Examen Diciembre 2018

Ejercicio 1

Sea $A = \{(1,1,1),(1,2,3),(0,2,4),(0,0,1)\} \subset \mathbb{R}^3$.
Entonces:

A. Existe una única transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1,1,1) = (2,3), T(1,2,3) = (1,0), T(0,2,4) = (1,0), T(0,0,1) = (1,1)$.

B. Existen infinitas transformaciones lineales $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tales que $T(1,1,1) = (2,3), T(1,2,3) = (1,0), T(0,2,4) = (-2,-6)$.

C. Existen infinitas transformaciones lineales $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tales que $T(1,1,1) = (0,3), T(1,2,3) = (1,0), T(0,2,4) = (-2,-6), T(0,0,1) = (1,2)$.

D. Existe una única transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1,1,1) = (0,3), T(1,2,3) = (1,0), T(0,2,4) = (2,-6), T(0,0,1) = (1,2)$, y esta cumple $T(2,3,0) = (0,1)$.

E. No existe ninguna transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1,1,1) = (2,3), T(1,2,3) = (1,0), T(0,2,4) = (-2,-6)$.

Ejercicio 2

Sean $V = \mathcal{P}_3$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a 3 y el subespacio vectorial S definido como $S = [x^3 + 2x + 1, x^3 + x^2, 3x^2 - 1]$.
Entonces $ax^3 + bx^2 + cx + d \in S$ si y sólo si

A. $2a + b + c + d = 0$

B. $b = c = 0$

C. $-2a + b - c + d = 0$

D. $b = d = 0$

E. $-a + b - c + 3d = 0$

Ejercicio 3

Sea $T : \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(ax^2 + bx + c) = (\lambda a, a + \lambda b + c, a + b + \lambda c)$$

siendo λ un número real. Entonces

A. T nunca es invertible.

B. T es invertible $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

C. T es invertible $\iff \lambda \neq 0$.

D. T es invertible $\iff \lambda \neq 1$.

E. T es invertible $\iff \lambda \notin \{-1, 0, 1\}$.

EJERCICIO 1

EXAMEN DICIEMBRE 2018

$A = \{(1,1,1),(1,2,3),(0,2,4),(0,0,1)\} \subset \mathbb{R}^3$ / $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

A es un generador de $\mathbb{R}^3$ $\Rightarrow$ lo puedo achicar hasta formar una base.

$$\alpha(1,1,1) + \beta(1,2,3) + \gamma(0,2,4) + \theta(0,0,1) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} \alpha+\beta=0 \\ \alpha+2\beta+2\gamma=0 \\ \alpha+3\beta+4\gamma+\theta=0 \end{cases} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \boxed{\theta = 0}$$

$$\beta + 2\gamma = 0 \Rightarrow \boxed{\beta = -2\gamma}$$

$$\alpha+\beta=0 \Rightarrow \boxed{\alpha = -\beta} \qquad \beta \in \mathbb{R}$$

Como α y γ los puedo escribir en función de β $\Rightarrow$ El vector asociado a β $(1,2,3)$ es combinación lineal de $(1,1,1)$ y $(0,2,4)$.

$\Rightarrow$ Una base de $\mathbb{R}^3$ sería $\{(1,1,1),(0,2,4),(0,0,1)\}$

Miro la opción A:

$$T(1,1,1) = (2,3)$$
$$T(0,2,4) = (1,0) \quad y \quad T(1,2,3) = (1,0)$$
$$T(0,0,1) = (1,1)$$

Si bien tengo la t.l. definida en una base, no se cumplen todas las condiciones, pues:

$$(1,2,3) = 1(1,1,1) + 1/2(0,2,4) + 0(0,0,1)$$

$\Rightarrow$ DESCARTO A

$$T(1,2,3) = T(1,1,1) + 1/2\, T(0,2,4)$$
$$(1,0) = (2,3) + 1/2(1,0) \Rightarrow (1,0) \neq (5/2, 3)$$

