

Incurred But Not Reported (IBNR)

Seguros Generales y Modelos de Riesgo

Ignacio Campón & Joaquín Viola



FACULTAD DE
CIENCIAS ECONÓMICAS
Y DE ADMINISTRACIÓN

IESTA 80

INSTITUTO
DE ESTADÍSTICA



UNIVERSIDAD
DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

Índice

1	Introducción	3
2	Metodología	5
2.1	Chain Ladder ‘clásico’	5
2.2	Chain Ladder con regresión	6
2.3	Mach Chain-Ladder	9
2.4	Munich Chain Ladder	13
	Bibliografía	15
	Material adicional	15

1 Introducción

En este trabajo se pretende abordar distintos métodos para el cálculo de reservas de IBNR. El IBNR son los siniestros incurridos y que aún no fueron reclamados. En los seguros de responsabilidad civil, en muchos países, se tiene un período de 10 años para reclamar un seguro luego de que este haya ocurrido.

La idea principal de las reservas de IBNR es poder estar cubierto en el futuro de siniestros que pueden ocurrir en el año corriente (mientras está activa la póliza), pero se reclamaba en los años siguientes.

Para poder calcular las reservas de IBNR hay varios métodos, y todos utilizan la información de años anteriores para poder predecir cómo se comportan los reclamos en los años siguientes.

Se suele trabajar con 3 matrices triangulares, donde cada fila es un año, y en las columnas tenemos los años transcurridos. En la última fila se encuentra el último año, por lo que tiene datos para una sola columna, el año corriente, y así cada fila va teniendo dato para una columna más, llegando a la primer fila, que es el último año que se tiene en cuenta, y para el cual se tiene información para todos los años transcurridos, así queda explicada la forma de la matriz triangular.

La primer matriz triangular tiene la información de los pagos acumulados de los siniestros ocurridos en cada año, y cuando fueron pagados efectivamente. Para la primer fila, en la primer columna se tienen los pagos de los siniestros ocurridos y pagados hace 10 años, luego en la siguiente columna se tiene los siniestros ocurridos en ese año pero pagados en el siguiente, más los de la columna anterior (por ser pagos acumulados) y así sucesivamente.

La segunda matriz es la matriz de siniestros pendientes de pagos, que tiene para cada año celda, los siniestros ocurridos en la fila a la que pertenece, y reportados pasado los años según la columna en la que está, es decir, salvo los de la primera columna, todos reportados luego de pasado cierta cantidad de años, pero que aún no han sido pagados, ya sea por litigio, o por que se está estimando el valor final a pagar.

En última instancia tenemos la matriz triangular de siniestros incurridos, que en cada celda se tiene la suma de las dos matrices anteriores que es el total de los siniestros totales acumulados y reservados ocurridos en cada año y que han ido ocurriendo a lo largo de los años siguientes. Cada diagonal (en el sentido inverso, $X_{1,n}, X_{2,n-1}, \dots, X_{n,1}$) corresponde a los pagos acumulados y reservados de un ejercicio contable.

La reserva de IBNR es la reserva que debe tener la compañía pasado n años (en general 10 años) para poder cubrir los siniestros ocurridos en el año actual, y que serán reportados durante los siguientes años.

Se trabajará con la matriz de siniestros trabajada en el curso de ‘Solvencias de Compañías Aseguradoras’ brindado por el profesor Enrique Arónica en noviembre de 2023 en la Facultad de Ciencias Económicas, se cuenta con la matriz de pagos acumulados, la matriz de siniestros pendientes de pagos y la de siniestros incurridos, esta última se presenta a continuación, que se encuentra guardada en un objeto de tipo **triangle**.

