

| Nº de examen | Cédula | Apellido y nombre | Salón |
|--------------|--------|-------------------|-------|
| | | | |

Respuestas

| Ej. 1 | Ej. 2 | Ej. 3 | Ej. 4 | Ej. 5 | Ej. 6 |
|-------|-------|-------|--------|--------|--------|
| | | | | | |
| Ej. 7 | Ej. 8 | Ej. 9 | Ej. 10 | Ej. 11 | Ej. 12 |
| | | | | | |

Importante

- El examen dura 4 horas.
- Cada ejercicio vale $8 + \frac{1}{3}$ puntos.
- El puntaje obtenido será redondeado al entero más cercano.
- El parcial es de 100 puntos en total.
- Solo serán válidas las respuestas indicadas en el cuadro de respuestas.
- En cada ejercicio hay una sola opción correcta.
- No se restan puntos por respuesta incorrecta.
- El examen se aprueba con 60 o más puntos.

Tabla de $\Phi(z)$ (normal estándar)

| Z | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0.0 | 0.5000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5199 | 0.5239 | 0.5279 | 0.5319 | 0.5359 |
| 0.1 | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 | 0.5675 | 0.5714 | 0.5753 |
| 0.2 | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 | 0.6064 | 0.6103 | 0.6141 |
| 0.3 | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 | 0.6443 | 0.6480 | 0.6517 |
| 0.4 | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 | 0.6772 | 0.6808 | 0.6844 | 0.6879 |
| 0.5 | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 | 0.7224 |
| 0.6 | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.7549 |
| 0.7 | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7704 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 | 0.7823 | 0.7852 |
| 0.8 | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 | 0.8078 | 0.8106 | 0.8133 |
| 0.9 | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 | 0.8340 | 0.8365 | 0.8389 |
| 1.0 | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |
| 1.1 | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.8830 |
| 1.2 | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.8980 | 0.8997 | 0.9015 |
| 1.3 | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |
| 1.4 | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9279 | 0.9292 | 0.9306 | 0.9319 |
| 1.5 | 0.9332 | 0.9345 | 0.9357 | 0.9370 | 0.9382 | 0.9394 | 0.9406 | 0.9418 | 0.9429 | 0.9441 |
| 1.6 | 0.9452 | 0.9463 | 0.9474 | 0.9484 | 0.9495 | 0.9505 | 0.9515 | 0.9525 | 0.9535 | 0.9545 |
| 1.7 | 0.9554 | 0.9564 | 0.9573 | 0.9582 | 0.9591 | 0.9599 | 0.9608 | 0.9616 | 0.9625 | 0.9633 |
| 1.8 | 0.9641 | 0.9649 | 0.9656 | 0.9664 | 0.9671 | 0.9678 | 0.9686 | 0.9693 | 0.9699 | 0.9706 |
| 1.9 | 0.9713 | 0.9719 | 0.9726 | 0.9732 | 0.9738 | 0.9744 | 0.9750 | 0.9756 | 0.9761 | 0.9767 |
| 2.0 | 0.9772 | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.9817 |
| 2.1 | 0.9821 | 0.9826 | 0.9830 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.9850 | 0.9854 | 0.9857 |
| 2.2 | 0.9861 | 0.9864 | 0.9868 | 0.9871 | 0.9875 | 0.9878 | 0.9881 | 0.9884 | 0.9887 | 0.9890 |
| 2.3 | 0.9893 | 0.9896 | 0.9898 | 0.9901 | 0.9904 | 0.9906 | 0.9909 | 0.9911 | 0.9913 | 0.9916 |
| 2.4 | 0.9918 | 0.9920 | 0.9922 | 0.9924 | 0.9927 | 0.9929 | 0.9931 | 0.9932 | 0.9934 | 0.9936 |
| 2.5 | 0.9938 | 0.9940 | 0.9941 | 0.9943 | 0.9945 | 0.9946 | 0.9948 | 0.9949 | 0.9951 | 0.9952 |
| 2.6 | 0.9953 | 0.9955 | 0.9956 | 0.9957 | 0.9958 | 0.9960 | 0.9961 | 0.9962 | 0.9963 | 0.9964 |
| 2.7 | 0.9965 | 0.9966 | 0.9967 | 0.9968 | 0.9969 | 0.9970 | 0.9971 | 0.9972 | 0.9973 | 0.9974 |
| 2.8 | 0.9974 | 0.9975 | 0.9976 | 0.9977 | 0.9977 | 0.9978 | 0.9979 | 0.9979 | 0.9980 | 0.9981 |
| 2.9 | 0.9981 | 0.9982 | 0.9982 | 0.9983 | 0.9984 | 0.9984 | 0.9985 | 0.9985 | 0.9986 | 0.9986 |