Miro la opción D

$T(1,1,1)=(0,3)$
$T(0,2,4)=(2,-6)$ y $T(1,2,3)=(1,0)$
$T(0,0,1)=(1,2)$ $T(2,3,0)=(0,1)$

Tengo la t.l definida en una base y

$$(1,2,3)=1(1,1,1)+1/2\,(0,2,4)+0(0,0,1)$$
$$T(1,2,3)=T(1,1,1)+1/2\,T(0,2,4)$$
$$(1,0)=(0,3)+1/2(2,-6)$$
$$(1,0)=(1,0)\ \checkmark$$

Pero:

$$(2,3,0)=2(1,1,1)+1/2\,(0,2,4)+(-4)(0,0,1)$$
$$T(2,3,0)=2\,T(1,1,1)+1/2\,T(0,2,4)+(-4)\,T(0,0,1)$$
$$(0,1)=2(0,3)+1/2(2,-6)+(-4)(1,2)$$
$$(0,1)=(-3,-5)\ \times$$

No se cumplen todas las condiciones $\Rightarrow$ DESCARTO D

Miro opción E Como se cumple que

$$T(1,2,3)=T(1,1,1)+1/2\,T(0,2,4)$$ (ver parte anterior)

Entonces existe alguna t.l que cumple esas condiciones.

$\Rightarrow$ DESCARTO E

Miro opción C Como $(1,2,3)=(1,1,1)+1/2\,(0,2,4)$

$$T(1,2,3)=T(1,1,1)+1/2\,T(0,2,4)$$
$$(1,0)=(0,3)+1/2\,(-2,-6)$$
$$(1,0)\neq(-1,0)$$

$\Rightarrow$ DESCARTO C

Miro opción B Se cumple que

$$T(1,2,3)=T(1,1,1)+1/2\,T(0,2,4)$$

$\Rightarrow$ Puedo definir ∞ t.l que cumplan esas condiciones $\Rightarrow$ OPCIÓN CORRECTA B

EJERCICIO 2 — EXAMEN DICIEMBRE 2018

$V = \mathcal{P}_3$

$S = [x^3+2x+1,\ x^3+x^2,\ 3x^2-1]$

$p(x) = ax^3+bx^2+cx+d \in S$ si y solo si ...?

Para que un polinomio cualquiera pertenezca al subespacio S, debe poder escribirse como c.l. de los vectores de una base de S. Por lo tanto, hallamos una base de S.

¿ $\{x^3+2x+1,\ x^3+x^2,\ 3x^2-1\} \xrightarrow{b} S$?

$$\lambda_1(x^3+2x+1)+\lambda_2(x^3+x^2)+\lambda_3(3x^2-1) = 0x^3+0x^2+0x+0$$

$$(\lambda_1+\lambda_2)x^3+(\lambda_2+3\lambda_3)x^2+(2\lambda_1)x+\lambda_1-\lambda_3 = 0x^3+0x^2+0x+0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1+\lambda_2=0 \longrightarrow \boxed{\lambda_2=0} \\ \lambda_2+3\lambda_3=0 \\ 2\lambda_1=0 \longrightarrow \boxed{\lambda_1=0} \\ \lambda_1-\lambda_3=0 \longrightarrow \boxed{\lambda_3=0} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ El conjunto es base de S.

