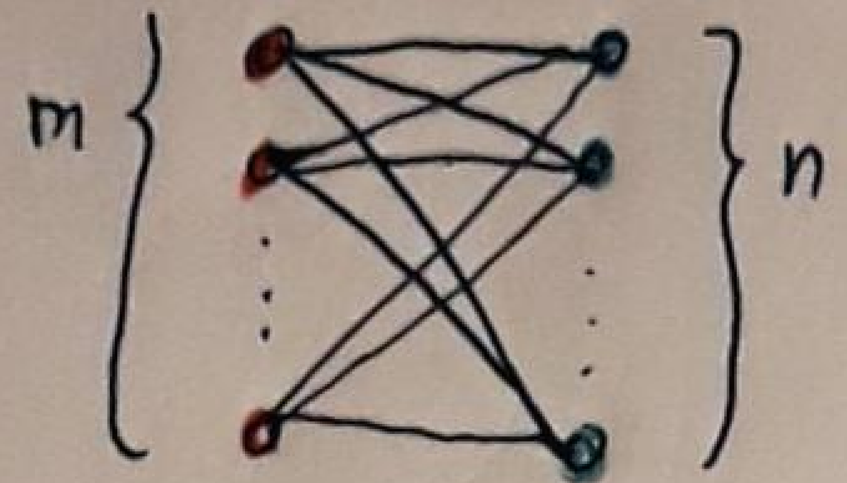
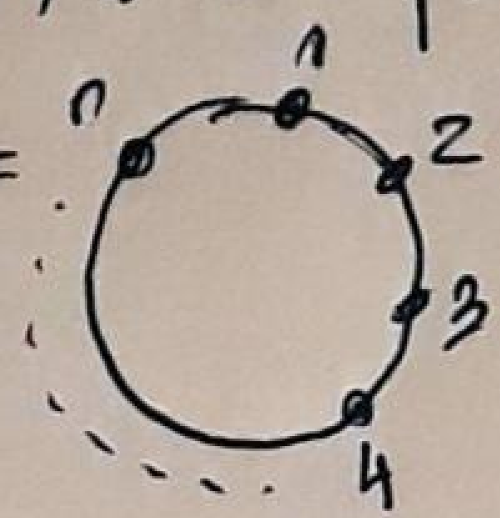
Ejercicio 1-

a- Como $K_{m,n}$ tiene aristas $\Rightarrow \chi(K_{m,n}) \geq 2$.

Podemos colorear $K_{m,n}$ con dos colores (coloreando cada una de las partes bipartitas de un color distinto)



b- Claramente $\chi(C_n) \geq 2$ para $n \geq 3$ por poseer aristas.

Consideramos $C_n =$ 

Si n es par podemos colorear los vértices impares de un color y los pares de otro, resultando una coloración propia

$\Rightarrow \chi(C_n) = 2$ si n es par.

Recíprocamente, si $f : \{1, 2, \dots, n\} \to \{B, N\}$ es una coloración propia de C_n utilizando 2 colores B=blanco y N=negro podemos considerar la partición $X = \{i : 1 \leq i \leq n \, / \, f(i) = B\}$ e $Y = \{i : 1 \leq i \leq n \, / \, f(i) = N\}$ tenemos $X \cup Y = \{1, \dots, n\}$ y $|X| + |Y| = n$. La función $\varphi : X \to Y \, / \, \varphi(x) = x+1$ si $1 \leq x < n$ y $\varphi(n) = 1$ si $n \in X$ es una biyección (su inversa es $\psi : Y \to X \, /$ $\psi(x) = x - 1$ si $2 \leq x \leq n$, $\psi(1) = n$ si $1 \in Y$) $\Rightarrow |X| = |Y|$

$\Rightarrow n = |X| + |Y| = 2 \cdot |X|$ es un número par.

