ESTADÍSTICA ACTUARIAL

Y

EL ESTUDIO DE LOS RIESGOS

Enrique Arónica

Capítulos

Capítulo V

SOLVENCIA DE LAS ASEGURADORAS

Sección 1: Introducción a la Solvencia de las Aseguradoras

Sección 2: El reaseguro y la Solvencia

Sección 3: La Solvencia en períodos plurianuales

Sección 1

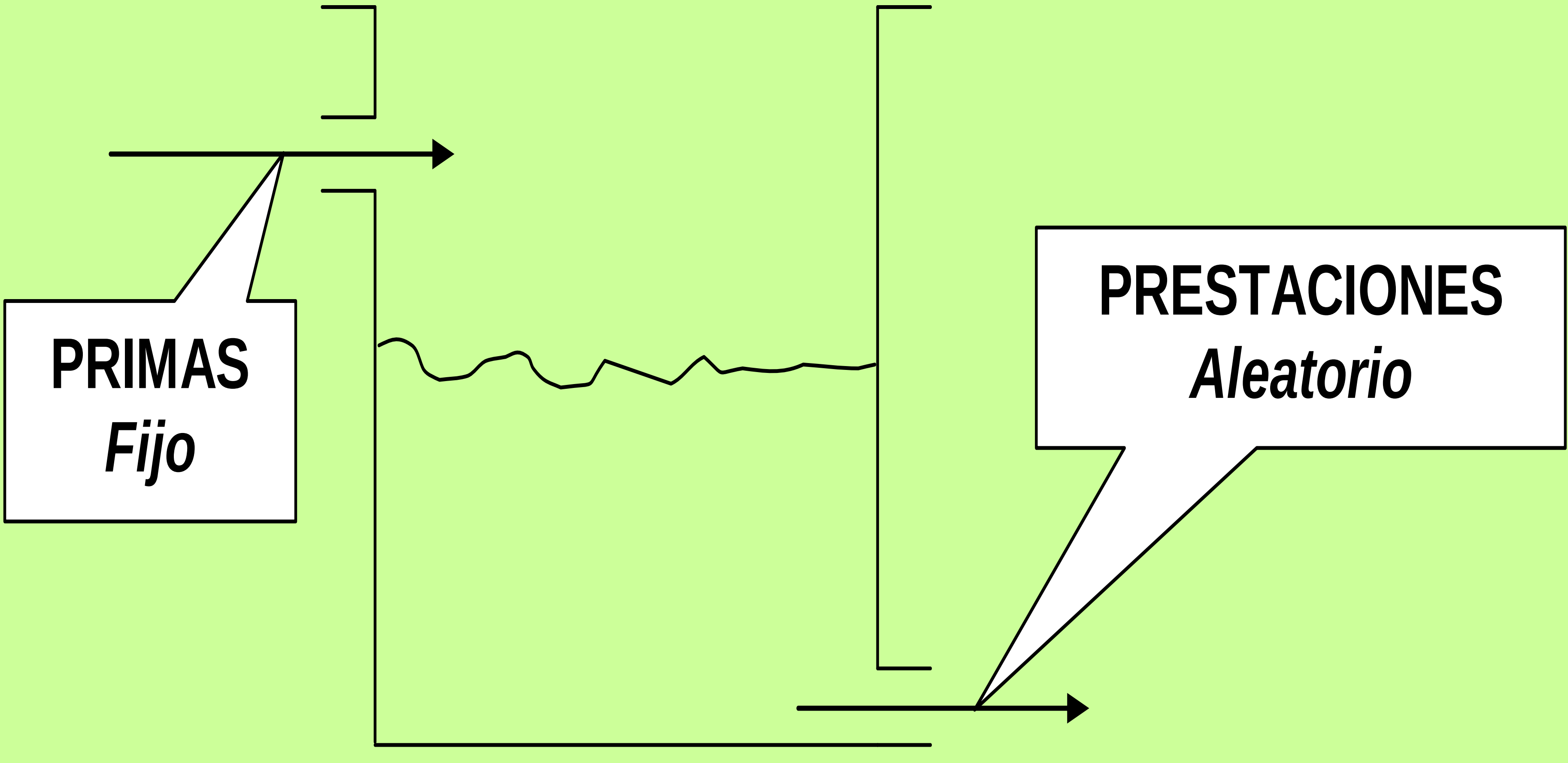
La Solvencia de las aseguradoras

Solvencia de las Aseguradoras

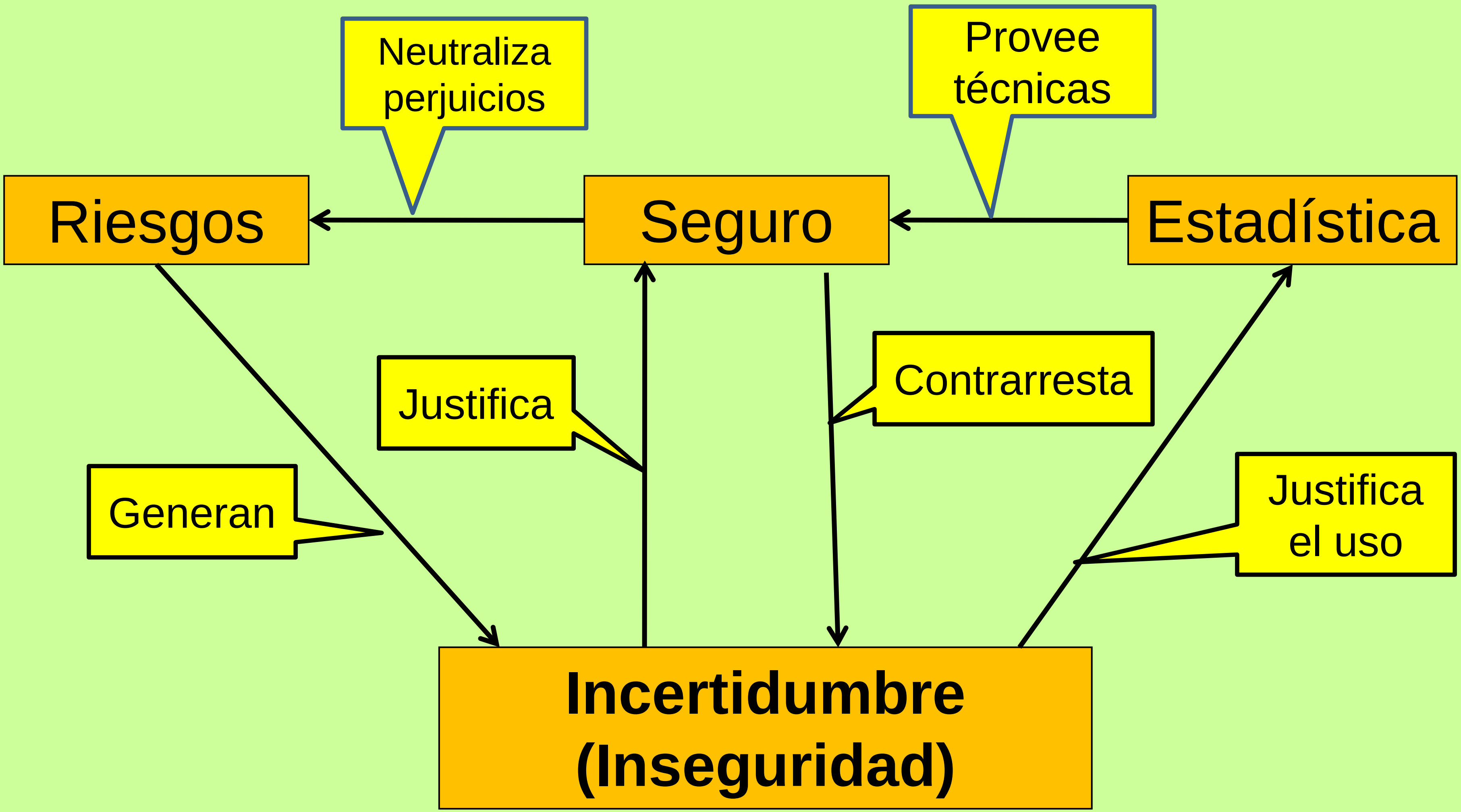
Introducción al Concepto de Solvencia

- Toda empresa es ***solvente*** si posee suficientes activos para hacer frente a sus pasivos.
- En las aseguradoras, los pasivos nunca son ***conocidos exactamente*** y pueden ***extenderse a muchos años*** en el futuro.
- Las prestaciones a que se compromete el asegurador al cubrir un riesgo, viene asociada a satisfacer la necesidad económica del asegurado cuando se produce el siniestro. ***Compromiso a futuro***.
- El hecho de que los ingresos, ***primas***, se ***producen antes*** de los egresos, ***indemnizaciones***, y el carácter aleatorio de éstas, ponen en un primer plano el ***objetivo de solvencia***, y en consecuencia el de ***estabilidad del asegurador***.
- La ***quiebra de la solvencia***, puede obedecer a la ***natural fluctuación aleatoria*** de la siniestralidad.
- En consecuencia, el ***riesgo de insolvencia***, es susceptible de ***tratamiento estadístico***.

RELACIÓN PRIMAS - PRESTACIONES



EL RIESGO, EL SEGURO Y LA ESTADÍSTICA



Solvencia de las Aseguradoras

Solvencia Estática

- Capacidad financiera del asegurador para hacer frente a los compromisos ya asumidos, ***en un momento dado***.

- Se trata que las siguientes provisiones o reservas estén ***suficientemente*** calculadas.
  - Provisiones de Primas: **Reserva de Riesgo en Curso** y **Reserva Matemática**.
  - Provisiones de Prestaciones Pendientes: **Reserva de Siniestros Pendientes de Pago**.

- Pero como la ***siniestralidad fluctúa aleatoriamente*** alrededor de su valor medio (prima pura neta) ***a través del tiempo***, no se tiene certeza de la situación de solvencia a futuro. Surge el ***enfoque dinámico*** de la solvencia.

- También, otras causas de naturaleza externa de difícil control, que comprometen el resultado del asegurador.
  - Inflación.
  - Pérdidas en las inversiones de los fondos de primas.
  - Incrementos en los gastos administrativos.
  - Insolvencia de reaseguradores.

Solvencia de las Aseguradoras

Solvencia Dinámica

- Considera ***dinámicamente*** la continuidad del negocio del seguro, compromisos que puedan surgir como consecuencia de su actividad futura.

- Consiste en la exigencia de obtener garantías financieras por encima de las exigidas por la Solvencia estática.

- Se trata que las siguientes garantías financieras adicionales.

  - Provisiones por desvíos de Siniestralidad (Reserva por Insuficiencia de Prima). Se constituye por cada rama individualmente.

  - Margen de Solvencia. Es una magnitud global de la aseguradora.

- Margen de Solvencia:

  - Es un ***“patrimonio no comprometido a priori”***. Es una partida del patrimonio del asegurador, que no están afectadas a compromisos contraídos en virtud de las primas emitidas.

Margen de Solvencia

Origen Técnico del Margen de Solvencia

En 1964 se publica el trabajo realizado por un grupo del Comité de Seguros de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE), dirigidos por el profesor Campagne.

