrica $\Leftrightarrow$ las flechas son lazos o aristas no dirigidas
- R es transitiva $\Leftrightarrow$ $\forall x, y \in A$, si hay un camino de x a y entonces hay una flecha $x \to y$
- R es antisimétrica $\Leftrightarrow$ no existen aristas no dirigidas (excepto los lazos)

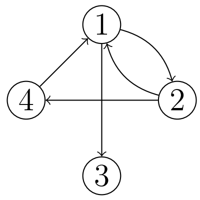
25. Teoría de grafos: definiciones

Definición (Grafo dirigido)**.** Sean

- $V \neq \varnothing$ finito (conjunto de "vértices")
- $E \subset V \times V$ (conjunto de "aristas")

Llamamos **grafo dirigido** a
$$G = (V, E).$$

Ejemplo. $V = (1, 2, 3, 4)$ y $E = ((1, 2); (2, 1); (1, 3); (2, 4); (4, 1))$

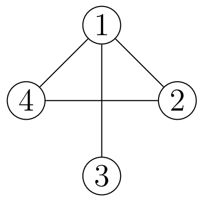


Definición (Grafo)**.** Sean

- $V \neq \varnothing$ finito (conjunto de "vértices")
- $E = \{\{x, y\} / x, y \in V\}$ (conjunto de "aristas")

Llamamos **grafo** a
$$G = (V, E).$$

Ejemplo. $V = (1, 2, 3, 4)$ y $E = \{\{1, 2\}; \{1, 3\}; \{1, 4\}; \{2, 4\}\}$



Definición (Vértices adyacentes y arista incidente)**.** Sea el grafo $G = (V, E)$.

- $x, y \in V$ se dicen **adyacentes** si $\{x, y\} \in E$
- $e \in E$ se dice **incidente** a $x \in V$ si $e = \{x, x'\}$ para algún $x' \in V$

Definición (Notación para caminos)**.** Si no hay multiaristas, pueden omitirse las aristas al escribir un camino. Por ejemplo, $4\, e_1\, 1\, e_3\, 3$ es equivalente a escribir $4\,1\,3$.

Teorema. Si existe un camino entre x e y, entonces existe un camino simple entre x e y.
Demostración. Como existe al menos un camino entre x e y, existen uno o más caminos entre x e y de largo mínimo. Elíjase uno de ellos. Si dicho camino de largo mínimo no es simple, repite al menos un vértice, por lo que es de la forma

$$\underbrace{x_0}_{x}\, x_1\, x_2 \dots x_{j-1}\, \underbrace{x_j}_{z}\, x_{j+1} \dots x_{k-1}\, \underbrace{x_k}_{z}\, x_{k+1} \dots x_{n-1}\, \underbrace{x_n}_{y}$$

y puede reducir su largo:

$$\underbrace{x_0}_{x}\, x_1\, x_2 \dots x_{j-1}\, \underbrace{x_j}_{z}\, x_{k+1} \dots x_{n-1}\, \underbrace{x_n}_{y}$$

Por lo tanto, fue absurdo suponer que un camino de largo mínimo no es simple.

Definición (Vértices conectados)**.** Decimos que dos vértices $x, y \in V$ están **conectados** si existe un camino entre x e y.

Observación. La relación definida en V "estar conectado con" es de equivalencia (es simétrica, reflexiva y transitiva).

Definición (Componente conexa)**.** Las clases de equivalencia generadas por la relación "estar conectado con" se denominan **componentes conexas**.

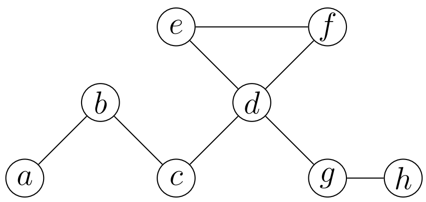
Observación. Si un grafo tiene una única componente conexa, entonces dicho grafo es conexo.

