Universidad de la República **Geometría y Álgebra Lineal 2**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Segundo Semestre 2021**

PRÁCTICO 9: OPERADORES AUTOADJUNTOS.

A menos que se indique lo contrario, considerar en $\mathbb{R}^n$ y en $\mathbb{C}^n$ los productos internos usuales, en $\mathbb{R}_n[x]$ el producto interno $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$ y en $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ el producto interno $\langle A, B\rangle = tr(AB^t)$.

1. Operadores autoadjuntos

EJERCICIO 1. En un $\mathbb{R}$-espacio vectorial V de dimensin finita con producto interno, se considera el operador lineal $T : V \to V$ tal que $T(v) = \langle v, u_0\rangle\, u_1$ donde u_0 y u_1 son vectores no nulos (fijos) de V. Hallar T^*. ¿Qué condiciones tienen que cumplir los vectores u_0 y u_1 para que T sea autoadjunto?

EJERCICIO 2. Sean T_1 y T_2 operadores autoadjuntos

A. Probar que T_1+ T_2 es autoadjunto y que αT_1 es autoadjunto $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.
B. Dar un ejemplo que muestre que $T_1 \circ T_2$ no tiene por que ser autoadjunto.
C. Probar que $T_1 \circ T_2$ es autoadjunto $\Leftrightarrow$ T_1 y T_2 conmutan.

2. Representación matricial de operadores autoadjuntos. Matrices simétricas y hermíticas

EJERCICIO 3.

A. En $\mathbb{R}^3$ con el producto interno habitual se considera
  a) el operador lineal T tal que
$$_B(T)_B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$
  siendo $B = \{(1, 1, 0), (0, 1, 0), (1, 0, 1)\}$. Probar que T es autoadjunta.
  b) el operador lineal S tal que
$$_B(S)_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
  siendo $B = \{(1, 1, 0), (0, 1, 0), (1, 0, 1)\}$.¿Es S autoadjunta?.

B. En $\mathbb{C}^2$ con el producto interno habitual se considera el operador lineal T tal que
$$_B(T)_B = \begin{pmatrix} 1+i & i \\ -2i & 1-i \end{pmatrix}$$
siendo $B = \{(1, 1), (0, 1)\}$. Probar que T es autoadjunta.

C. Se considera en $\mathbb{R}^3$ el producto interno habitual. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineal dada por:
$$T(1, 1, 0) = (5, 8, -1),\;\; T(1, -1, 1) = (10, -14, 10),\;\; T(2, 1, 1) = (13, a, b)$$
Hallar a y b para que T sea autoadjunta.

3. Teoría Espectral de operadores autoadjuntos.

EJERCICIO 4. En los siguientes casos probar que T es autoadjunto, hallar su forma diagonal y una base ortonormal del espacio formada por vectores propios de T.

A. $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ tal que $T(x,y,z)=\left(\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}z, 2y, \frac{1}{2}x+\frac{3}{2}z\right)$
B. $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ tal que $T(x,y,z)=\left(\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}z, -y, -\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}z\right)$

EJERCICIO 5.

A. Verificar que A es simétrica real y hallar una matriz P ortogonal (esto es $P^{-1}=P^t$) tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal

$$\text{(a) } A=\begin{pmatrix} 2 & -2\\ -2 & 5\end{pmatrix}\qquad \text{(b) } A=\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\qquad \text{(c) } A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

B. *a*) Verificar que $A=\begin{pmatrix} 1+i & 1\\ 1 & 1-i\end{pmatrix}$ es una matriz simétrica compleja no diagonalizable.
   b) Verificar que $A=\begin{pmatrix} i & 1\\ 1 & i\end{pmatrix}$ es una matriz simétrica compleja que no tiene valores propios reales

C. Verificar que A es hermítica y hallar una matriz P unitaria (esto es $P^{-1}=\overline{P}^t$) tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal:

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 1-i\\ 1+i & 5\end{pmatrix}\quad A=\begin{pmatrix} 3 & -i\\ i & 3\end{pmatrix}\quad A=\begin{pmatrix} 6 & 2+2i\\ 2-2i & 4\end{pmatrix}\quad A=\begin{pmatrix} 1 & i & 1\\ -i & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

EJERCICIO 6. Sea $A\in\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ simétrica y $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ los valores propios de A.

A. Probar que $tr(A)=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n$ y $det(A)=\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n$
B. *a*) Si $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_r$ son no nulos y $\lambda_{r+1}=\lambda_{r+2}=\cdots=\lambda_n=0$ probar que $rango(A)=r$.
   b) Si además A es idempotente (esto es $A^2=A$) demostrar que $rango(A)=tr(A)$.

EJERCICIO 7. Sea $A\in\mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ una matriz simétrica. Se sabe que λ y μ son valores propios distintos de A, con $mg(\lambda)=mg(\mu)=2$. Además se sabe que los vectores $(1,1,0,0)$ y $(1,1,1,1)$ pertenecen a S_λ (subespacio propio asociado a λ). Entonces una base de S_μ (subespacio propio asociado a μ) es:
A) $B=\{(1,-1,0,0),\ (0,1,-1,0)\}$.
B) $B=\{(0,1,-1,0),\ (0,0,1,-1)\}$.
C) $B=\{(0,0,1,-1),\ (-1,0,0,1)\}$.
D) $B=\{(-1,0,0,1),\ (1,-1,0,0)\}$.
E) $B=\{(1,-1,0,0),\ (0,0,1,-1)\}$.

EJERCICIO 8. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno. Sea S un subespacio de V y $T:V\to V$ un operador lineal. Probar que si T es autoadjunto y S es invariante por T entonces existe una base ortonormal de S formada por vectores propios de T

Ejercicio 9. [2do parcial curso 2005] En $\mathbb{R}^3$ con el producto interno usual consideramos la base $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ tal que $\langle u_1, u_2\rangle = \langle u_1, u_3\rangle = 0,\ \langle u_2, u_3\rangle = \frac{1}{2}$ y los operadores T y S definidos por

$$_B(T)_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad _B(S)_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Estudiar si T y S son operadores autoadjuntos.

Ejercicio 10. [Examen Diciembre 2005] En $\mathbb{R}^3$ con el producto interno usual consideramos el operador autoadjunto $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

- $T(x, y, z) = 4(x, y, z)$ para todo $(x, y, z) \in U = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ 3x + 2z = 0\big\}$.
- $\det(T) = -48$.

Calcular $T(3, 0, 2)$.

Ejercicio 11. Se consideran los operadores lineales $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ y $S : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tales que

$$_{\mathcal{C}}(T)_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad _{\mathcal{C}}(S)_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

siendo $\mathcal{C}$ la base canónica de $\mathbb{R}^4$.
Hallar una base $\mathbb{R}^4$ formada por vectores propios de ambos operadores.

Ejercicio 12.

A. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y B una base de V. Probar que existe un producto interno $\langle\ ,\ \rangle$ en V para el cual B es ortonormal.
B. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{R}$ y $T : V \to V$ una transformación lineal. Probar que: T es diagonalizable $\Leftrightarrow$ existe un producto interno en V para el cual T es autoadjunta.
C. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{R}$ y $T : V \to V$ una transformación lineal <u>diagonalizable</u>. Si $S \subset V$ es un subespacio invariante bajo $T \Rightarrow S$ tiene una base formada por vectores propios de T.