Planteo que ax^3+bx^2+cx+d sea combinación lineal de la base de S.

$$ax^3+bx^2+cx+d = (\lambda_1+\lambda_2)x^3+(\lambda_2+3\lambda_3)x^2+(2\lambda_1)x+\lambda_1-\lambda_3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1+\lambda_2=a \\ \lambda_2+3\lambda_3=b \\ 2\lambda_1=c \\ \lambda_1-\lambda_3=d \end{cases} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 3 & b \\ 2 & 0 & 0 & c \\ 1 & 0 & -1 & d \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 3 & b \\ 0 & -2 & 0 & c-2a \\ 0 & -1 & -1 & d-a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 3 & b \\ 0 & 0 & 6 & c-2a+2b \\ 0 & 0 & 2 & d-a+b \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 3 & b \\ 0 & 0 & 6 & c-2a+2b \\ 0 & 0 & 0 & 3(d-a+b)-c+2a-2b \end{array}\right)$$

El sist. es compatible $\Leftrightarrow 3d-3a+3b-c+2a-2b=0$

$$\boxed{-a+b-c+3d=0}$$

Por lo tanto los polinomios que pertenecen a S deben cumplir esa condición.

$\Rightarrow$ OPCIÓN CORRECTA E

EJERCICIO 3 — **EXAMEN DICIEMBRE 2018**

Sea $T: \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^3 \;/\; T(ax^2+bx+c) = (\lambda a,\, a+\lambda b+c,\, a+b+\lambda c)$

$\lambda \in \mathbb{R}$.

T es invertible $\Leftrightarrow$ **T es biyectiva** $\Leftrightarrow$ $\forall B \xrightarrow{b} V,\ T(B) \xrightarrow{b} W$

(lleva de base en base)

Tomo una base de $\mathcal{P}_2$, $B = \{1, x, x^2\}$ y la transformo.

Si los transformados forman una base de $\mathbb{R}^3$, entonces T es invertible.

$T(1) = (0, 1, \lambda)$

$T(x) = (0, \lambda, 1)$

$T(x^2) = (\lambda, 1, 1)$

Por prop, todo conjunto LI de n vectores es base, siendo $n = \dim V$.

Por lo tanto $\{(0,1,\lambda), (0,\lambda,1), (\lambda,1,1)\}$ es base de $\mathbb{R}^3$ sii el conjunto es LI.

$$\alpha(0,1,\lambda) + \beta(0,\lambda,1) + \gamma(\lambda,1,1) = (0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \gamma\lambda = 0 \\ \alpha + \beta\lambda + \gamma = 0 \\ \alpha\lambda + \beta + \gamma = 0 \end{cases} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 1 & \lambda & 1 & 0 \\ \lambda & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda^2 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \end{array}\right)$$

Para que el conjunto sea base este sistema debe ser compatible determinado.

Por lo tanto, **si $\lambda = 0$** el sist. es indeterminado $\Rightarrow$ T no invertible para $\lambda = 0$.

De la segunda fila: $1 - \lambda^2 = 0 \Leftrightarrow$ **$\lambda = 1$** o **$\lambda = -1$**

$\Rightarrow$ Si $\lambda = -1$ o $\lambda = 1$ el sistema es indeterminado $\Rightarrow$ T no invertible.

<u>Verifico:</u> Si $\lambda = 1$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$ Sist indeterminado

Si $\lambda = -1$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$ sist indeterm.

$\Rightarrow$ T es invertible $\Leftrightarrow \lambda \notin \{-1, 0, 1\}$

$\Rightarrow$ **OPCIÓN CORRECTA E**

Ejercicio 4

Sean V un espacio vectorial y $T, S : V \to V$ dos transformaciones lineales.

Se consideran las afirmaciones:

(I) $\mathrm{Im}(T \circ T) \subset \mathrm{Im}(T)$.

(II) $N(T) \cap N(S) \subset N(T + S)$.

(III) $N(T) \cap N(S) = N(T + S)$.

