Incurred But Not Reported (IBNR)

Seguros Generales y Modelos de Riesgo

Ignacio Campón & Joaquín Viola

FCEA FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y DE ADMINISTRACIÓN
IESTA 80 AÑOS INSTITUTO DE ESTADÍSTICA
UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA URUGUAY

Índice

1 Introducción

En este trabajo se pretende abordar distintos métodos para el cálculo de reservas técnicas asociadas al IBNR. El IBNR por sus siglas en inglés, son los siniestros incurridos y que aún no fueron reclamados. En muchos países, los seguros de responsabilidad civil, cuentan con un período de 10 años para el reclamo de un seguro luego de que el siniestro haya ocurrido.

La idea principal de las reservas de IBNR es poder estar cubierto en el futuro de siniestros que ocurrieron en el año corriente (mientras está activa la poliza), pero el reclamo es efectuado en los años siguientes.

Para poder calcular las reservas de IBNR hay varios métodos, basados en la utilización de información previa (recolectada en años anteriores), para poder predecir cómo se comportan los reclamos en los años siguientes.

Se suele trabajar con 3 matrices triangulares, donde las filas son años, y las columnas son los años transcurridos. Observesé el cuadro 1, en la última fila se encuentra el último año, el cuál se tiene datos para una sola columna, el año corriente. La fila anterior tendrá una columna más, es decir tendrá información de dos períodos transcurridos, de esta manera se llega a la primer fila, la cuál es el último año que se tiene en cuenta, y para el cual se tiene información de todos los años transcurridos, de esta manera queda explicada la forma de la matriz triangular.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1999	652799	1383776	2634200	3167840	3842289	4029679	4454460	4817622	5012751	5099688
2000	1360795	2480988	2806387	3592401	3451088	3931688	4491687	4165270	4221137	
2001	1985553	3275646	3290023	3945474	4961886	4975029	5914580	5969088		
2002	2901555	4528347	4556763	5790821	6444829	7957380	8581805			
2003	3572829	4717083	5937065	6835232	7309686	7276239				
2004	2578343	4423917	4664371	5348014	5882585					
2005	4051902	6081465	8618348	9901076						
2006	5030173	8881224	12548654							
2007	6849422	9171465								
2008	10120889									

Cuadro 1: Siniestros incurridos acumulados por año y por período transcurrido en pesos.

La primer matriz triangular tiene la información de los pagos acumulados de los siniestros ocurridos en cada año, y cuando fueron pagados efectivamente. Para la primer fila, en la primer columna se tienen los pagos de los siniestros ocurridos y pagados hace 10 años, luego en la siguiente columna se tiene los siniestros ocurridos en ese año pero reclamados y pagados en el siguiente, más los de la columna anterior (por ser pagos acumulados) y así sucesivamente.

La segunda matriz es la matriz de siniestros pendientes de pagos, que tiene para cada celda (año), los siniestros ocurridos en la fila a la que pertenece, y reportados pasado los años según la columna en la que está, es decir, salvo los de la primera columna, todos son reportados luego de pasado cierta cantidad de años, pero que aún no han sido pagados, ya sea por litigio, o por que se está estimando el valor final a pagar.

En última instancia tenemos la matriz triangular de siniestros incurridos (cuadro 1). En cada celda se tiene la suma de las dos matrices anteriores que es el total de los siniestros acumulados y reservados ocurridos en cada año y que han ido ocurriendo a lo largo de los años siguientes. Cada diagonal (en el sentido inverso, $X_{1,n}, X_{2,n-1}, \dots, X_{n,1}$) corresponde a los pagos acumulados y reservados de un ejercicio contable.

La reserva de IBNR es la reserva que debe tener la compañía pasado n años (en general 10 años) para poder cubrir los siniestros ocurridos en el año actual, y que serán reportados durante los siguientes años.

Se trabajará con la matriz de siniestros trabajada en el curso de "Solvencias de Compañías Aseguradoras" brindado por el profesor *Enrique Arónica* en Noviembre de 2023 en la Facultad de Ciencias Económicas (UDELAR). Se cuenta con la matriz de pagos acumulados, la matriz de siniestros pendientes de pagos y la de siniestros incurridos.

La figura 1 fue realizada con la función `plot` de `R` base, la cual fue aplicada a un objeto (matriz de siniestros incurridos) de clase `triangle`. Esta figura nos permite ver como crecen los siniestros incurridos en cada período con el correr de los años, obteniendo así una línea para cada año de ocurrencia y observando el crecimiento de los siniestros incurridos durante los períodos de desarrollo. Cada línea representa los siniestros incurridos en un período, y se ve como va aumentando los pagos acumulados y reservados con el correr de los períodos.