Tabla de t Student

| Probabilidad de cola derecha $P(t \geq c)$ | | | | | | | | | | | |
|--|------------|------------|------------|------------|------------|-------------|------------|------------|-------------|--------------|-------------|
| GdL | .25 | .20 | .15 | .10 | .05 | .025 | .02 | .01 | .005 | .0025 | .001 |
| 1 | 1.00 | 1.38 | 1.96 | 3.08 | 6.31 | 12.71 | 15.89 | 31.82 | 63.66 | 127.32 | 318.31 |
| 2 | 0.82 | 1.06 | 1.39 | 1.89 | 2.92 | 4.30 | 4.85 | 6.96 | 9.92 | 14.09 | 22.33 |
| 3 | 0.76 | 0.98 | 1.25 | 1.64 | 2.35 | 3.18 | 3.48 | 4.54 | 5.84 | 7.45 | 10.21 |
| 4 | 0.74 | 0.94 | 1.19 | 1.53 | 2.13 | 2.78 | 3.00 | 3.75 | 4.60 | 5.60 | 7.17 |
| 5 | 0.73 | 0.92 | 1.16 | 1.48 | 2.02 | 2.57 | 2.76 | 3.36 | 4.03 | 4.77 | 5.89 |
| 6 | 0.72 | 0.91 | 1.13 | 1.44 | 1.94 | 2.45 | 2.61 | 3.14 | 3.71 | 4.32 | 5.21 |
| 7 | 0.71 | 0.90 | 1.12 | 1.41 | 1.89 | 2.36 | 2.52 | 3.00 | 3.50 | 4.03 | 4.79 |
| 8 | 0.71 | 0.89 | 1.11 | 1.40 | 1.86 | 2.31 | 2.45 | 2.90 | 3.36 | 3.83 | 4.50 |
| 9 | 0.70 | 0.88 | 1.10 | 1.38 | 1.83 | 2.26 | 2.40 | 2.82 | 3.25 | 3.69 | 4.30 |
| 10 | 0.70 | 0.88 | 1.09 | 1.37 | 1.81 | 2.23 | 2.36 | 2.76 | 3.17 | 3.58 | 4.14 |

Ejercicio 1

Hay n estudiantes en una clase ($n \geq 4$). Algunos de los estudiantes reclamaron un error en sus notas en una determinada prueba. Las respuestas fueron revisadas y los puntajes de cuatro estudiantes aumentaron de 70 a 90.

¿Cómo afecta este cambio al puntaje promedio de la clase?

- | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|
| (A) El promedio no cambia. | (D) El promedio aumenta en 80. |
| (B) El promedio aumenta en 20. | (E) El promedio aumenta en $80/n$. |
| (C) El promedio aumenta en $20/n$. | (F) El promedio aumenta en $20/4$. |

Ejercicio 2

Se quiere verificar el funcionamiento correcto de una maquina de café a monedas. Para esto se mide la cantidad de café vertido en 9 ocasiones diferentes, obteniéndose que la media muestral del contenido de los vasos es 26.2 ml, y el desvío **muestral** 2 ml.

Asumiendo que los datos son independientes y tienen distribución normal, se desea realizar un test de hipótesis al nivel 5 % para la hipótesis nula: la cantidad media servida es 25 ml frente a la alternativa: la media es diferente de 25 ml.

El valor observado del estadístico T_{obs} y la región de rechazo para el test R son:

- | | |
|--|--|
| (A) $T_{obs} = 1.8$ $R = [1.86, +\infty)$ | (D) $T_{obs} = 1.8$ y $R = (-\infty, -1.86] \cup [1.86, +\infty)$ |
| (B) $T_{obs} = 1.5$ $R = [1.86, +\infty)$ | (E) $T_{obs} = 1.5$ $R = [2.31, +\infty)$ |
| (C) $T_{obs} = 1.8$ $R = [2.31, +\infty)$ | (F) $T_{obs} = 1.8$ y $R = (-\infty, -2.31] \cup [2.31, +\infty)$ |

Ejercicio 3

Sea X una variable aleatoria con distribución uniforme en $[0, 1]$. Hallar la esperanza $E(X^3)$.

- | | | | | | |
|-----------|---------|----------|-----------|-----------|-----------|
| (A) $2/3$ | (B) 1 | (C) -2 | (D) $1/3$ | (E) $1/2$ | (F) $1/4$ |
|-----------|---------|----------|-----------|-----------|-----------|

Ejercicio 4

Un dado equilibrado se lanza 6 veces. Se consideran los siguientes dos eventos:

$$A = \{\text{sale al menos un seis}\}$$

$$B = \{\text{ocurre al menos una coincidencia}\}$$

en donde una “coincidencia” se da en el i -ésimo lanzamiento cuando sale i en dicho lanzamiento.

Indicar la opción correcta:

- (A) A y B tienen la misma probabilidad.
- (B) A y B son incompatibles (o disjuntos).
- (C) $P(A) < P(B)$.
- (D) $P(A) = 1$ y $P(B) = (1/6)^5$.
- (E) $P(B|A^c) < P(B)$.
- (F) A y B son independientes.