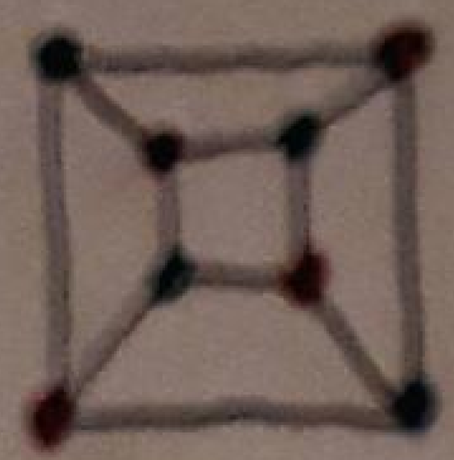
Esto prueba que si n es impar $\Rightarrow \chi(C_n) \geq 3$.

Si n es impar podemos colorear C_n pintando los impares del 1 al n-2 de un color, los pares del 2 al n-1 de otro y n de un tercer color.

Luego $\chi(C_n) = 3$ si n es impar.

c.-

$\chi = 3$ (no puede ser menor pues contiene un K_3)



$\chi = 2$ (no puede ser menor pues contiene un K_2)

$\chi = 2$ (no puede ser menor pues contiene un K_2)

(El cuarto es igual al segundo)

$\chi = 2$ (no puede ser menor pues contiene a K_2)

Ejercicio 2. Probar que $\chi(G) \leq 2$ si y solo si G no tiene ciclos impares.

Dem: Primero probaremos que $\chi(G) \leq 2 \Rightarrow G$ no tiene ciclos impares.

Por absurdo, si G contiene a un C_n con n impar y $\chi(G) \leq 2$

entonces $2 \geq \chi(G) \underset{\boxed{C_n \text{ es subgrafo de } G}}{\geq} \chi(C_n) \underset{\boxed{\text{Ejercicio 1b}}}{\geq} 3$ ↯

Ahora probaremos que si G no tiene ciclos impares $\Rightarrow \chi(G) \leq 2$.

Lo haremos por inducción en el número de aristas de G:

Si $e = 0 \Rightarrow G$ es unión de vértices aislados y $\chi(G) = 1 \leq 2$.

Si $e = 1 \Rightarrow \chi(G) = 2$ (preciso 2 colores para los vértices adyacentes, el resto son vértices aislados y uso cualquier color).

Ahora sea $m \geq 2$ y supongamos el resultado valga siempre que $e < m$

Queremos probar que el resultado también vale si $e = m$.
Tomemos un grafo G con $e = m \geq 2$ aristas sin ciclos impares y consideramos una arista $a = \{x, y\} \in E(G)$.
Sea $G' = G - a$ el grafo que resulta de quitar la arista a al grafo G.
Tenemos dos posibilidades:

1) No hay camino que conecte x con y en G'.
En este caso podemos escribir $G' = G_1 \cup G_2$ donde G_1 y G_2 son grafos conexos disjuntos con $x \in V(G_1)$ e $y \in V(G_2)$.
Como cada uno de los grafos G_1 y G_2 tienen menos de m aristas y no contienen ciclos impares (por ser subgrafos de G)
$\Rightarrow$ Por hip. inductiva podemos pintar los vértices de G_1 y también los de G_2 tal que con dos colores B y N vértices adyacentes tengan distinto color.
Si x e y quedaron pintados del mismo color entonces cambio los colores de todos los vértices de G_2 (los que estaban pintados con B cambian para N y los que estaban pintados de N cambian para B). De esa forma obtenemos una 2-coloración de G' que también será una 2-coloración de G pues x e y tienen distinto color.

2) Hay un camino que conecta x con y en G'.
Tomando el camino de longitud mínima puedo suponer que hay un camino simple conectando x con y; este camino simple debe tener longitud impar (i.e una cantidad par de vértices) pues en caso contrario G tendría un ciclo de longitud impar al agregar la arista $a = \{x, y\}$. Por hipótesis inductiva existe una 2-coloración de G'. Esta también será una 2-coloración del camino simple que conecta x con y, que como tiene longitud impar entonces necesariamente x e y tendrán distinto color $\Rightarrow$ también es una 2-coloración de G.