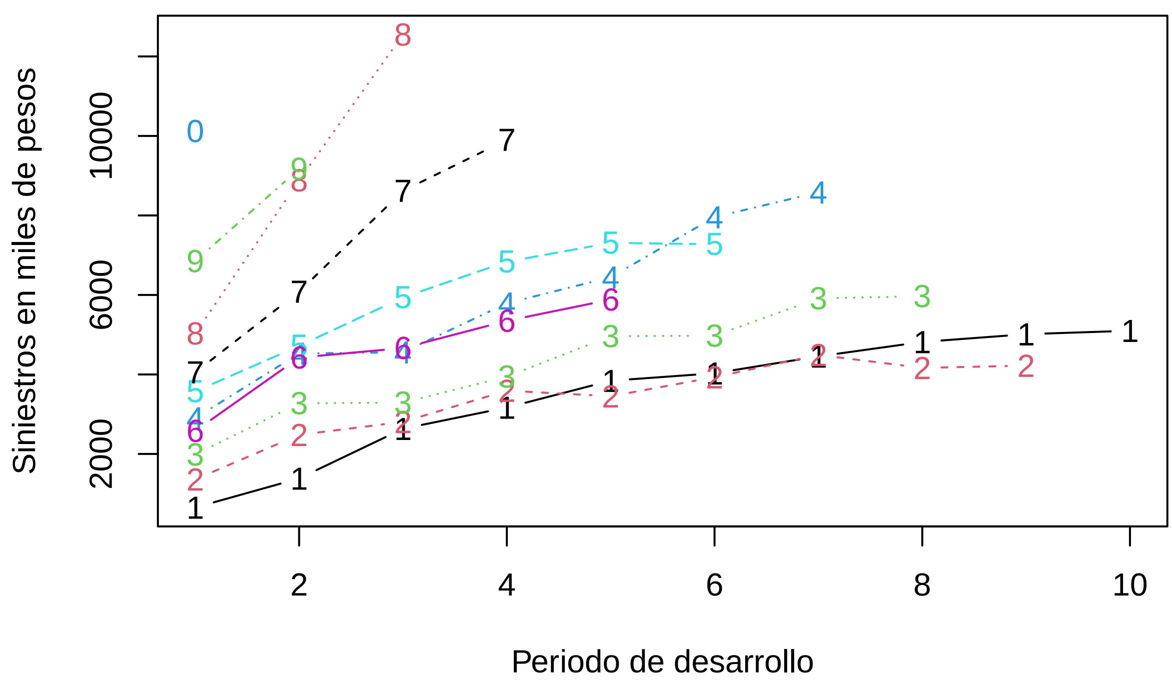


Figura 1: Desarrollo de los reclamos por año y período.

2 Chain-Ladder

2.1 Chain Ladder 'clásico'

Uno de los métodos más utilizados es el de 'Chain Ladder' (Escalera de Cadena), que a partir de la matriz que se puede ver en el cuadro 1, calcula los factores de desarrollo, que miden el crecimiento de los gastos por siniestro pasado los años. El factor de desarrollo representa la proporción que aumentan el monto de los siniestros incurridos entre dos períodos consecutivos (el factor de desarrollo q_j representa el aumento de los siniestros incurridos entre el período j y el $j+1$). Para el cálculo de este, se suma todos los siniestros incurridos en el período $j+1$, es decir $\sum_{i=1}^{n-j} X_{i,j+1}$ y se los divide entre la misma cantidad de filas, del período anterior (j), es decir $\sum_{i=1}^{n-j} X_{i,j}$

$$\hat{q}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} X_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{n-j} X_{i,j}}$$

Período de Desarrollo	
1	2
652799	1383776
1360795	2480988
1985553	3275646
2901555	4528347
3572829	4717083
2578343	4423917
4051902	6081465
5030173	8881224
6849422	9171465
10120889	

Figura 2: En gris, las filas de la columna del período 2 y período 1 que se dividen para calcular el factor de desarrollo del período 1

El total a pagar y reservar por los siniestros ocurridos en el año i es el producto de $X_i = Q_j \cdot X_{i,j}$, donde Q_j es el factor de desarrollo acumulado, que representa el aumento de los siniestros pagados acumulados y reservados al período j ($X_{i,j}$), hasta el total que se va a pagar por los siniestros incurridos en el año i (X_i). Se puede demostrar que el factor de desarrollo acumulado se calcula de forma iterativa a través de la fórmula $Q_{j-1} = q_{j-1} \cdot Q_j$, y en particular, $Q_n = 1$ que representa el aumento de los siniestros pagados acumulados y reservados ocurridos en el primer año que se está tomando, y acumulado durante los n años siguientes, que luego, por cuestiones jurídicas no habrá nuevos reclamos.

