Facultad de Ingeniería
IMERL
MÉTODOS NUMÉRICOS
Curso 2020

Práctico 6 - Interpolación Polinómica

En este práctico se intentará aproximar funciones definidas en un intervalo $[a, b]$ por polinomios.

Ejercicio 1
Demostrar el Teorema de acotación del error en Interpolación Polinómica:

Teorema 0.0.1. *Sea f de clase C^{n+1} en el intervalo $[x_0, x_n]$ y p_n el polinomio interpolante a f por las abscisas $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$. Luego, para cada $x \in [x_0, x_n]$, existe $\theta(x) \in [x_0, x_n]$ tal que se cumple la siguiente igualdad para el error $E(x)$:*

$$E(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta(x))}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

Ejercicio 2 (Examen, agosto de 2013)

1. Hallar el polinomio interpolante $q(x)$ por los puntos $\{(-1, 0), (1, 0), (2, 0), (3, 1)\}$. Utilizar para esto el método de Lagrange.
2. Utilizando el método de Newton, hallar el polinomio interpolante $p(x)$ por los puntos anteriores y $(4, 4)$.
3. Enunciar el Teorema de Acotación del error de interpolación polinómica.
4. Acotar la distancia máxima entre $q(x)$ y $p(x)$ en el intervalo $[-1, 3]$.

Ejercicio 3 (Examen, diciembre de 2013)

1. Enunciar y demostrar el Teorema de acotación del error por interpolación polinómica.
2. Explicar el método de interpolación de Lagrange.
3. Expresar el polinomio interpolante de Lagrange de la función $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = sen(\pi x)$, por los cinco puntos con abscisas $x_i = \frac{i}{4}$, $i \in \{0, \ldots, 4\}$.
4. Acotar uniformemente el error cometido.
5. Proponer una sucesión de polinomios que converge uniformemente a f.
   Sugerencia: definir p_n como el polinomio interpolante por las abscisas i/n, $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Ejercicio 4 (Examen, diciembre de 2011)

1. Demostrar que el polinomio interpolante de una función par por las abscisas $\{-x_1, \ldots, -x_n, 0, x_1, \ldots, x_n\}$ es también par.

2. Se desea aproximar a la función $f(x) = sen^2(x)$ en el intervalo $[0, \pi]$ con una interpolación de 5 puntos. Calcular su polinomio interpolante $p(x)$ por el método de Lagrange, en las abscisas $\{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi\}$.

3. Exprese el polinomio $p(x)$ en su forma general. *Sugerencia*: Notar primero que $g(x) = p(x - \frac{\pi}{2})$ es par. Luego resolver un sistema lineal para hallar el polinomio $g(x)$.

4. Acotar el error de interpolación cometido al aproximar f por p, en $[0, \pi]$.

Ejercicio 5 (Examen, febrero de 2014)

1. Deducir la matriz de Vandermonde de un polinomio interpolante de grado n.

2. Explicar el método de interpolación de Newton.

3. Expresar el polinomio interpolante por los puntos $\{(0,0), (1,1), (2,2), (3,4)\}$ utilizando el método de Newton.

4. Explicar el método de Hermite por intervalos que interpola en $n+1$ puntos una función $f(x)$ y su derivada $f'(x)$ en los mismos $n+1$ puntos.

5. Expresar el polinomio interpolante de Hermite por intervalos de la función $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ por las abscisas $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ y $x_2 = 2$.

Ejercicio 6

1. Encontrar el spline cúbico de Hermite de la función $f(x) = ln(2 + x)$ en las abscisas $\{-1, 0, 1\}$.

2. Utilizar lo anterior para estimar el valor de f en $x = 0{,}3$.

3. Calcular el error cometido en esta aproximación.

Ejercicio 7

Los tres datos siguientes responden a la posición y velocidad de un automóvil en los instantes $t = 1$, $t = 2{,}5$ y $t = 5$, medidos en segundos: $\{(1; 55; 80), (2{,}5; 160; 75), (5; 250; 70)\}$. Estimar la posición en el instante $t = 3$, utilizando el polinomio interpolante de Hermite global.

Ejercicio 8

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable. Una manera posible de estimar la integral definida $I = \int_a^b f(x)dx$ es mediante interpolación polinómica: encontrar un polinomio interpolante de f en ciertas abscisas comprendidas en el intervalo $[a, b]$, y luego integrar el polinomio en lugar de f. La *Regla de Simpson* consiste en tomar el polinomio interpolante por las abscisas $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$ y $x_2 = b$.

1. Obtener el polinomio interpolante p de f por x_0, x_1 y x_2.

2. Calcular $I' = \int_a^b p(x)dx$, que es una estimación de la integral definida I.

3. Mostrar que si f es un polinomio de grado 3 o menos, entonces $I = I'$.

4. Notar que a partir de evaluación de tres puntos es posible integrar exactamente todo polinomio de grado 3. ¿Es posible evaluar en otras abscisas e integrar exactamente polinomios de mayor grado? *Sugerencia: investigar la cuadratura de Gauss.*