Con datos (riesgos patrimoniales) de 10 compañías de seguros de Suiza, del período 1945 a 1954, se elaboró una ***distribución de probabilidad del tipo Beta***, en relación a la variable ***tasa de siniestralidad sobre primas***.

- El 58% de la prima de tarifa, o comercial, corresponde a la prima pura para el pago de sinestros.
- Se desea operar con una probabilidad de insolvencia del 0,3%.
- Determinar el ***Margen de Solvencia Mínimo*** necesario.

Variables:

- Siniestralidad anual: Y.
- Prima de tarifa o comercial (prima pura más recargos): PT
- Tasa siniestros/prima: $Z = Y/PT$.

Margen de solvencia

La función Beta.

$$f(Z,\alpha,\beta)=\frac{1}{B(\alpha,\beta)}\cdot Z^{\alpha-1}\cdot(1-Z)^{\beta-1} \qquad 0\le Z\le 1 \qquad \alpha,\beta>0$$

El valor de Z que antiacumula una probabilidad de 0,003.

$$P\{Z>z_0\}=\int_{z_0}^{1}\frac{1}{B(\alpha,\beta)}\cdot Z^{\alpha-1}\cdot(1-Z)^{\beta-1}\cdot dZ=0{,}003$$

En función de las estimaciones de α y β resultantes, se obtuvo.

$$P\{Z>z_0\}=0{,}003 \quad\Rightarrow\quad z_0=\frac{y_0}{PT}=0{,}74$$

Margen de solvencia

$$P\{Z > z_0\} = 0{,}003 \quad \Rightarrow \quad z_0 = \frac{y_0}{PT} = 0{,}74$$

Significa:

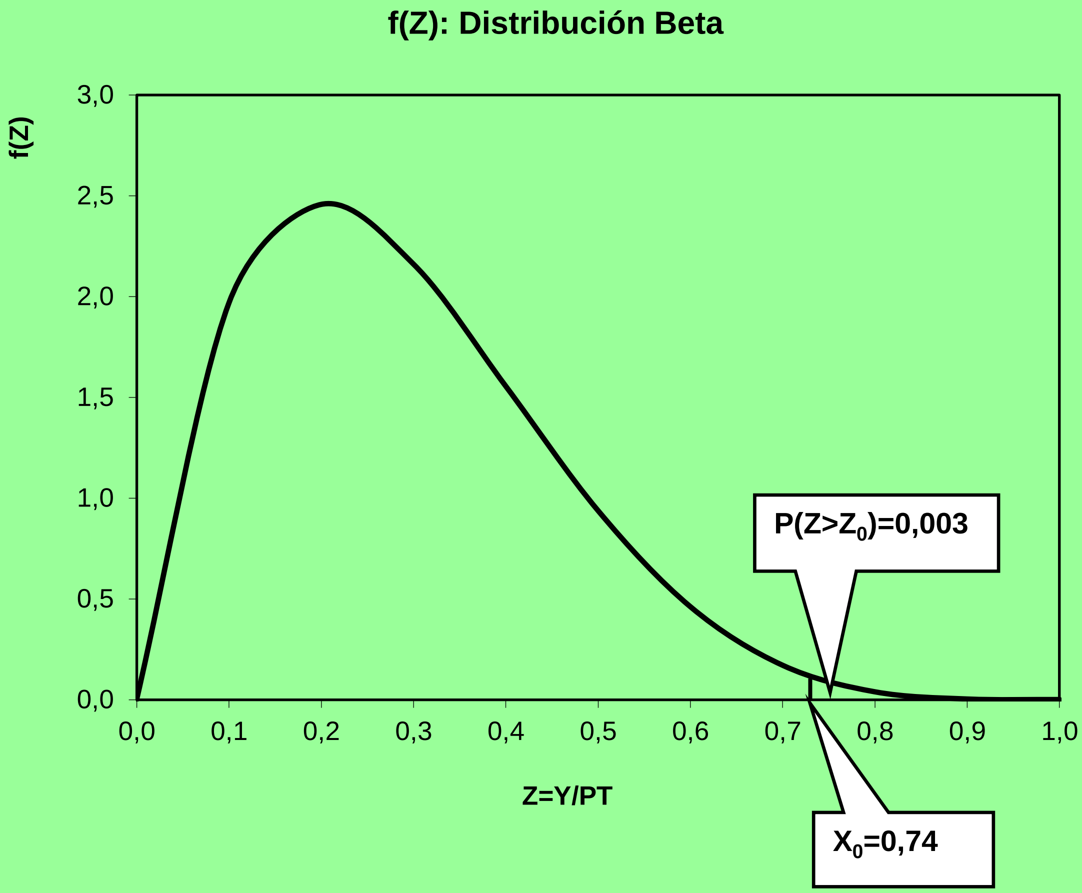
- Para una Probabilidad de Insolvencia del *0,3%*, es necesario disponer del *74%* de la Prima de Tarifa Comercial para hacer frente a los siniestros.

- Si la Prima Pura (la porción de la prima comercial que se usa para siniestros) es el 58% de la Prima de Comercial (hipótesis), el ***Margen de Solvencia Mínimo*** que hay que constituir para garantizar la probabilidad de Insolvencia del 0,3%, es.

$$\frac{y_0}{PT} - \frac{PP}{PT} = \frac{MSM}{PT} \quad \Rightarrow \quad 0{,}74 - 0{,}58 = 0{,}16$$

El Margen de Solvencia Mínimo debe ser del ***16% de la Prima de Tarifa*** anual.

Margen de solvencia



Margen de solvencia

- En los casos en que Z tome valores mayores a la unidad, $(Y > PT)$ se trabaja con la variable corregida $Z' = Z/k$, siendo k un valor suficiente para evitar valores superiores a uno de Z'.

$$Z' = \frac{Z}{k} = \frac{\frac{Y}{PT}}{k} = \frac{y}{k \cdot PT}$$

Si se supone que.

$$P\{Z' > z_0'\} = 0{,}003 \quad \Rightarrow \quad z_0' = \frac{y_0}{k \cdot PT} = 0{,}74 \quad \Rightarrow \quad \frac{y_0}{PT} = k \cdot 0{,}74$$

$$\frac{y_0}{PT} - \frac{PP}{PT} = \frac{MSM}{PT} \quad \Rightarrow \quad k \cdot 0{,}74 - 0{,}58 > 0{,}16$$

Si la siniestralidad es elevada de manera que $Z = Y/PT > 1$ es razonable que se requiera un margen de solvencia superior para garantizar la misma probabilidad de insolvencia.

Margen de solvencia

Posteriormente la Comunidad Económica Europea (CEE), realizó otro trabajo con datos ofrecidos por diversos países de la comunidad, determinando que el margen de solvencia mínimo se constituye así.

Sobre primas: El 18% hasta un nivel de primas, y el 16% a partir de ese monto.

Sobre siniestros: El 26% hasta un nivel de siniestralidad, y el 23% a partir de ese valor.

Los % sobre primas ***inferiores*** a los % sobre siniestros, se deben a que generalmente los ***pagos de siniestros son inferiores a los montos de las primas*** recaudadas.

Los descensos del 18 al 16% y del 26 al 23%, considera que, por la ***Ley de los Grandes Números***, a mayor volumen de riesgos asegurados ***mayor estabilidad*** en el comportamiento de los siniestros, y ***menor intensidad de los desvíos siniestrales*** sobre los valores esperados, que dieron lugar a las primas fijadas.

Margen de solvencia

- **Relación entre el 16% de las primas y el 23% de los siniestros.**

Se parte del supuesto de que la siniestralidad es:

$$Y = 0{,}70 \cdot PT \Rightarrow \quad PT = \frac{Y}{0{,}70}$$

$$MSM = 0{,}16 \cdot PT = 0{,}16 \cdot \frac{Y}{0{,}70} \cong 0{,}23 \cdot Y$$

Significa, que a partir de una siniestralidad superior al 70% de la prima de tarifa, es superior el cálculo sobre los siniestros. Lo mismo sucede en la relación del 18% sobre prima de tarifa y el 26% sobre siniestros.

Margen de solvencia

Críticas a este Margen de Solvencia.

- El 16% está ***desactualizado*** por el tiempo transcurrido.

- El MSM depende de la ***cantidad de primas***, y no de la calidad de los riesgos que generan esas primas.

- No contempla en el cálculo los niveles y tipos de ***planes de reaseguros***. Las cesiones de reaseguro sólo entran en el cómputo para reducir la base de cálculo del Margen de Solvencia, ya sea de primas o de siniestralidad.

- El ***MSM común a todo el mercado***, no se adapta a la realidad de cada asegurador individualmente. Un asegurador con primas insuficientes tiene que conformar un MSM inferior a otro asegurado que calculó adecuadamente las primas. (teóricamente correcto, pero impracticable para el organismo de control)

- No considera el ***riesgo de la inversión*** de los activos del asegurador.

Margen de solvencia

Normativas de la SSN

Monto en función de las primas:

A partir de información 12 meses anteriores.

$$S = (primas\ seg.\ directos + reaseg.\ activos + retrocesiones\ activ. + gastos\ adm. - anulaciones)$$

$$0{,}16 \cdot S$$

A partir de información 36 meses anteriores.

$$P = [(stros.\ pagados + gastos\ de\ liq.\ pagados - recuperos - salvataje - reaseg.\ pasivo) / (stros.\ brutos - recuperos - salvataje)] \cdot 100$$

$$P \geq 30 \text{ ó } 50 \text{ ó } 85 \text{ ó } 90,\ según\ la\ rama$$

$$\boldsymbol{CM = 0,16 \cdot S \cdot \frac{P}{100}}$$

Margen de solvencia

Normativas de la SSN

Monto en función de los siniestros:

Información 36 meses anteriores.

$$S_1 = (stros.\,pagados\ seg.\,directos + stros.\,pagados\ reaseg.\,activos + stros.\,pagados\ retrocesiones)$$

$$S_2 = (stros.\,pend.\,final\ pdo.\,seg.\,directos + stros.\,pend.\,final\ pdo.\,reaseg.\,activo + stros.\,pend.\,final\ pdo.\,retrocesiones) - (stros.\,pend.\,comienzo\ pdo.\,seg.\,directos + stros.\,pend.\,comienzo\ pdo.\,reaseg.\,activo + stros.\,pend.\,cpmienzo\ pdo.\,retrocesiones)$$

$$\frac{S_1 + S_2}{3} \qquad 0{,}23 \cdot \frac{S_1 + S_2}{3}$$

$$\boldsymbol{CM = 0,23 \cdot \frac{S_1 + S_2}{3} \cdot \frac{P}{100}}$$

Margen de solvencia

Normativas de la SSN

Seguros de Vida, cuyos planes prevean la constitución de reservas matemáticas**.**

Monto en función de la Reserva Matemática y los Capitales a Riesgo

$$M_1 = 0{,}04 \cdot (reserva\ mat.\ total) \cdot \left(\frac{reserva\ mat.\ propia}{reserva\ mat.\ total}\right)$$

Con la condición que debe verificarse que: $\left(\frac{reserva\ mat.propia}{reserva\ mat.total}\right) \geq 0{,}85$

$$M_2 = 0{,}003 \cdot (total\ cap.\ en\ riesgo) \cdot \left(\frac{cap.\ en\ riesgo\ propio}{total\ cap.\ en\ riesgo}\right)$$

Con la condición que debe verificarse que: $\left(\frac{cap.en\ riesgo\ propio}{total\ cap.en\ riesgo}\right) \geq 0{,}50$

$$\boldsymbol{CM = M_1 + M_2}$$

Capitales Mínimos

<table>
<tr><th colspan="3">Requerimiento de Capitales Mínimos</th></tr>
<tr><td rowspan="5">Margen de Solvencia Mínimo</td><td rowspan="3">Seguros generales</td><td>Capitales por ramas</td></tr>
<tr><td>Monto en función de las Primas</td></tr>
<tr><td>Monto en función de los Siniestros</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Seguros de Vida con Reserva Matemática</td><td>Capitales por ramas</td></tr>
<tr><td>Monto en función de las Reservas Matemáticas y los Capitales en Riesgo</td></tr>
</table>

Sección 2

El reaseguro y la Solvencia

El reaseguro y la Solvencia

- La misión fundamental del reaseguro es la ***estabilización de los resultados*** de la compañía aseguradora.

