Facultad de Ingeniería
IMERL
MÉTODOS NUMÉRICOS
Curso 2020

Práctico 4 - Sistemas No Lineales

En este práctico se analiza cómo obtener soluciones de un sistema no lineal $f(x) = 0$
Es decir: cómo hallar raíces de una función f

Ejercicio 1

Teorema 0.0.1 (Punto Fijo). *Si X es un espacio métrico completo y $\varphi : X \to X$ una r-contracción con $r < 1$. Entonces φ tiene un único punto fijo α, y la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ generada mediante $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ converge a α. El resultado no depende del elemento inicial $x_0 \in X$.*

Vamos a probar el Teorema 0.0.1 en cuatro etapas:

1. Probar que toda r-contracción es continua. Luego, φ es continua.
2. Probar que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. Como X es completo entonces $\lim_n x_n = \alpha \in X$.
3. Probar que α es punto fijo de φ, es decir que $\varphi(\alpha) = \alpha$
4. Finalmente, probar unicidad del punto fijo: si $\beta = \varphi(\beta)$, entonces $\alpha = \beta$.

Ejercicio 2
Demostrar el siguiente Corolario del Teorema 0.0.1 anterior: Si $g : [a, b] \to [a, b]$ tiene derivada continua en $[a, b]$ y $|g'(x)| < 1$, $\forall x \in [a, b]$, entonces g es una contracción y por lo tanto existe un único punto fijo $c \in [a, b]$ de g.

Ejercicio 3
Demostrar el siguiente

Teorema 0.0.2 (Orden de un MIG). *Sea α punto fijo de $g \in \mathbb{C}^p$, y x_0 elegido de modo que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dada por el MIG $x_{n+1} = g(x_n)$ converge a α. Si las derivadas i-ésimas de g verifican:*

$$\begin{cases} g^{(i)}(\alpha) = 0, \ \forall i = 1, \dots, p-1 \\ g^{(p)}(\alpha) \neq 0 \end{cases}$$

Entonces la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene orden de convergencia p y velocidad $\beta = \frac{1}{p!}|g^{(p)}(\alpha)| \neq 0$.

Ejercicio 4

1. Utilizando el Teorema de Órdenes, enunciar condiciones suficientes para las cuales el método de Newton tiene orden de convergencia cuadrático o superior.
2. ¿En qué casos el orden es exactamente cuadrático?
3. Dar un ejemplo de función en la que el método de Newton converge linealmente (orden uno).
4. Dar un ejemplo de función en la que el método de Newton no converge (para ningún x_0 inicial).

Ejercicio 5

1. Estimar $\sqrt{2}$ aplicando el método de Newton a la función $f : f(x) = x^2 - 2$.
2. Estudie la evolución del error, analizando si el orden y la velocidad de convergencia coinciden con los respectivos valores teóricos.

Ejercicio 6
En lo que sigue asumiremos que la raíz α buscada verifica $f'(\alpha) \neq 0$. Es decir que es raíz simple.

1. Calcular el orden de convergencia del método de la secante.
2. Comparar el desempeño del método de la secante con el de Newton (también conocido como el método de la tangente). Considerar el orden de convergencia y cantidad de operaciones.
3. ¿Puede ocurrir que el método de Newton sea convergente a la raíz pero el de la Secante no?

Ejercicio 7
Para resolver la ecuación $x + ln(x) = 0$ se proponen los tres MIG siguientes con $x_0 = 1/2$:

i $x_{n+1} = -ln(x_n)$

ii $x_{n+1} = e^{-x_n}$

iii $x_{n+1} = \frac{x_n + e^{-x_n}}{2}$

Elegir el MIG más adecuado. Justificar.

Ejercicio 8 (Examen, agosto de 2013)
Se desea resolver la ecuación de punto fijo $x = f(x)$, con f de clase C^2, utilizando el siguiente método M:

$$(M) : \begin{cases} x_0 \in \mathbb{R} \\ x_{k+1} = x_k + a(x_k - f(x_k)) \end{cases}$$

1. Hallar $a \in \mathbb{R}$ para maximizar el orden de convergencia del método M. Asumir que existe solución $\alpha = f(\alpha)$ y además verifica $f'(\alpha) \neq 1$.

   En las partes siguientes se utilizará el método M con el valor de a hallado anteriormente.

2. Sea $f(x) = \frac{2}{x}$. Hallar el mayor intervalo I tal que $\sqrt{2} \in I$ y el método converge siempre que x_0 pertenezca al intervalo I.
3. Sea $x_0 = 1$ y $e_k = |x_k - \sqrt{2}|$ el error en el paso k. Hallar c tal que $e_{k+1} \leq c e_k^2$.
   Sugerencia: Utilizar que $x_n \in [1, 2]$ para todo n, y que $\frac{2}{x^3} < 2$ si $1 \leq x \leq 2$.
4. Utilizando la parte anterior, determinar una cantidad suficiente de iteraciones para asegurar un error menor que 10^{-5}.