Luego, podemos decir que X_i es la pérdida esperada por los siniestros incurridos en el año i, y nuestra reserva de $IBNR_i$, que es la reserva para los siniestros ocurridos en el año i y que fueron denunciados en los años posteriores será la diferencia entre la pérdida esperada, y el último período para el que tenemos los pagos acumulados y reservados en la matriz de siniestros incurridos ($X_{i,n-i+1}$)

	Incurridos_Acumulados	QAcum	Perdida_Esperada	Reserva_IBNR
1999	5099688.000	1.000	5099688.000	0.000
2000	4221137.000	1.017	4292896.329	71759.329
2001	5969088.000	1.045	6237696.960	268608.960
2002	8581805.000	1.052	9028058.860	446253.860
2003	7276239.000	1.180	8585962.020	1309723.020
2004	5882585.000	1.278	7517943.630	1635358.630
2005	9901076.000	1.421	14069428.996	4168352.996
2006	12548654.000	1.687	21169579.298	8620925.298
2007	9171465.000	2.125	19489363.125	10317898.125
2008	10120889.000	3.297	33368571.033	23247682.033
Total	78772626.000		128859188.251	50086562.251

Cuadro 2: .

También se puede asignar un valor mayor a 1 para el factor de desarrollo del último año $Q_n > 1$, por distintas cuestiones que no son de particular interés en este trabajo, por ejemplo $Q_n = 1,05$, y luego los siguientes factores de desarrollo quedaran determinados a partir de este primero.

