Facultad de Ingeniería
IMERL
MÉTODOS NUMÉRICOS
Curso 2020

Práctico 5 - Mínimos Cuadrados

En este práctico se trabaja con sistemas lineales incompatibles: $\nexists\, x \,/\, Ax - b = 0$
Buscamos entonces x que minimice el residuo $||Ax - b||_2$

Ejercicio 1
Demostrar que el conjunto de soluciones del Problema de Mínimos Cuadrados Lineal (PMCL), $\text{mín}_x \|Ax - b\|_2^2$ coincide con las soluciones del sistema de ecuaciones normales: $A^T Ax = A^T b$.

Ejercicio 2
Se consideran el modelo $y(t) = \alpha t + \beta$, con $n = 2$ parámetros y las observaciones $\{(t_i, y_i), i = 1, \ldots, m\}$, $m \geq n$. Obtener la matriz A y el vector b del PMCL asociado y resolverlo en forma exacta (hallando α y β en función de los datos).

Ejercicio 3
Se consideran el modelo $y(t) = \alpha t + \beta t^3 + \gamma$ y las observaciones $\{(t_i, y_i), i = 1, \ldots, m\}$, $m \geq n$.

1. Hallar A y b y escribir las ecuaciones normales para este caso particular (no se pide hallar su solución).
2. Se tienen los siguientes $m = 4$ datos experimentales: $\{(-1, \frac{7}{2}), (0, \frac{3}{2}), (1, \frac{3}{2}), (2, \frac{11}{2})\}$.
3. Utilizando la computadora, resolver las ecuaciones normales para hallar los parámetros del modelo que mejor se ajustan a estos datos. Graficar los datos junto con el modelo obtenido.

Ejercicio 4
Se considera el modelo lineal general $y(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i \phi_i(t)$, donde $\phi_i(t)$ son funciones dadas y los a_i son los parámetros del modelo. Se tienen además m datos experimentales $(t_i, y_i), i = 1, \ldots, m$, con $m \geq n$. Obtener la matriz A y el vector b del PMCL asociado.

Ejercicio 5

1. Describir en detalle las descomposiciones QR y SVD de una matriz A.
2. Explicar cómo utilizaría la descomposición QR para resolver el PMCL.
3. Explicar cómo utilizaría la descomposición SVD para resolver el PMCL.
4. Hallar ambas descomposiciones QR y SVD de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 6
Se considera ahora el Problema de Mínimos Cuadrados No Lineal (PMCNL).

1. Describir el Problema de Mínimos Cuadrados No Lineal
2. Describir el método de Gauss-Newton para la resolución del PMCNL
3. Implementar el método de Gauss-Newton y utilizarlo para ajustar la función no lineal $y(t) = \alpha(1 - e^{-\beta t})$ a los siguientes pares de datos:

$$\{(0{,}25; 0{,}28); (0{,}75; 0{,}57); (1{,}25; 0{,}68); (1{,}75; 0{,}74); (2{,}25; 0{,}79)\}.$$