Definición (Grado en un grafo no dirigido)**.** Sean $G = (V, E)$ un grafo no dirigido, y $x \in V$. Se define el **grado** de $x \in V$ como

$$gr(x) = \#\{y \,/\, \{x, y\} \in E \wedge x \neq y\} + 2\#\{x \,/\, \{x, x\} \in E\}.$$

(*Cada arista incidente que no sea lazo suma* 1 *al grado, y si existe un lazo suma* 2)

Ejemplo. $gr(d) = 4$ en:



Definición (Grado de entrada y de salida en un grafo dirigido)**.** Sean $G = (V, E)$ un grafo dirigido, y $x \in V$. Se define el **grado de salida** de $x \in V$ como

$$gr^{+}(x) = \#\{y \,/\, (x, y) \in E\}.$$

y el **grado de entrada** de $x \in V$ como

$$gr^{-}(x) = \#\{y \,/\, (y, x) \in E\}.$$

Teorema. Sea $G = (V, E)$ un grafo dirigido. Entonces se cumple

$$\sum_{x \in V} gr^{-}(x) = \sum_{x \in V} gr^{+}(x) = \#E.$$

Teorema. Sea $G = (V, E)$ un grafo <u>no</u> dirigido. Entonces se cumple

$$\sum_{x \in V} gr(x) = 2\,\#E.$$

Observación (del teorema anterior[11])**.** Para cualquier grafo no dirigido (o multigrafo no dirigido), el número de vértices de grado impar es par.

26. Relaciones de orden parcial, diagrama de Hasse

Definición (Relación de orden total)**.** Se dice que una relación $R \subseteq A \times A$ es de **orden total** si es de orden parcial y además

$$\forall x, y \in A,\ (x\,R\,y) \vee (y\,R\,x).$$

Ejemplo.

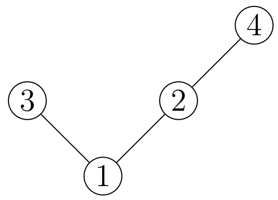
- $(\mathbb{R}, \leq)$ es totalmente ordenado.
- $(\mathbb{Z}, \geq)$ es totalmente ordenado.
- $(N^{*}, |)$ <u>no</u> es totalmente ordenado (Por ejemplo, $7 \not{R}\, 11 \wedge 11 \not{R}\, 7$).

Definición (Diagrama de Hasse[12])**.** Sea (A, R) parcialmente ordenado (totalmente o no) con A finito. El **diagrama de Hasse** para R se define como el resultado de trazar un segmento desde x hacia y (hacia arriba) para cada x e y que cumplen:

[11] Extraída del libro de Grimaldi.
[12] Extraída del libro de Grimaldi.

- $x, y \in A$
- $x\ R\ y$
- No hay ningún otro elemento $z \in A$ tal que $x\ R\ z$ y $z\ R\ y$ (*es decir que "no hay nada entre x e y"*)

Si se adopta la convención de leer el diagrama desde abajo hacia arriba, entonces no es necesario que las aristas sean dirigidas.
Ejemplo. Sean $A = \{1,2,3,4\}$ y R= $\{(1,1);(2,2);(3,3);(4,4);(1,2);(1,3);(1,4);(2,4)\}$. Su diagrama de Hasse es:



(*Nótese que no se representó la arista correspondiente a* $(1,4)$*: como se representó una relación de orden, se sobreentiende que* 1 *está relacionado con* 4 *al estar* 1 *relacionado con* 2*, y* 2 *con* 4)
(*Tampoco se representaron lazos, ya que por el mismo motivo se sobreentiende que cada elemento está relacionado consigo mismo*)

Definición (Elementos maximal y minimal). Sea (A, R) parcialmente ordenado.

- Se dice que $x \in A$ es un **elemento maximal** si $\forall a \in A, x \neq a \Rightarrow x \not R\, a$
  - Contrarrecíproco: Se dice que $x \in A$ es un elemento maximal si $\forall a \in A, x\ R\ a \Rightarrow x = a$
- Se dice que $y \in A$ es un **elemento minimal** si $\forall b \in A, b \neq y \Rightarrow b \not R\, y$
  - Contrarrecíproco: Se dice que $y \in A$ es un elemento minimal si $\forall b \in A, b\ R\ y \Rightarrow b = y$

Definición (Máximo y mínimo).

- Se dice que x es **máximo** si $\forall y \in A, y\ R\ x$.
- Se dice que x es **mínimo** si $\forall y \in A, x\ R\ y$.

Ejemplo. Sea $(B, |)$ con $B = \{11, 121, 110\}$. El mínimo es 11, mientras que no existe el máximo.