dev

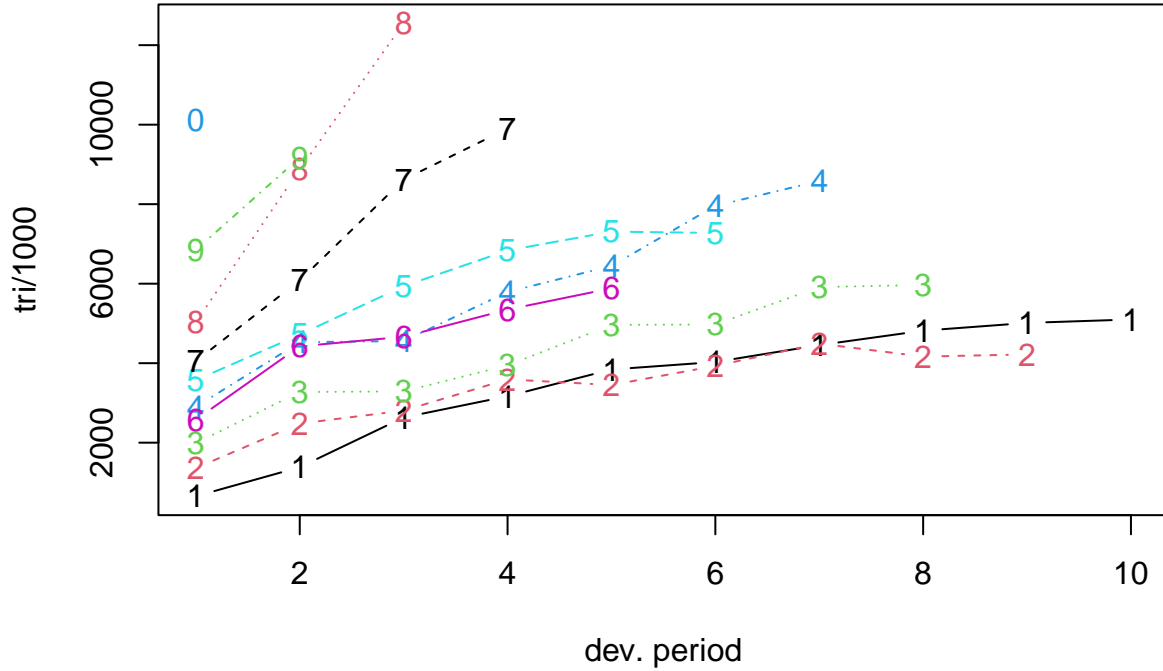
```

## origin      1      2      3      4      5      6      7      8
## 1999  652799 1383776 2634200 3167840 3842289 4029679 4454460 4817622
## 2000 1360795 2480988 2806387 3592401 3451088 3931688 4491687 4165270
## 2001 1985553 3275646 3290023 3945474 4961886 4975029 5914580 5969088
## 2002 2901555 4528347 4556763 5790821 6444829 7957380 8581805      NA
## 2003 3572829 4717083 5937065 6835232 7309686 7276239      NA      NA
## 2004 2578343 4423917 4664371 5348014 5882585      NA      NA      NA
## 2005 4051902 6081465 8618348 9901076      NA      NA      NA      NA
## 2006 5030173 8881224 12548654      NA      NA      NA      NA      NA
## 2007 6849422 9171465      NA      NA      NA      NA      NA      NA
## 2008 10120889      NA      NA      NA      NA      NA      NA      NA
##      dev
## origin      9     10
## 1999 5012751 5099688
## 2000 4221137      NA
## 2001      NA      NA
## 2002      NA      NA
## 2003      NA      NA
## 2004      NA      NA
## 2005      NA      NA
## 2006      NA      NA
## 2007      NA      NA
## 2008      NA      NA

```

Al tener la matriz guardada en un objeto especial, la función plot nos permite ver como crecen los siniestros incurridos en cada período con el correr de los años, obteniendo así una línea para cada año de ocurrencia y observando el crecimiento de los siniestros incurridos durante los períodos de desarrollo

Desarrollo de los reclamos por período



2 Metodología

2.1 Chain Ladder ‘clásico’

Uno de los métodos más utilizados es el de ‘Chain Ladder’ (Escalera de Cadera), que a partir de la última matriz presentada en la sección anterior calcula los factores de desarrollo, que miden el crecimiento de los gastos por siniestro pasado los años. El factor de desarrollo representa la proporción que aumentan el monto de los siniestros incurridos entre dos períodos consecutivos (el factor de desarrollo q_j representa el aumento de los siniestros incurridos entre el período j y el $j + 1$). Para el cálculo de este, se suma todos los siniestros incurridos en el período $j + 1$, es decir $\sum_{i=1}^{n-j} X_{i,j+1}$ y se los divide entre la misma cantidad de filas, del período anterior (j), es decir $\sum_{i=1}^{n-j} X_{i,j}$

$$\hat{q}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} X_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{n-j} X_{i,j}}$$

El total a pagar y reservar por los siniestros ocurridos en el año i es el producto de $X_i = Q_j \cdot X_{i,j}$, donde Q_j es el factor de desarrollo acumulado, que representa el aumento de los siniestros pagados acumulados y reservados al período j ($X_{i,j}$), hasta el total que se va a

pagar por los siniestros incurridos en el año i (X_i). Se puede demostrar que el factor de desarrollo acumulado se calcula de forma iterativa a través de la fórmula $Q_{j-1} = q_{j-1} \cdot Q_j$, y en particular, $Q_n = 1$ que representa el aumento de los siniestros pagados acumulados y reservados ocurridos en el primer año que se está tomando, y acumulado durante los n años siguientes, que luego, por cuestiones jurídicas no habrá nuevos reclamos.