$\square$

Ejercicio 3. Sea $G=(V,E)$ un grafo, $\Delta(G)=\max_{v\in V} gr(v)$ el mayor grado posible en G.

a) Probar que $\chi(G) \leq \Delta(G)+1$.

Por inducción en n = cantidad de vértices de G.

Si $n=1 \Rightarrow \chi(G)=1$ y $\Delta(G)=0 \Rightarrow$ se cumple $\chi(G)=\Delta+1$.

Supongamos que el resultado sea válido si $n<n_0$ (donde $n_0 \geq 2$ es fijo) y tomemos un grafo G con $n=n_0$ vértices.

Sea $v \in V(G)$ y consideramos $G'=G-v$, como G' tiene menos de n_0 vértices, por hipótesis inductiva sabemos que hay alguna coloración propia de $G'=G-v$ con $\Delta(G')+1 \leq \Delta(G)+1$ colores.

$\boxed{G' \text{ es subgrafo de } G}$

Como tenemos $\Delta(G)+1$ colores y v tiene a lo sumo $\Delta(G)$ vecinos entonces siempre vamos a poder colorear a v de un color diferente a sus vecinos obteniendo así una coloración propia de G con $\Delta(G)+1$ colores.

Esto prueba que $\chi(G) \leq \Delta(G)+1$.

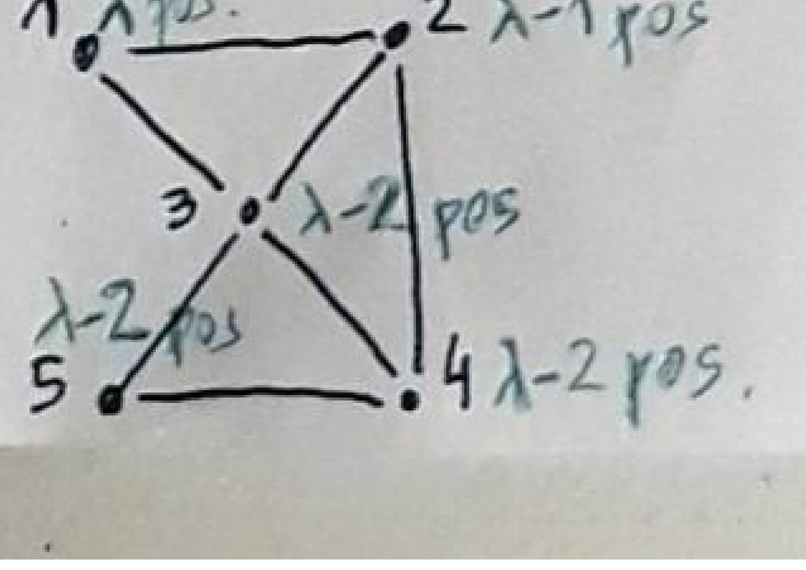
b) Encuentre un grafo con 5 vértices tal que $\chi(G)=\Delta(G)+1$

Basta tomar C_5 que ya sabemos $\chi(C_5)=3$ (por ejercicio 1b) y $\Delta(C_5)=2$.

Ejercicio 4. Probar que si G es plano $\Rightarrow \chi(G) \leq 6$.

(ver video del curso)

Ejercicio 5. Consideramos el grafo $G=(V,E)$ con $V=\{1,2,3,4,5\}$ y $E=\{\{i,j\},\ 1\leq i<j\leq 5,\ i+1 \leq j \leq i+2\}$. El problema es equivalente a hallar el número cromático de G.

$G =$ 

El polinomio cromático es $P_G(\lambda)=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)^2$

$P_G(1)=P_G(2)=0$, $P_G(3)=6\neq 0 \Rightarrow \chi(G)=3$ es el menor número de compartimientos necesarios.

