Geometría y Álgebra Lineal I

Examen

8 de febrero de 2020

N° Parcial	Apellido, Nombre	Firma	Cédula

La duración del examen es de cuatro horas, y no se permite usar ni calculadora ni material de consulta. La comprensión de las preguntas es parte de la prueba.

Sugerencia: sea cuidadoso al pasar las respuestas.
Lo completado aquí será lo único tenido en cuenta a la hora de corregir.

VERDADERO/FALSO (Total: 10 puntos)				
1	**2**	**3**	**4**	**5**

Llenar cada casilla con las respuestas **V** (verdadero) o **F** (falso), según corresponda.
Correctas: 2 puntos. Incorrectas: -2 puntos. Sin responder: 0 puntos.

MÚLTIPLE OPCIÓN (Total: 90 puntos)								
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**

Llenar cada casilla con las respuestas **A**, **B**, **C** o **D**, según corresponda.
Correctas: 10 puntos. Incorrectas: -3 puntos. Sin responder: 0 puntos.

DESARROLLO (10 puntos)
Un ejercicio de desarrollo se encuentra en la hoja 4; contestar en una hoja separada.

CONDICIONES DE GANANCIA:

$\text{VF} + \text{MO} + \text{Des} \geq 60$ **y** $\text{VF} + \text{MO} \geq 55$.

SÓLO PARA USO DOCENTE			
DESARROLLO			
(a)	**(b)**	**(c)**	**Total**

Notaciones:

En los siguientes ejercicios, se escriben:

- $\mathcal{M}_{m\times n}$ al espacio de las matrices reales de tamaño $m \times n$;
- A^t a la traspuesta de una matriz A;
- $\mathrm{tr}(A)$ a la traza de una matriz cuadrada $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n\times n}$, definida por $\mathrm{tr}(A) = a_{1,1} + \cdots + a_{n,n}$.
- $\mathbb{R}_n[X]$ al espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a n;
- $\langle u,\ v\rangle$ al producto escalar (o producto interno) de dos vectores $u, v \in \mathbb{R}^3$;
- $u \wedge v$ al producto vectorial de dos vectores $u, v \in \mathbb{R}^3$;
- $[C]$ al subespacio vectorial generado por un conjunto $C \subset V$ (donde V es un espacio vectorial cualquiera);
- $Ker(T)$ e $Im(T)$ al núcleo y a la imagen de una transformación lineal T.

Ejercicios: Verdadero/Falso (Total: 10 puntos)

1. El conjunto $V = \{A \in \mathcal{M}_{7\times 7} : \mathrm{tr}(A) = 0\}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_{7\times 7}$.

2. Sea $A \in \mathcal{M}_{6\times 6}$. Si $\det(A) \neq 0$, entonces A es invertible y $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

3. Todo sistema lineal con 15 incognitas y 10 ecuaciones es compatible indeterminado.

4. Si u y v son vectores no nulos de $\mathbb{R}^3$, entonces $\|u \wedge v\| \leq \|u\|\|v\|$.

5. La función $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$ definida por $f(P) = P(0) + P(1)$ para todo $P \in \mathbb{R}_n[X]$ es una transformación lineal.

Ejercicios: Múltiple opción (Total: 90 puntos)

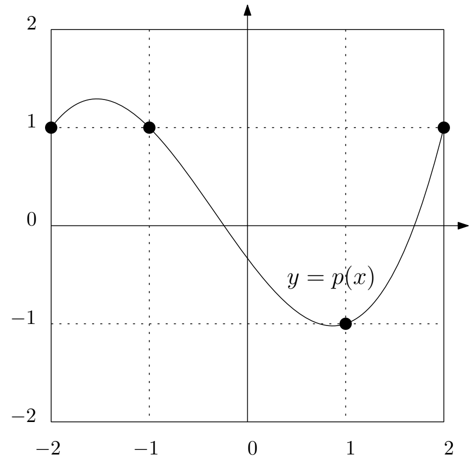
1. Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal cuya matriz en las bases $A = \{(2,0,1,1), (0,3,1,3), (1,0,2,0), (1,1,2,1)\}$ y $B = \{(1,0,1),\ (0,1,0),\ (1,1,0)\} \subset \mathbb{R}^3$ es:

$$_B(T)_A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Si $v = (3,-1,3,0)$, entonces:

(A) $T(v) = (15, 10, 5)$.
(B) $T(v) = (3, -4, 5)$.
(C) $T(v) = (5, 0, 10)$.
(D) $T(v) = (8, 1, 3)$.