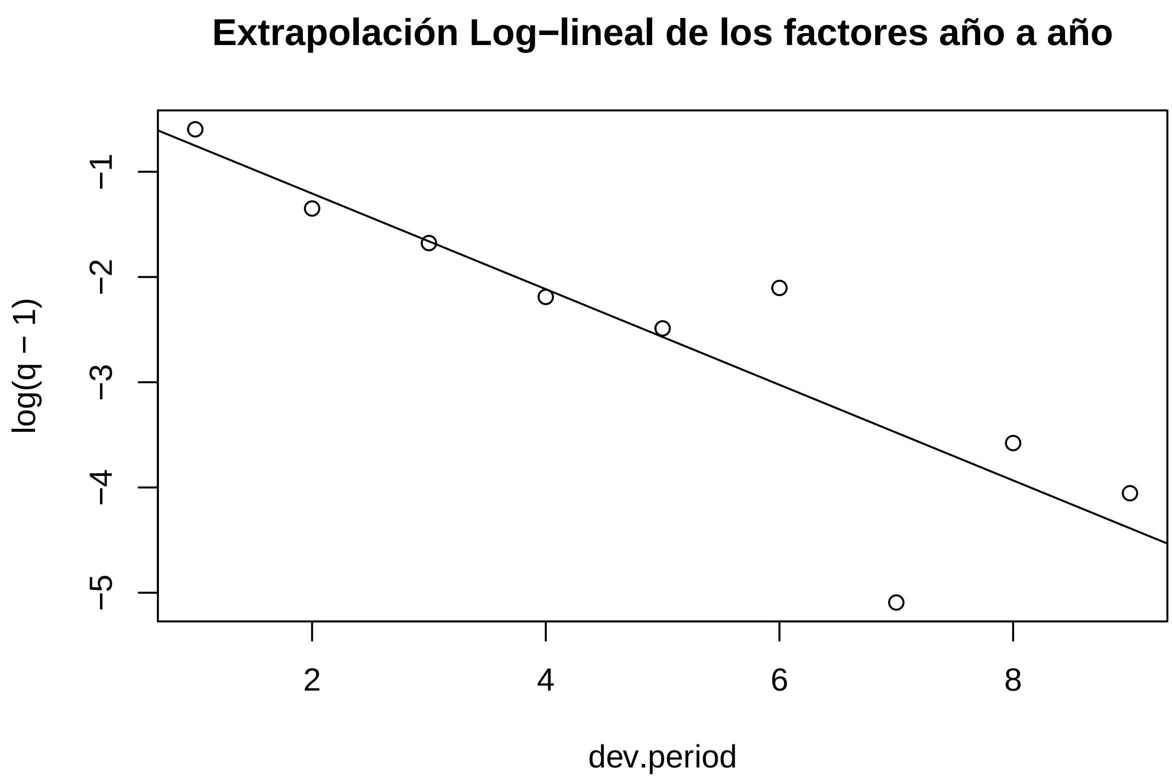
2.2 Chain Ladder con regresión

Este modelo permite calcular el factor de desarrollo para Q_n asumiendo una estructura de regresión para los factores de desarrollos (simples) en función de los períodos de desarrollo. Si bien estos no varían mucho a lo largo del tiempo, si se puede observar una estructura de regresión lineal si hacemos el logaritmo del aumento proporcional $(q-1)$ de los siniestros incurridos en función de los períodos de desarrollo $L(q-1) \sim$ períodos de desarrollo.

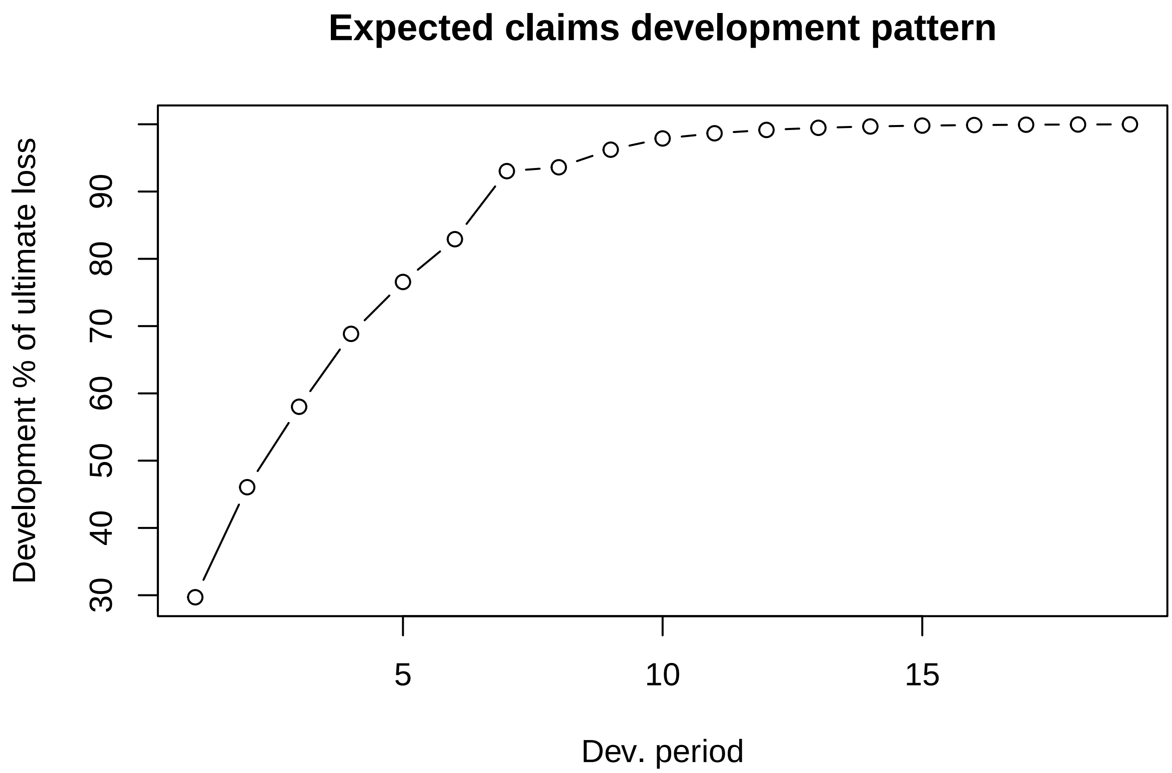
$$L(q_j - 1) = \alpha + \beta \times j$$