Luego, podemos decir que X_i es la pérdida esperada por los siniestros incurridos en el año i , y nuestra reserva de $IBNR_i$, que es la reserva para los siniestros ocurridos en el año i y que fueron denunciados en los años posteriores será la diferencia entre la pérdida esperada, y el último período para el que tenemos los pagos acumulados y reservados en la matriz de siniestros incurridos ($X_{i,n-i+1}$)

##	Incurridos_Acumulados	QAcum	Perdida_Esperada	Reserva_IBNR
## 1999	5099688	1.000	5099688	0.00
## 2000	4221137	1.017	4292896	71759.33
## 2001	5969088	1.045	6237697	268608.96
## 2002	8581805	1.052	9028059	446253.86
## 2003	7276239	1.180	8585962	1309723.02
## 2004	5882585	1.278	7517944	1635358.63
## 2005	9901076	1.421	14069429	4168353.00
## 2006	12548654	1.687	21169579	8620925.30
## 2007	9171465	2.125	19489363	10317898.12
## 2008	10120889	3.297	33368571	23247682.03
## Total	78772626	NA	128859188	50086562.25

También se puede asignar un valor mayor a 1 para el factor de desarrollo del último año $Q_n > 1$, por distintas cuestiones que no son de particular interés en este trabajo, por ejemplo $Q_n = 1,05$, y luego los siguientes factores de desarrollo quedaran determinados a partir de este primero.

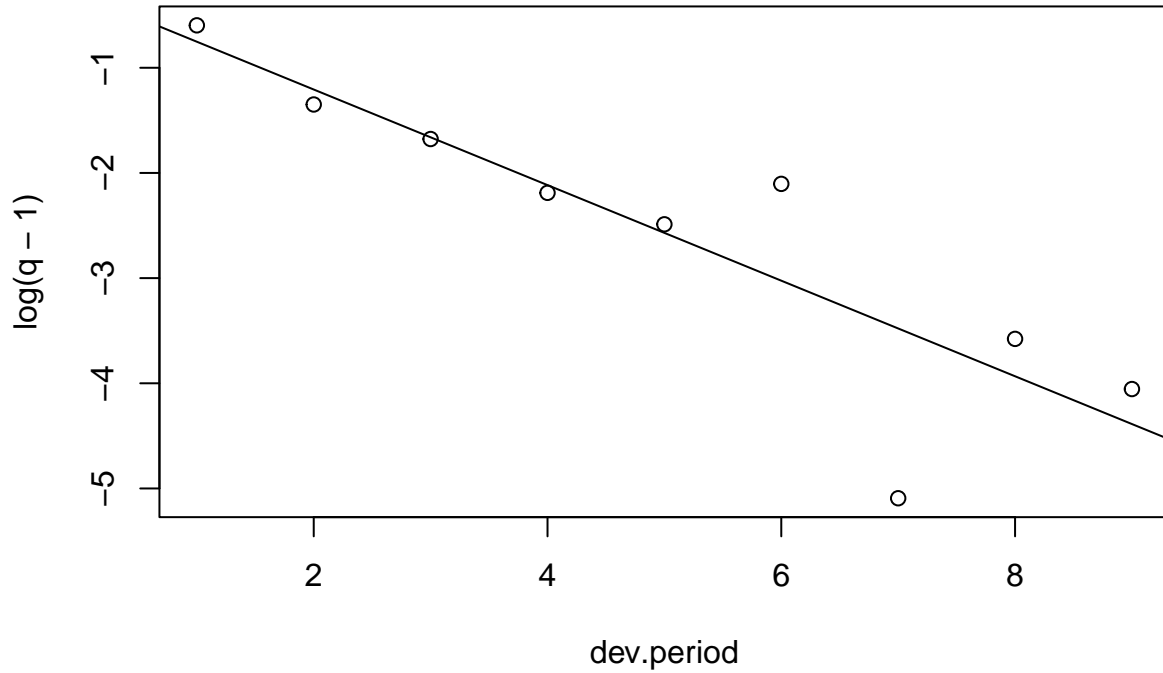
2.2 Chain Ladder con regresión

Este modelo permite calcular el factor de desarrollo para Q_n asumiendo una estructura de regresión para los factores de desarrollos (simples) en función de los períodos de desarrollo. Si bien estos no varían mucho a lo largo del tiempo, si se puede observar una estructura de regresión lineal si hacemos el logaritmo del aumento proporcional $(q - 1)$ de los siniestros incurridos en función de los períodos de desarrollo $L(q - 1) \sim$ períodos de desarrollo.

$$L(q_j - 1) = \alpha + \beta \times j$$

```
## [1] 1.550679 1.259512 1.186842 1.112016 1.083055 1.121986 1.006141 1.027942
## [9] 1.017343
```