Scanned by TapScanner

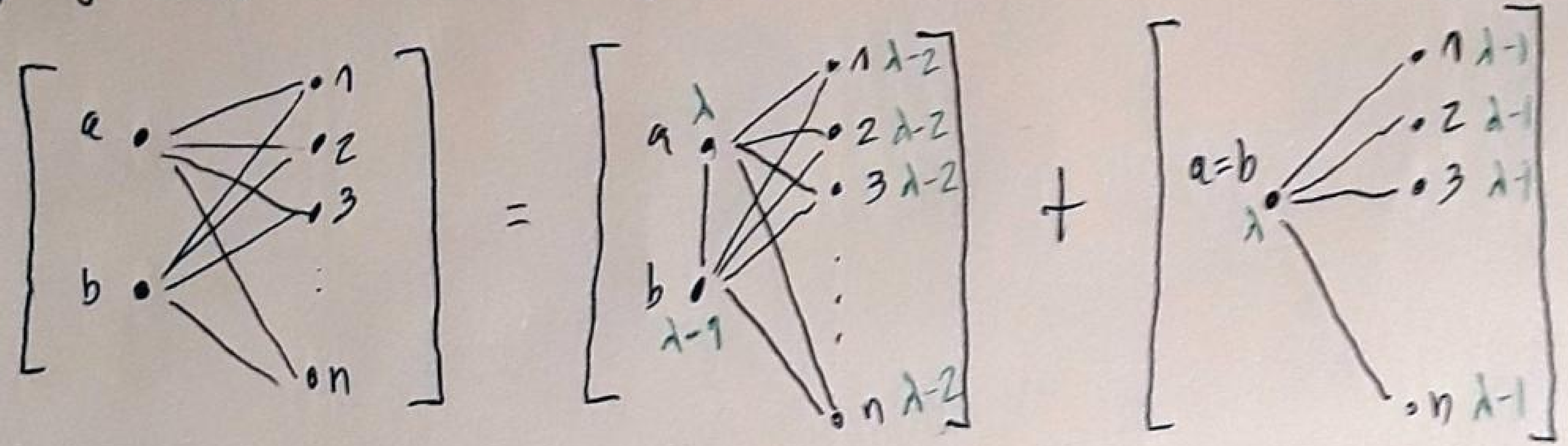
Ejercicio 6. Los items a, b y c son casos particulares de d y e.

d. Si G es un árbol con n nodos $\Rightarrow P(G;\lambda) = \lambda(\lambda-1)^{n-1}$
(probado por inducción en el número de nodos en el video del curso)

e. $P(G,1)=0$ y $P(G,2)=2\neq 0 \Rightarrow \chi(G)=2$
si G es un árbol.

Ejercicio 7. Sea $K_{2,n}$ con vértices $V=\{a,b\}\cup\{1,2,\dots,n\}$
y aristas $E=\{\{a,i\}:1\leq i\leq n\}\cup\{\{b,i\}:1\leq i\leq n\}$.

Consideramos la arista $e=\{a,b\}\notin E$ (es una arista del grafo completo K_V pero no de $K_{2,n}$). Usamos el método de agregado y contracción para calcular el policromático de $K_{2,n}$:



$$= \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)^n + \lambda(\lambda-1)^n.$$

Ejercicio 8. Es conveniente recordar dos resultados

$$P(C_4,\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda^2-3\lambda+3)$$ [Video "Clase 23" min 29:05]

