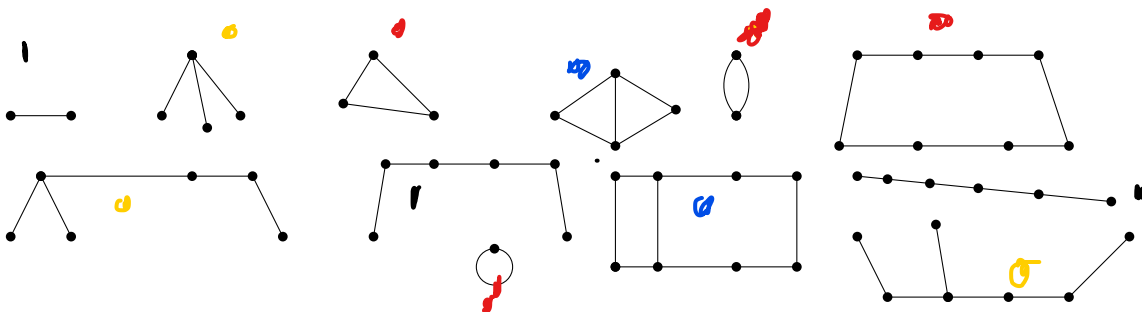


Práctico 11: Grafos (Planaridad).

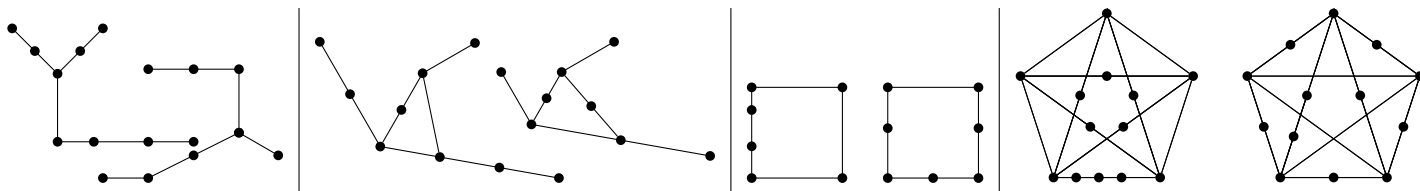
Ref. Grimaldi 11.4

Ejercicio 1 Dibuje una inmersión en el plano de K_4 , otra del cubo y otra de $K_{2,8}$.

Ejercicio 2 Indique cuales de los multigrafos de la figura son homeomorfos:



Ejercicio 3 Para los pares de grafos homeomorfos de la figura obtenga un tercero desde el cual los dos primeros se obtengan por subdivisiones elementales.



Ejercicio 4 a. ¿Cuántos subgrafos homeomorfos a K_2 tiene C_4 ?

b. ¿Cuántos subgrafos homeomorfos a $K_{1,3}$ tiene W_4 ? (W_n son los grafos ruedas definidos en el Ej. 6 del Práctico 9).

c. ¿Cuántos subgrafos homeomorfos a K_2 tiene un árbol de orden n ?

Ejercicio 5 Muestre que si se elimina cualquier arista de K_5 , el subgrafo resultante es plano. ¿Es esto cierto para el grafo $K_{3,3}$?

Ejercicio 6 Probar que todo grafo acíclico es plano.

Ejercicio 7 Determine cuáles de los grafos de la Figura 1 son planos. Si un grafo es plano, vuelva a dibujarlo sin aristas solapadas. Si no es plano, encuentre un subgrafo homeomorfo a K_5 , o $K_{3,3}$.

Ejercicio 8 Sea $G = (V, E)$ un grafo no plano. ¿Cuál es el valor más pequeño que puede tener $|E|$?

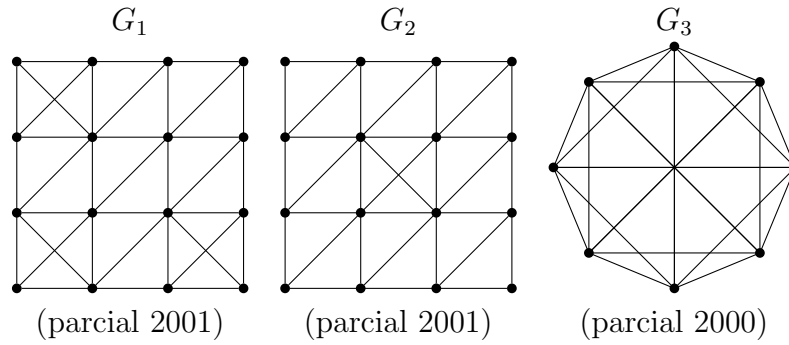


Figura 1: del Ejercicio 7

Ejercicio 9 Determine el número de vértices, aristas y regiones para cada uno de los grafos planos de la Figura 1. Luego muestre que sus respuestas satisfacen el teorema de Euler para grafos planos conexos.

Ejercicio 10 ¿Cuántas aristas tiene un grafo conexo 3-regular plano sin lazos y con ocho vértices? Dibuje un grafo que satisfaga dichas condiciones y otro que las satisfaga todas menos la de ser plano.

- Ejercicio 11**
- a. Demuestre que todo grafo plano tiene un vértice de grado 5 o menor.
 - b. Demuestre que todo grafo plano con menos de 30 aristas tiene un vértice de grado 4 o menor.
 - c. Demuestre que en toda inmersión de un grafo plano y conexo con 6 vértices y 12 aristas, cada una de las regiones está limitada por 3 aristas.
 - d. Demuestre que para todo grafo conexo G con 11 o más vértices, o bien él o su complemento \overline{G} no es plano.

Ejercicio 12 Sea $G = (V, E)$ un grafo plano y cuyas inmersiones planas determinan 53 regiones. Si para alguna inmersión plana de G cada región tiene al menos cinco aristas en su frontera, demuestre que $|V| \geq 82$.

Ejercicio 13 Sea $G = (V, E)$ un grafo plano 4-regular conexo sin lazos. Si $|E| = 16$, ¿cuántas regiones hay en una representación plana de G ?

Ejercicio 14 Sea G es un grafo plano, simple (i.e. sin lazos ni aristas múltiples) y conexo con v vértices, $e \geq 3$ aristas y sin ciclos de largo menor o igual a 5.

- (i) Pruebe que si una inmersión plana de G determina r regiones entonces $r \leq e/3$.
- (ii) Pruebe que $3v \geq 2e + 6$.
- (iii) Pruebe que un grafo 3-regular, plano, simple y conexo posee un ciclo de largo $\ell \leq 5$.