Entonces

A. Solamente (I) es verdadera.

B. Solamente (II) es verdadera.

C. Solamente (I) y (II) son verdaderas.

D. Solamente (II) y (III) son verdaderas.

E. Las 3 afirmaciones son verdaderas.

Ejercicio 5

Sea π el plano de ecuación reducida $\pi : x + 2y + 2z = 3$. Considere la familia de rectas r_α de ecuación paramétrica:

$$r_\alpha = \begin{cases} x &= 1 + \lambda\alpha^2 \\ y &= 0 + \lambda(\alpha+1) \\ z &= 1 + \lambda(2) \end{cases}$$

Entonces:

A. r_α es paralela a π para todo α.

B. $r_\alpha \subseteq \pi$ si y solamente si $\alpha = 2$.

C. $r_\alpha \subseteq \pi$ si y solamente si $\alpha \neq 0$.

D. r_α es perpendicular a π para $\alpha = 1$ y $\alpha = 2$.

E. r_α es perpendicular a π si y solamente si $\alpha = 1$.

EJERCICIO 4

EXAMEN DICIEMBRE 2018

Sea V un ev. $T: V \longrightarrow V$

$S: V \longrightarrow V$

(I) $Im(T \circ T) \subset Im(T)$

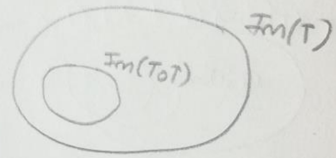
(II) $N(T) \cap N(S) \subset N(T+S)$

(III) $N(T) \cap N(S) = N(T+S)$

PARA PROBAR INCLUSIÓN DE CONJUNTOS:

1. Tomo un vector del espacio e impongo que pertenezca al primer conjunto.
2. Me fijo si ese vector pertenece o no al segundo conjunto.

(I) ① $w \in Im(T \circ T) \Leftrightarrow \exists v \in V \mid T(v) = w$.



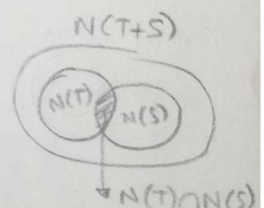
② $w \in Im(T)$?

$w \in Im(T) \Leftrightarrow \exists u \in V \mid T(u) = w$. Si tomo $u = v$ (por ①) se cumple la condición

$\Rightarrow$ VERDADERO

(II) ① $v \in N(T) \cap N(S) \Leftrightarrow T(v) = 0$ y $S(v) = 0$

② $v \in N(T+S)$?



$v \in N(T+S) \underset{\substack{\text{por def} \\ \text{suma de} \\ \text{t.l}}}{\Leftrightarrow} (T+S)(v) = 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{T(v)}_{\substack{= \\ 0 \\ \text{por ①}}} + \underbrace{S(v)}_{\substack{= \\ 0 \\ \text{por ①}}} = 0 \Rightarrow 0 = 0$ ✓

$\Rightarrow$ VERDADERO

(III) Para que sean iguales deben coincidir en una base. Pero,

$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{por prop.}}}{\dim N(T+S) = \dim N(T) + \dim N(S) - \dim N(T) \cap N(S)}$

$\Rightarrow$ OPCIÓN (C) CORRECTA

Como $\dim N(T) \cap N(S) \leq \dim N(T) + \dim N(S)$

Entonces $\dim N(T+S) > \dim N(T) \cap N(S)$

$\Rightarrow$ Nunca puede cumplirse la igualdad (III) $\Rightarrow$ FALSO

EJERCICIO 5 — EXAMEN DICIEMBRE 2018

Sea $\pi: x+2y+2z=3$

$$r_\alpha = \begin{cases} x = 1 + \lambda\alpha^2 \\ y = 0 + \lambda(\alpha+1) \\ z = 1 + \lambda(2) \end{cases}$$

Familia de rectas

Posiciones relativas del plano y la recta:

- $r \subset \pi$
- $r \cap \pi = \{P\}$
- $r \cap \pi = \{\emptyset\}$

Vamos a hallar $r_\alpha \cap \pi$. Para ello, sustituimos (x,y,z) "de la recta" en la ecuación del plano π:

$$(1+\lambda\alpha^2) + 2(\lambda(\alpha+1)) + 2(1+2\lambda) = 3$$

$$\lambda(\alpha^2 + 2\alpha + 2 + 4) + 1 + 2 = 3$$

$$\lambda(\overset{\neq 0}{\alpha^2+2\alpha+6}) = 0 \iff \lambda = 0 \quad \text{o} \quad \alpha^2+2\alpha+6=0$$

No tiene raíces reales.

