MATEMÁTICA DISCRETA I - 2020 - 2$^{\text{do}}$ SEMESTRE

Práctico 8 - Soluciones

Ejercicio 1. Reflexiva pues $f(x) = f(x) \forall x$; simétrica pues $f(x) = f(y) \Longrightarrow f(y) = f(x)$, y transitiva pues $f(x) = f(y) = f(z) \Longrightarrow f(x) = f(z)$.

Ejercicio 2.

Sea n un entero positivo. Definamos la relación $\equiv$ en $\mathbb{Z}$, llamada congruencia módulo n, en la forma:

$$a \equiv b \text{ si } a - b \text{ es divisible por } n.$$

a. Pruebe que $\equiv$ es una relación de equivalencia.

b. Demuestre que $a \equiv b \Longleftrightarrow a$ y b dan el mismo resto al ser divididos por n.

c. Describa el conjunto cociente $\mathbb{Z}/\equiv$ cuando $n = 3, 2, 1$.

d. Pruebe que $|\mathbb{Z}/\equiv|$ tiene n elementos.

Solución:

a. $x - x = 0 = 0.n \Longrightarrow x \equiv x \Longrightarrow \equiv$ reflexiva; $x \equiv y \iff x - y = k.n \Longrightarrow y - x = (-k).n \Longrightarrow y \equiv x \Longrightarrow \equiv$ simétrica; $x \equiv y \equiv z \Longrightarrow x - y = k.n \wedge y - z = k'.n \Longrightarrow x - z = x - y + y - z = (k + k').n \Longrightarrow x \equiv z \Longrightarrow \equiv$ transitiva.

b. $(\Longrightarrow)$ Si $a = qn + r$ y $b = q'n + r'$ con $0 \leq r, r' < n$, entonces si $r \geq r'$ tenemos que $a - b = (q - q')n + r - r'$ con $0 \leq r - r' < n$, pero $a - b = k.n$, por lo tanto, por la unicidad del resto de la división de $a - b$, tenemos que $r - r' = 0$, o sea $r = r'$. Si $r \leq r'$, como $a \equiv b \Longrightarrow b \equiv a$ deducimos lo mismo. $(\Leftarrow)$ Si $a = qn + r$ y $b = q'n + r$, entonces $a - b = (q - q').n \Longrightarrow a \equiv b$.

c. Si $n = 1$, entonces $[0] = \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv 0\} = \{x \in \mathbb{Z} : \exists k \in \mathbb{Z} : x - 0 = k.1\} = \{x \in \mathbb{Z} : \exists k \in \mathbb{Z} : x = k\}$ basta tomar $k = x$, para tener que para todo $x \in \mathbb{Z}$, $x \in [0]$, por lo tanto $[0] = \mathbb{Z}$ y $(\mathbb{Z}/\equiv) = \{[0]\} = \{\mathbb{Z}\}$.

Si $n = 2$ entonces $[0] = \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv 0\} = \{x \in \mathbb{Z} : \exists k \in \mathbb{Z} : x - 0 = k.2\} = \{x \in \mathbb{Z} : \exists k \in \mathbb{Z} : x = 2k\} =$ pares. Por otro lado $[1] = \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv 1\} = \{x \in \mathbb{Z} : \exists k \in \mathbb{Z} : x - 1 = k.2\} = \{x \in \mathbb{Z} : \exists k \in \mathbb{Z} : x = 2k + 1\} =$ impares, o sea que $(\mathbb{Z} \equiv) = \{$pares, impares$\}$.