- Por el reaseguro, se puede ***reducir el Margen de Solvencia*** exigible para garantizar una cierta Probabilidad de Solvencia.

- Cualquiera sea el contrato de reaseguro, este modifica la función de distribución de la cuantía siniestral total anual $F(Y)$, determinando un ***nivel menor del margen de solvencia*** mínimo.

- Una forma de expresar la relación entre Reaseguro y Solvencia es a través de la ***"Curva de Indiferencia"***.

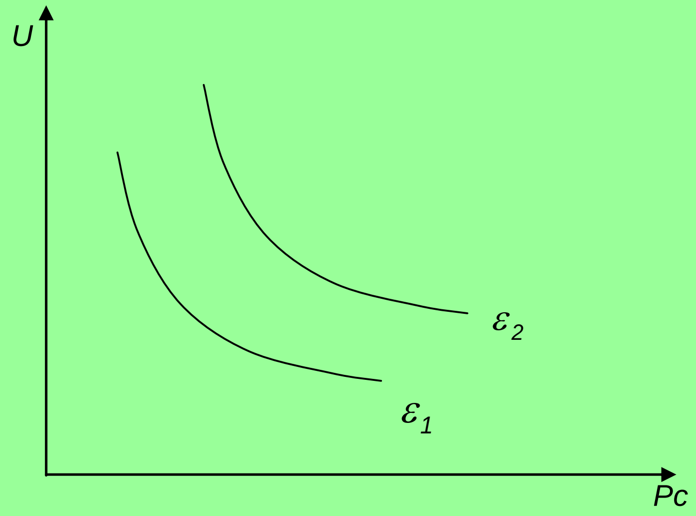
- Representar gráficamente las preferencias que tiene un consumidor frente a dos bienes según el grado de satisfacción. Cualquier punto de la curva representa la combinación de ambos productos con el mismo nivel de satisfacción. Cada combinación le resulta ***"indiferente"***.

El Reaseguro y la Solvencia

En la actividad del seguro, la ***curva de indiferencia*** relacionan las ***primas cedidas*** $\boldsymbol{P_c}$ en el reaseguro y el ***Margen de Solvencia Mínimo*** $\boldsymbol{U}$, exigible para una determinada ***Probabilidad de Ruina*** $\boldsymbol{\varepsilon}$.

$$\text{Si } \varepsilon_1 > \varepsilon_2 \Rightarrow (1 - \varepsilon_1) < (1 - \varepsilon_2)$$

A la curva más alejada del origen ε_2, le corresponde márgenes de solvencia más altos, cualquiera sea el nivel de primas cedidas. Es complejo encontrar una expresión matemática exacta.



El Reaseguro y la Solvencia

Un modelo generalizado.

Procedimiento para calcular el MSM U_R, exigible con cierto nivel de retención.

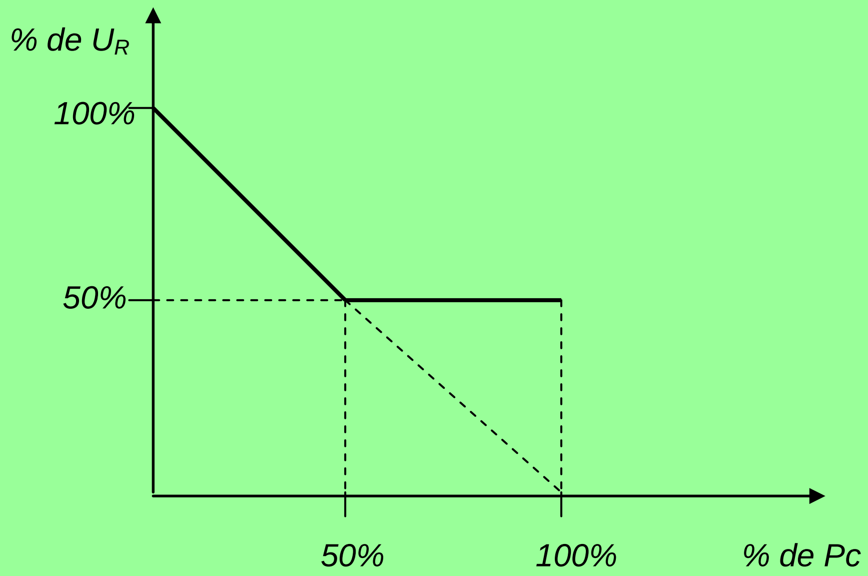
U: MSM que correspondería en ausencia del reaseguro.

P_R: Primas retenidas.

P_C: Primas cedidas.

$P = P_C + P_R$: Primas totales.

$$U_R = \frac{P_R}{P} \cdot U = \frac{P - P_C}{P} \cdot U \quad siempre\ que \quad U_R \geq 0{,}5 \cdot U$$



El Reaseguro y la Solvencia

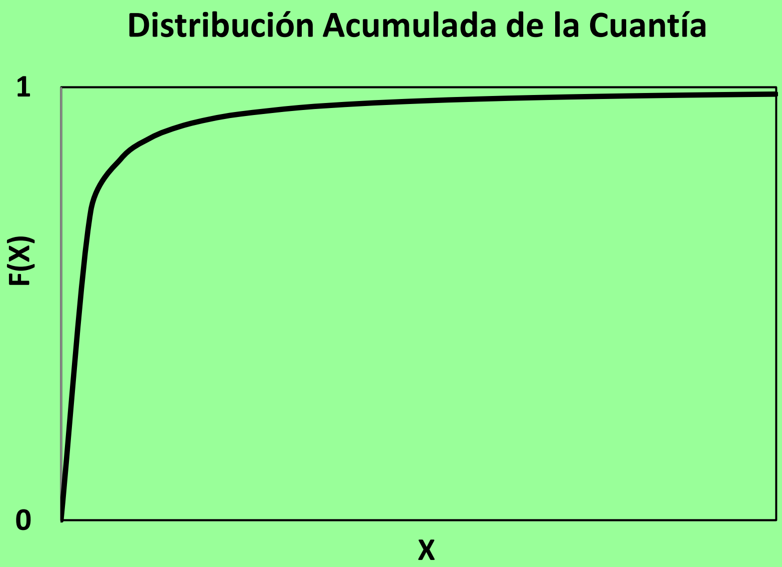
El reaseguro de Exceso de Pérdidas y el Margen de Solvencia

Construcción aproximada de la Curva de Indiferencia

Varios autores, afirman que los resultados obtenidos cuando se supone que el reaseguro es de ***Exceso de Pérdidas***, estos pueden utilizarse también en forma aproximada para los reaseguros de ***Excedentes de Sumas Aseguradas*** siempre que el Pleno de Retención no sea muy elevado.

Ejemplo: Ramo Incendio, se desea una probabilidad de insolvencia del 0,3%, y se posee un reaseguro de Exceso de Pérdida con una Prioridad M.

La distribución acumulada $F_X(x)$



El Reaseguro y la Solvencia

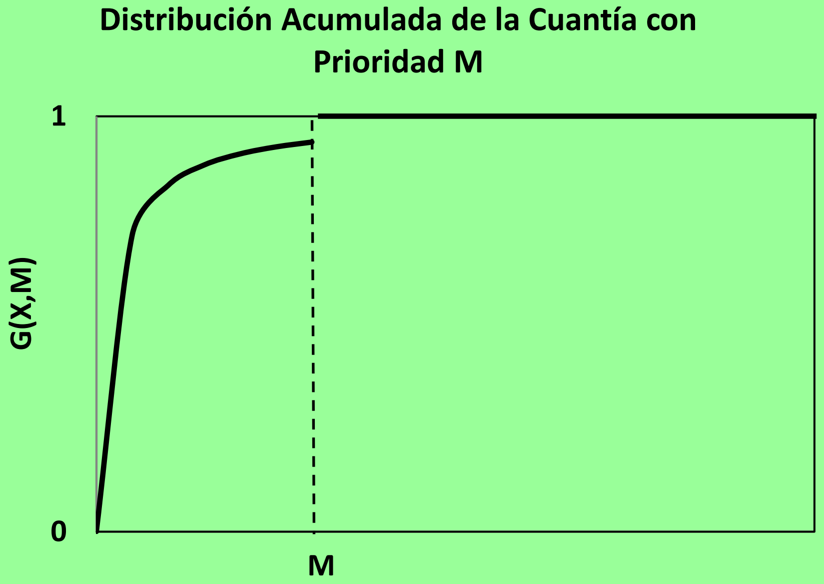
El reaseguro de Exceso de Pérdidas y el Margen de Solvencia

Construcción aproximada de la Curva de Indiferencia

Si se aplica un reaseguro con una prioridad M, la función de distribución acumulada de la ***cuantía de cada siniestro a cargo del asegurador directo*** $(0 \leq X \leq M)$, se modifica de la siguiente manera.

$$G_X(x, M) = \begin{Bmatrix} F_X(x) & si \;\; x < M \\ 1 & si \;\; x \geq M \end{Bmatrix}$$

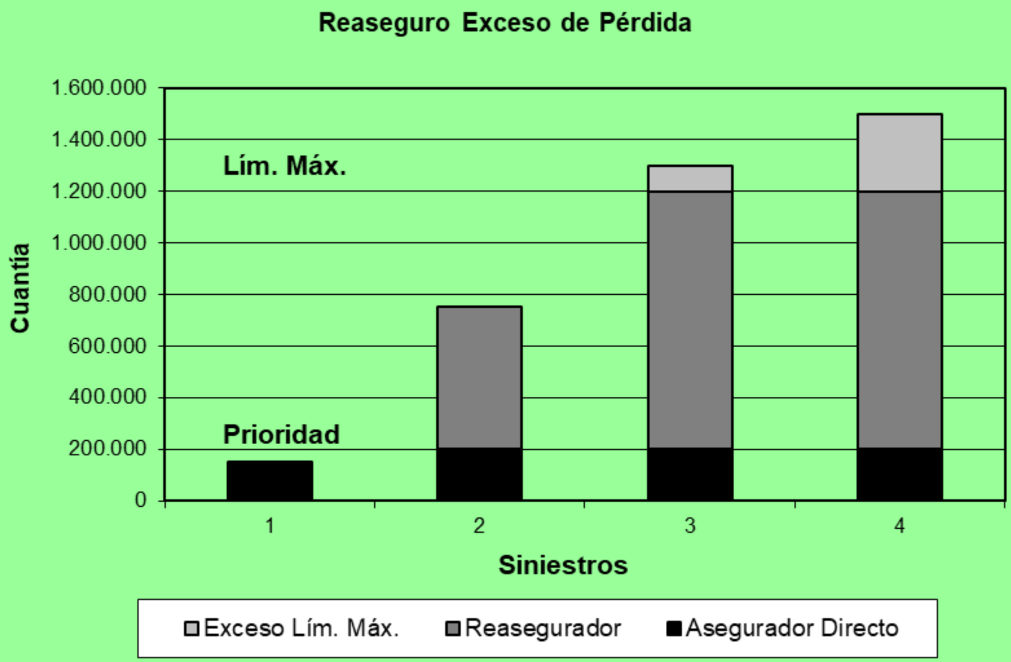
$$G_X(x, M) = P\{X \leq x / x > M\} = 1$$