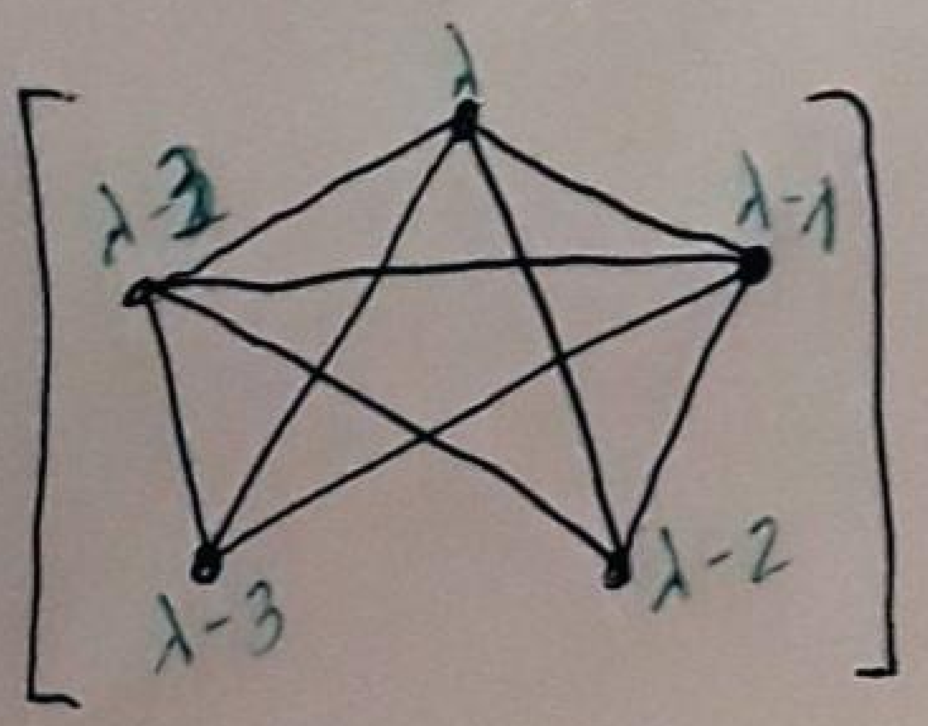
y el teorema: Si $G_1 \cup G_2 = G$, $G_1\cap G_2 = K_m \Rightarrow p(G,\lambda) = \dfrac{p(G_1,\lambda).p(G_2,\lambda)}{p(K_m,\lambda)}$.

• $[G_1] =$  $. [C_4] / [\bullet] = \dfrac{\lambda.(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3).\cancel{\lambda}(\lambda-1)(\lambda^2-3\lambda+3)}{\cancel{\lambda}}$

$$= \lambda(\lambda-1)^2(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda^2-3\lambda+3)$$

$\Rightarrow p_{G_1}(3)=0$, $p_{G_1}(4) = 4.3^2.2.7 \neq 0 \Rightarrow \chi(G_1)=4$; $p_{G_1}(5) = 5.4^2.3.2.13$
$= 6240.$