Si $n = 3$ entonces $[0] = \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv 0\} = \{x \in \mathbb{Z} :$ resto de dividir x por 3 es $0\} = \{x \in \mathbb{Z} : x = \dot{3}\} =$ múltiplos de 3.
Por otro lado $[1] = \{x \in \mathbb{Z} :$ resto de dividir x por 3 es $1\} = \{x \in \mathbb{Z} : x = \dot{3} + 1\} =$ múltiplos de 3 más 1.
Por otro lado $[2] = \{x \in \mathbb{Z} :$ resto de dividir x por 3 es $2\} = \{x \in \mathbb{Z} : x = \dot{3} + 2\} =$ múltiplos de 3 más 2.
De donde $(\mathbb{Z}/\equiv) = \{\dot{3}, \dot{3} + 1, \dot{3} + 2\}$.

d. $(\mathbb{Z}/\equiv) = \{\dot{n}, \dot{n} + 1, \ldots, \dot{n} + (n - 1)\}$

Ejercicio 3. Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sea R_n el número de relaciones de equivalencia diferentes que pueden definirse en un conjunto dado con n elementos. Para cada $n, i \in \mathbb{N}$ sea $S(n, i)$ el número de Stirling del segundo tipo. Pruebe que:

a. Para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se cumple $R_{n+1} = C_0^n R_n + C_1^n R_{n-1} + \cdots + C_n^n R_0$.

b. Para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple, $R_n = S(n,1) + S(n,2) + \cdots + S(n,n)$.

Solución: Sabemos que el número de relaciones de equivalencia en un conjunto A dado es igual al número de particiones sobre A. Si $A = \{1, 2, \cdots n\}$ entonces:
a) R_{n+1} =cantidad de particiones del conjunto $\{1, 2, \cdots n, n+1\}$. Pensemos en las posibilidades para la clase del elemento $n+1$:

- Que la clase de $n+1$ contenga solo a $n+1$. En ese caso contar la cantidad de particiones del conjunto $\{1, 2, \cdots n, n+1\}$ es lo mismo que contar la cantidad de particiones del conjunto $\{1, 2, \cdots n\}$, o sea R_n.

- Que la clase de $n+1$ contenga 2 elementos $\{n+1, a\}$: en ese caso el a puede elegirse del conjunto $\{1, 2, \cdots n\}$ de C_1^n formas y los restantes $n-1$ elementos del conjunto los puedo particionar de R_{n-1} formas. Por lo tanto en este caso hay $C_1^n R_{n-1}$ particiones del conjunto.

- Que la clase de $n+1$ contenga 3 elementos: $\{n+1, a, b\}$: en ese caso a, b pueden elegirse del conjunto $\{1, 2, \cdots n\}$ de C_2^n formas y los restantes $n-2$ elementos del conjunto los puedo particionar de R_{n-2} formas. Por lo tanto en este caso hay $C_2^n R_{n-2}$ particiones del conjunto.

- Continuando así sucesivamente, agregando elementos a la clase de $n+1$ llegamos a que en el último caso la clase de $n+1$ contiene a todos los elementos del conjunto $\{1, 2, \cdots, n, n+1\}$ y en ese caso hay una sola particion posible y este número coincide con R_0 (pues R_0 =cantidad de formas de particionar un conjunto con 0 elementos=cantidad de formas de particionar el conjunto $\emptyset = 1$.)

Sumando todos los casos posibles obtenemos que $R_{n+1} = C_0^n R_n + C_1^n R_{n-1} + \cdots + C_n^n R_0$.

b) Sabemos que el número de Stirling de segunda especie $S(n,k)$ cuenta la cantidad de formas de particionar un conjunto de n elementos en k partes.
Entonces como R_n cuenta la cantidad de formas de particionar A en subconjuntos disjuntos (partes), éste será lo mismo que contar la cantidad de formas de particionar A en 1 solo subconjunto ($S(n,1)$) más la cantidad de formas de particionar A en dos subconjuntos ($S(n,2)$), $\cdots$, más la cantidad de formas de particionar A en n subconjuntos ($S(n,n)$). Así $R_n = S(n,1) + S(n,2) + \cdots + S(n,n)$.

Ejercicio 4. En cada uno de los siguientes casos, pruebe que R es una relación de equivalencia en A y describa el conjunto cociente A/R:

a. $A = \mathbb{Z}$ y aRb si $a^2 = b^2$.

b. (Parcial 2000) $A = \mathbb{Z}$ y aRb si a^2 y b^2 dan el mismo resto al dividirlos por 5.

c. $A = \mathbb{Z}$ y aRb si $mcd(a, 10) = mcd(b, 10)$

d. $A = \mathbb{R}^2$ y vRw si existe $a \in \mathbb{R}$ no nulo tal que $w = av$.