El Reaseguro y la Solvencia

El reaseguro de Exceso de Pérdidas

- El reasegurador acepta pagar a la compañía cedente el monto de indemnización que exceda de un valor especificado, denominado ***"Prioridad"***.
  - Por cada siniestro, Exceso de Pérdida por Riesgo.
  - Por varios siniestros provocados por un mismo acontecimiento, Exceso de Pérdida por Acontecimiento.
- Da protección sobre la intensidad, pero **no sobre la frecuencia.**



El Reaseguro y la Solvencia

Construcción aproximada de la Curva de Indiferencia

Con la aplicación del reaseguro, la función de distribución $F_X(x)$, pasa a depender del valor de M, y por lo tanto los momentos naturales también resultan dependientes de la prioridad M.

$$\alpha_r(X,M) = \int_0^M X^r \cdot dF_X(x) + M^r \int_M^\infty dF_X(x,M)$$

Diferentes momentos $\alpha_r(X,M)$, diferentes $E(X)$ y $D(X)$, también sufrirán modificaciones los parámetros sobre Y, dado que $Y = \sum_{i=1}^{N} X_i$. Y en consecuencia modifica $F_Y(y,M)$.

La probabilidad de insolvencia.

$$P\{Y > P + U\} = \int_{P+U}^\infty dF_Y(y,M) = 0{,}003$$

Para cada nivel M, se obtendrá una $F_Y(y,M)$ con parámetros diferentes, y por consiguiente es necesario distintos valores del límite de integración $(P+U)$, y en consecuencia distintos valores de U que garanticen la probabilidad de ruina del 0,3%.

Distribución de la Frecuencia Siniestral - BN

Distribución Binomial Negativa:

- Como límite de la Distribución Polya-Eggenberger.

  Esquema de contagio. No hay independencia entre valores del número de siniestros. La Función de Polya a partir de la *"Urna de Polya".*

  $N_1 = cantidad\ bolillas\ blancas\ (A)$ $N_2 = cantidad\ bolillas\ blancas\ (\bar{A})$

  Probabilidad de que en n repeticiones del experimento se obtengan X bolillas blancas y $(n - X)$ bolillas negras, con contagio C.

$$f(X) = \binom{n}{X} \cdot \frac{\prod_{i=0}^{X-1}(N_1 + i \cdot C) \cdot \prod_{i=0}^{n-X-1}(N_2 + i \cdot C)}{\prod_{I=0}^{n-1}(N + i \cdot C)} \qquad X = 0, 1, 2, . . . , n$$

  Haciendo: $P\{A\} = \frac{N_1}{N} \rightarrow 0$ $\qquad C \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \delta = \frac{N_1}{C} \rightarrow \infty$ $\qquad n \rightarrow \infty$

$$f(X) = \binom{X + \delta - 1}{X} \cdot \left(\frac{\delta}{\lambda + \delta}\right)^{\delta} \cdot \left(\frac{\lambda}{\lambda + \delta}\right)^{X} \qquad X = 0, 1, 2, \qquad . . . . .$$

  Reemplazando: $N = X$ $\qquad p = \frac{\delta}{\lambda+\delta}$ $\qquad q = \frac{\lambda}{\lambda+\delta}$ $\qquad p + q = 1$

$$f(N) = \binom{N + \delta - 1}{N} \cdot p^{\delta} \cdot q^{N} \qquad X = 0, 1, 2, \qquad . . . . .$$

$$E(N) = \lambda \qquad\qquad V(N) = \lambda \cdot \left(1 + \frac{\lambda}{\delta}\right)$$

Distribución de la Frecuencia Siniestral - BN

Distribución Binomial Negativa:

- Significado del parámetro δ

✓ **Mide el Grado de Contagio.**

En la distribución del número de siniestros. Si δ es grande significa que el contagio es débil. En extremo, si δ tiende a infinito, el contagio desaparece y se dan las condiciones para el modelo de Poisson.

- **Mide el Grado de Heterogeneidad**

Si la cartera de riesgos tiene una estructura heterogénea, de forma tal que en estas circunstancias, la media del número de siniestros λ por póliza se comporta como una variable aleatoria a través de los distintos grupos de riesgos, δ mide el grado de esa heterogeneidad.

✓ **Mide el Grado de Variación**

Cuando la probabilidad de siniestros varía a través del tiempo (contradiciendo la exigencia de Poisson) provocando fluctuaciones en la media del número de siniestros λ, como consecuencia de factores climáticos, económicos, sociales., mide el grado de la variación.

Distribución de la Cuantía de los Siniestros

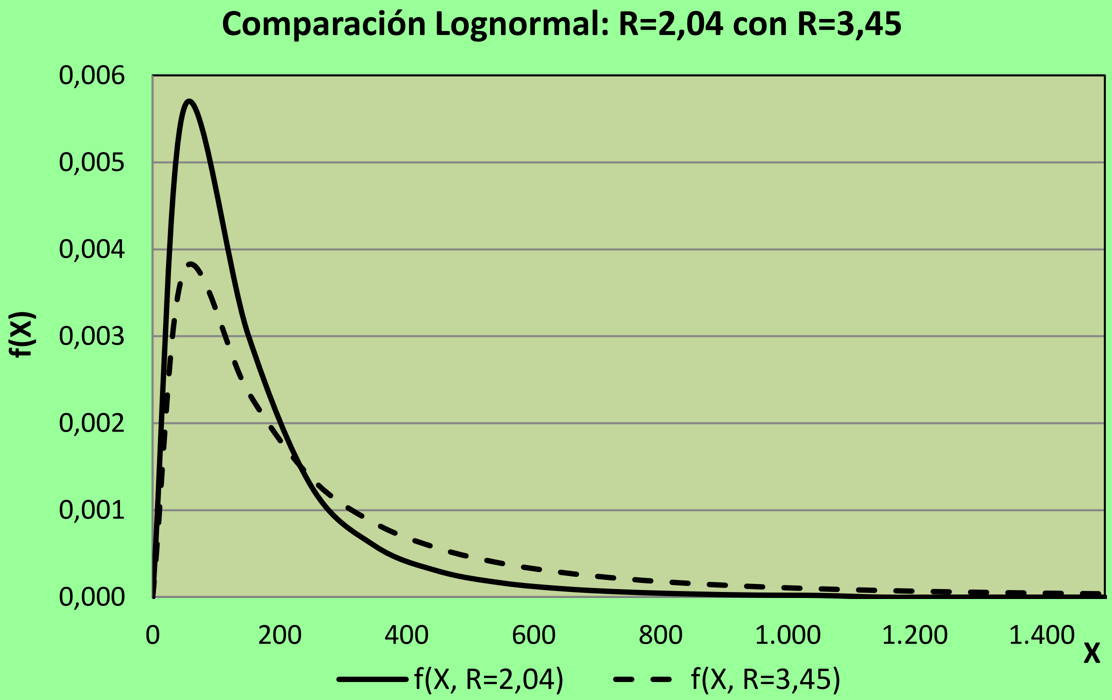
Distribuciones más utilizadas:

- Distribución Logarítmica-Normal.

Si Z es una $N(\mu,\sigma)$, mediante la transformación $X=e^{Z}$, X es una Lognormal.

$$f(X)=\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}\cdot\sigma}\cdot\frac{1}{X}\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\ln X-\mu}{\sigma}\right)^{2}} \qquad X>0$$

$$R=\frac{E(X^{2})}{[E(X)]^{2}}=e^{\sigma^{2}}$$



Métodos de Aproximación

Función Gamma Incompleta de 3 parámetros.

La Distribución acumulada de la Gamma de un parámetro.

$$P\{X \leq x\} = G_X(x) = \int_0^x f(X) \cdot dX = \int_0^x \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot X^{\alpha-1} \cdot e^{-X} \cdot dX$$

Para incorporar dos nuevos parámetros y así darle mayor capacidad para aproximarse a la distribución compuesta, se efectúa el siguiente cambio de variable, donde Y es la variable a modelar.

$$X = a + b \cdot Z \qquad dX = b \cdot Z \qquad Z = \frac{Y - E(Y)}{D(Y)}$$

$$G_Z(a + b \cdot z) = \int_0^{(a+b\cdot z)} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot (a + b \cdot Z)^{\alpha-1} \cdot e^{-(a+b\cdot Z)} \cdot b \cdot dZ$$

Resulta ser la Gamma Incompleta con 3 parámetros, dónde:

$$a = \alpha \qquad b = \sqrt{\alpha} \qquad \alpha = \frac{4}{{\gamma_3}^2} \qquad E(Z^3) = \gamma_3$$

Métodos de Aproximación

Función Gamma Incompleta de 3 parámetros.

