

PRÁCTICO 10 : CRIPTOGRAFÍA

En los ejercicios que siguen, vamos a utilizar la siguiente numeración de los **28** símbolos:

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | Ñ | O | P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z | _ |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 |

Ejercicio 1.

- Supongamos que deseamos acordar una clave común con Cristiano usando el protocolo Diffie-Hellman. Elegimos juntos $p = 991$ y Cristiano nos avisa (públicamente) que eligió $g = 7$. Cristiano elige al azar (secretamente) un número $n < p$ y nos envía $g^n \equiv 989 \pmod{p}$. Nosotros elegimos al azar $m = 11$ (secretamente). ¿Cuál es la clave k común que acordamos con Cristiano? ¿Qué número tenemos que mandarle públicamente a Cristiano para que solo él también pueda hallar la clave?
- Ahora queremos acordar una clave común con Lionel usando el protocolo Diffie-Hellman. Elegimos un primo p y una raíz primitiva g . Lionel no quiere complicarse con un exponente complicado por miedo a no recordarlo por lo que elige a $p - 1$. Explicarle por qué esto es una mala idea, o sea cómo se puede obtener la clave en este caso.
- Ahora supongamos que deseamos comunicarnos con Cristiano a través de un sistema Vigenere donde la palabra clave consiste de 3 letras de la siguiente manera:
Tomamos la clave k común acordada con Cristiano en la parte **a.** y la escribimos en base 28:

$$k = L_2 28^2 + L_1 28 + L_0$$

Luego la clave común resulta de sustituir en $L_2 L_1 L_0$ por sus respectivas letras (por ejemplo si $k = 25 \cdot 28^2 + 0 \cdot 28 + 2$ entonces la clave común será YAC).

- Cifrar los siguientes mensajes: SIMULADOR, HACHAZO.
- Descifrar los mensajes enviados por Cristiano: GZFAKPVP, NJÑJXDPX.

Ejercicio 2. Cavani desde París y Rolan desde Burdeos quieren acordar tácticas para el partido contra Jamaica; pero los técnicos jamaquinos contrataron espías para interceptar sus comunicaciones. Así que no tienen más remedio que aprender un poco de criptografía para poder asegurar privacidad.

- Al principio Cavani no entendió bien el método de Diffie-Hellman y propone el siguiente método para fijar una clave común: eligen (públicamente) un primo p y un entero $1 < g < p$. Cavani elige en secreto un entero n y Rolan elige un entero m . Cavani calcula $a = ng \pmod{p}$ y le manda a a Rolan; Rolan calcula $b = mg \pmod{p}$ y le manda b a Cavani. Entonces la clave común será $k = ngm \pmod{p}$, la cual Cavani puede calcular haciendo $k = nb \pmod{p}$ y Rolan puede calcular $k = am \pmod{p}$.
 - Si eligen $p = 101$ y $g = 2$. Cavani le manda $a = 19$ y Rolan elige $m = 35$, ¿cuál es la clave común?
 - Si un observador ve que Cavani manda $a = 19$ y que Rolan manda $b = 35$, ¿puede obtener la clave? En caso afirmativo, hallarla.

- iii) Describir un método para encontrar la clave en general, conociendo p , g , a y b .
- b. Rolan dudando, lee el libro y entendió que hay que usar potencias en vez de multiplicaciones; así que Rolan y Cavani utilizan el método Diffie-Hellman correcto para acordar una clave común. Toman como primo $p = 89$ y $g = 7$. Si Rolan elige el número secreto $m = 86$ y Cavani le envía $b = g^n = 17 \pmod{p}$. ¿Cuál es la clave secreta K que acuerdan?
- c. Sea K la clave secreta acordada en la parte anterior. Se utiliza luego un criptosistema afín con función de encriptado $E : \mathbb{Z}_{28} \rightarrow \mathbb{Z}_{28} / E(x) = cx + e \pmod{28}$, sabiendo $K = c \cdot 28 + e$ con $0 \leq c < 28$ y $0 \leq e < 28$. Para cifrar un texto se cifra letra a letra usando la función de cifrado. Rolan cifra PASALA y se lo manda a Cavani. ¿Qué mensaje recibe Cavani?
- d. Supongamos ahora que somos espías y que sabemos que Cavani le envía a Rolan un mensaje cifrado según un criptosistema afín pero desconocemos los valores de c y e de la función de cifrado. Interceptamos el texto: LÑVJ Ñ. Sabemos que el mensaje original (sin cifrar) contiene dos O y nos informan que Cavani siempre usa $e = 9$.
 - i) Hallar la función de cifrado que usaron Rolan y Cavani.
 - ii) Descifrar el mensaje interceptado.