Solución: de a) a c) son relaciones de equivalencia porque son casos particulares de $aR_fb \iff f(a) = f(b)$ siendo f una función. En a) $f(x) = x^2$ en b) $f(x) =$ resto de la división de x^2 entre 5 y en c) $f(x) = mcd(x, 10)$.
Para d) reflexiva: $w = 1.w$; simétrica: $vRw \implies w = av \implies v = (1/a)w \implies wRv$; transitiva: $vRwRu \implies \exists a, a' : w = av \wedge u = a'w \implies u = a'av \implies vRu$.

Conjuntos cocientes: a) $A/R = \{[0], [1], \cdots [n], \cdots\} = \{\{0\}, \{1, -1\}, \{-2, 2\}, \ldots\}$

b) $A/R = \{[0], [1], [2]\} = \{\{\dot{5}\}, \{\dot{5}+1, \dot{5}+4\}, \{\dot{5}+2, \dot{5}+3\}\}$.

c) $A/R = \{[0], [1], [2], [5]\} = \{\{\dot{10}\}, \{\dot{10}+1, \dot{10}+3, \dot{10}+7, \dot{10}+9\}, \{\dot{10}+2, \dot{10}+4, \dot{10}+6, \dot{10}+8\}, \{\dot{10}+5\}\}$.

d) $A/R = \{\{(0, 0)\}, \{(a\cos(\theta), a\,\text{sen}(\theta) : \theta = [0, \pi), a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}\}$.

Ejercicio 5. (1er parcial junio de 2017 Ej5) Hallar la cantidad de relaciones de equivalencia sobre $\{0, 1, \ldots, 7\}$ tales que

a. $\#[0] = 2$ y $\#[1] = 4$

b. $\#[0] < \#[1] < \#[2]$ y $(3, 4) \in R$

Solución:

a. $\#[0] \neq \#[1] \implies [0] \neq [1] \implies A/R = \{\{0, a\}, \{1, b, c, d\}, \{e\}, \{f\}\}$ o $A/R = \{\{0, a\}, \{1, b, c, d\}, \{e, f\}\}$. Hay $\binom{8-2}{1}$ formas de elegir a, $\binom{8-2-1}{3}$ formas de elegir $\{b, c, d\}$ y luego tenemos dos casos posibles, por lo que el total es $6 \times 10 \times 2 = 120$.

b. Como $(3, 4) \in R$ el 3 y el 4 deben estar en la misma clase de equivalencia. Luego, las posibilidades para el cardinal de las clases de $[0], [1]$ y $[2]$ son:

- $\#[0] = 1, \#[1] = 2, \#[2] = 3$:
  $A/R = \{\{0\}, \{1, a\}, \{2, 3, 4\}, \{b\}\{c\}\}$ o $A/R = \{\{0\}, \{1, a\}, \{2, 3, 4\}, \{b, c\}\}$ o
  $A/R = \{\{0\}, \{1, a\}, \{2, b, c\}, \{3, 4\}\}$. En cada caso hay 3 formas posibles de elegir a (a puede ser 5,6 o 7) y luego b, c quedan determinados. Por lo tanto tenemos **9 posibles particiones de** A.
- $\#[0] = 1, \#[1] = 2, \#[2] = 4$: $A/R = \{\{0\}, \{1, a\}, \{2, 3, 4, b\}, \{c\}\}$ y hay 3 posibles formas de elegir a y luego dos formas de elegir b y c queda determinado. Son $3 \times 2 =$ **6 posibles particiones de** A.
- $\#[0] = 1, \#[1] = 2, \#[2] = 5$: $A/R = \{\{0\}, \{1, a\}, \{2, 3, 4, b, c\}\}$ y hay 3 posibles formas de elegir a, luego b, c quedan determinados. Hay **3 posibles particiones de** A.
- $\#[0] = 1, \#[1] = 3, \#[2] = 4$:
  $A/R = \{\{0\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 5, 6, 7\}\}$ o $A/R = \{\{0\}, \{1, a, b\}, \{2, 3, 4, c\}$. En el primer caso hay solo una posibilidad, en el segundo caso hay 3 posibles elecciones para c y luego a, b quedan determinados. Hay en total **4 posibles particiones de** A.