Teorema. Si (A, R) es parcialmente ordenado y A es un conjunto finito, entonces existe elemento maximal y elemento minimal en A.
Demostración. Puede demostrarse tomando un elemento cualquiera del conjunto y evaluando si es maximal o no. Si lo es, el teorema está probado, de lo contrario, existe otro elemento "mayor", y se procede a evaluar si dicho elemento es maximal. El proceso se itera hasta encontrar un elemento maximal o agotar el conjunto (en cuyo caso el último elemento a evaluar es maximal). Por más detalles ver clase n°26.

Definición (Cotas superior e inferior)**.** Sea (A, R) parcialmente ordenado, y $B \subseteq A$.

- Decimos que x es **cota superior** de B si $b\,R\,x$, $\forall b \in B$.
- Decimos que x es **cota inferior** de B si $x\,R\,b$, $\forall b \in B$.

Ejemplo. Sea $(\mathbb{N}^*, |)$ y $B = \{11, 121, 110\} \subseteq \mathbb{N}^*$. 1 y 11 son las cotas inferiores de B.

Definición (Supremo e ínfimo)**.** Sea (A, R) parcialmente ordenado, y $B \subseteq A$.

- Decimos que x_0 es **supremo** de B si $x_0 = \text{mín}\{x \in A \,/\, x \text{ es cota superior de } B\}$

  (*si existe dicho mínimo*)

- Decimos que x_0 es **ínfimo** de B si $x_0 = \text{máx}\{x \in A \,/\, x \text{ es cota inferior de } B\}$

  (*si existe dicho máximo*)

Ejemplo. Sea $(\mathbb{N}^*, |)$ y $B = \{11, 121, 110\} \subseteq \mathbb{N}^*$. El supremo de B es 1210, es decir, el mínimo común múltiplo de los elementos maximales (121 y 110).

27. Supremo, ínfimo, cadena, anticadena, retículo

Definición (Retículo)**.** Se dice que un conjunto parcialmente ordenado (A, R) es un **retículo** si $\forall x, y \in A$,

$$\exists\, \text{ínf}\{x, y\} \land \exists\, \text{sup}\{x, y\}.$$

Ejemplo. Si $X = \{1, 2, 3\}$, entonces $(P(X), \subseteq)$ es un retículo. De hecho, $\text{ínf}\{A, B\} = A \cap B$ y $\text{sup}\{A, B\} = A \cup B$.

Definición (Cadena y anticadena)**.** Sea (A, R) parcialmente ordenado.

- Se dice que $B \subseteq A$ es una **cadena** si $\forall x, y \in B, (x\,R\,y) \lor (y\,R\,x)$.
- Se dice que $D \subseteq A$ es una **anticadena** si $\forall x, y \in D, (x \not R\, y) \land (y \not R\, x)$.

Observación. Si $B \subseteq A$ es una cadena, entonces $(B, R_{B\times B})$[13] es un retículo.

Teorema (de Dilworth)**.** Sea (A, R) parcialmente ordenado.

[13] $R_{B\times B}$ denota la relación R restringida a $B \times B$.

- Si la longitud de la cadena más grande es n, entonces A se puede particionar en n anticadenas disjuntas.
- Si la anticadena más grande contiene m elementos, entonces A se puede particionar en m cadenas disjuntas.

(*Se puede demostrar la primera parte haciendo inducción completa sobre la cantidad de elementos de la cadena más grande (ver clase n°27)*).

Observación (Corolario del teorema de Dilworth[14]). Sea (A, R) parcialmente ordenado con $\#A = m \cdot n + 1$, entonces tendrá una cadena con $m + 1$ elementos, o una anticadena con $n + 1$ elementos.

28. Teoría de grafos: subgrafo recubridor, inducido y complementario

Observación. Una componente conexa es un grafo conexo maximal (maximal respecto del orden $\subseteq$).
Si la cantidad de componentes conexas de un grafo G es n, se anota $k(G) = n$.

Observación. Un vértice "solo", es un grafo conexo.

Observación. $k(G) = 1 \Leftrightarrow G$ es conexo.

Definición (Isomorfismo de grafos[15]). Sean $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ dos grafos diferentes. Una función $f : V_1 \to V_2$ se llama **isomorfismo de grafos**, si

- f es biyectiva
- $\forall a, b \in V_1, (\{a, b\} \in E_1 \Leftrightarrow \{f(a), f(b)\} \in E_2)$

Cuando dicha función existe, se dice que G_1 y G_2 son **grafos isomorfos**.