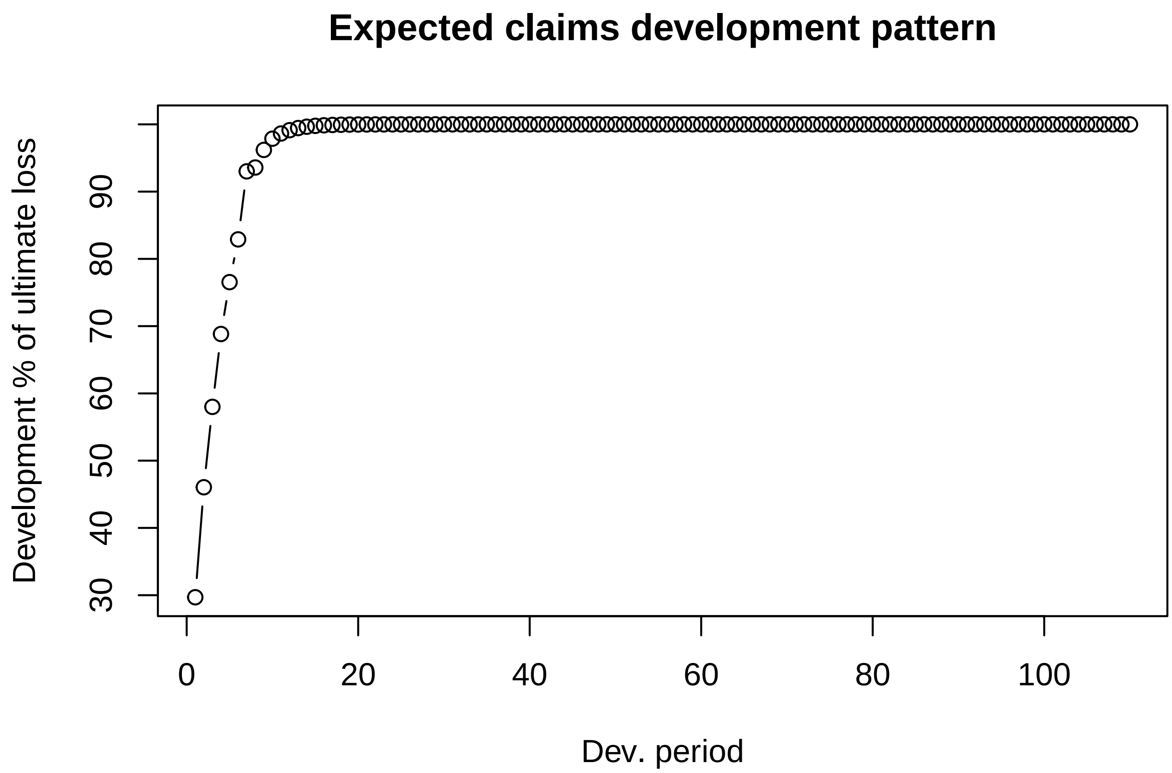
	Factores de desarrollo
1	1.551
2	1.260
3	1.187
4	1.112
5	1.083
6	1.122
7	1.006
8	1.028
9	1.017

Cuadro 3: .



Para esto es necesario haber calculado los factores de desarrollo simple y hacer el modelo correspondiente, previamente chequendo si para el gráfico de dispersión de los datos corresopnde el modelo de regresión lineal. Luego, se sugiere extrapolar los datos para 100 períodos de desarrollo, y se puede observar que se empieza a estabilizar $L(q_j - 1)$ cuando j aumenta, y si tomamos Q_n el factor de desarrollo acumulado para el período que estamos trabajando, podemos calcular $\hat{Q_n} = \prod_{j \geq n} \hat{q_j} = 1.021795$.


Expected claims development pattern
Development % of ultimate loss
30
40
50
60
70
80
90
5
10
15
Dev. period




```
## [1] 1.021795
```

Nuestros factores de desarrollo serán los obtenidos normalmente hasta el momento $n-1=9$ y para $q_n = q_{10}$ se le asigna el valor de $\hat{Q_n}$ calculado que ya se mostró que para el último período de desarrollo era válida la equivalencia.

	Incurridos_Acumulados2	Qs	Perdida_Esperada2	Reserva_IBNR2
1999	5099688.000	1.022	5211881.136	112193.136
2000	4221137.000	1.040	4389982.480	168845.480
2001	5969088.000	1.069	6380955.072	411867.072
2002	8581805.000	1.075	9225440.375	643635.375
2003	7276239.000	1.206	8775144.234	1498905.234
2004	5882585.000	1.306	7682656.010	1800071.010
2005	9901076.000	1.453	14386263.428	4485187.428
2006	12548654.000	1.724	21633879.496	9085225.496
2007	9171465.000	2.172	19920421.980	10748956.980
2008	10120889.000	3.368	34087154.152	23966265.152
Total	78772626.000		131693778.363	52921152.363

Cuadro 4: .

Se observa que al asignarle un factor de desarrollo acumulado mayor a 1 para el último período de desarrollo se obtiene que las reservas por IBNR aumentan aproximadamente en \$3.000.000 respecto al método clásico, que representa aproximadamente un aumento del %5.