Ejercicio 3.

- a. Probar que 5 es una raíz primitiva módulo 97.
- b. Supongamos que somos espías que interceptamos la conversación entre Alicia y Bob cuando ambos están utilizando el protocolo Diffie-Hellman para acordar una clave común. Alicia y Bob acuerdan $p = 97$ para el módulo y $g = 5$ como generador. Alicia le envía a Bob 3 y Bob le envía a Alicia 7. ¿Cuál es la clave k común que acuerdan Alicia y Bob? (la idea es justo ver que no es fácil descubrir la clave).
- c. Supongamos que Diego y Marta quieren utilizar el método Diffie-Hellmann de intercambio de clave usando el primo $p = 97$ y $g = 29$. Diego le envía a Marta el número $x = 85$. Marta luego le envía a Diego el número $y = 3$. Recordando que 5 es una raíz primitiva módulo 97 y teniendo como datos los siguientes logaritmos discretos $\log_5 29 = 13$ y $\log_5 85 = 90$, hallar la clave común.

Ejercicio 4. Sea $n = pq$ con p y q primos, describir un método para factorizar n si se conoce $\varphi(n)$.

Ejercicio 5.

Supongamos que n es un número muy difícil de factorizar. Bernardo utiliza un criptosistema RSA con clave (n, e_1) , al mismo tiempo que Bruno utiliza la clave (n, e_2) , con $\text{mcd}(e_1, e_2) = 1$. Adriana les envía el mismo texto x a ambos, calculando $y_1 = x^{e_1} \pmod{n}$ y $y_2 = x^{e_2} \pmod{n}$ (envía y_1 a Bernardo e y_2 a Bruno). Alguien que intercepta los mensajes realiza los siguientes cálculos:

1. c_1 y c_2 positivos tales que $c_1 e_1 + c_2 e_2 \equiv 1 \pmod{\varphi(n)}$. 2. $x_1 = y_1^{c_1} (y_2^{c_2}) \pmod{n}$.

- a. Probar que x_1 calculado en el paso 2 es el texto x . Por lo tanto, si bien el criptosistema es seguro, el mensaje puede ser descifrado en este caso.
- b. Descifrar el mensaje si $y_1 = 9983$ e $y_2 = 4026$, sabiendo que $n = 16123$, $e_1 = 27$ y $e_2 = 29$.

Ejercicio 6. Se considera el siguiente método de intercambio de clave: dado un grupo G , Alice y Bob eligen un elemento $g \in G$. Alice elige en secreto un entero m y le manda a Bob el elemento $x = g^m \in G$. Luego Bob elige en secreto un elemento $k \in G$ que será la clave, un entero n y le manda a Alice el par (g^n, kx^n) .

- ¿Puede Alice descubrir la clave?
- Si $G = GL(2, \mathbb{R})$ y $g \in G$ es una matriz diagonalizable, ¿Puede un observador descubrir la clave?
- Si $G = GL(2, \mathbb{R})$ y $g \in G$ es cualquier elemento con determinante distinto de ± 1 . ¿Puede un observador descubrir la clave?
- Si $G = U(97)$ y $g = 5$. Si Alice elige $m = 4$, ¿qué elemento le manda a Bob? Si luego Alice recibe $(74, 44)$, hallar la clave.

Ejercicio 7.

- Hallar el menor x que verifica $\begin{cases} x \equiv 10 \pmod{13}, \\ x \equiv 91 \pmod{101}. \end{cases}$
- Si E es la función de cifrado con el método RSA con clave (n, e) , describir D la función de descifrado y demostrar que descifra.
- Si $(n, e) = (1313, 271)$ calcular $E(10)$.

Firma digital: Supongamos que Alice quiere enviar un documento m firmado a Bob, de manera que Bob sepa con seguridad que fue firmado por Alice y no otra persona. Como en RSA, Alice elige dos primos grandes p, q , para obtener $n = pq$, y e coprimo con $\varphi(n)$. Luego calcula d tal que $ed \equiv 1 \pmod{\varphi(n)}$. Publica n y e y guarda p, q y d .