Definición (Subgrafo[16]). Sea el grafo $G = (V, E)$. Se dice que $G_1 = (V_1, E_1)$ es un **subgrafo** de G si $\emptyset \neq V_1 \subseteq V$ y $E_1 \subseteq E$, donde cada arista en E_1 es incidente a vértices en V_1.

[14] No dado en clases de OpenFing. Extraído de https://www.fing.edu.uy/~canale/loquedi.txt.
[15] Extraída del libro de Grimaldi.
[16] Extraída del libro de Grimaldi.

Definición (Subgrafo recubridor)**.** Se dice que un subgrafo $G_1 = (V_1, E_1)$ de $G = (V, E)$ es un **subgrafo recubridor** de G si $V_1 = V$.

(*Es decir, se consideran todos los vértices de G y algunas (eventualmente ninguna) de las aristas incidentes a ellos*)

Definición (Subgrafo inducido)**.** Se dice que un subgrafo $G_1 = (V_1, E_1)$ de $G = (V, E)$ es **inducido** por los vértices de $V_1 \subseteq V$ si $E_1 = E \cap (V_1 \times V_1)$.

(*Es decir, se consideran algunos vértices del grafo G y todas las aristas que "están entre" esos vértices en G*)

Observación. La cantidad de subgrafos recubridores de un grafo $G = (V, E)$ es $2^{\#E}$.

(*Porque hay $\#E$ aristas y cada una puede estar o no*)

Definición (Notaciones)**.** Sean $G = (V, E)$, $v \in V$ y $e \in E$.

- "$G - v$" refiere al subgrafo inducido por $V - \{v\}$.
- "$G - e$" refiere al subgrafo recubridor de G (tiene sus mismos vértices) que tiene a $E - \{e\}$ como su conjunto de aristas. Es decir, $(G - e) = (V, E - \{e\})$.

Definición (Grafo completo)**.** Sea V tal que $\#V = n$. Se llama **grafo completo** y se denota K_n al único grafo $G = (V, E)$ con n vértices, y cuyo diámetro es 1. Es decir que es aquel que tiene "todas las aristas posibles" y donde todos sus vértices son adyacentes.

(*No se consideran lazos*)
(***Diámetro** se define formalmente en el apéndice sobre definiciones básicas de grafos*)

Definición (Grafo complemento)**.** El **grafo complemento** $\overline{G}$ de un grafo $G = (V, E)$ se define como

$$\overline{G} = (V, V^{(2)} \backslash E)$$

donde $V^{(2)} = \{\{u, v\} / u, v \in V, u \neq v\}$.

(*Es aquel en el que no se modifican los vértices, y sus aristas son las que "faltan" para obtener el completo, sin considerar lazos*)

Definición (Grafo k-regular)**.** $G = (V, E)$ es un **grafo k-regular** si el grado de todos sus vértices es igual a k.
Ejemplo. K_n es un grafo $(n - 1)$-regular.

Apéndice: Definiciones básicas de grafos[17]

Definición. (Camino y conceptos asociados) Se llama **camino** a una sucesión alternada de vértices y aristas, comenzando y terminando con un vértice, donde los extremos de cada arista son el vértice anterior y el sucesor.

- **Longitud** de un camino: Cantidad de aristas.
- **Camino cerrado**: Cuando el primer y el último vértice coinciden.

(*el camino trivial -un vértice solo- es cerrado, y su longitud es* 0)

- **Camino abierto**: Cuando el primer y el último vértice son distintos.

Observación. Un camino es entre x e y, no de x a y. Lo importante es que, a la hora de contar, no son dos caminos $y...x$ y $x...y$, sino uno solo.

Definición. (Recorrido y recorrido simple) Se llama **recorrido** a un camino sin aristas repetidas. Puede ser abierto o cerrado.
Un recorrido se dice **simple** si no tiene vértices repetidos.

