

PRÁCTICO 8: FUNCIONALES LINEALES Y ADJUNTA DE UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL

A menos que se indique lo contrario, considerar en \mathbb{R}^n y en \mathbb{C}^n los productos internos usuales, en $\mathbb{R}_n[x]$ el producto interno $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$ y en $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ el producto interno $\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^t)$.

1. Representación de Riesz

EJERCICIO 1. Hallar el representante de Riesz de los siguientes funcionales lineales:

1. $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $T(x, y, z) = x + 2y - 3z$.
2. $T : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $T(x, y, z) = ix + (2 + 3i)y + (1 - 2i)z$.
3. $T : \mathbb{R}_1[x] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $T(p) = p(\alpha)$, donde α es un número real fijo.
4. $T : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $T(p) = p(0) + p'(1)$.

EJERCICIO 2. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, con producto interno, $T : V \rightarrow \mathbb{K}$ un funcional lineal no nulo y v_0 el representante de Riesz de T .

1. Probar que $v_0 \in (\text{Ker}(T))^\perp$.
2. Probar que $\|v_0\| = \sqrt{T(v_0)}$.
3. Probar que $\dim((\text{Ker}(T))^\perp) = 1$.
4. Si $\{e\}$ es una base ortonormal de $(\text{Ker}(T))^\perp$; probar que $v_0 = \overline{T(e)}e$.
5. Se considera la funcional lineal $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$T(1, 0, 0) = 2, \quad T(0, 1, 0) = 1, \quad T(0, 0, 1) = -1.$$

Hallar una base de $(\text{Ker}(T))^\perp$ y utilizarla para determinar el representante de Riesz de T .

2. Adjunta de una transformación lineal

EJERCICIO 3. Si $T, S : V \rightarrow W$ y $R : U \rightarrow V$ son transformaciones lineales entre \mathbb{K} -espacios vectoriales de dimensión finita con producto interno, y $\alpha \in \mathbb{K}$, probar las propiedades de la adjunta:

1. Si $\{e_1, \dots, e_n\}$ es una base ortonormal de V , entonces

$$T^*(w) = \langle w, T(e_1) \rangle_W \cdot e_1 + \dots + \langle w, T(e_n) \rangle_W \cdot e_n, \quad \forall w \in W.$$

2. $(T + S)^* = T^* + S^*$.
3. $(\alpha T)^* = \bar{\alpha}T^*$.
4. $(T \circ R)^* = R^* \circ T^*$.
5. $(T^*)^* = T$.
6. T es invertible $\Leftrightarrow T^*$ es invertible. Además $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.
7. λ es valor propio de $T \Leftrightarrow \bar{\lambda}$ es valor propio de T^* .
8. $\text{Ker}(T^*) = (\text{Im}(T))^\perp$.
9. $\text{Im}(T^*) = (\text{Ker}(T))^\perp$.
10. $\text{Ker}(T^*T) = \text{Ker}(T)$.
11. $\dim(\text{Im}(T^*T)) = \dim(\text{Im}(T))$.

EJERCICIO 4.

1. a) Hallar el producto interno de \mathbb{R}^2 para el cual $\{(\frac{1}{4}, 0), (0, \frac{1}{2})\}$ es una base ortonormal.

- b) Hallar el producto interno de \mathbb{R}^3 para el cual $\{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ es una base ortonormal.
2. Se considera la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$T(x, y) = (x + 3y, 3x + y, x + y).$$

Hallar T^* en las siguientes situaciones:

- a) \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 con los productos internos usuales.
- b) \mathbb{R}^2 con producto interno usual y \mathbb{R}^3 con el producto interno de la parte 1. b).
- c) \mathbb{R}^2 con el producto interno de la parte 1. a) y \mathbb{R}^3 con producto interno usual.
- d) \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 con los productos internos hallados en la parte 1.

EJERCICIO 5. Hallar la transformación lineal adjunta de las siguientes transformaciones (con los productos internos usuales)

1. $T : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_1[x]$ tal que $T(p) = p'$.
2. $T : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tal que $T(A) = A^t + A$.

3. Representación matricial de la adjunta en bases ortonormales

EJERCICIO 6. Hallar ${}_B(T)_B$ y ${}_B(T^*)_B$ en alguna base B conveniente, para las siguientes transformaciones lineales.

1. $T : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ tal que $T(x, y, z) = (2x + iy, y - 5iz, x + (1 - i)y + 3z)$.
2. $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y, z) = (2x + y - z, x + y + z)$.
3. $T : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tal que $T(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} A$.

EJERCICIO 7. Se considera la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x, y, z) = (x - y + 2z, -2x + 2y - 3z, -x + y - z).$$

1. Hallar bases de $\text{Ker}(T)$ y de $\text{Im}(T)$.
2. Sin determinar T^* , hallar bases de $\text{Ker}(T^*)$ y de $\text{Im}(T^*)$.

EJERCICIO 8. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno, S un subespacio vectorial de V y $T : V \rightarrow V$ una transformación lineal.

Probar que

$$S \text{ es invariante bajo } T \Leftrightarrow S^\perp \text{ es invariante bajo } T^*.$$

EJERCICIO 9. Sea V un espacio vectorial con producto interno sobre \mathbb{R} , con $\dim(V) = 3$. Se considera una transformación lineal $T : V \rightarrow V$ y un subespacio vectorial S de V .

1. Si $\dim(S) = 1$ probar que S es invariante bajo $T \Leftrightarrow$ existe λ_0 valor propio de T tal que $S \subseteq N(T - \lambda_0 I)$.
2. Si $\dim(S) = 2$ probar que S es invariante bajo $T \Leftrightarrow$ existe λ_0 valor propio de T tal que $\text{Im}(T - \lambda_0 I) \subseteq S$.
3. Se considera la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$T(x, y, z) = (7y - 6z, -x + 4y, 2y - 2z)$$

- a) Hallar todos los subespacios de dimensión 1 invariantes bajo T .
- b) Hallar todos los subespacios de dimensión 2 invariantes bajo T .