2. Sea $\quad p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R})$ el polinomio de grado 3 cuya gráfica pasa por los cuatro puntos indicados en la siguiente figura:



Después de haber determinado los coeficientes a, b, c y d, indicar la opción correcta:

(A) $a + b - c - d = -5/3$
(B) $a + b - c - d = 7/3$
(C) $a + b - c - d = -2$
(D) $a + b - c - d = 1$

3. El determinante de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ es

(A) 0 (B) 24 (C) 2 (D) −2

4. Sean $A = (a_{i,j})$ y $B = (b_{i,j})$ las matrices de tamaño 4×4 definidas por

$$a_{i,j} = \begin{cases} j & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \qquad \text{y} \qquad b_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = 3 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

La suma de las entradas de la tercera fila de la matriz AB es

(A) 7 (B) 6 (C) 12 (D) 0

5. Sean U, V y W tres espacios vectoriales, dados con una transformación lineal inyectiva $T : U \to V$ y una transformación lineal sobreyectiva $S : V \to W$, tales que $Im(T) = Ker(S)$. Entonces:

(A) $\dim(V) = \dim(U) + \dim(W)$
(B) $\dim(V) \leq \dim(U) + \dim(W)$, y hay ejemplos donde la desigualdad es estricta.
(C) $\dim(V) \geq \dim(U) + \dim(W)$, y hay ejemplos donde la desigualdad es estricta.
(D) Hay ejemplos donde $\dim(V)$ es igual a la suma $\dim(U) + \dim(W)$, otros donde es menor y otros donde es mayor que dicha suma.

6. Dado un parámetro $a \in \mathbb{R}$, se considera el conjunto

$$B_a = \{(a+1, -1, 3),\ (2, 1, -2),\ (-2, 1, a-4)\}$$

El conjunto B_a es una base de $\mathbb{R}^3$...

(A) ... para todo valor de $a \in \mathbb{R}$.
(B) ... para todo valor de $a \in \mathbb{R}$, salvo uno.
(C) ... para todo valor de $a \in \mathbb{R}$, salvo dos.
(D) ... para todo valor de $a \in \mathbb{R}$, salvo tres.

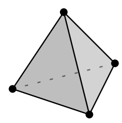
7. Fijado $n \geq 3$, se escriben

- $S_1 = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n} : A^t = A\} \subset \mathcal{M}_{n\times n}$ el subespacio de las matrices simétricas
- $S_2 = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n} : A^t = -A\} \subset \mathcal{M}_{n\times n}$ el subespacio de las matrices antisimétricas

Entonces:

(A) La suma $S_1 + S_2$ no es directa, y $S_1 + S_2 = \mathcal{M}_{n\times n}$.
(B) La suma $S_1 \oplus S_2$ es directa, y $S_1 \oplus S_2 = \mathcal{M}_{n\times n}$.
(C) La suma $S_1 + S_2$ no es directa, y $S_1 + S_2 \neq \mathcal{M}_{n\times n}$.
(D) La suma $S_1 \oplus S_2$ es directa, y $S_1 \oplus S_2 \neq \mathcal{M}_{n\times n}$.

8. Un tetraedro es un poliedro de 4 caras, 6 aristas y 4 vértices:



Cada cara del tetraedro está incluida en un plano, por lo que un tetraedro lleno se puede dar como la intersección de 4 regiones del tipo $ax + by + cz \geq d$ (o $\leq$). La altura respecto a una cara está dada como la distancia entre el plano en que está contenida y el vértice opuesto.

Sea T el tretraedro lleno dado por

$$\begin{cases} x + 2y + 2z \geq 0 \\ x + 3y - 2z \leq 3 \\ x + y + 2z \leq 5 \\ 3x - 4y + z \leq 3 \end{cases}$$

La altura respecto a la cara contenida en el plano $x + 2y + 2z = 0$ es:

(A) 2/3 (B) 6 (C) 0 (D) 2

9. En $\mathbb{R}_4$, se consideran los cinco vectores $v_1 = (1, 0, 2, 3)$, $v_2 = (0, 1, 3, 2)$, $v_3 = (1, 2, 4, 1)$, $v_4 = (1, 0, 0, 0)$ y $v_5 = (0, 1, 0, 0)$. Indicar la opción correcta:

(A) $v_4 \in [\{v_1, v_2, v_3\}]$ y $v_5 \in [\{v_1, v_2, v_3\}]$.
(B) $v_4 \in [\{v_1, v_2, v_3\}]$ y $v_5 \notin [\{v_1, v_2, v_3\}]$.
(C) $v_4 \notin [\{v_1, v_2, v_3\}]$ y $v_5 \in [\{v_1, v_2, v_3\}]$.
(D) $v_4 \notin [\{v_1, v_2, v_3\}]$ y $v_5 \notin [\{v_1, v_2, v_3\}]$.

Ejercicio de desarrollo (Total: 10 puntos)

Sea V un espacio vectorial y $T : V \to V$ una transformación lineal tal que $T \circ T = T$.
(Se dice que la transformación lineal T es una *proyección*.)

(a) Demostrar que $v - T(v) \in Ker(T)$ para todo $v \in V$.
(b) Demostrar que $Ker(T) \cap Im(T) = \{0_V\}$.
(c) Deducir de (a) y (b) que: $Ker(T) \oplus Im(T) = V$.