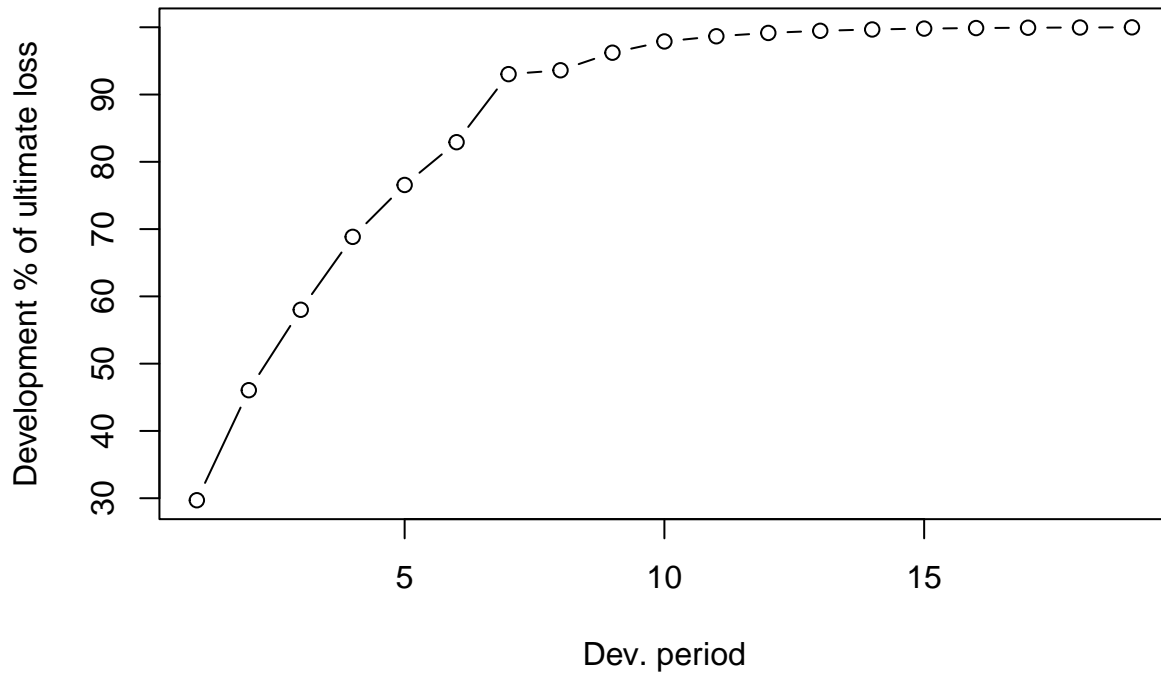
Extrapolación Log-lineal de los factores año a año



```
## integer(0)
```

Para esto es necesario haber calculado los factores de desarrollo simple y hacer el modelo correspondiente, previamente chequeando si para el gráfico de dispersión de los datos corresponde el modelo de regresión lineal. Luego, se sugiere extrapolar los datos para 100 períodos de desarrollo, y se puede observar que se empieza a estabilizar $L(q_j - 1)$ cuando j aumenta, y si tomamos Q_n el factor de desarrollo acumulado para el período que estamos trabajando, podemos calcular $\hat{Q}_n = \prod_{j \geq n} \hat{q}_j = 1.021795$.

Expected claims development pattern



[1] 1.021795

Nuestros factores de desarrollo serán los obtenidos normalmente hasta el momento $n - 1 = 9$ y se para $q_n = q_{10}$ se le asigna el valor de \hat{Q}_n calculado que ya se mostró que para el último período de desarrollo era válida la equivalencia.

##	Incurridos_Acumulados2	Qs	Perdida_Esperada2	Reserva_IBNR2
## 1999	5099688	1.022	5211881	112193.1
## 2000	4221137	1.040	4389982	168845.5
## 2001	5969088	1.069	6380955	411867.1
## 2002	8581805	1.075	9225440	643635.4
## 2003	7276239	1.206	8775144	1498905.2
## 2004	5882585	1.306	7682656	1800071.0
## 2005	9901076	1.453	14386263	4485187.4
## 2006	12548654	1.724	21633879	9085225.5
## 2007	9171465	2.172	19920422	10748957.0
## 2008	10120889	3.368	34087154	23966265.2
## Total	78772626	NA	131693778	52921152.4

2.3 Mach Chain-Ladder

Thomas Mack publica en 1993 un método para obtener estimaciones de los errores estándar de las estimaciones de pérdida esperada, y por consecuencia del IBNR, se basa en la matriz triangular de pérdida agregada pero nosotros lo usaremos sobre la matriz triangular de siniestros incurridos, y se puede predecir el triángulo inferior faltante de la matriz, es decir, los siniestros incurridos a futuro de cada año para cada período de desarrollo.