3 Mack Chain-Ladder

Thomas Mack publica en 1993 un método para obtener estimaciones de los errores estándar de las estimaciones de pérdida esperada, y por consecuencia del IBNR, se basa en la matriz triangular de pérdida agregada pero nosotros lo usaremos sobre la matriz triangular de siniestros incurridos, y se puede predecir el triángulo inferior faltante de la matriz, es decir, los siniestros incurridos a futuro de cada año para cada período de desarrollo.

Para predecir los siniestros incurridos a futuro $X_{i,j}$ con $j > n - i + 1$ se asume:

- $\mathbb{E}(q_{i,j}|X_{i,1}, \dots, X_{i,j}) = q_j$ con $q_{i,j} = \frac{X_{i,j+1}}{X_{i,j}}$
- $\mathbb{V}(q_{i.j}|X_{i,1}, \dots, X_{i,j}) = \frac{\sigma_j^2}{w_{i,j}X_{i,j}^\alpha}$
- $\{X_{i,1}, \dots, X_{i,n}\}, \{X_{k,1}, \dots, X_{k,n}\}$ son independientes del período de origen $(i \neq k)$

Con $w_{i,j} \in [0; 1]$ y $\alpha \in \{0, 1, 2\}$, se obtienen estimaciones insesgadas de las pérdidas esperadas y de las reservas de IBNR junto a los errores estándar y el coeficiente de variación.

Luego, a partir de la fórmula del error cuadrático medio, $ECM(\hat{X}_{i,n}) = \mathbb{E}((\hat{X}_{i,n} - X_{i,n})^2|X_{i,1} \dots, X_{i,n-i+1}) = \mathbb{V}(\hat{X}_{i,n}) + (\mathbb{E}(X_{i,n}|X_{i,1} \dots, X_{i,n-i+1}) - \hat{X}_{i,n})^2$ se podrá calcular el error cuadrático medio como la suma de los errores estocásticos y el error de estimación y se necesitará una fórmula para la varianza.

Se puede notar que el factor de desarrollo q_j es el promedio ponderado de los factores $q_{i,j} = X_{i,j+1}/X_{i,j}$, por lo que la varianza de $X_{i,j+1}/X_{i,j}$ (dado los siniestros hasta el período de desarrollo j) es inversamente proporcional a $X_{i,j}$, donde se asume que todos los siniestros incurridos pesan igual y $\alpha = 1$ en las condiciones planteadas anteriormente.

$$\mathbb{V}(X_{i,j+1}|X_{i,1}, \dots, X_{i,j}) = X_{i,j} \cdot \sigma_j^2$$

Donde σ_j^2 es un parámetro desconocido que debe ser estimado, y es la varianza implícita bajo el método de 'Chain Ladder'. Por lo que la varianza estimada será la suma de los errores al cuadrado ponderados de la estimación de los factores de desarrollo año a año.

$$\hat{\sigma_j}^2 = \frac{1}{n-j-1} \cdot \sum_{i=1}^{n-j} X_{i,j} \left(\frac{X_{i,j+1}}{X_{i,j}} - \hat{q}_j \right)^2 = \frac{1}{n-j-1} \cdot \sum_{i=1}^{n-j} X_{i,j} \left(q_{i,j} - \hat{q}_j \right)^2$$

Siendo $\hat{\sigma_j}^2$ un estimador insesgado para $1 \leq j \leq n-2$, obteniendo una estimación del desvío al hacer la raíz. Para estimar σ_{n-1} , si se tiene que $\hat{q}_{n-1} = 1$ se puede utilizar $\sigma_{n-1} = 0$ ya que se asume que el desarrollo de los siniestros termina en el tiempo $n-1$, de lo contrario se puede extrapolar utilizando la reducción exponencial de los desvíos de forma tal que $\hat{\sigma}_{n-1}$ cumpla con la razón.

$$\frac{\hat{\sigma}_{n-3}}{\hat{\sigma}_{n-2}} = \frac{\hat{\sigma}_{n-2}}{\hat{\sigma}_{n-1}}$$

$$\hat{\sigma}_{n-1} = \frac{\hat{\sigma}^2_{n-2}}{\hat{\sigma}_{n-3}}$$

Siendo R_i las reservas de IBNR del año i, estas son calculadas como $R_i = X_{i,n} - X_{i,n-i+1}$ y estimadas de la forma $\hat{R}_i = \hat{X}_{i,n} - X_{i,n-i+1}$ donde el total de los costos incurridos del año i son estimados a través de los factores de desarrollo, ya sea calculando el total para todos los años de desarrollo con los factores año a año, o a través del factor de desarrollo acumulado $\hat{X}_{i,n} = Q_{n-i+1} \cdot X_{i,n-i+1}$. Luego, como la única parte aleatoria de $\hat{R}_i$ es $\hat{X}_{i,n}$ el $ECM(\hat{R}_i) = ECM(\hat{X}_{i,n})$

$$\widehat{ECM}(\hat{R}_i) = \hat{X}^2_{i,n} \sum_{j=n-i+1}^{n-1} \frac{\hat{\sigma_j}^2}{\hat{q}_j} \left(\frac{1}{\hat{X}_{i,j}} - \frac{1}{\sum_{l=1}^{I-j} X_{l,j}} \right)$$