(*A veces se hace referencia a un recorrido simple como "camino simple" o "P_n"*)

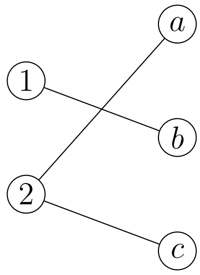
Definición (Circuito y circuito simple)**.** Se llama **circuito** a un recorrido que es cerrado.
Un circuito se dice **simple** si no tiene vértices repetidos excepto el primero y el último.

Definición (Ciclo)**.** Un **ciclo** se define como la "imagen" de un circuito simple, más precisamente, un subgrafo isomorfo al n-ciclo C_n, para algún n (longitud) $\in \mathbb{N}$ con $n \geq 3$.

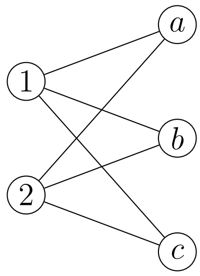
(*El concepto de ciclo es muy similar al de circuito, con la convención de que un circuito, su reverso, y sus respectivas rotaciones, se consideran el mismo ciclo*)

Definición (Bipartito)**.** Un grafo $G = (V, E)$ se dice **bipartito** si $V = V_1 \cup V_2$ con $V_1 \cap V_2 = \varnothing$, y cada arista de G es de la forma $\{i, j\}$ con $i \in V_1$ y $j \in V_2$.
Ejemplo. $V_1 = \{1, 2\}$ y $V_2 = \{a, b, c\}$:

[17] Para elaborar este apéndice se tuvieron en cuenta las clases de OpenFING de la edición 2013, los prácticos en su edición 2019 (y sus soluciones en su edición 2016), el documento *Definiciones grafos* de Diego Kidanski (2015), y el documento *Definiciones de Caminos para el 1er semestre del 2019*.



Definición (Bipartito completo)**.** Un grafo bipartito se dice **completo**, y se denota $K_{n,m}$, si tiene $n+m$ vértices, n de los cuales "están unidos" a todos los otros m, y esas son las únicas adyacencias.
Ejemplo. Los n vértices son 1 y 2, y los m vértices son a, b y c:



Definición (Árbol)**.** Se dice que un grafo es **árbol** si es conexo y no tiene ciclos.

Definición (Distancia entre vértices)**.** Se define la **distancia** entre dos vértices a y b de un grafo conexo como la menor de las longitudes de los caminos que los unen.

(*No es lo mismo "distancia" entre vértices que "longitud" de un camino, el primero se define a partir del segundo*)

Definición (Diámetro)**.** El **diámetro** de un grafo conexo se define como la mayor de las distancias entre dos vértices cualesquiera del mismo.

Definición (Grafo rueda)**.** Para cada natural $n \geq 3$ se define el **grafo rueda de n rayos** como el grafo W_n con $n+1$ vértices $v_0, ..., v_n$ tal que v_0 es adyacente a todos los demás vértices y $v_1, ..., v_n, v_1$ es un ciclo.

Definición (Hipercubo)**.** El **hipercubo** de dimensión n, H_n, se define como el grafo cuyos vértices son las n-uplas de ceros y unos, tales que dos n-uplas son adyacentes si coinciden en todas sus coordenadas salvo exactamente en una de ellas.

(*Por ejemplo,* $(0, 0, ..., 0)$ *es adyacente a* $(1, 0, ..., 0)$ *pero no a* $(1, 0, ..., 0, 1)$)

Definición (Vértice aislado)**.** Un vértice se dice **aislado** si no es adyacente a ningún otro.

Definición (Grafo autocomplementario)**.** Un grafo G se dice **autocomplementario** si es isomorfo a $\overline{G}$.

Definición (Grafo unión)**.** Sean los grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$. Su **grafo unión** se define como

$$G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2).$$

Definición (Grafo intersección)**.** Sean los grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ con vértices no disjuntos ($V_1 \cap V_2 \neq \varnothing$). Su **grafo intersección** se define como

$$G_1 \cap G_2 = (V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2).$$

Definición (Grafo acíclico)**.** Un grafo se dice **acíclico** si no presenta ningún ciclo.

29. Teoría de grafos: recorridos y circuitos eulerianos, grafos planos

Definición (Circuito y recorrido euleriano)**.** Sea G un grafo o multigrafo no dirigido sin vértices aislados.
Se dice que un **circuito** de G es **euleriano** si "pasa por" todas las aristas de G.
Se dice que un **recorrido** de G es **euleriano** si es un recorrido abierto que "pasa por" todas las aristas de G.