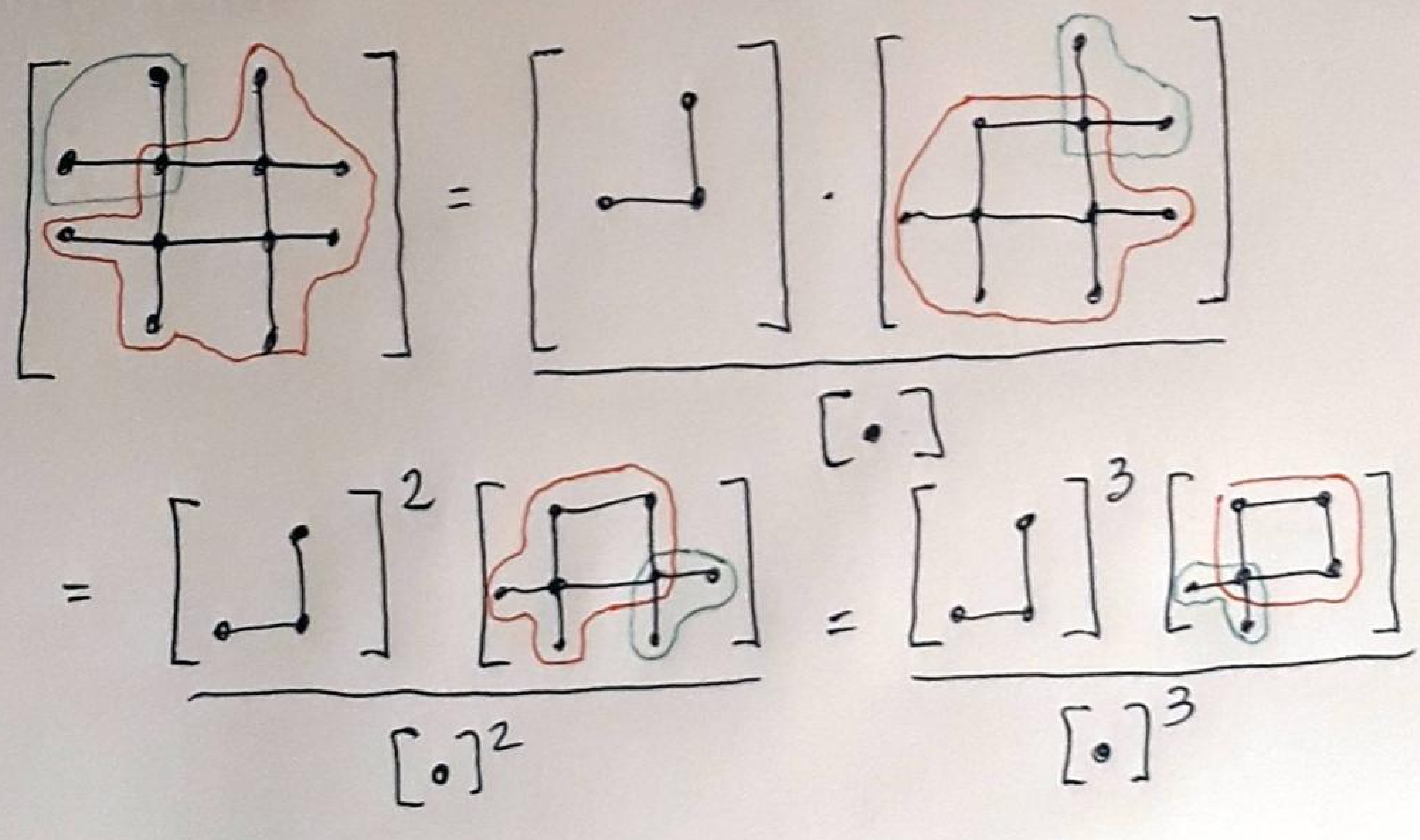
Para calcular $p(G_2,\lambda)$ simplemente usamos la regla del producto:



$$= \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)^2$$

- $P_{G_2}(3)=0$ y $P_{G_2}(4)=4.3.2\neq 0 \Rightarrow \chi(G_2)=4$
- $P_{G_2}(5)=5.4.3.2^2=240.$

Para calcular $p(G_3,\lambda)$ usamos el teo. de la intersección completa nuevamente, reiteradas veces.



$$= \frac{[P_3]^4.[C_4]}{[P_1]^4} = \frac{\lambda^4(\lambda-1)^8.\,\lambda(\lambda-1)(\lambda^2-3\lambda+3)}{\lambda^4} = \lambda(\lambda-1)^9(\lambda^2-3\lambda+3)$$

- $P_{G_3}(1)=0$, $P_{G_3}(2)=2.1^9.(4-6+3)=2\neq 0 \Rightarrow \chi(G_3)=2.$
- $P_{G_3}(5)=5.4^9.13=17039360$ coloraciones propias de G_3 con 5 colores.

Ejercicio 9. G es un subgrafo de K_5 (pues tiene 5 vértices) que verifica $\chi(G) \geq 5$ (pues $p(G,4)=0$).