Para predecir los siniestros incurridos a futuro $X_{i,j}$ con $j > n - i + 1$ se asume:

- $\mathbb{E}(Q_{i,j}|X_{i,1}, \dots, X_{i,j}) = q_j$ con $Q_{i,j} = \frac{X_{i,j+1}}{X_{i,j}}$
- $\mathbb{V}(Q_{i,j}|X_{i,1}, \dots, X_{i,j}) = \frac{\sigma_j^2}{w_{i,j} X_{i,j}^\alpha}$
- $\{X_{i,1}, \dots, X_{i,n}\}, \{X_{k,1}, \dots, X_{k,n}\}$ son independientes del período de origen ($i \neq k$)

Con $w_{i,j} \in [0; 1]$ y $\alpha \in \{0, 1, 2\}$, se obtienen estimaciones insesgadas de las pérdidas esperadas y de las reservas de IBNR junto a los errores estándar y el coeficiente de variación.

Luego, a partir de la fórmula del error cuadrático medio, $ECM(\hat{X}_{i,n}) = \mathbb{E}((\hat{X}_{i,n} - X_{i,n})^2 | X_{i,1}, \dots, X_{i,n-i+1}) = \mathbb{V}(\hat{X}_{i,n}) + (\mathbb{E}(X_{i,n} | X_{i,1}, \dots, X_{i,n-i+1}) - \hat{X}_{i,n})^2$ se podrá calcular el error cuadrático medio como la suma de los errores estocásticos y el error de estimación y se necesitará una fórmula para la varianza.

Se puede notar que el factor de desarrollo q_j es el promedio ponderado de los factores de desarrollo $X_{i,j+1}/X_{i,j}$, por lo que la varianza de $X_{i,j+1}/X_{i,j}$ (dado los siniestros hasta el período de desarrollo j) es inversamente proporcional a $X_{i,j}$, donde se asume que todos los siniestros incurridos pesan igual y $\alpha = 0$ en las condiciones planteadas anteriormente.

$$\mathbb{V}(X_{i,j+1} | X_{i,1}, \dots, X_{i,j}) = X_{i,j} \cdot \sigma_j^2$$

Donde σ_j^2 es un parámetro desconocido que debe ser estimado, y es la varianza implícita bajo el método de ‘Chain Ladder’. Por lo que la varianza estimada será la suma de los errores al cuadrado ponderados de la estimación de los factores de desarrollo año a año.

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{n-j-1} \cdot \sum_{i=1}^{n-j} X_{i,j} \left(\frac{X_{i,j+1}}{X_{i,j}} - \hat{q}_j \right)^2$$

Siendo $\hat{\sigma}_j^2$ un estimador insesgado para $1 \leq j \leq n-2$, obteniendo una estimación del desvío al hacer la raíz. Para estimar σ_{n-1} , si se tiene que $\hat{q}_{n-1} = 1$ se puede utilizar $\sigma_{n-1} = 0$ ya que se asume que el desarrollo de los siniestros termina en el tiempo $n-1$, de lo contrario se puede extrapolar utilizando la reducción exponencial de los desvíos de forma tal que $\hat{\sigma}_{n-1}$ cumpla con la razón.

$$\frac{\hat{\sigma}_{n-3}}{\hat{\sigma}_{n-2}} = \frac{\hat{\sigma}_{n-2}}{\hat{\sigma}_{n-1}} \hat{\sigma}_{n-1} = \frac{\hat{\sigma}_{n-2}^2}{\hat{\sigma}_{n-3}}$$

Siendo R_i las reservas de IBNR del año i , estas son calculadas como $R_i = X_{i,n} - X_{i,n-i+1}$ y estimadas de la forma $\hat{R}_i = \hat{X}_{i,n} - X_{i,n-i+1}$ donde el total de los costos incurridos del año i son estimados a través de los factores de desarrollo, ya sea calculando el total para todos los años de desarrollo con los factores año a año, o a través del factor de desarrollo acumulado $\hat{X}_{i,n} = Q_{n-i+1} \cdot X_{i,n-i+1}$. Luego, como la única parte aleatoria de \hat{R}_i es $\hat{X}_{i,n}$ el $ECM(\hat{R}_i) = ECM(\hat{X}_{i,n})$

$$\widehat{ECM}(\hat{R}_i) = \hat{X}_{i,n}^2 \sum_{j=n-i+1}^{n-1} \frac{\hat{\sigma}_j^2}{\hat{q}_j} \left(\frac{1}{\hat{X}_{i,j}} - \frac{1}{\sum_{l=1}^{I-j} X_{l,j}} \right)$$