TOTAL: 9+6+3+4=22 posibles relaciones de equivalencia.

Ejercicio 6. Sea $A = \{a, b, c\}$, calcular la cantidad de relaciones de orden que hay sobre A.

Solución: La cantidad de reflexivas y antisimétricas es $3^3 = 27$, de las mismas podemos ver las que no son transitivas: son de las que tienen los pares $(a, b), (b, c)$ pero no tienen el (a, c) y los otros casos parecidos, o sea 2) $(a, c), (c, b)$ pero no tienen el (a, b),
3) $(b, a), (a, c)$ pero no tienen el (b, c),
4) $(b, c), (c, a)$ pero no tienen el (b, a),
5) $(c, a), (a, b)$ pero no tienen el (c, b),
6) $(c, b), (b, a)$ pero no tienen el (c, a).
Y también las dos casos circulares: $(a, b), (b, c), (c, a)$ y $(a, c), (c, b), (b, a)$.

O sea $27 - 8 = 19$. Otra forma es contar las relaciones en forma directa: hay $3! = 6$ relaciones totales, 1 que es la identidad, $3 \times 2 = 6$ donde hay un elemento no relacionado con ningún otro (distinto de él), 3 con un mínimo y dos maximales, y 3 con dos minimales y un máximo. Total $6+1+6+3+3 = 19$

Ejercicio 7.

a. Halle el número de relaciones de equivalencia en $\{1, 2, 3, 4\}$ que contienen a la relación $\{(1, 2); (3, 4)\}$.

b. Ídem para relaciones de orden.

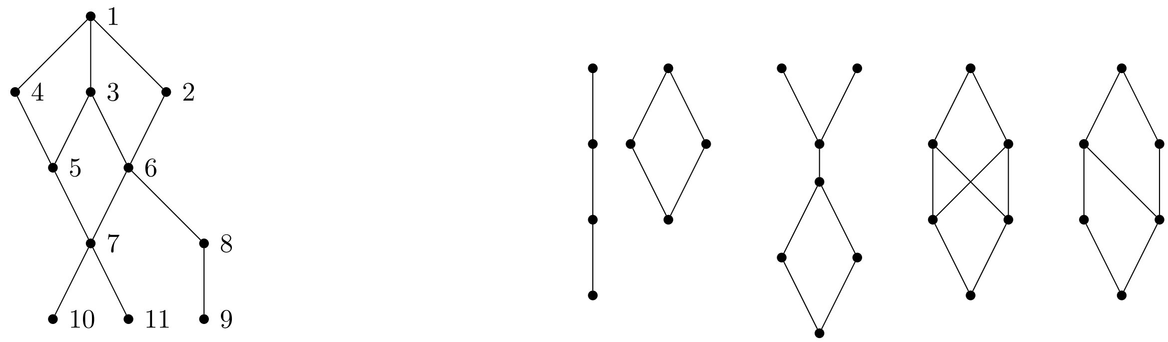
Solución: a) Son las dos con conjunto cociente: $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}$ y $\{\{1, 2, 3, 4\}\}$

b) Podemos contar analizando todas las posibilidades para los diagramas de Hasse. A continuación listamos todas las relaciones posibles:
$R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 2), (3, 4)\}$,
$R_2 = R_1 \cup \{(1, 3), (1, 4)\}$,
$R_3 = R_2 \cup \{(2, 4)\}$,
$R_4 = R_2 \cup \{(2, 3), (2, 4)\}$,
$R_5 = R_2 \cup \{(4, 2)\}$,
$R_6 = R_1 \cup \{(3, 2)\}$,
$R_6 = R_1 \cup \{(4, 2))\}$,
$R_8 = R_1 \cup \{(1, 4)\}$,
$R_9 = R_8 \cup \{(2, 4)\}$,
$R_{10} = R_9 \cup \{(2, 3), (1, 3)\}$,
$R_{11} = R_8 \cup \{(4, 2)\}$,
$R_{12} = R_8 \cup \{(3, 2)\}$,
$R_{13} = R_{12} \cup \{(4, 2)\}$,
$R_{14} = R_{12} \cup \{(2, 4)\}$,
$R_{15} = R_8 \cup \{(3, 4)\}$,
$R_{16} = R_{15} \cup \{(2, 4)\}$,
$R_{17} = R_2 \cup \{(3, 2), (2, 4)\}$
$R_{18} = R_5 \cup \{(3, 2)\}$
$R_{19} = R_6 \cup \{(4, 2), (4, 1), (3, 1)\}$
$R_{20} = R_{12} \cup \{(4, 2), (3, 1)\}$
Total son 20.