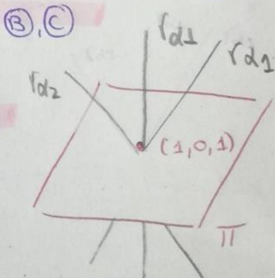
$\Rightarrow$ Sustituyo λ en la ecuación de "la recta":

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \forall\alpha$$

$r_\alpha \cap \pi = \{P\} = \{(1,0,1)\}$

$\Rightarrow$ Descarto opciones A, B, C

Dibujo:



Ahora falta ver en qué caso $r_\alpha \perp \pi$.

Eso se cumple $\iff$ la normal al plano es colineal al vector director de la recta.

$$(\alpha^2, \alpha+1, 2) = k(1,2,2)$$

$$\iff \begin{cases} \alpha^2 = k \\ \alpha+1 = 2k \\ 2 = 2k \iff \boxed{k=1} \end{cases} \qquad \alpha+1 = 2 \Rightarrow \boxed{\alpha=1}$$

$r_\alpha \perp \pi \iff \alpha = 1$

$\Rightarrow$ OPCIÓN CORRECTA E

OTRA OPCIÓN: Tomando un punto del plano, hallo un vector director e impongo que el producto interno de él y el vector director de la recta sea cero (para que sean ortogonales). (Hacerlo)

Ejercicio 6

Sea la matriz $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ cuyo determinante vale 2. Consideremos la matriz

$$N = \begin{pmatrix} a+2g & c+2i & 2b+4h \\ 3d & 3f & 6e \\ g & i & 2h \end{pmatrix}.$$

Entonces el determinante de la matriz N vale:

A. 4.

B. -6.

C. 6.

D. -12.

E. 12.

Ejercicio 7

Sean $A, B \in \mathcal{M}_{7\times 7}$. Se consideran las siguientes afirmaciones:

(I) Se cumple necesariamente que $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B)$.

(II) Si AB es invertible, entonces necesariamente A y B son invertibles.

(III) Si A es invertible, entonces cualquier vector $v \in \mathbb{R}^7$ se puede escribir como combinación lineal de las filas de A.

Entonces,

A. Solamente (III) es correcta.

B. Solamente (II) y (III) son correctas.

C. Solamente (I) es correcta.

D. Las tres son correctas.

E. Solamente (I) y (II) son correctas.

Ejercicio 8

Dentro de todos los planos que pasan por $(2,1,1)$ sea π el que está más lejos del origen. Sea r la recta cuya ecuación paramétrica es: $(1,1,1) + \lambda(2,2,-2)$. Entonces,

A. $r \cap \pi = (2,2,0)$.

B. $r \cap \pi = (3,3,-1)$.

C. $r \cap \pi = (5,5,-3)$.

D. $r \cap \pi = \phi$.

E. $r \subseteq \pi$.

EJERCICIO 6 **EXAMEN DICIEMBRE 2018**

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}, \quad \det(M) = 2$$

$$N = \begin{pmatrix} a+2g & c+2i & 2b+4h \\ 3d & 3f & 6e \\ g & i & 2h \end{pmatrix}, \quad \det(N) = ?$$

