Matemática Discreta I - 2020 - 2$^{\text{DO}}$ semestre

Práctico 5: Funciones Generatrices.

Ref. Notas teórica / Grimaldi 9.1 y 9.2

Ejercicio 1 Probar que las series $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{2^n} x^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{3^n} x^n$ convergen solo para $x = 0$ y que para ese valor ambas series coinciden (sug. usar que si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ es convergente entonces $\lim |a_n| = 0$). ¿Podemos afirmar que las funciones generatrices $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{2^n} x^n$ y $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{3^n} x^n$ son iguales?

Ejercicio 2 Para cada parte del Ejercicio 14 del Práctico 4 obtenga una función generatriz cuyo coeficiente de x^{19} resuelva el problema (no es necesario hallar este coeficiente explícitamente).

Ejercicio 3 Exprese las funciones generatrices de las siguientes sucesiones como cociente de polinomios.

a. $C_0^6, C_1^6, C_2^6, \ldots, C_6^6, \ldots$

b. $C_1^6, 2C_2^6, \ldots, 6C_6^6, \ldots$

c. $1, -1, 1, -1, \ldots$

d. $0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots$

e. $0, 0, 0, 3, -3, 3, -3, 3, \ldots$

f. $1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots$

g. $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots$

h. $0, 0, 1, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, \ldots$

i. $1, 0, 2, 0, 4, 0, 8, 0, 16, 0, 32, 0, 64, 0, 128, \ldots$

j. $0, 0, 1, b, a, b^2, a^2, b^3, a^3, b^4, a^4, b^5, a^5, b^6, a^6, b^7, \ldots$

Ejercicio 4 (Examen febrero 2010) Pruebe que la función generatriz asociada a la sucesión $(0, 0, a, 1, 0, a^2, 2, 0, a^3, 3, 0, a^4, 4, 0, a^5, ...)$ viene dada por $f(x) = \dfrac{ax^2}{1 - ax^3} + \dfrac{x^3}{(1 - x^3)^2}$.

Ejercicio 5 Determine la sucesión generada por cada una de las siguientes funciones generatrices.

a. $f(x) = (2x - 3)^3$

b. $f(x) = x^3/(1 - x)$

c. $f(x) = x^3/(1 - x^2)$

d. $f(x) = 1/(1 + 3x)$

e. $f(x) = 1/(2 - x)$

f. $f(x) = 3x^6 - 9 + 1/(1 - x)$

Ejercicio 6 Encuentre el coeficiente de x^{15} en las funciones

a. $x^3(1 - 2x)^{10}$.

b. $(x^3 - 5x)/(1 - x)^3$.

c. $(1 + x)^4/(1 - x)^4$.

Ejercicio 7 Calcule el número de soluciones en los naturales de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19$ con las siguientes restricciones: $x_1 \geq 3, x_2 \leq 10$, x_3 par y x_4 impar, asumiendo la siguiente descomposición en fracciones simples: $\frac{x^4}{(1-x)^4(1+x)^2} = \frac{a}{1+x} + \frac{b}{(1+x)^2} + \frac{c}{(1-x)} + \frac{d}{(1-x)^2} + \frac{e}{(1-x)^3} + \frac{f}{(1-x)^4}$, con $a = -\frac{1}{8}$, $b = \frac{1}{16}$, $c = -\frac{1}{8}$, $d = \frac{11}{16}$, $e = -\frac{3}{4}$, $f = \frac{1}{4}$.

Ejercicio 8 La sucesión de Lucas (ℓ_n) es la sucesión que verifica $\ell_0 = 2, \ell_1 = 1$ y $\ell_n = \ell_{n-1} + \ell_{n-2}$ para $n \geq 2$ (es decir, cada término es la suma de los dos anteriores). Los primeros términos son: $2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29$, etc. Sea $L(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \ell_n x^n$ la función generatriz asociada a la secuencia de Lucas. Calcule el producto $L(x) \cdot (1 - x - x^2)$ y obtenga una expresión para $L(x)$ como cociente de polinomios.

Ejercicio 9 Considere la sucesión (a_n) que verifica $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ y $a_n = 5a_{n-1} + 6a_{n-2}$. Sea $A(x)$ la función generatriz de esta sucesión. Calcule el producto $A(x) \cdot (1 - 5x - 6x^2)$ y obtenga una expresión para $A(x)$ como cociente de polinomios.

Ejercicio 10 Decidir para cuales de los siguientes casos la función generatriz $A(x)$ es invertible y en el caso que lo sea hallar los primeros 4 términos de $\frac{1}{A(x)}$:

a. $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n x^n$, **b**. $A(x) = 1 - x^2$, **c**. $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n + 2^n) x^n$

Ejercicio 11 Encuentre una fórmula para la convolución c_n de los siguientes pares de sucesiones:

a. $a_n = 1$, si $0 \leq n \leq 4; a_n = 0$, $\forall n \geq 5;\ b_n = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

b. $a_n = (-1)^n, b_n = (-1)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

c. $a_n = 1$, si $0 \leq n \leq 3; a_n = 0$, $\forall n \geq 4;\ b_n = n$, si $0 \leq n \leq 3; b_n = 0$, $\forall n \geq 4$.

Ejercicio 12 (Parcial julio 2020) Consideremos las funciones generatrices $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ y $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$. Se sabe que $a_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$ para todo $n \geq 0$ y que $a_0 = 1$. Probar que la función generatriz $f(x)$ es invertible y su inversa viene dada por $1 - xg(x)$.

Ejercicio 13 Dé una demostración de la igualdad del Ej. 27 del práctico 2 a partir de la igualdad polinómica $(1 + x)^k (1 + x)^{N-k} = (1 + x)^N$.

Ejercicio 14 Usando la identidad $(1 + x)^n (1 + x)^{-n} = 1$ y la fórmula de potencia de binomio con coeficientes negativos demuestre que $\sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k} \binom{n+m-k-1}{n-1} (-1)^{m-k} = 0 \quad \forall m \geq 1$.

Ejercicio 15 Halle las funciones generatrices de $0^3, 1^3, 2^3, 3^3, \ldots$ y de $s_n = \sum\limits_{i=0}^{n} i^3$, y deduzca la fórmula una fórmula cerrada para la suma de los primeros n cubos.

Ejercicio 16 Obtenga una fórmula cerrada para la sumatoria $\sum_{k=0}^{n} k(k-1)$.