Ejercicio 8. Sea $A = \{1, 2, ..., 100\}$. ¿Qué hay más, relaciones de equivalencia o de orden en A?

Solución: Hay más de orden, pues por cada relación de equivalencia con conjunto conciente $\{[C_1], \ldots, [C_k]\}$ con $C_i \neq C_j$ si $i \neq j$, tenemos por lo menos $|C_1|!|C_2|! \ldots |C_k|!$ relaciones de orden que son totales restringindas a cada clase de equivalencia, pero elementos en distintas clases no están relacionados.

Ejercicio 9. Para ensamblar cierto producto hay que realizar las 11 tareas $T_1, T_2, \ldots, T_{11}$ en el siguiente orden parcial cuyo diagrama de Hasse se muestra en la Figura (a) Escriba una lista de ins-



(a) (b)

Figura 1:

trucciones de modo tal que, al ejecutarlas según la lista, el resultado final sea el producto correctamente ensamblado.

Solución: $9, 10, 11, 7, 8, 5, 6, 2, 3, 4, 1$.

Ejercicio 10 Un empleado de un centro de cómputos, tiene que ejecutar 10 programas P_0, P_1, $\ldots$, P_9 que, debido a las prioridades, están restringidos a las siguientes condiciones: $P_9 > P_7, P_2$; $P_7 > P_6$; $P_6 > P_4$; $P_2 > P_8, P_5$; $P_5 > P_3, P_0$; $P_8 > P_3, P_4$; $P_3, P_4, P_0 > P_1$; donde, por ejemplo, $P_i > P_j$ significa que el programa P_i debe realizarse antes que el programa P_j. Determine un orden de ejecución de estos programas de modo que se satisfagan las restricciones.

Solución: Veo elementos minimales y procedo en ese orden: $P_9, P_2, P_7, P_6, P_8, P_5, P_4, P_3, P_0, P_1$.

Ejercicio 11¿Cuáles de los diagramas de Hasse de la Figura (b)representa un retículo?

Solución: Todos menos el tercero y el cuarto. En tercero tiene dos maximales, por lo que el conjunto de ellos dos no tiene cotas superiores y por ende no tienen supremo. El cuarto tiene dos elementos cuyas cotas superiores tienen dos minimales, por lo que no tienen mínimo, por lo que no tiene supremo (también tiene dos elementos cuyas cotas inferiores tienen dos maximales, por lo que no tienen máximo, por lo que no tiene ínfimo)

Ejercicio 12. Demuestre que si A es un conjunto finito y $\leq$ es un orden en A entonces A tiene algún elemento maximal y alguno minimal. Demuestre también que si $(A, \leq)$ es un retículo (látice) y A es finito entonces A tiene mínimo y máximo. ¿Es cierto alguno de estos resultado si A es infinito? (en caso afirmativo dé una demostración y en caso negativo un contraejemplo).

Solución: La existencia de minimales y maximales la vimos en el teórico, pero basta considerar un elemento y si no es minimal, tomar el que esté relacionado con él y así sucesivamente hasta llegar a un minimal por ser finito y no poder seguir con dicho procedimiento eternamente. De forma similar se demuestra la existencia de maximal o tomando el orden inverso.