Definición (Grafo euleriano[18])**.** Un **grafo** se denomina **euleriano** si admite un circuito euleriano.

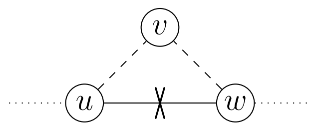
Teorema. Sea $G = (V, E)$ un grafo o multigrafo. G admite un circuito euleriano si, y solo si, $gr(v)$ es par, $\forall v \in V$.
Demostración. Ver clase n° 29.

[18]Extraída de EcuRed.

Observación (Corolario del teorema anterior). Sean $G = (V, E)$ y $v_1, v_2 \in V$ tales que $v_1 \neq v_2$. G admite un recorrido euleriano entre v_1 y v_2 si, y solo si, $gr(v)$ es par $\forall v \in V - \{v_1, v_2\}$, y $gr(v_1)$ y $gr(v_2)$ son impares.
Demostración. Ver clase n° 29.

Definición (Grafo plano e inmersión en el plano). Se dice que un grafo (o multigrafo) G es **plano** si puede ser representado en el plano de manera tal que sus aristas se intersecan solamente en los vértices de G. Tal representación recibe el nombre de **inmersión** de G **en el plano**.

Definición (Subdivisión elemental[19]). Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido sin lazos, tal que $E \neq \varnothing$. Se llama **subdivisión elemental** de G al resultado de remover de G una arista $e = \{u, w\}$, y agregarle las aristas $\{u, v\}$ y $\{v, w\}$, donde $v \notin V$.



Definición (Homeomorfismo entre grafos[20]). Los grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ se dicen **homeomorfos** si son isomorfos, o si ambos pueden obtenerse a partir del mismo grafo no dirigido sin lazos mediante una secuencia de subdivisiones elementales.

Observación (del libro de Grimaldi). Sea $G = (V, E)$ un grafo sin lazos con $\#E \geq 1$. Si G' es obtenido a partir de G mediante una subdivisión elemental, entonces el grafo $G' = (V', E')$ satisface

$$\#V' = \#V + 1 \quad \wedge \quad \#E' = \#E + 1.$$

Observación (del libro de Grimaldi). Dos grafos homeomorfos pueden pensarse como isomorfos excepto, posiblemente, por vértices de grado 2.
En particular, si dos grafos son homeomorfos, entonces ambos son planos o ninguno lo es.

Teorema (de Kuratowski). Un grafo es plano si, y solo si, no contiene un subgrafo homeomorfo a $K_{3,3}$ ni a K_5.

[19] Extraída del libro de Grimaldi.
[20] Extraída del libro de Grimaldi.

Teorema (de Euler[21]). Sea $G = (V, E)$ un grafo o multigrafo conexo plano, con $\#V = v$ y $\#E = e$. Sea r el número de regiones determinadas por una inmersión de G en el plano, donde una de ellas tiene área infinita (se denomina *región infinita*). Entonces se cumple

$$v - e + r = 2.$$

Definición (Grado de una región[22]). Para cada región R de una inmersión de un grafo o multigrafo plano, se define el **grado** de R, $gr(R)$, como el número de aristas por las que "pasa" el camino cerrado de menor longitud alrededor de la frontera de R.

Observación (del libro de Grimaldi). La suma de los grados de todas las regiones (incluyendo la infinita) de un grafo plano $G = (V, E)$ es igual a $2\#E$.

Observación (Corolario del teorema de Euler[23]). Sea $G = (V, E)$ un grafo (no multigrafo) conexo plano sin lazos con $\#V = v$, $\#E = e > 2$, y r regiones. Entonces se cumple

$$3r \leq 2e \qquad \text{y} \qquad e \leq 3v - 6.$$

30. Teoría de grafos: árboles y ciclo hamiltoniano

Observación. Si $G = (V, E)$ es un árbol, y $x, y \in V$, entonces existe un camino entre x e y, y es único.

Teorema. Un grafo es conexo si, y solo si, admite un subgrafo recubridor que sea árbol.
Demostración. Ver clase n°30.