La función ‘MackChainLadder’ del paquete ‘ChainLadder’ nos da una tabla con las reservas de IBNR para cada año, su desvío y su coeficiente de variación, y las mismas medidas para el total, teniendo especial atención de que el desvío del total no es igual a la suma del desvío, nos muestra la última pérdida obtenida, la última pérdida esperada, la relación entre estas, la reserva de IBNR, el desvío y el coeficiente de variación.

```
## MackChainLadder(Triangle = tri)
##
##           Latest Dev.To.Date   Ultimate      IBNR  Mack.S.E CV(IBNR)
## 1999  5,099,688      1.000  5,099,688         0         0      NaN
## 2000  4,221,137      0.983  4,294,345     73,208    158,102    2.160
## 2001  5,969,088      0.956  6,242,289    273,201    246,430    0.902
## 2002  8,581,805      0.950  9,029,697    447,892    708,613    1.582
## 2003  7,276,239      0.847  8,589,919   1,313,680    782,964    0.596
## 2004  5,882,585      0.782  7,521,436   1,638,851   1,070,034    0.653
## 2005  9,901,076      0.703 14,077,509   4,176,433   1,880,771    0.450
## 2006 12,548,654      0.593 21,175,489   8,626,835   2,602,113    0.302
## 2007  9,171,465      0.471 19,492,933  10,321,468   3,717,510    0.360
## 2008 10,120,889      0.303 33,356,395  23,235,506   6,120,205    0.263
##
##           Totals
## Latest:    78,772,626.00
## Dev:              0.61
## Ultimate: 128,879,702.24
## IBNR:        50,107,076.24
## Mack.S.E    11,156,939.54
## CV(IBNR):           0.22
```

También se puede acceder a los factores mediante accediendo a ‘mackTRI\$f’, o a la matriz completa con la estimación de los siniestros incurridos en los años siguientes mediante ‘mackTRI\$FullTriangle’.

```
## [1] 1.550679 1.259512 1.186842 1.112016 1.083055 1.121986 1.006141 1.027942
## [9] 1.017343 1.000000
```

```
##          dev
## origin      1      2      3      4      5      6      7      8
## 1999  652799 1383776 2634200 3167840 3842289 4029679 4454460 4817622
## 2000 1360795 2480988 2806387 3592401 3451088 3931688 4491687 4165270
## 2001 1985553 3275646 3290023 3945474 4961886 4975029 5914580 5969088
## 2002 2901555 4528347 4556763 5790821 6444829 7957380 8581805 8634502
## 2003 3572829 4717083 5937065 6835232 7309686 7276239 8163841 8213971
## 2004 2578343 4423917 4664371 5348014 5882585 6371162 7148357 7192252
## 2005 4051902 6081465 8618348 9901076 11010150 11924596 13379234 13461390
## 2006 5030173 8881224 12548654 14893269 16561547 17937063 20125140 20248719
## 2007 6849422 9171465 11551567 13709884 15245604 16511825 18526042 18639802
## 2008 10120889 15694252 19767093 23460415 26088346 28255109 31701847 31896514
##          dev
## origin      9     10
## 1999 5012751 5099688
## 2000 4221137 4294345
## 2001 6135874 6242289
## 2002 8875763 9029697
## 2003 8443483 8589919
## 2004 7393214 7521436
## 2005 13837522 14077509
## 2006 20814500 21175489
## 2007 19160627 19492933
## 2008 32787752 33356395
```

Y al resumen final separado por año o para el total se accede mediante summary de la manera:

```
##      Latest Dev.To.Date Ultimate      IBNR  Mack.S.E  CV(IBNR)
## 1999 5099688 1.0000000 5099688      0.0      0.0      NaN
## 2000 4221137 0.9829525 4294345 73207.9 158102.2 2.1596328
## 2001 5969088 0.9562338 6242289 273201.1 246430.1 0.9020099
## 2002 8581805 0.9503979 9029697 447892.3 708612.6 1.5821048
## 2003 7276239 0.8470672 8589919 1313680.4 782964.5 0.5960083
## 2004 5882585 0.7821093 7521436 1638851.2 1070034.2 0.6529173
## 2005 9901076 0.7033259 14077509 4176433.0 1880770.5 0.4503294
## 2006 12548654 0.5926028 21175489 8626835.4 2602113.4 0.3016301
## 2007 9171465 0.4705020 19492933 10321468.4 3717510.0 0.3601726
## 2008 10120889 0.3034167 33356395 23235506.5 6120205.1 0.2633988
```