Reemplazando los parámetros por las expresiones halladas y la variable Z, la *Distribución Acumulada Gamma Incompleta* que se utiliza como aproximación de la *Distribución Compuesta* $F_Y(y)$, resulta:

$$F_Y(y) \cong G_Y\left(\alpha + \sqrt{\alpha} \cdot \frac{y - E(Y)}{D(Y)}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{\alpha}}{\Gamma(\alpha) \cdot D(Y)} \cdot \int_0^{\left(\alpha+\sqrt{\alpha}\cdot\frac{y-E(Y)}{D(Y)}\right)} \cdot \left(\alpha + \sqrt{\alpha} \cdot \frac{y - E(Y)}{D(Y)}\right)^{\alpha-1} \cdot e^{-\left(\alpha+\sqrt{\alpha}\cdot\frac{y-E(Y)}{D(Y)}\right)} \cdot dY$$

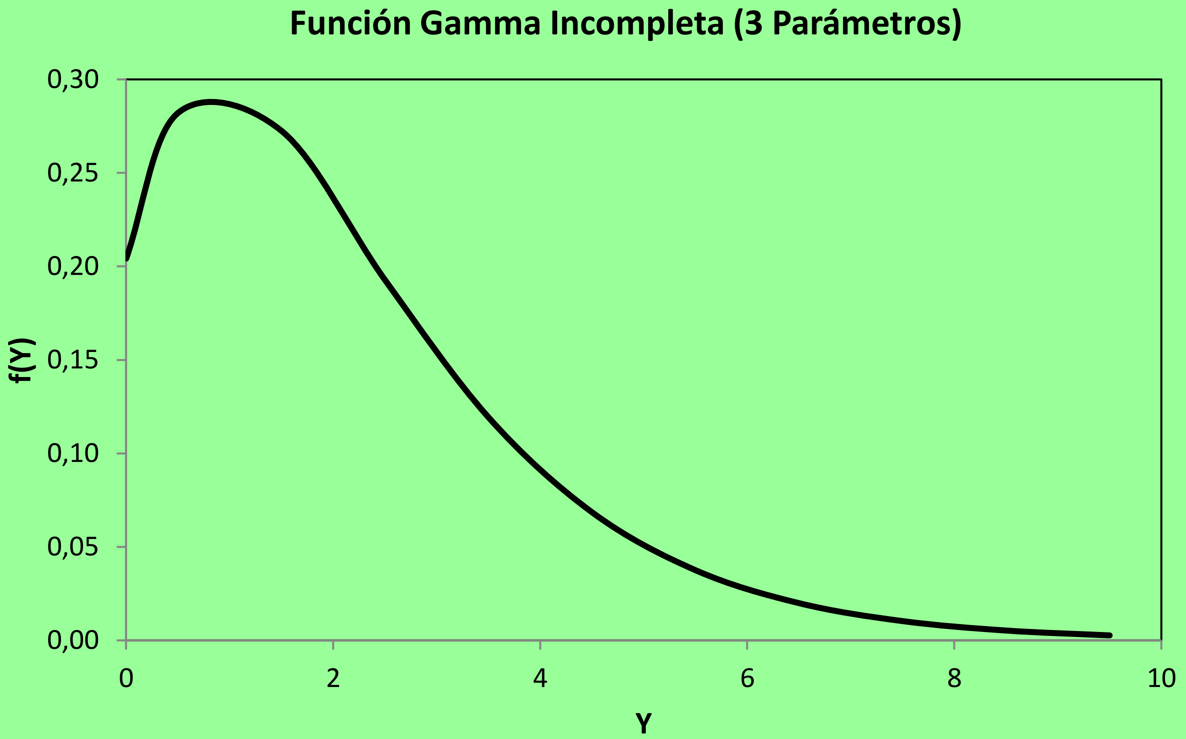
$$f(Y) \cong \frac{\sqrt{\alpha}}{\Gamma(\alpha) \cdot D(Y)} \cdot \left(\alpha + \sqrt{\alpha} \cdot \frac{y - E(Y)}{D(Y)}\right)^{\alpha-1} \cdot e^{-\left(\alpha+\sqrt{\alpha}\cdot\frac{y-E(Y)}{D(Y)}\right)}$$

Métodos de Aproximación

Función Gamma Incompleta de 3 parámetros

Ejemplo: A partir de los datos observados de una cartera, se estimaron los siguientes parámetros.

$$E(Y) = 2{,}0982 \qquad D(Y) = 1{,}8151 \qquad \gamma_3 = 1{,}3405 \qquad \alpha = 2{,}262$$



El Reaseguro y la Solvencia

Aplicación a un caso (sobre trabajos de Pentikäinen y Rantala)

A) Información del mercado

Información del mercado riesgo Incendio durante 13 años .

A.1) Frecuencia siniestral:

$$E(N) = 54.640 \qquad V(N) = 67.817.347 \qquad D(N) = 8.235$$

A.2) Parámetro de Heterogeneidad:

La ***variancia es mayor a la media***, se emplea la distribución ***Binomial Negativa***, se hace necesario estimar el *Parámetro de Heterogeneidad* del mercado.

$$\delta = \frac{[E(N)]^2}{V(N) - E(N)} = 44$$

Si δ crece la heterogeneidad de la cartera disminuye, y tiende a $V(N) = E(N)$, en este caso se usa Poisson.

El Reaseguro y la Solvencia

Aplicación a un caso

A) Información del mercado

A.3) Cuantía individual de los siniestros:

$$E(X) = \alpha_1(X) = 0{,}515$$

Los autores consideran que el *Índice de Riesgo* R en los grandes riesgos comerciales e industriales (así consideran al riesgo Incendio), se aplica el índice $R = 6$.

$$R = e^{\sigma^2} = \frac{\alpha_2(X)}{[\alpha_1(X)]^2} = 6 \quad \Rightarrow \quad \alpha_2(X) = 1{,}591$$

$$V(X) = 1{,}326 \qquad\qquad D(X) = 1{,}152$$

B) Aplicación a la aseguradora:

Cartera de Incendio de una aseguradora, cuya ***prima pura anual*** es $P = E(Y) = 50$ millones, y las distribuciones básicas de N y X bajo el supuesto de ***Binomial negativa*** y ***Log-normal***, se obtienen de la siguiente manera.

$$P = E(Y) = 50$$

El Reaseguro y la Solvencia

Aplicación a un caso

B) Aplicación a la aseguradora:

B.1) Distribución Binomial Negativa de N:

Se supone que N se distribuye según una ***Binomial Negativa***, dada su mayor generalidad y porque los datos del mercado indican que la variancia supera la media de la frecuencia siniestral.

$$f(N) = \binom{N+\delta+1}{N} \cdot \left(\frac{\delta}{\lambda+\delta}\right)^{\delta} \cdot \left(\frac{\lambda}{\lambda+\delta}\right)^{N} \qquad N = 0,1,2,3,\ldots. \qquad \lambda = E(N)$$

Tomando la estimación del mercado $E(X) = 0{,}515$ y la prima pura anual de la compañía $P = E(Y) = 50$, se tiene la media del número de siniestros anual de la compañía, aplicando la expresión obtenida de la distribución compuesta.

$$E(Y) = E(N) \cdot E(X) \quad \Rightarrow \quad E(N) = \frac{E(Y)}{E(X)} = 97$$

$$\delta = \frac{[E(N)]^2}{V(N) - E(N)} = \frac{\lambda^2}{V(N) - \lambda} \quad \Rightarrow \quad D(N) = \sqrt{\lambda + \frac{\lambda^2}{\delta}} = 17{,}6$$

Aplicación a un caso

B) Aplicación a la aseguradora:

B.1) Distribución Binomial Negativa de N:

Queda completamente especificada la ***Binomial Negativa***.

$$f(N) = \binom{N+44+1}{N} \cdot \left(\frac{44}{97+44}\right)^{44} \cdot \left(\frac{97}{\lambda+44}\right)^{N}$$

B.2) Distribución Log-Normal de X:

$$f(X) = \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}\cdot\sigma} \cdot \frac{1}{X} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{ln\,X-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

En base a la información del mercado.

$$\alpha_1(X) = E(X) = 0{,}515 \qquad \alpha_2(X) = 1{,}591 \qquad D(X) = 1{,}152 \qquad R = 6$$

El Coeficiente de Asimetría (momento reducido de orden 3) de Log-Normal.

$$\gamma_3(X) = (R+2)\cdot\sqrt{R-1} = 18$$

El Reaseguro y la Solvencia

Aplicación a un caso

B) Aplicación a la aseguradora:

B.2) Distribución Log-Normal de X:

Relación, momento reducido de orden 3, con los momentos naturales de Log-Normal.

$$\gamma_3(X) = \frac{\alpha_3(X) - 3 \cdot \alpha_1(X) \cdot \alpha_2(X) + 2 \cdot [\alpha_1(X)]^3}{[D(X)]^3}$$

$$\alpha_3(X) = 29{,}704$$

El Paso de la Normal Z a la Log-Normal X, es la transformación:

$$X = e^Z \quad \Rightarrow \quad Z = \log X$$

Se obtienen los parámetros μ y σ.

$$\mu = E(Z) = ln\,\alpha_1(X) - \frac{1}{2} \cdot ln\,R = -1{,}559 \qquad \sigma = D(Z) = \sqrt{ln\,R} = 1{,}339$$

Queda completamente especificada la ***Log-Norma***.

$$f(X) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot 1{,}339} \cdot \frac{1}{X} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left[\frac{ln\,X - (-1{,}559)}{1{,}339}\right]^2}$$

Aplicación a un caso

B) Aplicación a la aseguradora:

B.3) Distribución de Y. Aproximación Gamma Incompleta:

$$F_Y(y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot \int_0^{\alpha+\sqrt{\alpha}\cdot\frac{y-E(Y)}{D(Y)}} e^{-Y} \cdot Y^{\alpha-1} \cdot dY$$

$$f(Y) = \frac{\sqrt{\alpha}}{\Gamma(\alpha) \cdot D(Y)} \cdot e^{-\left[\alpha+\sqrt{\alpha}\cdot\frac{y-E(Y)}{D(Y)}\right]} \cdot \left[\alpha + \sqrt{\alpha} \cdot \frac{y-E(Y)}{D(Y)}\right]^{\alpha-1}$$

$$P = E(Y) = 50 \qquad V(Y) = P^2 \cdot \left[\frac{R}{E(N)} + \frac{1}{\delta}\right] = E(N) \cdot V(X) + V(N) \cdot [E(X)]^2$$

$$\gamma_3(Y) = \frac{1}{[D(Y)]^3} \cdot \left[E(N) \cdot \alpha_3(X) + \frac{3 \cdot E(N) \cdot \alpha_2(X) \cdot P}{\delta} + 2 \cdot \frac{P^3}{\delta^2}\right]$$

$$\alpha = \frac{4}{[\gamma_3(Y)]^2}$$

Queda completamente especificada la ***Aproximación Gamma Incompleta***.

El Reaseguro y la Solvencia

Aplicación a un caso

B) Aplicación a la aseguradora:

B.4) Cálculo de los parámetros para cada valor de *M*:

$$\alpha_r(X,M) = \int_0^M X^r \cdot dF_X(x,M) + M^r \int_M^\infty dF_X(x,M)$$

Para una prioridad $M = 0{,}25$.

$$\alpha_1(X;0{,}25) = 0{,}170 \qquad \alpha_2(X;0{,}25) = 0{,}037 \qquad \alpha_3(X;0{,}25) = 0{,}008$$

$$E(N) = 97 \qquad \delta = 44 \qquad R(0{,}25) = \frac{\alpha_2(X;0{,}25)}{[\alpha_1(X;0{,}25)]^2} = 1{,}28$$

$$P(0{,}25) = E(Y;0{,}25) = E(N) \cdot E(X;0{,}25) = 16{,}49$$

$$V(Y;0{,}25) = P(0{,}25)^2 \cdot \left[\frac{R(0{,}25)}{E(N)} + \frac{1}{\delta}\right] = 9{,}768 \qquad D(Y;0{,}25) = 3{,}125$$

$$\gamma_3(Y;0{,}25) = 0{,}3097 \qquad \alpha(0{,}25) = \frac{4}{[\gamma_3(Y;0.25)]^2} = 41{,}8$$

Aplicación a un caso

B) Aplicación a la aseguradora:

B.4) Cálculo de los parámetros para cada valor de *M*:

Para distintos valores de M.