Definición (Hoja de un árbol y vértice colgante). Sea $T = (V, E)$ un árbol. Se dice que $v \in V$ es **hoja** si $gr(v) = 1$, o si $gr(v) = 0$ solamente en el caso del árbol trivial (un vértice).
La expresión **vértice colgante** es más general: refiere a cualquier vértice de grado 1 (pertenezca o no a un árbol).

Observación. Si se considera el recorrido más largo posible en un árbol, entonces sus extremos son hojas.
Demostración. Ver clase n°30.

[21]Extraído del libro de Grimaldi
[22]Extraída del libro de Grimaldi
[23]Extraído del libro de Grimaldi

Observación (de la observación anterior)**.** La cantidad de hojas en un árbol no trivial es mayor o igual a 2.

Teorema . En todo árbol $T = (V, E)$ se cumple

$$\#E = \#V - 1.$$

Demostración. Puede realizarse por inducción completa sobre $\#E$. Ver clase n°30.

Teorema . Sea $G = (V, E)$ un grafo. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. G es árbol.
2. G es conexo pero si se elimina cualquier arista se "desconecta" en dos subgrafos que son árboles.
3. G no tiene ciclos y $\#E = \#V - 1$.
4. G es conexo y $\#E = \#V - 1$.

Demostración. Ver clase n°30.

Definición (Ciclo y camino hamiltoniano)**.** Sea $G = (V, E)$ un grafo o multigrafo con $\#V \geq 3$.
Un **ciclo** de G se dice **hamiltoniano** si contiene todos los vértices de V.
Similarmente, un **camino** de G se dice **hamiltoniano** si no es un ciclo y contiene todos los vértices de V sin repetir ninguno.

Definición (Grafo hamiltoniano[24])**.** Se llama **grafo hamiltoniano** a aquel que admite un ciclo hamiltoniano.

Teorema . Sean $G = (V, E)$ un grafo sin lazos, con $\#V = n \geq 2$.
Si $gr(x) + gr(y) \geq n - 1, \forall x, y \in V \,/\, x \neq y$, entonces G admite un camino hamiltoniano.
Demostración. Ver clase n°30.

Observación (Corolario del teorema anterior)**.** Sea $G = (V, E)$ un grafo sin lazos, con $\#V = n \geq 2$.
Si $gr(v) \geq \frac{n-1}{2}\ \forall v \in V$, entonces G admite un camino hamiltoniano.

[24] Extraída de GitLab.

Apéndice: Coloración y polinomio cromático[25]

Definición (Coloración propia y número cromático). Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido. Se llama **coloración propia** de G al resultado de "colorear" sus vértices de modo tal que si $\{a, b\}$ es una arista de G (a y b son adyacentes), entonces a y b son de diferente color.
La cantidad mínima de colores necesarios para realizar una coloración propia de G se denomina **número cromático** de G, y se escribe $\chi(G)$.

Observación. $\forall n \geq 1,\ \chi(K_n) = n$.

Definición (Polinomio cromático). Sea G un grafo no dirigido y λ la cantidad de colores de los que se dispone para realizar una coloración propia de G. El **polinomio cromático** de G es una función polinómica $P(G, \lambda)$ sobre la variable λ, que retorna la cantidad de maneras diferentes de realizar una coloración propia de G, usando a lo sumo λ colores.

Definición. Dos coloraciones propias se consideran distintas en el siguiente sentido: Una coloración propia (de los vértices de $G = (V, E)$) que utiliza a lo sumo λ colores es una función f, con dominio V y codominio $\{1, 2, 3, ..., \lambda\}$, donde $f(u) \neq f(v)$ para vértices adyacentes $u, v \in V$.
Las coloraciones propias son entonces diferentes en el mismo sentido que dichas funciones son diferentes.

Observación.

- Si $G = (V, E)$ con $\#V = n$ y $\#E = \varnothing$, entonces G consiste en n vértices aislados y, por la regla del producto, $P(G, \lambda) = \lambda^n$.
- Si $G = K_n$, entonces debe disponerse de al menos n colores para realizar una coloración propia de G. Por la regla del producto, $P(G, \lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)...(\lambda - n + 1)$, expresión que denotaremos $\lambda^{(n)}$.
  Para $\lambda < n$, $P(G, \lambda) = 0$ y no hay forma de realizar una coloración propia de K_n.
  $P(G, \lambda) > 0$ por primera vez cuando $\lambda = n = \chi(G)$.

