Geometría y Álgebra Lineal I

Examen - Turno matutino

N° de prueba	Apellido, Nombre	Firma	Cédula

La duración de la prueba es de tres horas, y no se permite usar ni calculadora ni material de consulta. La comprensión de las preguntas es parte de la prueba. La prueba consta de **4 Verdaderos/Falso** y **7 ejercicios Múltiple opción**.

Sugerencia: sea cuidadoso al pasar las respuestas. Lo completado aquí será lo único tenido en cuenta a la hora de corregir.

Puntajes

- **Verdadero/Falso:** respuestas correctas 3 **puntos**; incorrectas, -3 **puntos**; sin responder, 0 **punto**.
- **Múltiple opción:** respuestas correctas 13 **puntos**; incorrectas, -3 **puntos**; sin responder, 0 **punto**.

Verdaderos/Falsos

1. Si $T : V \to V$ es una transformación lineal y existe $v \in V$ no nulo tal que $T^3(v) = 0$ entonces T no es invertible.
2. Sean $T, S \colon V \to W$ transformaciones lineales tales que $\text{Im}(T) = \text{Im}(S)$, entonces existe $v \in V$ no nulo tal que $T(v) = S(v)$.
3. Si $V = S_1 \oplus S_2$ y $S \subset V$ es un subespacio, entonces se cumple que o bien $S \subset S_1$ o bien $S \subset S_2$.
4. Sean $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ bases de V un espacio vectorial de dimensión n y $T \colon V \to V$ una transformación lineal tal que ${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}} = \text{Id}_n$. Entonces $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

Múltiple opción

1. Sea r la recta intersección de los planos π_1 y π_2 de ecuaciones $x + y - z = 0$ y $3x - z = 0$ respectivamente. Sea s la recta que pasa por $(1, 1, 2)$ y tiene vector director $(1, 0, 3)$. Considere el plano π que contiene a s y es paralelo a r. Determinar cuál de los siguientes puntos está en π.

   a) $(0, 0, 0)$.
   b) $(2, 0, 6)$.
   c) $(6, 0, -2)$.
   d) $(3, 3, 8)$.
   e) $(5, 2, 0)$.

2. Sea $w \in \mathbb{R}^3$ tal que $w \neq (0,0,0)$ y considere $T_w : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por $T_w(v) = (\langle v, 2w\rangle, \langle v, -w\rangle)$. Entonces:

   a) $\dim(N(T_w)) = 2$ e $\mathrm{Im}(T_w) = [(1,-2)]$.
   b) $\dim(N(T_w)) = 2$ e $\mathrm{Im}(T_w) = [(-2,1),(1,-2)]$.
   c) $\dim(N(T_w)) = 1$ e $\mathrm{Im}(T_w) = [(-2,1),(1,-2)]$.
   d) Existen $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^3$ no nulos tales que $\dim(N(T_{w_1})) \neq \dim(N(T_{w_2}))$.
   e) $\dim(N(T_w)) = 2$ e $\mathrm{Im}(T_w) = [(-2,1)]$.

3. Sean $P = (2,1,1)$ y π un plano que pasa por el punto $(2,2,-4)$ y tiene como vectores directores a $(1,-1,0)$ y $(1,0,1)$. Considere el punto Q tal que $\mathrm{dist}(Q,\pi) = \mathrm{dist}(P,\pi)$, $\mathrm{dist}(P,Q) = 2\,\mathrm{dist}(P,\pi)$ y además, la recta que pasa por P y Q es normal a π. Entonces,

   a) La suma de las entradas de Q es -6.
   b) La suma de las entradas de Q es 8.
   c) La suma de las entradas de Q es -8.
   d) La suma de las entradas de Q es 6.
   e) La suma de las entradas de Q es 0.

4. Se considera la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ que cumple las condiciones:

   $$(*) \qquad T(1,8,-2) = (-3,1,1,4), \quad T(2,1,5) = (0,-1,2,5), \quad T(1,-2,4) = (1,-1,1,2)\,.$$

   Entonces:

   a) Existe una única transformación lineal T que cumple las condiciones $(*)$, y dicha transformación lineal cumple la condición $T(2,0,3) = (0,-2,0,5)$.
   b) Existe una única transformación lineal T que cumple las condiciones $(*)$, y dicha transformación lineal cumple la condición $T(2,0,3) = (1,0,-2,3)$.
   c) Existen infinitas transformaciones lineales T que cumplen las condiciones $(*)$, pero sólo una de ellas cumple la condición $T(2,0,3) = (-3,2,0,1)$.
   d) Existen infinitas transformaciones lineales T que cumplen las condiciones $(*)$, y todas ellas cumplen la condición $T(2,0,3) = (-3,2,0,1)$.
   e) No existe ninguna transformación lineal T que cumple las condiciones $(*)$.

5. Sean los subespacios

   $$S_1 = \{p \in \mathbb{R}_3[x] \colon p(0) + p'(0) + p''(0) = 0\}, \quad S_2 = \{p \in \mathbb{R}_3[x] \colon p(0) + p'(0) = 0\},$$

   y

   $$S_3 = \{p \in \mathbb{R}_3[x] \colon p''(0) = 0\}.$$

   Entonces:

   a) $S_1 = S_2 + S_3$ pero la suma no es directa.
   b) $S_1 = S_2 \oplus S_3$.
   c) $\mathbb{R}_3[x] = S_1 \oplus [x^3]$.
   d) $\mathbb{R}_3[x] = S_1 \oplus [x^3 + 1]$.
   e) $\mathbb{R}_3[x] = S_2 \oplus [x^3]$.

6. Sean $T\colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^4$ y $S\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ transformaciones lineales definidas por:

$$_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix},$$

siendo $\mathcal{B} = \{(1,0,1,0),\ (0,1,1,0),\ (0,0,-1,1),\ (0,0,0,-1)\}$ y $\mathcal{C} = \{1, x, x^2\}$, y

$$S(1,0,1,0) = (1,2,3,-1), \qquad S(0,1,1,0) = (1,3,2,0),$$

$$S(0,0,-1,1) = (0,-1,-1,2), \qquad S(0,0,0,-1) = (0,0,-1,-2).$$

Sea $p \in \mathbb{R}_2[x]$ tal que $S \circ T(p) = (5, 11, 3, -12)$. Entonces:

a) $p(1) = -2$.
b) $p(1) = 1$.
c) $p(1) = 0$.
d) $p(1) = -1$.
e) $p(1) = 2$.

7. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $T_\alpha\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ una transformación lineal cuya matriz asociada en la base canónica $\mathcal{C}$ es:

$$_{\mathcal{C}}(T_\alpha)_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha+2 & -2 \\ 1 & \alpha+3 & 4 & -2\alpha \\ -2 & -2 & \alpha-4 & 3 \\ -2 & \alpha & -2 & \alpha^2+3 \end{pmatrix}.$$

a) Si T_α no es sobreyectiva entonces $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 3$.
b) Si T_α no es sobreyectiva entonces $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 2$.
c) T_α es sobreyectiva para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.
d) Si T_α no es sobreyectiva entonces hay valores de α para los que $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 3$ y otros valores para los $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 2$.
e) Si T_α no es sobreyectiva entonces $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 1$.