Para resolver este tipo de ejercicios debo utilizar las propiedades de los determinantes:

$$\det(N) \underset{\substack{\text{linealidad} \\ \text{respecto a} \\ \text{una fila}}}{=} \begin{vmatrix} a & c & 2b \\ 3d & 3f & 6e \\ g & i & 2h \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} 2g & 2i & 4h \\ 3d & 3f & 6e \\ g & i & 2h \end{vmatrix}}_{\substack{\text{"0" pues la primera fila} \\ \text{es proporcional a la} \\ \text{última.}}}$$

$$\Rightarrow \det(N) \underset{\substack{\text{multiplicaba} \\ \text{a una fila}}}{=} 3 \begin{vmatrix} a & c & 2b \\ d & f & 2e \\ g & i & 2h \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{multiplicaba} \\ \text{a una columna}}}{=} 2.3 \begin{vmatrix} a & c & b \\ d & f & e \\ g & i & h \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{intercambio} \\ \text{dos columnas}}}{=} -6 \underbrace{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}_{\det(M)}$$

$$\Rightarrow \det(N) = -6 \det(M) = -12$$

$\Rightarrow$ OPCIÓN CORRECTA (D)

EJERCICIO 7 — EXAMEN DICIEMBRE 2018

$A, B \in \mathcal{M}_{7\times 7}$

I) $tr(AB) = tr(A)\,tr(B)$

II) Si AB invertible $\Rightarrow$ A y B invertibles

III) Si A invertible $\Rightarrow$ $\forall v \in \mathbb{R}^7$ se puede escribir como c.l. de las filas de A.

Repaso teórico:
La traza de una matriz cuadrada se define como la suma de los elementos de la diagonal principal.
Algunas propiedades:
- $tr(\alpha A) = \alpha\, tr(A)$
- $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$
- $tr(A^t) = tr(A)$

I) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $tr(AB) = 0$

$tr(A) = 1$, $tr(B) = 1$ $\Rightarrow$ $tr(AB) \neq tr(A)\,tr(B)$

I es FALSO

II) AB invertible $\Leftrightarrow$ $|AB| \neq 0$. (Teorema).

Por teorema: $|AB| = |A|\,|B| \neq 0$. Entonces $|A| \neq 0$ y $|B| \neq 0$

$\Rightarrow$ A y B son invertibles.

$\Rightarrow$ II es VERDADERO

III) Por teorema: A es invertible $\Leftrightarrow$ $rg(A) = n$.

Como:
- $rg_f(A) = rg_c(A)$
- $\dim Im(A) = rg(A) = 7$
- $\dim \mathbb{R}^7 = 7$

$\Rightarrow$ Cualquier vector de $\mathbb{R}^7$ se puede escribir como c.l. de las filas de A

$rg(A) = rg(A^t)$ y $col(A)$ generan a $Im(A)$.

$\Rightarrow$ III es VERDADERO

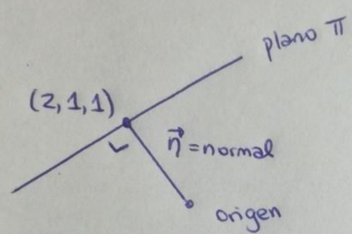
$\Rightarrow$ OPCIÓN CORRECTA (B)

EJERCICIO 8 EXAMEN DICIEMBRE 2018

Sea $r: (1,1,1) + \lambda(2,2,-2)$

π el plano que pasa por $(2,1,1)$ que está más lejos del origen: $\pi = ax+by+cz+d=0$

Dibujo ("vista superior"):



$\vec{n} = (2,1,1)-(0,0,0) = (2,1,1) = (a,b,c)$

$\Rightarrow \pi: 2x+y+z+d=0$

Como $(2,1,1) \in \pi$:

$2(2)+(1)+(1)+d=0$

$6+d=0 \Rightarrow \boxed{d=-6}$

$\Rightarrow$ La ecuación reducida del plano π es $2x+y+z-6=0$.

Ahora debo hallar $r \cap \pi$.