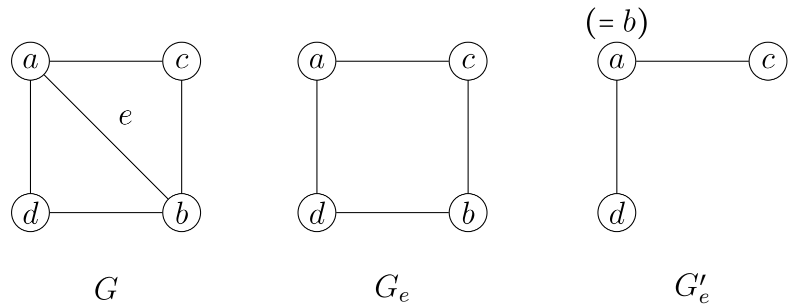
Observación. Si $G = P_n$ (un camino simple con n vértices), entonces $P(G, \lambda) = \lambda(\lambda - 1)^{n-1}$.

Observación. Si G está formado por componentes conexas $G_1, G_2, ..., G_k$ entonces, por la regla del producto, $P(G, \lambda) = P(G_1, \lambda) \cdot P(G_2, \lambda) \cdot ... \cdot P(G_k, \lambda)$.

[25] Este apéndice se elaboró en base al libro de Grimaldi. En ninguna clase de 2013, registrada por OpenFING, se trata este tema.

Definición (G_e y G'_e)**.** Sean $G = (V, E)$ un grafo no dirigido, y $e = \{a, b\} \in E$.
G_e denota el subgrafo de G obtenido al eliminar e de G, sin remover los vértices a y b ($G_e = G - e$). A partir de G_e, otro subgrafo de G se obtiene “uniendo”[26] (o identificando) los vértices a y b. G'_e denota este segundo subgrafo.

Ejemplo.



Teorema (de descomposición para polinomios cromáticos)**.** Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo y $e \in E$. Entonces

$$P(G_e, \lambda) = P(G, \lambda) + P(G'_e, \lambda).$$

Teorema. Para cualquier grafo G, el término independiente de $P(G, \lambda)$ es igual a 0.

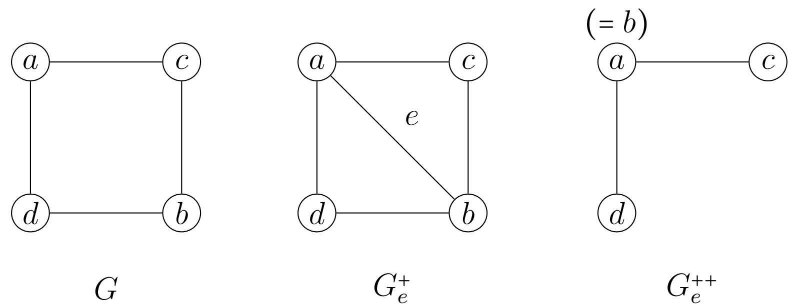
Teorema. Sea $G = (V, E)$ con $\#E > 0$. Entonces, la suma de los coeficientes de $P(G, \lambda)$ es igual a 0.

(*Es decir que* 1 *es raíz de* $P(G, \lambda)$*, ya que no es posible realizar una coloración propia con un solo color cuando* $\#E > 0$)

Teorema. Sea $G = (V, E)$, con $a, b \in V$ pero $e = \{a, b\} \notin E$. Se denota con G_e^+ el grafo que se obtiene de G agregando la arista $e = \{a, b\}$. “Unir” (o identificar) los vértices a y b en G da lugar al subgrafo de G que se denota como G_e^{++}. Bajo dichas condiciones

$$P(G, \lambda) = P(G_e^+, \lambda) + P(G_e^{++}, \lambda).$$

Ejemplo.



[26] Traducción provisoria de *coalescing*.

Teorema . Sean G un grafo y G_1, G_2 dos subgrafos de G. Si $G = G_1 \cup G_2$ y $G_1 \cap G_2 = K_n$ para algún $n \in \mathbb{N}^+$, entonces

$$P(G, \lambda) = \frac{P(G_1, \lambda) \cdot P(G_2, \lambda)}{\lambda^{(n)}}.$$ [27]

[27] $\lambda^{(n)}$ refiere, como se definió previamente, a $\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)...(\lambda - n + 1)$