Programación 3
Año 2022

Práctico 5

Ejercicio 1 (Kleinberg & Tardos, Ex. 4.5)**.** Una compañía de telecomunicaciones necesita desplegar estaciones de acceso a lo largo de una carretera poco poblada para dar cobertura a las casas ubicadas sobre ella. Para garantizar la cobertura se necesita que ninguna casa esté a más de 4 kilómetros de distancia de una estación (para simplificar el problema suponemos que la carretera es recta). Disponemos de la ubicación de cada una de las casas, representada mediante la distancia lineal contando desde el inicio de la carretera.

(a) Dé un algoritmo eficiente para determinar la ubicación de las estaciones de manera que se satisfaga el requerimiento de cobertura con la menor cantidad de estaciones posible.
(b) Demuestre la corrección de su algoritmo.
Sugerencia: Siga una estrategia similar a la empleada en la sección 4.1 del libro.

Ejercicio 2 (Kleinberg & Tardos, Ex. 4.6)**.** La organización de un triatlón amateur cuenta, para cada participante inscripto, con una estimación del tiempo que le llevará completar cada una de las etapas: natación, ciclismo y carrera a pie. La piscina donde se desarrolla la primera etapa solo puede ser ocupada por un nadador a la vez; las etapas posteriores pueden desarrollarse simultáneamente por varios competidores. Queremos determinar en qué orden organizar la largada de los competidores (necesariamente uno a la vez) de modo de minimizar la duración estimada de la competencia completa, que queda determinada cuando el último participante llega a la meta de la última etapa.

(a) Dé un algoritmo eficiente para resolver el problema.
(b) Demuestre la corrección de su algoritmo.

Ejercicio 3 (Kleinberg & Tardos, Ex. 4.10)**.** Sea $G = (V, E)$ un grafo con n vértices y costos c_e en las aristas, $e \in E$. Sea también T un árbol de cubrimiento mínimo (MST) para G. Supongamos que agregamos una nueva arista e a G y llamemos G' a este nuevo grafo. A los efectos de simplificar las demostraciones suponemos que todos los costos de aristas en G' son diferentes.

(a) Sea $e_{máx}$ la arista de costo máximo en el ciclo que se forma en $T \cup \{e\}$, sea $c_{máx}$ el costo de esta arista, y sea $T' = (T \cup \{e\}) \setminus \{e_{máx}\}$. Muestre que T' es un MST para G'.

Sugerencia:

i) Muestre que (V, T') es un árbol de cubrimiento de G'.

ii) Usando el enunciado (4.20) del libro de referencia, muestre que cada una de las aristas que no pertenecen a T' no pueden pertenecer a un árbol de cubrimiento de G'. Tenga en cuenta que esas aristas son $E \setminus T$, que son aristas de G, y $e_{máx}$.

(b) Dé un algoritmo que a partir de G, T y e construye en tiempo $O(n)$ un árbol de cubrimiento mínimo para G'. Demuestre la corrección y analice la complejidad de su algoritmo.