Para ello, puedo sustituir (x,y,z) de la recta en la ecuación de π

$$r: \begin{cases} x = 1+2\lambda \\ y = 1+2\lambda \\ z = 1-2\lambda \end{cases} \longrightarrow 2(1+2\lambda)+1+\cancel{2\lambda}+1-\cancel{2\lambda}-6=0$$

$$4+4\lambda-6=0$$

$$\boxed{\lambda = 1/2}$$

Sustituyo el valor de λ hallado en la ecuación de r:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (1/2)\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, $\boxed{r \cap \pi = (2,2,0)}$

$\Rightarrow$ OPCIÓN CORRECTA (A)

Ejercicio 9

Sea un sistema de ecuaciones escrito en la forma matricial:

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

y cuya solución general es de la forma:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces, la tercera columna de A es:

A. $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

E. $\begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$

Ejercicio 10

Dadas dos matrices A y B fijas de dimensiones $n \times n$, se consideran los conjuntos $S_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : \quad Ax = Bx\}$, $S_2 = \{x \in \mathbb{R}^n : \quad A^2x = B^2x\}$ y $S_3 = \{x \in \mathbb{R}^n : \quad Ax = Bx - x\}$. Entonces.

A. Solamente S_1 y S_2 son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$.

B. Solamente S_1 es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.

C. Solamente S_1 y S_3 son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$.

D. Los tres son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$.

E. Ninguno de los tres es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.

EJERCICIO 9 — EXAMEN DICIEMBRE 2018

Sea un sistema de ecuaciones escrito de forma matricial:

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Y su solución general: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

¿La tercera columna de A?

X es solución general del sistema $\Leftrightarrow$ $AX=b$ $\Leftrightarrow$

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}}_{b} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} ax + by + cz \\ dx + ey + fz \\ gx + hy + iz \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{vmatrix}$$

col (1) — col (2) — col (3)

$$\Leftrightarrow x\,col(1) + y\,col(2) + z\,col(3) = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Despejo de la solución general: $x = 1+\lambda+2\mu$

$y = 1-2\lambda$

y sustituyo: $z = \mu$

$$\underbrace{(1+\lambda+2\mu)}_{=0} col(1) + \underbrace{(1-2\lambda)}_{=0} col(2) + \mu\, col(3) = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Esto es válido } \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$1+\lambda+2\mu = 0 \Rightarrow \boxed{\mu = -3/4}$

$1-2\lambda = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = 1/2}$

sustituyo μ: $\Rightarrow -3/4 \begin{pmatrix} c \\ f \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow -3/4\, c = 6 \Rightarrow c = -8$

$-3/4\, f = 3 \Rightarrow f = -4$

$-3/4\, i = 3 \Rightarrow i = -4$

$\Rightarrow col(3) = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ OPCIÓN CORRECTA (E)

EJERCICIO 10 EXAMEN DICIEMBRE 2018

$$A, B \in \mathcal{M}_{n\times n} \Rightarrow S_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = Bx\}$$
$$S_2 = \{x \in \mathbb{R}^n : A^2x = B^2x\}$$
$$S_3 = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = Bx - x\}$$

1era opción: Probar que
- $\vec{0} \in S$
- $s_1 + s_2 \in S$ (cerrado frente a la suma)
- $\alpha s_1 \in S$ (cerrado frente al prod por escalar)

2da opción:

- $S_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax - Bx = 0\}$
  $= \{x \in \mathbb{R}^n : (A-B)x = 0\}$

  S_1 tiene la forma de un núcleo:
  Si $A - B = C \Rightarrow S_1$ es el $N(C)$
  $\Rightarrow$ S_1 es un sev

- $S_2 = \{x \in \mathbb{R}^n : (A^2 - B^2)(x) = 0\}$

  Si $C = A^2 - B^2 \Rightarrow S_2$ es el $N(C)$ $\Rightarrow$ S_2 es un sev

- $S_3 = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = (B - I)x\}$
  $= \{x \in \mathbb{R}^n : (A - B + I)x = 0\}$

  Si $C = A - B + I \Rightarrow S_3$ es el $N(C)$ $\Rightarrow$ S_3 es un sev

$\Rightarrow$ OPCIÓN CORRECTA D