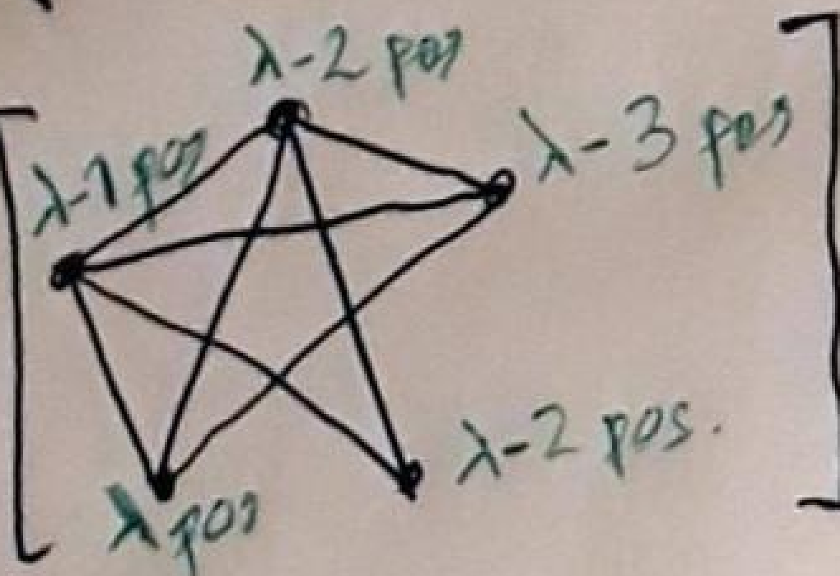
Como $\chi(K_5)=5$, resulta que $\chi(G)=5$.

Por ejercicio 8, vimos que si $G_2 = K_5 - e \Rightarrow \chi(G_2)=4$

Luego concluimos que $G = K_5$.

Al quitarle 2 aristas adyacentes a K_5 obtenemos

$H =$  cuyo pol. cromático es

$p(H,\lambda) =$ 

$= \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)^2(\lambda-3)$

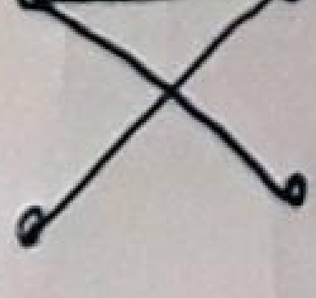
Luego $p(H,4) = 4.3.2^2.1 = 48$.

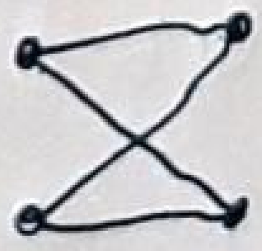
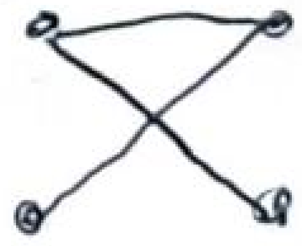
Ejercicio 10. G es un subgrafo de K_4 (pues tiene 4 vértices)

Además como admite una 2-coloración G es bipartito.

G no puede tener vértices aislados pues si lo tuviera entonces λ^2 sería un factor de $P(G,\lambda)$ y $P(G,2) = 2^2.m$ con $m \in \mathbb{Z}^+$.

Las posibilidades para G (a menos de isomorfismo) son

 ó 

Pero $G-e$ también será bipartito sin vértices aislados (pues también verifica $P(G-e,2)=2$) $\Rightarrow G =$  y $G-e =$ 

tenemos $G = K_{2,2} = C_4 \Rightarrow P(G,\lambda) = P(C_4,\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda^2-3\lambda+3)$

$\Rightarrow P(G,3) = 3.2.3 = 18$.

Ejercicio 11. Por el ejercicio 1 sabemos que $\chi(C_5)=3$
y claramente C_5 no contiene ciclos de longitud 3.