La firma digital de Alice es

$$s \equiv m^d \pmod{n},$$

y puede enviar (m, s) a Bob. Ahora Bob puede verificar que el documento fue firmado por Alice elevando s a la potencia e -ésima y compararlo con m ,

$$s^e \equiv (m^d)^e \equiv m^{ed} \equiv m \pmod{n}.$$

Ejercicio 8. Alice envía tres documentos a Bob con su firma digital de la forma (m, s) , donde m es el documento y s la firma digital del mismo. Alice usa $n = 10379$ como módulo y exponente de cifrado $e = 17$ que son públicos. Bob crea un cuarto documento e intenta falsificar la firma digital de Alice sin éxito. ¿Cuál de los siguientes documentos es la falsificación?

$$(209, 8690), (1059, 5909), (921, 636), (347, 5120).$$

Cifrado ElGamal: El procedimiento de cifrado/descifrado ElGamal se refiere a un esquema de cifrado basado en problemas matemáticos de logaritmos discretos.

Supongamos que Alice quiere comunicarse de manera segura con Bob y lo hace de la siguiente manera. Alice elige un primo p y una raíz primitiva módulo p , luego elige x , con $2 \leq x \leq p-2$, y calcula $h \equiv g^x \pmod{p}$. Los datos p, h y g son públicos y x no.

Ahora Bob elige y con $2 \leq y \leq p-2$ y calcula $r \equiv g^y \pmod{p}$. Bob calcula $c \equiv h^y m \pmod{p}$, donde m es su mensaje, y envía r y c a Alice.

Para descifrar Alice calcula $m \equiv cr^{-x} \pmod{p}$.

Ejercicio 9.

- Explicar por qué funciona el descifrado en el cifrado de ElGamal descrito anteriormente.
- Si Alice elige los siguientes números $p = 46454609$, $g = 3$, $h = 7902328$ y Bob elige $y = 1142987$ y su mensaje es $m = 7601846$. ¿Cuáles serán los datos r y c que Alice recibe de Bob?

- c. Si Bob envía un mensaje a Alice usando el método de ElGamal y de alguna manera obtuvimos el valor y que usó Bob ¿cómo se puede usar ese dato para calcular m ?

Ejercicio 10. Sean $n = 606409$ y $e = 1111$.

- a. Utilizando el esquema de cifrado en bloques ECB para RSA con (n, e) , cifrar el siguiente texto

“MATERIA ENLOQUECIDA DE AZAR”.

- b. Factorizar n mediante el método de Fermat (ver notas).

Póquer mental: Alice y Bob quieren jugar póquer por correo. Alice compra 52 cajas fuertes y en cada una pone una carta distinta y las cierra con candados para los cuales solo ella tiene la llave. Luego se las envía por correo a Bob y Bob elige 5 aleatoriamente y les pone un candado para los cuales solo él tiene llave, y por ultimo le envía esas 5 cajas a Alice. Alice le quita su candado a las cajas recibidas y se las devuelve a Bob, con lo cual Bob puede abrirlas y ver que cartas le han sido repartidas. Bob tiene 47 cajas cerradas por Alice, elige 5 aleatoriamente y se las envía a Alice, quién puede ver sus 5 cartas.

Con esto se termina la primer ronda de reparto de cartas, Bob y Alice tienen 5 cartas cada uno, Alice no tiene cajas fuertes mientras que Bob tiene 42 cajas cerradas por Alice.

Cuando Bob ve sus cartas, decide que quiere descartar 2 de ellas. Las pone en una caja fuerte que cierra con candado y se la envía a Alice. Luego elige al azar dos de las 42 cajas cerradas por Alice, las tranca y se las envía a Alice. Alice quita el candado de las dos últimas que Bob le envió y se las devuelve a Bob, con lo cual Bob puede quitar sus candados y ver sus cartas nuevas.

Si Alice quiere reemplazar 3 cartas, pone las mismas en una caja que cierra con candado y se las envía a Bob, quien elige 3 de las 40 disponibles y se las envía a Alice. Alice ahora puede ver sus 3 cartas nuevas quitando el candado de las cajas que le envió Bob. Por último pueden comparar sus cartas y ver quién ganó.

