Matemática Discreta 1 - 2020 - 2do. semestre.
Práctico 5: Funciones Generatrices.

Soluciones.

Ejercicio 1

Si $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{2^n} x^n$ y $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{3^n} x^n$ entonces en $x = 0 : A(0) = 2 = B(0)$.
Observe que si $x_0 \neq 0$ y $a \in \{2, 3\}$ entonces $|2^{a^n} x_0^n| \geq 1 \Leftrightarrow 2^{a^n} \geq |x_0|^{-n} \Leftrightarrow a^n \geq \frac{-\log|x_0|}{\log 2} \cdot n$ y esto es cierto para n suficientemente grande (por órdenes), esto implica la no convergencia de las series para $x = x_0 \neq 0$. Las funciones generatrices son distintas pues las sucesiones $(2^{2^n})_{n\geq 0}$ y $(2^{3^n})_{n\geq 0}$ son distintas (recuerde que la función generatriz queda univocamente determinada por la sucesión).

Ejercicio 2

El ejercicio 14 del práctico 4 tenía dos partes a resolver, para cada una se da a continuación la función generatriz cuyo coeficiente de x^{19} resuelve le problema:

a. $f(x) = (1 + x + x^2 + \cdots + x^8)^4 = \left(\dfrac{1 - x^9}{1 - x}\right)^4$

b.

$$\begin{aligned} f(x) &= (1 + x + x^2 + \cdots + x^5)(1 + x + x^2 + \cdots + x^6)(x^3 + x^4 + \cdots + x^7)(1 + x + x^2 + \cdots + x^8) \\ &= \frac{1 - x^6}{1 - x} \frac{1 - x^7}{1 - x} \frac{x^3(1 - x^5)}{1 - x} \frac{1 - x^9}{1 - x} \\ &= \frac{(1 - x^6)(1 - x^7)(x^3 - x^8)(1 - x^9)}{(1 - x)^4} \end{aligned}$$

Ejericicio 3

a. $(1 + x)^6$

b. $6(1 + x)^5$

c. $\dfrac{1}{1 + x}$

d. $\dfrac{x^4}{1 - x}$

e. $\dfrac{3x^3}{1 + x}$

f. $\dfrac{1}{1 - x^2}$

g. $\dfrac{1}{1-2x}$

h. $\dfrac{x^2}{1-ax}$

i. $\dfrac{1}{1-2x^2}$

j. $\dfrac{x^2}{1-ax^2}+\dfrac{bx^3}{1-bx^2}$

Ejericio 5

a. $(a_n): a_0=-27, a_1=54, a_2=-36, a_3=8$ y $a_n=0$ para todo $n\geq 4$.

b. $(a_n): a_0=a_1=a_2=0$ y $a_n=1$ para todo $n\geq 3$.

c.

$$(a_n): a_n=\begin{cases}0 & \text{si } n=1 \text{ o si } n \text{ es par}\\ 1 & \text{si } n \text{ es impar y } n\geq 3.\end{cases}$$

d. $(a_n): a_n=(-3)^n$

e. $(a_n): a_n=\dfrac{1}{2^{n+1}}, \forall n\geq 0.$

f. $(a_n): a_0=-8, a_6=4, a_n=1$ si $n\geq 0$ y $n\notin\{0,6\}$

Ejericio 6

a. 0

b. $\dbinom{14}{2}-5\dbinom{16}{2}$

c. $\dbinom{4}{0}\dbinom{18}{3}+\dbinom{4}{1}\dbinom{17}{3}+\dbinom{4}{2}\dbinom{16}{3}+\dbinom{4}{3}\dbinom{15}{3}+\dbinom{4}{4}\dbinom{14}{3}$

Ejericicio 7

Si $F(x)=\dfrac{x^4}{(1-x)^4(1+x)^2}\Rightarrow [x^n]F(x)=a(-1)^n+b(-1)^n\binom{n+1}{1}+c+d\binom{n+1}{1}+e\binom{n+2}{2}+f\binom{n+3}{3}$.
La respuesta del ejercicio es $[x^{19}](1-x^{11})F(x)=[x^{19}]F(x)-[x^8]F(x)=240-14=226$.

Ejericicio 8

El ejercicio consiste en calcular el producto $L(x)(1-x-x^2)=(l_0+l_1x+l_2x^2+l_3x^3+\cdots)(1-x-x^2)=l_0+(l_1-l_0)x+(l_2-l_1-l_0)x^2+(l_3-l_2-l_1)x^3+\cdots=l_0+(l_1-l_0)x$. Como $l_0=2, l_1=1$ resulta $L(x)(1-x-x^2)=2-x$ y por lo tanto $L(x)=\dfrac{2-x}{1-x-x^2}$

Ejercicio 9

$A(x) = \dfrac{1-3x}{1-5x-6x^2}$

Ejericio 10

a. No es invertible, ya que $A(0) = 0$.

b. $A(0) = 1 \neq 0$ por lo tanto $A(x)$ es invertible. Si $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ es la inversa de $A(x)$ entonces $b_0 = 1, b_1 = 0, b_2 = 1, b_3 = 0$. Dicho de otra forma $B(x) = \dfrac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots$.

c. $A(0) = 1 \neq 0$ por lo tanto $A(x)$ es invertible. Si $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ es la inversa de $A(x)$ entonces $b_0 = 1, b_1 = -3, b_2 = 3, b_3 = -2$, o sea $B(x) = 1 - 3x + 3x^2 - 2x^3 + \cdots$.

Ejericicio 11

a. Para $0 \leq n \leq 4, c_n = n+1$. Si $n \geq 5$, $c_n = 5$.

b. $c_n = (-1)^n(n+1)$.

c. $c_0 = 0, c_1 = 1, c_2 = 3, c_3 = 6, c_4 = 6, c_5 = 5, c_6 = 3, c_n = 0 \forall n \geq 7$.

Ejericicio 15

Tenemos $\sum_{n=0}^{\infty} n^3 x^n = \dfrac{x(x^2+4x+1)}{(1-x)^4} \Rightarrow S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n = \dfrac{x(x^2+4x+1)}{(1-x)^5}$.
Por la fórmula de potencia negativa de binomio: $s_n = \sum_{i=0}^{n} i^3 = \binom{n+1}{4} + 4\binom{n+2}{4} + \binom{n+3}{4}$.

Ejercicio 16

Si definimos $(a_n) : a_n = n(n-1)$, $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)$. Si hallamos la función generatriz $S(x)$ para la sucesión (s_n) de sumas parciales, el coeficiente de x^n en $S(x)$ es s_n.
$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)x^n = \dfrac{2x^2}{(1-x)^3}$ y $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n = \dfrac{2x^2}{(1-x)^4}$. Desarrollando por fracciones simples a $S(x) = \dfrac{2x^2}{(1-x)^4}$ llegamos a que el coeficiente de x^n es $2\dbinom{n+1}{3}$. Por lo tanto $s_n = \sum_{k=0}^{n} k(k-1) = 2\dbinom{n+1}{3}$.