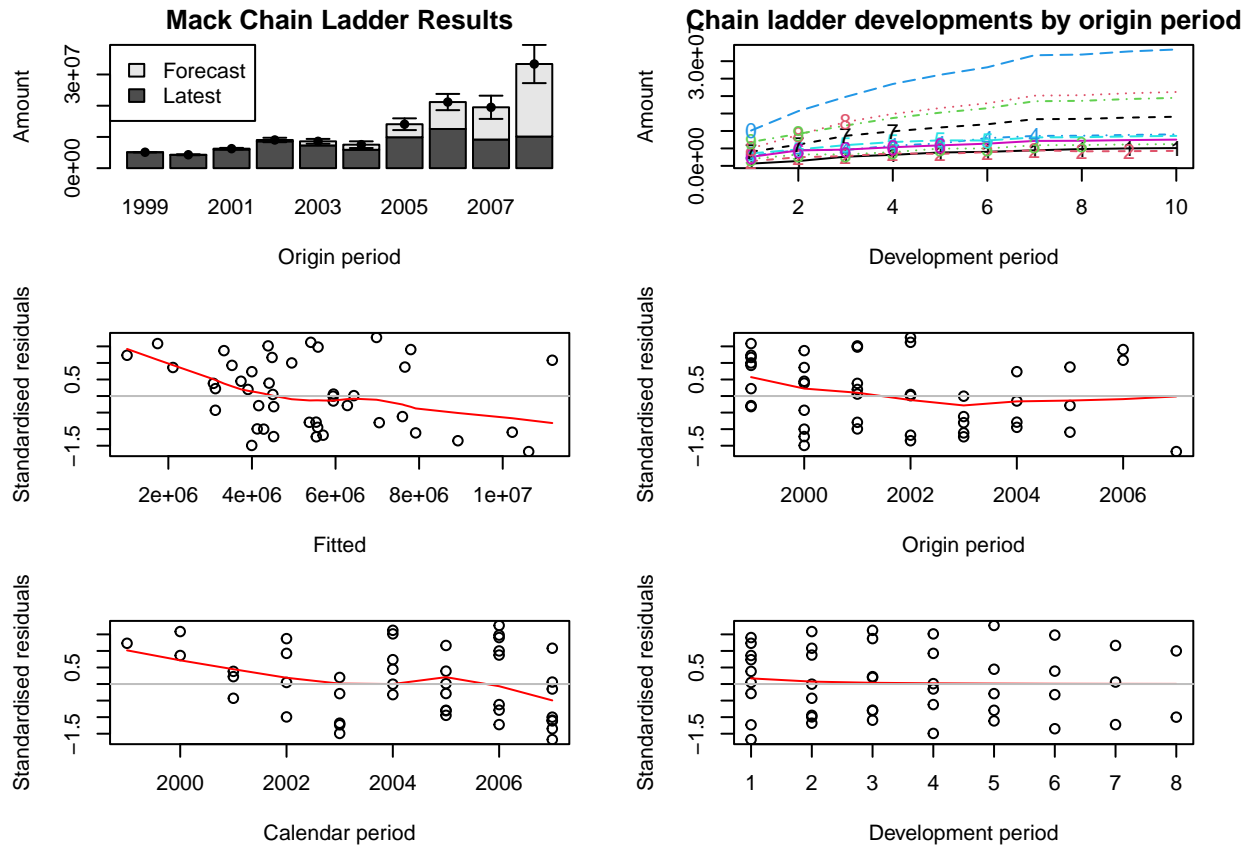
```
##          Totals
```

```

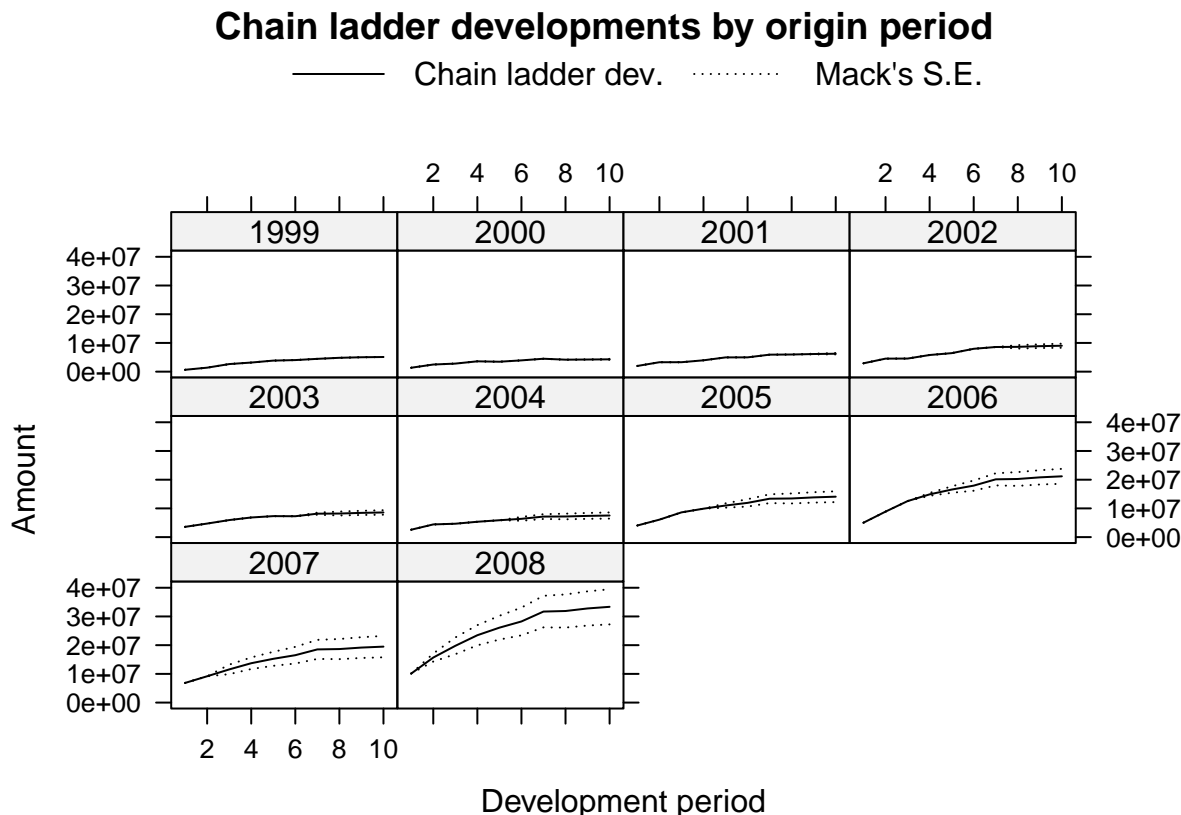
## Latest:      7.877263e+07
## Dev:         6.112105e-01
## Ultimate:    1.288797e+08
## IBNR:        5.010708e+07
## Mack S.E.:   1.115694e+07
## CV(IBNR):    2.226620e-01