Si $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ basta tomar $M = \sup\{a_1, \sup\{a_2, \ldots, \sup\{a_{n-1}, a_n\}\} \ldots\}$. Efectivamente, si $s_k = \sup\{a_1, \sup\{a_2, \ldots, \sup\{a_{k-1}, a_k\}\} \ldots\}$, entonces procedemos por inducción: demostraremos por inducción que $a_i \leq M \wedge s_i \leq M$. Si $i = 1$, $a_1 \leq M = \sup\{a_1, s_2\}$ y $s_1 = M \leq M$. Asumiendo válido para k, demostrémoslo para $k+1$: como $s_{k+1} \leq s_k = \sup\{a_k, s_{k+1}\} \leq HIM \Longrightarrow s_{k+1} \leq M \Longrightarrow s_{k+1} = \sup\{a_{k+1}, s_{k+2}\} \leq M \Longrightarrow a_{k+1} \leq M$.

Otra demostración: Se considera un maximal M que se sabe que existe. Demostraremos que es máximo, efectivamente, dado otro elemento cualquiera x, entonces consideramos $s = \sup\{M, x\}$, si $s \neq M$ entonces $M \leq s$ de donde M no sería máximo, por lo tanto $M = s$, de donde $x \leq s = M$, por lo tanto M es máximo.

La demostración de que tiene mínimo es similar o se aplica lo del máximo para la relación inversa de $\leq$.

Si A es infinito es falso y un ejemplo es $\mathbb{Z}$ con el orden usual, obviamente es un retículo (como lo es cualquier orden total), pero no tiene ni máximo ni minímo.

Ejercicio 13. Muestre que en un conjunto con 61 personas, o bien hay una sucesión de 13 personas cada una de las cuales desciende de la siguiente, o bien hay un grupo de 6 personas ninguna de las cuales es descendiente de alguna otra.

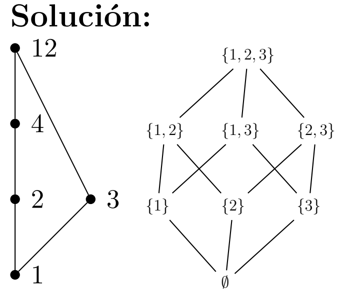
Solución: Si no hubiera 13 personas una descendiente de la otra, entonces la cadena más larga tienen 12 o menos elementos, de forma que el diagrama de Hasse tiene 12 o menos capa. Cada capa del diagrama es una anticadena. Al haber 61 personas, hay una anticadena con $\lceil 61/12 \rceil = 6$ elementos al menos, que cumple entre ellos no estar relacionados, o sea no ser descendiente uno del otro.

Ejercicio 14. Para cada uno de los órdenes $(A, \leq)$ siguientes, dibuje el diagrama de Hasse y determine si se trata de un retículo:

a. $A = \{1, 2, 3, 4, 12\}$ y $\leq$ es el orden de divisibilidad ($x \leq y$ sii y es múltiplo de x).

b. A es el conjunto de todos los subconjuntos de $\{1, 2, 3\}$ y $\leq$ es la inclusión $\subseteq$.

Solución:



Ejercicio 15. Sea A un conjunto y R una relación transitiva y reflexiva en A. Considere la relación en A definida por $S = R \cap R^{-1}$. Pruebe que S es una relación de equivalencia y que

$$[a]T[b] \text{ si } aRb$$

define una relación de orden en el conjunto cociente A/S.

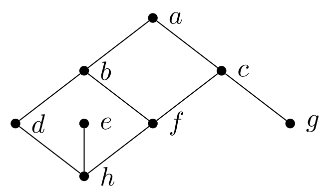
Solución: S reflexiva: $xRx \Longrightarrow xR^{-1}x \Longrightarrow xR \cap R^{-1}x$; simétrica: $xSy \Longrightarrow xRy \wedge xR^{-1}y \Longrightarrow yR^{-1}x \wedge yRx \Longrightarrow yRx \wedge yR^{-1}x \Longrightarrow ySx$; transitiva: $xSySz \Longrightarrow xRy \wedge xR^{-1}y \wedge yRz \wedge yR^{-1}z \Longrightarrow xRy \wedge yRz \wedge yRx \wedge zRy \Longrightarrow xRz \wedge zRx \Longrightarrow xRz \wedge xR^{-1}z \Longrightarrow xSz$.