Ejercicio 5

Una urna contiene 3 bolas rojas y 2 azules. Una segunda urna contiene un número desconocido de bolas rojas y 4 bolas azules. Se extrae una bola de cada urna al azar, y la probabilidad de obtener dos bolas del mismo color es $17/35$.

¿Cuántas bolas rojas hay en la segunda urna?

- (A) 1
- (B) 3
- (C) 7
- (D) 25
- (E) 0
- (F) 10

Ejercicio 6

El puntaje de un estudiante en un examen de cálculo es una variable aleatoria con valores en $[0,100]$, esperanza 50 y varianza 25. Se asume que los puntajes de los estudiantes son independientes.

Si una clase de 100 estudiantes toma el examen, usando el TCL aproximar la probabilidad de que el promedio de los puntajes de la clase caiga entre 50 y 51.

- (A) 0.0001
- (B) 0.0456
- (C) 0.3174
- (D) 0.4772
- (E) 0.5000
- (F) 0.9772

Ejercicio 7

Un químico desea detectar una impureza en cierto compuesto que él mismo prepara. Dispone de una prueba que detecta la impureza si está en el compuesto con probabilidad 90% e indica que hay una impureza cuando en realidad no la hay con probabilidad 5%. Se sabe que el químico produce compuestos con la impureza presente el 20% de las veces.

¿Cuál es la probabilidad de que un compuesto tenga realmente una impureza **dado** que el test indica que la tiene?

- (A) $\frac{9}{11}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{9}{10}$ (E) $\frac{1}{3}$ (F) $\frac{8}{10}$
-

Ejercicio 8

Se tiene dos urnas con tickets. La primera urna contiene $\frac{2}{3}$ de los tickets con el número 1 escrito en ellos, y $\frac{1}{3}$ con el número 2. La segunda urna contiene $\frac{1}{3}$ de los tickets con el número 2 y $\frac{2}{3}$ con el número 3.

Una moneda tiene probabilidad p de salir cara. Si al lanzarla sale cara, se extrae un ticket de la primera urna, si sale cruz se extrae un ticket de la segunda urna.

Este procedimiento se repite 10 veces y se observan los siguientes tickets:

2, 1, 3, 2, 2, 3, 2, 2, 1, 3.

Calcular una estimación de p basada en el método de máxima verosimilitud.

- (A) $\frac{3}{5}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{5}$ (D) $\frac{4}{5}$ (E) $\frac{2}{5}$ (F) $\frac{2}{3}$
-

Ejercicio 9

Un estimador $\hat{\theta}$ de un parámetro θ tiene distribución normal. Se sabe además que

$$\text{Var}(\hat{\theta}) = 4, \quad P(\hat{\theta} \leq \theta) = 0.9332.$$

Hallar el error cuadrático medio de $\hat{\theta}$.

- (A) 25 (B) -5 (C) 5 (D) 13 (E) 7 (F) 1
-

Ejercicio 10

Se asume que las alturas (en pulgadas) de los estudiantes de una universidad tienen una distribución normal de varianza 25. Queremos construir un intervalo de confianza al 95% para la media de la población, y que tenga una precisión de 1 pulgada. (Recordar que la precisión es el largo del intervalo, es decir la diferencia entre el máximo y mínimo valor del mismo.)

El tamaño mínimo de muestra requerido es:

- (A) 9604 (B) 269 (C) 98 (D) 385 (E) 512 (F) 1427
-

Ejercicio 11

A un grupo de estudiantes de inglés se les toma un examen al comienzo del curso y otro al final. Se asume que las notas tienen distribución normal bi-variada de parámetros:

| | Media | Desvío |
|-------------|-------|--------|
| 1er examen | 50 | 15 |
| 2do examen | 70 | 8 |
| Correlación | 0.5 | |

¿Qué porcentaje de estudiantes sacó en el segundo examen al menos 5 puntos más que en el primero?

- (A) Menor a 50% (C) Entre 60 % y 70% (E) Entre 80 % y 90 %
 (B) Entre 50 % y 60 % (D) Entre 70 % y 80% (F) Mayor a 90 %

Ejercicio 12

Con el objetivo de aproximar π se tiran 100 puntos al azar (ambas coordenadas independientes y con distribución uniforme) independientes en el cuadrado $[-1, 1] \times [-1, 1]$ utilizando como aproximación la variable aleatoria $Y = 4X/100$ donde X es el número de puntos que cayeron a distancia menor que 1 del punto $(0, 0)$.

Calcular la varianza de Y .

- (A) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi(1-\pi)}{100}$ (E) $\frac{\pi(1-\frac{\pi}{4})}{100}$
 (B) $\frac{\pi}{100}$ (D) $\frac{\frac{\pi}{4}(1-\frac{\pi}{4})}{100}$ (F) $\frac{4\pi(1-\frac{\pi}{4})}{100}$