```

Y se accede a distintos gráficos con la función plot



También se puede graficar la predicción del desarrollo de los siniestros incurridos a futuro junto a una medida de la dispersión, separado por cada año de ocurrencia

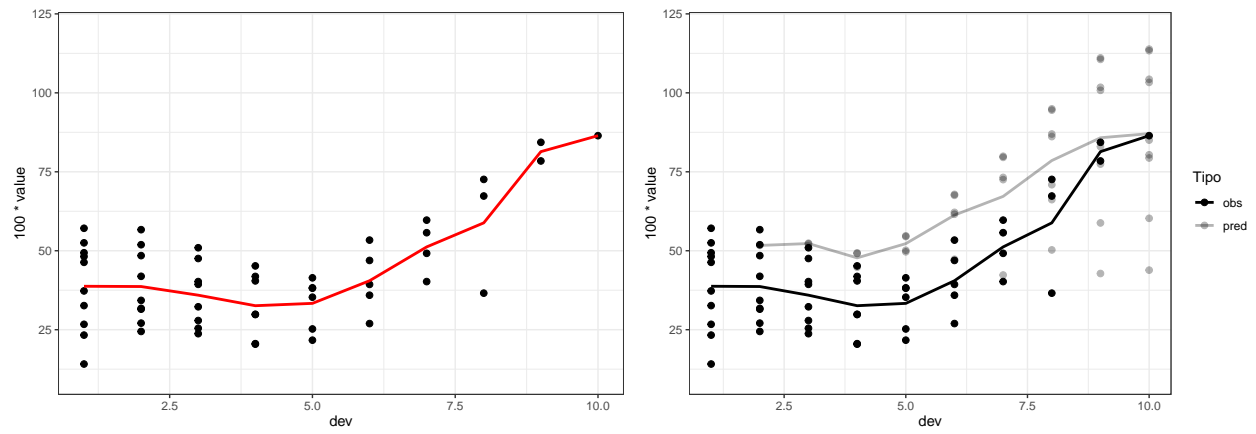


2.4 Munich Chain Ladder

El método de Munich utiliza la correlación positiva entre el triángulo de siniestros incurridos y el triángulo de siniestros pagados acumulados para proyectar los futuros pagos. Para esto es necesario agregarla información los datos de siniestros pagos acumulados.

Llamando I a la matriz de siniestros incurridos y P a la matriz de siniestros pagados, se halla la matriz P/I calculada como la división de celda a celda de la matriz P entre la matriz I , y representa la fracción de los siniestros incurridos que ya están pago de cada año durante los períodos de desarrollo. Donde se suele observar que a medida que hay más períodos de desarrollo la mayoría de los siniestros han sido pagados.

Formalmente, se tiene que $(P/I)_{i,j} = P_{i,j}/I_{i,j}$, luego, mediante los métodos vistos antes de Chain Ladder se puede estimar los valores faltantes de la matriz con los factores de desarrollo año a año a partir de la diagonal inversa.



```
%knitr::include_graphics("imagenes/condicional_normal.png")
```

```
%Nadaraya-Watson
```

Bibliografía

Gesmann, Markus, Daniel Murphy, Yanwei (Wayne) Zhang, Alessandro Carrato, Mario Wuthrich, Fabio Concina, y Eric Dal Moro. 2023. *ChainLadder: Statistical Methods and Models for Claims Reserving in General Insurance*. <https://CRAN.R-project.org/package=ChainLadder>.

Material adicional

La entrega del informe viene acompañado de 2 scripts, que contienen la implementación de cada método presentado junto con las aplicaciones realizadas:

- `quantile_regression_by_huang-nguyen.R`
- `quantile_regression_by_yu-jones.R`