M	$\alpha_1(X)$	$\alpha_2(X)$	$\alpha_3(X)$	P=E(Y)	D(Y)	$\gamma_3(Y)$	α
0,25	0,170	0,037	0,008	16,490	3,125	0,309	41,8
0,50	0,256	0,098	0,043	24,854	4,853	0,316	39,9
1,00	0,348	0,225	0,186	33,786	6,913	0,328	37,3
2,00	0,419	0,437	0,472	40,680	8,946	0,325	37,7
5,00	0,483	0,829	2,591	46,893	11,422	0,413	23,4
10,00	0,504	1,129	5,815	48,932	12,807	0,500	16,0
20,00	0,515	1,502	13,581	50,000	14,235	0,674	8,8

B.5) Cálculo del MSM U, para cada valor de M.

$$P\{Y > P + U\} = \int_{P+U}^{\infty} f(Y) \cdot dY = 1 - \int_{0}^{P+U} f(Y) \cdot dY = 0{,}003$$

$$\int_{0}^{P+U} f(Y) \cdot dY = 0{,}997$$

El Reaseguro y la Solvencia

Aplicación a un caso

B) Aplicación a la aseguradora:

B.5) Cálculo del MSM U, para cada valor de M.

Para M=0,25, aplicando la ***Transformación Wilson Hilferty*** a partir de la ***Normal Estándar*** se aproxima una variable ***Gamma Estándar*** .

$$t_{0,997} = \frac{\left[Z_{0,997} + \frac{6}{\gamma_3(Y;0,25)} - \frac{\gamma_3(Y;0,25)}{6}\right]^3}{27 \cdot \frac{4}{[\gamma_3(Y;0,25)]^2}} - \frac{2}{\gamma_3(Y;0,25)} = 3,091$$

$$Y_{0,997} = t_{0,997} \cdot D(Y;0,25) + E(Y;0,25) = 26,149$$

$$Y_{0,997} = P(0,25) + U(0,25) = 16,49 + U(0,25) = 26,149 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{U(0,25) = 9,659}$$

Aplicación a un caso

B) Aplicación a la aseguradora:

B.5) Cálculo del MSM, $\boldsymbol{U}$, para cada valor de $\boldsymbol{M}$.

% del Margen de Solvencia: $[U(M)/U(20)] \cdot 100$

% Prima Retenida: $[P(M)/P(20)] \cdot 100$

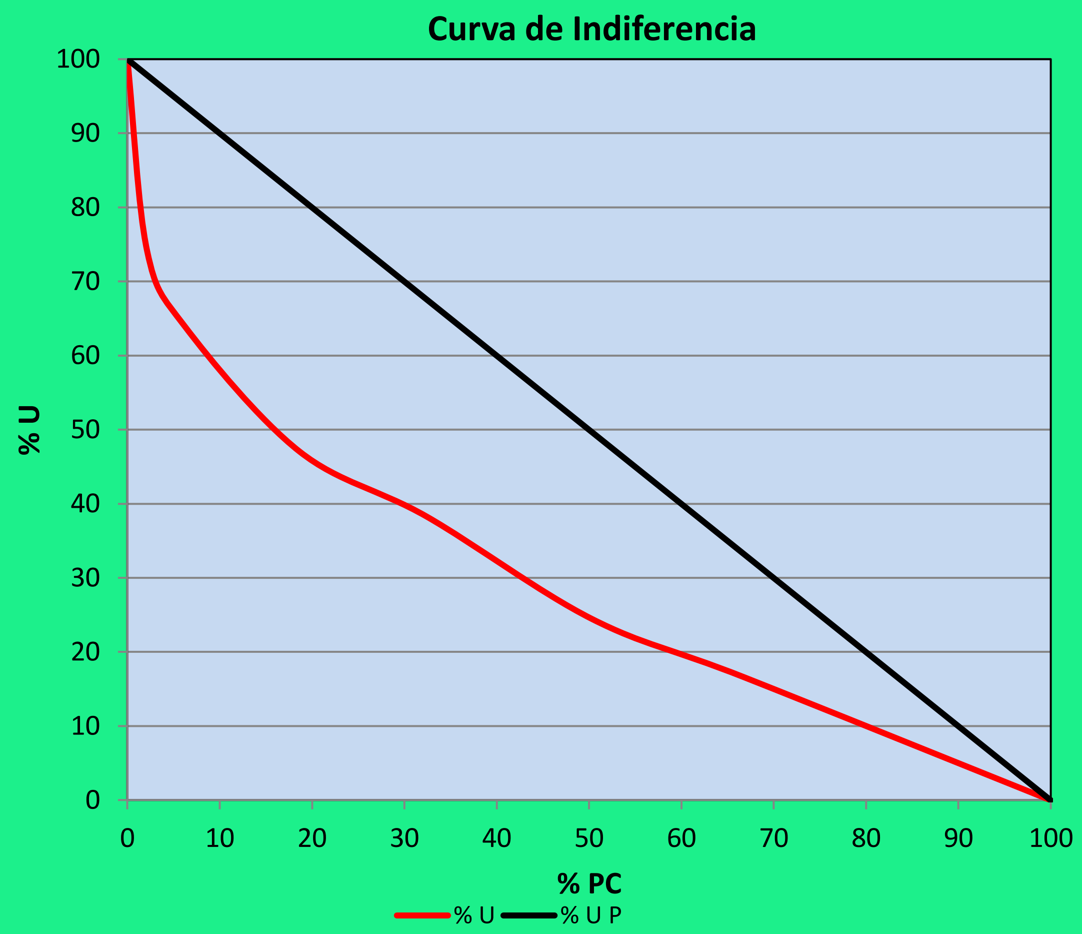
% Prima Cedida: $100 -$ (% Prima Retenida)

M	U	%del Margen de Solvencia	P=E(Y)	% Prima Retenida	% Prima Cedida
0,25	9,6	17	16,490	33	67
0,50	14,2	24	24,854	50	50
1,00	22,2	38	33,786	68	32
2,00	27,3	47	40,680	81	19
5,00	37,1	64	46,893	94	6
10,00	43,0	74	48,932	98	2
20,00	58,0	100	50,000	100	0

El Reaseguro y la Solvencia

Aplicación a un caso

Curva de Indiferencia:



Sección 3

La Solvencia en períodos plurianuales

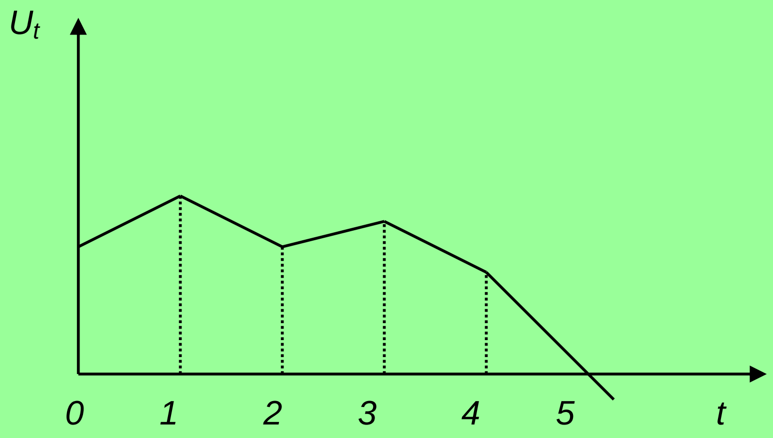
Solvencia en períodos plurianuales

Partiendo de un margen de solvencia inicial U_0 durante el primer año (ejercicio contable) se obtienen ingresos (primas) P_1 y ocurren egresos (siniestros) Y_1. Determinan un margen de solvencia U_1 al final del primer año.

$$U_1 = U_0 + P_1 - Y_1$$

Así sucesivamente se llega hasta un margen de solvencia U_t al final del año t.

$$U_t = U_{t-1} + P_t - Y_t$$



Cuando la gráfica cruza el eje de las abscisas, se produce ***ruina técnica o insolvencia***.

$$U_t < 0 \quad \Rightarrow \quad Y_t > U_{t-1} + P_t$$

Solvencia en períodos plurianuales

Un modelo plurianual de la Solvencia

Elementos del modelo:

- ***Recargo de Seguridad*** $\boldsymbol{\rho}$ (sobre las primas puras)

- ***Tasa de rendimiento*** $\boldsymbol{i}$ de las inversiones realizadas con las reservas técnicas y el margen de solvencia, considerado ***constante*** en el tiempo.

$$r_i = (1 + i)$$

- El *crecimiento natural de la cartera* provoca un aumento de la media del número de siniestros. Se supone que la ***tasa anual de crecimiento de la media del número de siniestros*** $\boldsymbol{r_N}$ es ***constante*** en el tiempo.

$$E_t(N) = r_N^{t-1} \cdot E_1(N)$$

- El *índice de inflación* que afecta el costo de los siniestros pagados, afectando la media de la cuantía individual. Se supone que el ***tasa anual de crecimiento de la media de la cuantía*** $\boldsymbol{r_X}$ es ***constante*** en el tiempo.

$$E_t(X) = r_X^{t-1} \cdot E_1(X)$$

- Las primas pueden presentar un ***desfase de adaptación de d años*** con respecto a la inflación.

$$P_t = \frac{E_t(Y)}{r_X^d}$$

- Las ***reservas técnicas*** en un período es equivalen a *k* veces la prima.

$$RT_t = k \cdot P_t.$$

Solvencia en períodos plurianuales

Modelo plurianual de la Solvencia

Del modelo básico al modelo propuesto:

$$U_t = U_{t-1} + P_t - Y_t$$

Se incorpora las reservas técnicas.

$$U_t = U_{t-1} + P_t + RT_t - Y_t$$

El Margen de Solvencia al final del período t.

$$U_t = U_{t-1} \cdot r_i + P_t \cdot (1 + \rho) + k \cdot P_{t-1} \cdot i - Y_t$$

$U_{t-1} \cdot r_i = U_{t-1} \cdot (1 + i)$: MS del período $(t - 1)$ capitalizado anualmente.

$P_t \cdot (1 + \rho)$: Prima recargada del periodo t.

$(k \cdot P_{t-1} \cdot i)$: Rendimiento de las inversiones de la reserva técnicas

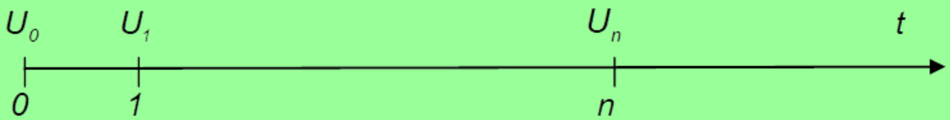
Y_t: Cuantía de los siniestros del período t.

Solvencia en períodos plurianuales

Modelo plurianual de la Solvencia

A) Cálculo de $\boldsymbol{U_n}$

Cálculo del margen de solvencia después de n períodos transcurridos.



