Práctico 6

Relaciones de recurrencia Grimaldi 10.1, 10.2, 10.3 y 10.4

Ejercicio 1.

a. $a_3 = 24$;

b. $a_0 = 1$;

c. $\lim_{n\to+\infty} a_n/2^n = 3$;

d. $a_3 = 8$;

e. $\lim_{n\to+\infty} a_n/(2^n + 3^n) = 0$;

f. $a_3 = 0$.

Ejercicio 2.

a. $a_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot a_0, \forall n \geq 0$;

b. $a_n = n! \cdot a_0, \forall n \geq 0$ (sug. cambio de variable $b_n = a_n/n!$);

c. $a_n = \frac{a_1}{n}, \forall n \geq 1$ (sug. cambio de variable $b_n = na_n$) ;

d. $a_n = 2^{\frac{p^n-1}{p-1}}, \forall n \geq 0$ (sug. probar que $a_n > 0, \forall n \geq 0$ y defina $b_n = \log a_n$).

Ejercicio 3.

a. $a_n = 3^n$;

b. $a_n = \frac{1}{2^{n-2}} - 2 \cdot 5^n$;

c. $a_n = 3 \cdot (-1/3)^n + 4$;

d. $a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par;} \\ 3 \cdot (-1)^{\frac{n-1}{2}} & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$

Otras soluciones válidas son $a_n = \frac{3i(-i)^n - 3i^{n+1}}{2}$ y $a_n = 3\,\mathrm{sen}(n\pi/2)$.

e. $a_n = (-4)^{[\frac{n}{2}]}$ (obs. $[x]$ denota la parte entera de x).

Otras soluciones válidas son $a_n = \frac{(2-i)(2i)^n + (2+i)(-2i)^n}{4}$ y $a_n = 2^n \cos(n\pi/2) + 2^{n-1}\,\mathrm{sen}(n\pi/2)$.

f. $a_n = (5-n) \cdot 3^n$;

g. $a_n = \begin{cases} (-4)^m & \text{si } n = 4m; \\ 3 \cdot (-4)^m & \text{si } n = 4m+1; \\ -8 \cdot (-4)^m & \text{si } n = 4m+2; \\ 10 \cdot (-4)^m & \text{si } n = 4m+3; \end{cases}$ con $m \in \mathbb{N}$.

Otras soluciones válidas son $a_n = \frac{(1-4i)(-1+i)^n + (1+4i)(-1-i)^n}{2}$

y también $a_n = (\sqrt{2})^n \cos(3n\pi/4) + 4 \cdot (\sqrt{2})^n\,\mathrm{sen}(3n\pi/4)$.

h. $a_n = (n+1)^2$.

Ejercicio 4. $\alpha = 1, \beta = -2, a_{100} = 1$ (en general $a_n = 2^n - (-2)^n + 1$).

Ejercicio 5.

a. $a_n = n^3 - 2n^2 + n + 3$;

b. $a_n = 6 \cdot 2^n - 5$;

c. $a_n = 2^n + n2^{n-1}$;

d. $a_n = 2^n + n(n+1)2^{n-1}$.

Ejercicio 6.

a. $a_n = 2^{n+3} - 8 \cdot 3^n + n \cdot 3^{n+1}$;

b. $a_n = \frac{5}{6} \cdot n^3 - n^2 + \alpha n + \beta$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

c. $a_n = \frac{49}{36} \cdot 3^n - \frac{49}{36} \cdot (-3)^n + n \cdot 3^{n-2} - 2^n$.

Ejercicio 7.

a. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

b. $a_n = ba_{n-1} - b^2 a_{n-2}$

c. $a_n = 2a_{n-1} + 1$

d. $a_n = a_{n-1} + n - 1$

e. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

Ejercicio 8.

a. $A(x) = \frac{1-2x}{(1-x)(1-3x)} = \frac{\frac{1}{2}}{1-x} + \frac{\frac{1}{2}}{1-3x} \Rightarrow a_n = \frac{3^n+1}{2}$.

b. $A(x) = \frac{1+3x}{(1-x)(1-2x)} = \frac{-4}{1-x} + \frac{5}{1-2x} \Rightarrow a_n = 5 \cdot 2^n - 4$.

Ejercicio 9.

a. $a_n = 2^n - 2^{n+1}n \ \forall n \geq 0$, $b_n = 2^{n+1}n \ \forall n \geq 0$.

b. $a_n = \frac{(-2)^n - 2^n}{4} \ \forall n \geq 0$, $b_n = \frac{3 \cdot 2^n - (-2)^n}{8} \ \forall n \geq 1$, $b_0 = 2$.

Ejercicio 10. $a_{50} = 151 \cdot 2^{50}$ (en general $a_n = (3n+1) \cdot 2^n$).

Ejercicio 11.

a. 4^n;

b. $4 \cdot 3^{n-1}$;

c. $3^n + (-1)^n \cdot 3$ (pista: $a_n + a_{n-1} = 4 \cdot 3^{n-1}$, donde a_n es la respuesta a esta parte).

Ejercicio 12. Si hay a_n formas con n estudiantes $\Rightarrow a_1 = 1, a_2 = 2$ y $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ para todo $n \geq 2$, por lo tanto $a_n = f_{n+1}$ donde f_n es el n-ésimo número de Fibonacci.

Ejercicio 13. Sea $b_n = a_{2n} \Rightarrow b_{n+2} = a_{2n+4} = 5a_{2n+2} - 6a_{2n} = 5b_{n+1} - 6b_n$.
Con $b_0 = 3, b_1 = 7$ obtenemos $b_n = 2 \cdot 2^n + 3^n \Rightarrow a_{1000} = b_{500} = 2^{501} + 3^{500}$.