T relación de orden: primero veamos que la relación está bien definida, o sea, que no depende del representante: Saen a, b, a', b' tales que aSa', bSb' y aRb la pregunta es si $a'Rb'$: $aSa' \Longrightarrow aR^{-1}a' \Longrightarrow a'Raa'Rb$. Por otro lado $bSb' \Longrightarrow bRb' \Longrightarrow a'Rb'$, como queríamos demostrar.

T reflexiva: R reflexiva $\Longrightarrow aRa \Longrightarrow [a]T[a]$; antisimétrica: $[a]T[b]T[a] \Longrightarrow aRbRa \Longrightarrow aRb \wedge aR^{-1}b \Longrightarrow aSb \Longrightarrow [a] = [b]$; transitiva: $[a]T[b]T[c] \Longrightarrow aRbRcaRc \Longrightarrow [a]T[c]$.

Ejercicios Complementarios

Ejercicio 16. (Del 1^er parcial 2001)
Se considera el siguiente diagrama de Hasse correspondiente a un orden parcial R definido en el conjunto $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. Indique cuáles de las siguientes afirmaciones es correcta:



a. (A, R) es un retículo.
b. El elemento a es un máximo; g y f son minimales.
c. Existen exactamente 7 cadenas de cardinal 3, una de las cuales es $\{a, b, h\}$.

Solución:

a. No, por tener dos maximales (y dos minimales)
b. Falso ambas afirmaciones.
c. Existe más de 7, y sí $\{a, b, h\}$, es una cadena.

Ejercicio 17. (Ej1 2^do examen 2001)
Sea R una relación binaria sobre un conjunto con 3 elementos, cuya matriz de 0s y 1s es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 1 & y \\ z & w & 1 \end{pmatrix}$$

¿Cuáles de las siguientes afirmaciones es correcta?:

a. R es una relación de equivalencia si y solo si $x = y = z = w = 1$.
b. Si R es un retículo entonces $y + w \geq 1$.
c. Para cualquier valor de x, y, z y w la relación R es necesariamente un orden parcial.

Solución:

a. Verdadera, pues $1R2, 1R3$

b. Verdadera: para ser retículo tiene que ser orden total y la única forma es que o $2R3$ o $3R2$

c. Falso, si valen todos 1, no se cumple la antisimétrica.

Ejercicio 18 Sea A el conjunto de naturales n mayores que 1 que dividen a 60. Sea R la relación en A definida por: aRb si a divide a b. ¿Es R es un orden parcial? ¿total? ¿retículo? Halle todos los elementos maximales y minimales de (A, R). ¿Cuál es el cardinal más grande de una cadena en (A, R)? ¿Y el de una anticadena? ¿Cuántas cadenas de largo 2 hay?

Solución: ¿Es R es un orden parcial? Sí, ¿total? No (2 y 3 nos están relacionados) ¿retículo? No, $\nexists \operatorname{ínf}\{2, 3\}$. Halle todos los elementos maximales y minimales de (A, R). Los mínimales son $2, 3, 5$ y el único maximal es 60. ¿Cuál es el cardinal más grande de una cadena en (A, R)? 4, que es la cantidad de niveles en el diagrama de Hasse (una cadena de largo 4 es $\{2, 4, 12, 60\}$). ¿Y el de una anticadena? 4 (una anticadena de largo 4 es $\{4, 6, 10, 15\}$). Para justificar que no hay anticadenas de largo mayor que 4 observamos que para formar una anticadena debemos escojer a lo sumo un elemento de cada conjunto: $\{60, 12, 4, 2\}, \{20, 10, 5\}, \{30, 6, 3\}, \{15\}$.

¿Cuántas cadenas de largo 2 hay? $2^x 3^y 5^z R 2^{x'} 3^{y'} 5^{z'}$ sii $x \leq x', y \leq y', z \leq z'$ y no todos iguales y $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$: $CR_2^3 CR_2^2 CR_2^2 - 3 \times 2 \times 2 - 3 \times 2 \times 2 + 1 = C_2^4 (C_2^3)^2 - 23 = 6 \times 9 - 23 = 31$.