En el modelo básico más reservas técnicas

$$U_n = U_0 + (1+\rho)\cdot\sum_{t=1}^{n} P_t + \sum_{t=1}^{n} RT_t - \sum_{t=1}^{n} Y_t$$

Teniendo en cuenta la capitalización de sus componentes.

$$U_n = U_0 \cdot r_i^n + (1+\rho)\cdot\sum_{t=1}^{n} P_t \cdot r_i^{n-t} + k\cdot i\cdot\sum_{t=1}^{n} P_{t-1}\cdot r_i^{n-t} - \sum_{t=1}^{n} Y_t \cdot r_i^{n-t}$$

Solvencia en períodos plurianuales

Modelo plurianual de la Solvencia

A) Cálculo de $\boldsymbol{U_n}$

En el momento inicial 0: $P_0 = Y_0 = 0$. Además se definió:

$$P_t = \frac{E_t(Y)}{r_X^d} \qquad E_t(N) = r_N^{t-1} \cdot E_1(N) \qquad E_t(X) = r_X^{t-1} \cdot E_1(X)$$

$$P_t = \frac{E_t(Y)}{r_X^d} = \frac{E_t(N) \cdot E_t(X)}{r_X^d} = E_1(N) \cdot E_1(X) \cdot \frac{r_N^{t-1} \cdot r_X^{t-1}}{r_X^d}$$

Reemplazando en U_n y operando:

$$U_n = U_0 \cdot r_i^n + \left(1 + \rho + \frac{i \cdot k}{r_N \cdot r_X}\right) \cdot \frac{E_1(N) \cdot E_1(X)}{r_X^d} \cdot \frac{(r_N \cdot r_X)^n - r_i^n}{r_N \cdot r_X - r_i} - \sum_{t=1}^{n} Y_t \cdot r_i^{n-t}$$

El comportamiento aleatorio de U_n ***depende exclusivamente de la variable aleatoria*** Y_t.

Solvencia en períodos plurianuales

Modelo plurianual de la Solvencia

B) Parámetros de Y_t

En la distribución compuesta:

$$E(Y) = E(N) \cdot E(X) \qquad D(Y) = E(Y) \cdot \sqrt{\left[\frac{R}{E(N)} + \frac{1}{\delta}\right]}$$

$$V(Y) = E(N) \cdot V(X) + V(N) \cdot [E(X)]^2 = [E(Y)]^2 \cdot \left[\frac{R}{E(N)} + \frac{1}{\delta}\right]$$

$$\gamma_3(Y) = \frac{1}{[D(Y)]^3} \cdot \{E(N) \cdot \alpha_3(X)\} + \frac{3 \cdot [E(N)]^2 \cdot E(X) \cdot \alpha_2(X)}{\delta} + \frac{2 \cdot [E(N) \cdot E(X)]^3}{\delta^2}$$

Dónde R es el Índice de Riesgo (Log-normal) y δ el parámetro de la Binomial Negativa

$$\boldsymbol{E(Y_t) = E_1(N) \cdot E_1(X) \cdot (r_N \cdot r_X)^{t-1}}$$

$$\boldsymbol{V(Y_t) = [E(Y_t)]^2 \cdot \left[\frac{1}{E_t(N)} + \frac{1}{\delta}\right] \qquad D(Y_t) = E(Y_t) \cdot \sqrt{\frac{1}{E_t(N)} + \frac{1}{\delta}}}$$

$$\boldsymbol{\gamma_3(Y_t) = \frac{[E(Y_t)]^3}{[D(Y_t)]^3} \cdot \left\{\frac{\alpha_{3,t}(X)}{[E_t(N)]^2 \cdot [E_t(X)]^3} + \frac{3 \cdot \alpha_{2,t}(X)}{\delta \cdot E_t(N) \cdot [E_t(X)]^2}\right\} + \frac{2}{\delta^2}}$$

Solvencia en períodos plurianuales

Modelo plurianual de la Solvencia

C) Parámetros de U_n

Y_t es el único elemento aleatorio de U_n, igual distribución, con los sig. parámetros:

$$U_n = U_0 \cdot r_i^n + \left(1 + \rho + \frac{i \cdot k}{r_N \cdot r_X}\right) \cdot \frac{E_t(N) \cdot E_t(X)}{r_X^d} \cdot \frac{(r_N \cdot r_X)^n - r_i^n}{r_N \cdot r_X - r_i} - \sum_{t=1}^{n} Y_t \cdot r_i^{n-t}$$

$$E(U_n) = U_0 \cdot r_i^n + \left(1 + \rho + \frac{i \cdot k}{r_N \cdot r_X}\right) \cdot \frac{E_t(N) \cdot E_t(X)}{r_X^d} \cdot \frac{(r_N \cdot r_X)^n - r_i^n}{r_N \cdot r_X - r_i} - \sum_{t=1}^{n} E(Y_t) \cdot r_i^{n-t}$$

Como $E(Y_t) = E_1(N) \cdot E_1(X) \cdot (r_N \cdot r_X)^{t-1}$ y $\sum_{t=1}^{n} (r_N \cdot r_X)^{t-1} \cdot r_i^{n-t} = \frac{(r_N \cdot r_X)^n - r_i^n}{r_N \cdot r_X - r_i}$

$$\boldsymbol{E(U_n) = U_0 \cdot r_i^n + \left(1 + \rho + \frac{i \cdot k}{r_N \cdot r_X} - r_X^d\right) \cdot \frac{E_1(N) \cdot E_1(X)}{r_X^d} \cdot \frac{(r_N \cdot r_X)^n - r_i^n}{r_N \cdot r_X - r_i}}$$

$$\boldsymbol{V(U_n) = \sum_{t=1}^{n} V(Y_t) \cdot r^{2\cdot(n-t)} = \sum_{t=1}^{n} [E(Y_t)]^2 \cdot \left[\frac{1}{E_t(N)} + \frac{1}{\delta}\right] \cdot r^{2\cdot(n-t)}}$$

$$\boldsymbol{\gamma_3(U_n) = \frac{\sum_{t=1}^{n} [E(Y_t)]^3 \cdot \left\{\frac{\alpha_{3,t}(X)}{[E_t(N)]^2 \cdot [E_t(X)]^3} + \frac{3 \cdot \alpha_{2,t}(X)}{\delta \cdot E_t(N) \cdot [E_t(X)]^2} + \frac{2}{\delta^2}\right\} \cdot r_i^{3\cdot(n-t)}}{\left[D\left(\sum_{t=1}^{n} Y_t \cdot r_i^{(n-t)}\right)\right]^3}}$$

Solvencia en períodos plurianuales

Modelo plurianual de la Solvencia

D) Proceso aleatorio de $\boldsymbol{U_t}$

Función de distribución de U_t, aplicable a cualquier período t, y no sólo al último, ***por eso se reemplazó n por t.*** La probabilidad de insolvencia en el período t.

$$F_{U_t}(u) = P\{U_t \leq u\} \qquad\qquad F_{U_t}(0) = P\{U_t \leq 0\}$$

El interés es conocer la ***Probabilidad de Ruina o Insolvencia $\boldsymbol{\varepsilon_n}$*** en ***todo el trayecto de $\boldsymbol{0}$ a $\boldsymbol{n}$***, ***no en un año en particular***, es decir que $U_t \leq 0$ para cualquier valor de $1 \leq t \leq n$.

En lugar del cálculo exacto de ε_n se determinan límites aproximados.

El trayecto aleatorio de U_t, puede cruzar el eje de abscisas (lo que significa insolvencia) en algún momento t, y ***permanecer en valores negativos durante el resto del trayecto, o bien recuperarse, y en ese caso no puede descartarse un nuevo paso a la insolvencia***, ***y así repetirse en varias ocasiones.***

La sumatoria $\sum_{t=1}^{n} F_{U_t}(0)$ contempla los diferentes trayectos de U_t, que llevan a la insolvencia una o más veces en $1 \leq t \leq n$, Entonces.

$$\boldsymbol{\varepsilon_n \leq \sum_{t=1}^{n} P\{U_t \leq 0\} = \sum_{t=1}^{n} F_{U_t}(0)}$$

Solvencia en períodos plurianuales

Modelo plurianual de la Solvencia

D) Proceso aleatorio de $\boldsymbol{U_t}$

Así, se tiene un *límite superior para* ε_n dado que esta suma las probabilidades de insolvencia en todos los períodos del trayecto $1 \leq t \leq n$.

Como límite inferior se toma el ***mayor valor de*** $\boldsymbol{F_{U_t}(0)}$ para todo $1 \leq t \leq n$. Vale decir, la mayor probabilidad de ***insolvencia individualmente***.

$$\max_{1 \leq t \leq n} F_{U_t}(0) \leq \varepsilon_n \leq \sum_{t=1}^{n} P\{U_t \leq 0\} = \sum_{t=1}^{n} F_{U_t}(0)$$

Solvencia en períodos plurianuales

Modelo plurianual de la Solvencia

E) Cálculo de $\boldsymbol{F_{U_t}(0)}$

$$U_n = U_0 \cdot r_i^n + \left(1 + \rho + \frac{k \cdot i}{r_N \cdot r_X}\right) \cdot \frac{E_1(N) \cdot E_1(X)}{r_X^d} \cdot \frac{(r_N \cdot r_X)^n - r_i^n}{r_N \cdot r_X - r_i} - \sum_{t=1}^{n} Y_t \cdot r_i^{n-t}$$

Para expresar U_t, el valor del margen de solvencia después de transcurridos un número genérico de t períodos, se reemplaza n por t para evitar duplicación y en la sumatoria se utiliza el subíndice j.

$$U_t = U_0 \cdot r_i^t + \left(1 + \rho + \frac{k \cdot i}{r_N \cdot r_X}\right) \cdot \frac{E_1(N) \cdot E_1(X)}{r_X^d} \cdot \frac{(r_N \cdot r_X)^t - r_i^t}{r_N \cdot r_X - r_i} - \sum_{j=1}^{t} Y_j \cdot r_j^{t-j}$$

Operando se tiene.

$$F_{U_t}(0) = P\{U_t < 0\} = 1 - P\{U_t \geq 0\}$$

$$F_{U_t}(0) = 1 - P\left\{\sum_{j=1}^{t} Y_j \cdot r_i^{t-j} \leq \left[U_0 \cdot r_i^t + \left(1 + \rho + \frac{k \cdot i}{r_N \cdot r_X}\right) \cdot P_1 \cdot \frac{(r_N \cdot r_X)^t - r_i^t}{r_N \cdot r_X - r_i}\right]\right\}$$

Se estudia la variable aleatoria.

$$\left(\sum_{j=1}^{t} Y_j \cdot r_i^{t-j}\right)$$

Solvencia en períodos plurianuales

Modelo plurianual de la Solvencia

E) Cálculo de $F_{U_t}(0)$

$$E\left(\sum_{j=1}^{t} Y_j \cdot r_i^{t-j}\right) = \frac{(r_N \cdot r_X)^t - r_i^t}{r_N \cdot r_X - r_i} \cdot E_1(N) \cdot E_1(X)$$

$$D\left(\sum_{j=1}^{t} Y_J \cdot r_i^{t-j}\right) = \sqrt{\sum_{j=1}^{t} \left[E\left(Y_j\right)\right]^2 \cdot \left[\frac{R}{E_j(N)} + \frac{1}{\delta}\right] \cdot r_i^{2\cdot(t-j)}}$$

$$Y_t^* = \frac{\left(\sum_{j=1}^{t} Y_J \cdot r_i^{t-j}\right) - E\left(\sum_{j=1}^{t} Y_j \cdot r_i^{t-j}\right)}{D\left(\sum_{j=1}^{t} Y_J \cdot r_i^{t-j}\right)}$$

Estandarizando ambos miembros de la desigualdad en la probabilidad de $F_{U_t}(0)$.

$$F_{U_t}(0) = 1 - P\left\{Y_t^* \leq \frac{1}{D\left(\sum_{j=1}^{t} Y_J \cdot r_i^{t-j}\right)} \cdot \left[U_0 \cdot r_i^t + \left(1 + \rho + \frac{k \cdot i}{r_N \cdot r_X} - r_X^d\right) \cdot P_1 \cdot \frac{(r_N \cdot r_X)^t - r_i^t}{r_N \cdot r_X - r_i}\right]\right\}$$

Reemplazando por $E(U_t)$ y $D(U_t)$ (a partir de la media y el desvío de U_n)

Solvencia en períodos plurianuales

Modelo plurianual de la Solvencia

E) Cálculo de $\boldsymbol{F_{U_t}(0)}$

$$F_{U_t}(0) = P\{U_t \leq 0\} = 1 - P\left\{Y_t^* \leq y_t^* = \frac{E(U_t)}{D(U_t)}\right\}$$

A la variable aleatoria estandarizada Y_t^* se aproxima su distribución mediante el ***método Normal Power***.