Una manera de modelar matemáticamente el modelo anterior es el siguiente: Alice y Bob acuerdan un primo p grande. Alice elige un número α secreto coprimo con $p - 1$ y calcula α' inverso de α módulo $p - 1$, o sea $\alpha\alpha' \equiv 1 \pmod{p-1}$. Bob hace lo mismo y elige β secreto coprimo con $p - 1$ y calcula β' con $\beta\beta' \equiv 1 \pmod{p-1}$.

Alice y Bob asignan ahora un número a cada una de las 52 cartas, n_1, n_2, \dots, n_{52} . Alice calcula los numeros c_i

$$c_i \equiv n_i^\alpha \pmod{p}.$$

Esto es el equivalente matemático de cerrar con candado las cajas fuertes. Luego de permutarlos de manera aleatoria, se los envía a Bob.

Ahora Bob elige 5 números $c_{i_1}, c_{i_2}, c_{i_3}, c_{i_4}, c_{i_5}$ y los eleva a la potencia β -ésima módulo p (de vuelta, esto es el equivalente matemático de que Bob cierre con candado las 5 cajas fuertes que eligió), y se las envía a Alice,

$$c_{i_1}^{\alpha\beta}, c_{i_2}^{\alpha\beta}, c_{i_3}^{\alpha\beta}, c_{i_4}^{\alpha\beta}, c_{i_5}^{\alpha\beta}.$$

Alice eleva estos números a la potencia α' -ésima módulo p y obtiene los números

$$c_{i_1}^\beta, c_{i_2}^\beta, c_{i_3}^\beta, c_{i_4}^\beta, c_{i_5}^\beta,$$

que se los envía a Bob.

Bob puede entonces obtener los $c_{i_1}, c_{i_2}, c_{i_3}, c_{i_4}, c_{i_5}$ de la siguiente manera

$$c_{i_j} \equiv c_{i_j}^{\beta\beta'} \pmod{p}.$$

Con lo cual Bob obtuvo su primer mano. Y, usando un método similar, Alice puede obtener también sus 5 cartas para comenzar a jugar.

Podemos asignar los números del 1 al 13 a las cartas corazón en orden creciente, del 14 al 26 las picas, del 27 al 39 los diamantes y del 40 al 52 los tréboles.

Ejercicio 11.

- a. Si $p = 101$, $\alpha = 43$ y Alice recibe de Bob los números 96, 46, 73, 49 y 51, mientras que la mano de Bob está dada por 18, 13, 23, 9 y 50. ¿Quién gana la mano?
- b. Jugar con un compañero por correo electrónico con $p = 223$.

Ejercicios para resolver con ayuda computacional.

Ejercicio 12. Gerrard crea un criptosistema RSA con clave pública:

$$(n, e) = (92852447, 22413211)$$

Se han escogido mal los parámetros, hallar la función de descifrado de Gerrard (*Sug: Método de Fermat*).

Ejercicio 13. El primo 12347 tiene raíz primitiva 2. Supongamos que sabemos que $2^x \equiv 8938 \pmod{12347}$ y $2^y \equiv 9620 \pmod{12347}$, pero no sabemos x ni y . ¿Es $2^{xy} \equiv 7538 \pmod{12347}$? ¿Es $2^{xy} \equiv 7557 \pmod{12347}$?

Ejercicio 14. Supongamos que Bob envía el mismo mensaje m a tres personas distintas. Los textos cifrados son

$$c_1 = 257261 \pmod{303799}$$

$$c_2 = 117466 \pmod{289279}$$

$$c_3 = 260584 \pmod{410503}$$

con respectivos módulos de RSA

$$n_1 = 303799, n_2 = 289279, n_3 = 410503.$$

El exponente de cifrado de cada persona es $e = 3$, por lo que $m^3 \equiv c_i \pmod{n_i}$.

- a. Hallar x tal que $0 \leq x < n_1 n_2 n_3$ y

$$x \equiv c_1 \pmod{n_1}, x \equiv c_2 \pmod{n_2}, x \equiv c_3 \pmod{n_3}.$$

- b. Mostrar que $0 \leq m^3 < n_1 n_2 n_3$.
- c. Mostrar que x es igual a m^3 .
- d. Encontrar el mensaje m .

Esto muestra la desventaja de usar exponentes de cifrado pequeños.