Sea la variable Z con distribución *Normal (0,1)*, se igualan las probabilidades.

$$P\left\{Y_t^* \leq y_t^* = \frac{E(U_t)}{D(U_t)}\right\} = P\{Z \leq z_t\}$$

Se utiliza la Aproximación *N-P* encontrada para pasar de una distribución *Normal (0,1)* a una asimétrica.

$$y_t^* \cong z_t + \frac{\gamma_{3(Y_t)}}{6} \cdot (z_t^2 - 1)$$

Se recorre el camino inverso a lo que se hace corrientemente, a partir de un valor de Y_t^*, se determina el correspondiente valor de Z, que iguala las probabilidades consignadas.

$$z_t = -\frac{3}{\gamma_{3(Y_t)}} + \sqrt{1 + \frac{9}{[\gamma_3(Y_t)]^2} + \frac{6}{\gamma_{3(Y_t)}} \cdot y_t^*}$$

Solvencia en períodos plurianuales

Modelo plurianual de la Solvencia

E) Cálculo de $\boldsymbol{F_{U_t}(0)}$

Conocida z_t, se calcula $P\{Z \leq z_t\}$, y en consecuencia se determina $F_{U_t}(0) = P\{U_t \leq 0\}$.

$$F_{U_t}(0) = P\{U_t \leq 0\} = 1 - P\left\{Y_t^* \leq y_t^* = \frac{E(U_t)}{D(U_t)}\right\} = 1 - P\{Z \leq z_t\}$$

Calcular las probabilidades de insolvencia $F_{U_t}(0) = P\{U_t \leq 0\}$ para los distintos períodos de $1 \leq t \leq n$. Así acotar la probabilidad de insolvencia en el intervalo de n períodos.

$$\boldsymbol{\max_{1 \leq t \leq n} F_{U_t}(0) \leq \varepsilon_n \leq \sum_{t=1}^{n} F_{U_t}(0)}$$

Solvencia en períodos plurianuales

Aplicación a un caso

A) Hipótesis de trabajo

- *Factor de capitalización* de las inversiones a una tasa anual del 7%. Constante para todos los períodos.

$$r_i = (1 + i) = 1{,}07$$

- *Tasa de crecimiento* anual de la cartera del 10%, que se traslada al crecimiento anual del número medio de siniestros. Constante para todos los períodos.

$$r_N = 1{,}10 \qquad E_t(N) = r_N \cdot E_{t-1}(N) = r_N^{t-1} \cdot E_1(N)$$

- *Tasa de inflación* anual del 8%, que se traslada al costo medio de la cuantía de los siniestros. Constante para todos los períodos.

$$r_X = 1{,}08 \qquad E_t(X) = r_X \cdot E_{t-1}(X) = r_X^{t-1} \cdot E_1(X)$$

$$\alpha_{2,t}(X) = E_t(X^2) = r_X^{t-1} \cdot E_1(X^2) \qquad \alpha_{3,t}(X) = E_t(X^3) = r_X^{t-1} \cdot E_1(X^3)$$

- Recargo de seguridad de la prima pura.

$$\rho = 0{,}05 \qquad PR_t = P_t \cdot (1 - \rho) = P_t \cdot 1.05$$

Solvencia en períodos plurianuales

Aplicación a un caso

A) Hipótesis de trabajo

- Desfasaje temporal de las primas respecto de la inflación.

$$d = 2\ años \qquad\qquad P_t = \frac{E_t(Y)}{r_X^d} = \frac{E_t(Y)}{r_X^2}$$

- Relación, reservas técnicas – primas.

$$k = 1{,}5 \qquad\qquad RT_t = 1{,}5 \cdot P_t$$

- Margen de solvencia al inicio del período.

$$U_0 = 1.000\ millones$$

- Cantidad de años del período plurianual en estudio.

$$n = 5$$

Solvencia en períodos plurianuales

Aplicación a un caso

A) Hipótesis de trabajo

B) Información de la aseguradora al final del primer periodo *(en millones)*

$$E_1(N) = 17.796 \qquad V_1(N) = 6.402.829$$

$$E_1(X) = 0{,}039 \qquad \alpha_{2,1}(X) = E_1(X^2) = 0{,}061 \qquad \alpha_{3,1}(X) = E_1(X^3) = 1{,}106$$

$$E(Y_1) = E_1(N) \cdot E_1(X) = 694{,}944$$

$$P_1 = 600$$

Si la prima pura sufre un desfasaje de dos años con una tasa de inflación del 8%, la siniestralidad media anual esperada en el primer periodo, resulta.

$$P_t = \frac{E(Y_t)}{r_X^2} \quad \Rightarrow \quad P_1 = \frac{E(Y_1)}{r_X^2} \quad \Rightarrow \quad P_1 \cdot r_X^2 = E(Y_1)$$

$$E(Y_1) = 600 \cdot (1{,}08)^2 = 699{,}84$$

Similar a la resultante de $\boldsymbol{E(Y_1) = E_1(N) \cdot E_1(X)}$.

Solvencia en períodos plurianuales

Aplicación a un caso

C) Cálculo del Índice de Riesgo R y el parámetro δ

$$R = \frac{\alpha_2(X)}{[E(X)]^2} = 40{,}1 \qquad \delta = \frac{[E(N)]^2}{V(N) - E(N)} = 49{,}6$$

D) Cálculo de $E_t(N)$, $E_t(X)$ y momentos de X.

$$E_t(N) = r_N^{t-1} \cdot E_1(N) \qquad E_t(X) = r_X^{t-1} \cdot E_1(X)$$

$$\alpha_{2,t}(X) = E_t(X^2) = r_X^{t-1} \cdot E_1(X^2) \qquad \alpha_{3,t}(X) = E_t(X^3) = r_X^{t-1} \cdot E_1(X^3)$$

t	$E_t(N)$	$E_t(X)$	$\alpha_{2,t}(X)$	$\alpha_{3,t}(X)$
1	17.796	0,0390	0,0610	1,1060
2	19.576	0,0421	0,0659	1,1945
3	21.533	0,0455	0,0712	1,2900
4	23.686	0,0491	0,0768	1,3932
5	26.055	0,0531	0,0830	1,5047

Solvencia en períodos plurianuales

Aplicación a un caso

E) Cálculo de los Parámetros de Y_t

$$E(Y_t) = E_1(N) \cdot E_1(X) \cdot (r_N \cdot r_X)^{t-1}$$

$$V(Y_t) = E_t(N) \cdot \alpha_{2,t}(X) + \frac{[E_t(N)]^2 \cdot [E_t(X)]^2}{\delta} \qquad D(Y_t) = \sqrt{V(Y_t)}$$

$$\gamma_3(Y_t) = \frac{[E(Y_t)]^3}{[D(Y_t)]^3} \cdot \left\{ \frac{\alpha_{3,t}(X)}{[E_t(N)]^2 \cdot [E_t(X)]^3} + \frac{3 \cdot \alpha_{2,t}(X)}{\delta \cdot E_t(N) \cdot [E_t(X)]^2} + \frac{2}{\delta^2} \right\}$$

t	$E(Y_t)$	$D(Y_t)$	$\gamma_3(Y_t)$
1	694,0440	103,9095	0,3004
2	824,5243	122,4586	0,2959
3	979,5348	144,4874	0,2926
4	1163,6874	170,6514	0,2902
5	1382,4606	201,7288	0,2885

Solvencia en períodos plurianuales

Aplicación a un caso

F) Cálculo de la Parámetros de U_t

$$E(U_t) = U_0 \cdot r_i^t + \left(1 + \delta + \frac{i \cdot k}{r_N \cdot r_X} - r_X^d\right) \cdot P_1 \cdot \frac{(r_N \cdot r_X)^t - r_i^t}{r_N \cdot r_X \cdot r_x - r_i}$$

$$D(U_t) = \sqrt{\sum_{j=1}^{t} \left[E\left(Y_j\right)\right]^2 \cdot \left[\frac{R}{E_j(N)} + \frac{1}{\delta}\right] \cdot r_i^{2\cdot(t-j)}}$$

t \ j	1	2	3	4	5	D(Ut)
1	10.797,19					103,91
2	12.361,70	15.099,27				165,71
3	14.152,91	17.287,15	21.131,56			229,29
4	16.203,67	19.792,06	24.193,52	29.594,62		299,64
5	18.551,58	22.659,93	27.699,16	33.882,88	41.474,00	379,83

t	$E(U_t)$	$D(U_t)$
1	1.053,19	103,91
2	1.106,94	165,71
3	1.160,71	229,29
4	1.213,77	299,64
5	1.265,25	379,83

Solvencia en períodos plurianuales

Aplicación a un caso

G) Probabilidad de Insolvencia

$$F_{U_t}(0) = P\{U_t \leq 0\} = 1 - P\{U_t > 0\}$$

$$F_{U_t}(0) = P\{U_t \leq 0\} = 1 - P\left\{Y_t^* \leq y_t^* = \frac{E(U_t)}{D(U_t)}\right\} = 1 - P\{Z \leq z_t\}$$

$$y_t^* \cong z_t + \frac{\gamma_3(Y_t)}{6} \cdot (z_t^2 - 1) \qquad z_t \cong -\frac{3}{\gamma_3(Y_t)} + \sqrt{1 + \frac{9}{[\gamma_3(Y_t)]^2} + \frac{6}{\gamma_3(Y_t)} \cdot y_t^*}$$

t	y_t^*	z_t	$P\{Z<z_t\}$	$F_{ut}(0)=1-P\{Z<Z_t\}$
1	10,13565	7,42524	1,00000	0,00000
2	6,67986	5,32878	1,00000	0,00000
3	5,06228	4,23599	0,99999	0,00001
4	4,05077	3,50497	0,99977	0,00023
5	3,33114	2,95844	0,99845	0,00155
				0,00179

$$\max_{1 \leq t \leq 5} F_{U_t}(0) = 0{,}00155 \leq \varepsilon_5 \leq 0{,}00179 = \sum_{t=1}^{5} F_{U_t}(0)$$

Solvencia en períodos plurianuales

Fin Capítulo V