La función `MackChainLadder` del paquete `ChainLadder` nos da una tabla con las reservas de IBNR para cada año, su desvío y su coeficiente de variación, y las mismas medidas para el total, teniendo especial atentción de que el desvío del total no es igual a la suma del desvío, nos muestra la última pérdida obtenida, la última pérdida esperada, la relación entre estas, la reserva de IBNR, el desvío y el coeficiente de variación.

```
## MackChainLadder(Triangle = tri)
##
##          Latest Dev.To.Date   Ultimate       IBNR  Mack.S.E CV(IBNR)
## 1999  5,099,688       1.000  5,099,688          0         0      NaN
## 2000  4,221,137       0.983  4,294,345     73,208   158,102    2.160
## 2001  5,969,088       0.956  6,242,289    273,201   246,430    0.902
## 2002  8,581,805       0.950  9,029,697    447,892   708,613    1.582
## 2003  7,276,239       0.847  8,589,919  1,313,680   782,964    0.596
## 2004  5,882,585       0.782  7,521,436  1,638,851 1,070,034    0.653
## 2005  9,901,076       0.703 14,077,509  4,176,433 1,880,771    0.450
## 2006 12,548,654       0.593 21,175,489  8,626,835 2,602,113    0.302
## 2007  9,171,465       0.471 19,492,933 10,321,468 3,717,510    0.360
## 2008 10,120,889       0.303 33,356,395 23,235,506 6,120,205    0.263
##
##                    Totals
## Latest:    78,772,626.00
## Dev:                0.61
## Ultimate: 128,879,702.24
```

```
## IBNR:       50,107,076.24
## Mack.S.E   11,156,939.54
## CV(IBNR):           0.22
```

También se puede acceder a los factores mediante acciedendo a `mackTRI$f`, o a la matriz completa con la estimación de los siniestros incurridos en los años siguientes mediante `mackTRI$FullTriangle`.

	Factores de desarrollo
1	1.551
2	1.260
3	1.187
4	1.112
5	1.083
6	1.122
7	1.006
8	1.028
9	1.017
10	1.000

Cuadro 5: .

```
##       dev
## origin        1        2        3        4        5        6        7        8
##   1999   652799  1383776  2634200  3167840  3842289  4029679  4454460  4817622
##   2000  1360795  2480988  2806387  3592401  3451088  3931688  4491687  4165270
##   2001  1985553  3275646  3290023  3945474  4961886  4975029  5914580  5969088
##   2002  2901555  4528347  4556763  5790821  6444829  7957380  8581805  8634502
##   2003  3572829  4717083  5937065  6835232  7309686  7276239  8163841  8213971
##   2004  2578343  4423917  4664371  5348014  5882585  6371162  7148357  7192252
##   2005  4051902  6081465  8618348  9901076 11010150 11924596 13379234 13461390
##   2006  5030173  8881224 12548654 14893269 16561547 17937063 20125140 20248719
##   2007  6849422  9171465 11551567 13709884 15245604 16511825 18526042 18639802
##   2008 10120889 15694252 19767093 23460415 26088346 28255109 31701847 31896514
##       dev
## origin        9       10
##   1999  5012751  5099688
##   2000  4221137  4294345
##   2001  6135874  6242289
##   2002  8875763  9029697
##   2003  8443483  8589919
##   2004  7393214  7521436
##   2005 13837522 14077509
##   2006 20814500 21175489
##   2007 19160627 19492933
```

```
##     2008  32787752  33356395
```

Y al resumen final separado por año o para el total se accede mediante summary de la manera:

	Latest	Dev.To.Date	Ultimate	IBNR	Mack.S.E	CV(IBNR)
1999	5099688.000	1.000	5099688.000	0.000	0.000	
2000	4221137.000	0.983	4294344.903	73207.903	158102.191	2.160
2001	5969088.000	0.956	6242289.128	273201.128	246430.128	0.902
2002	8581805.000	0.950	9029697.308	447892.308	708612.579	1.582
2003	7276239.000	0.847	8589919.404	1313680.404	782964.479	0.596
2004	5882585.000	0.782	7521436.223	1638851.223	1070034.245	0.653
2005	9901076.000	0.703	14077508.979	4176432.979	1880770.515	0.450
2006	12548654.000	0.593	21175489.411	8626835.411	2602113.439	0.302
2007	9171465.000	0.471	19492933.421	10321468.421	3717510.049	0.360
2008	10120889.000	0.303	33356395.459	23235506.459	6120205.089	0.263

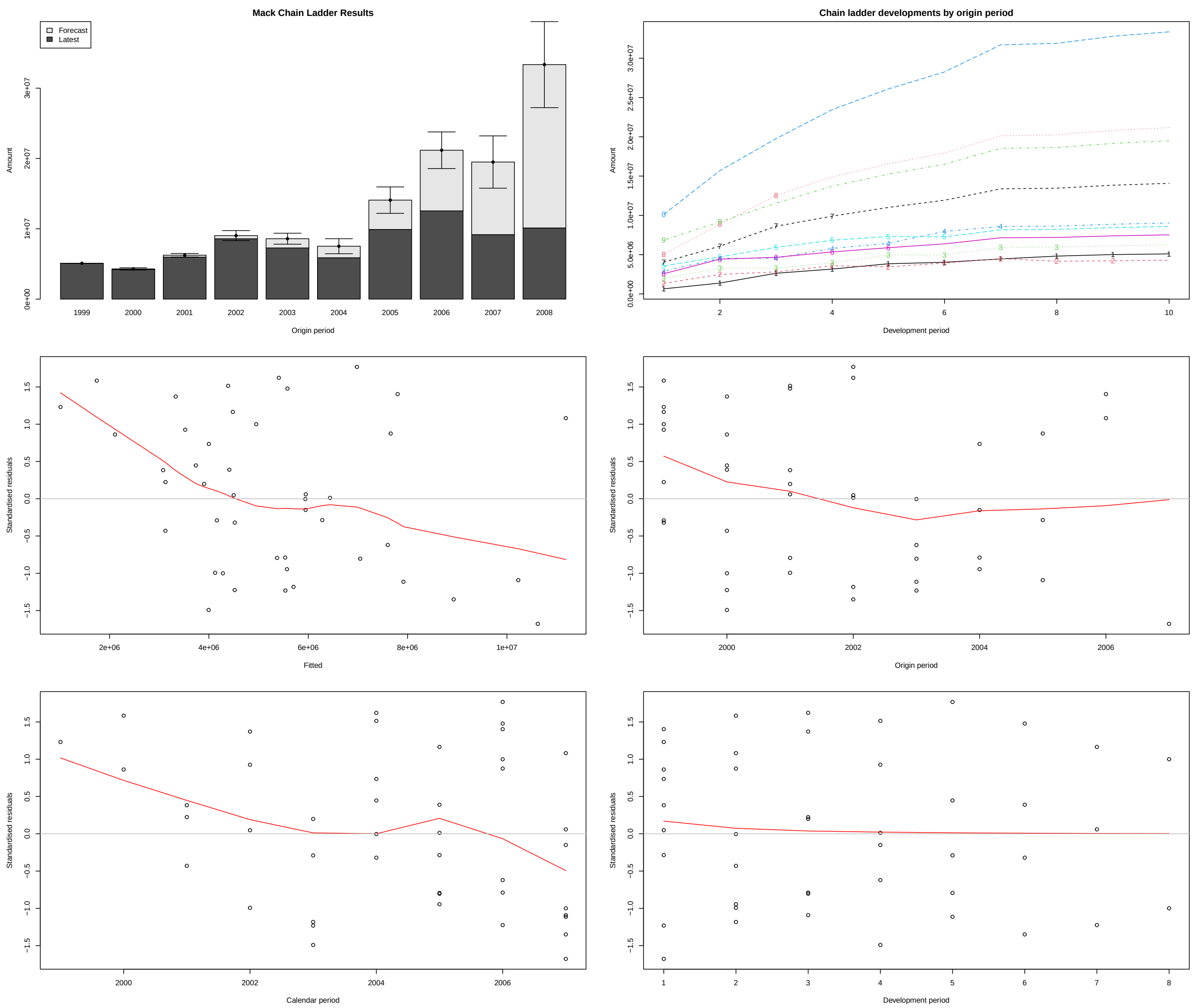
Cuadro 6: .

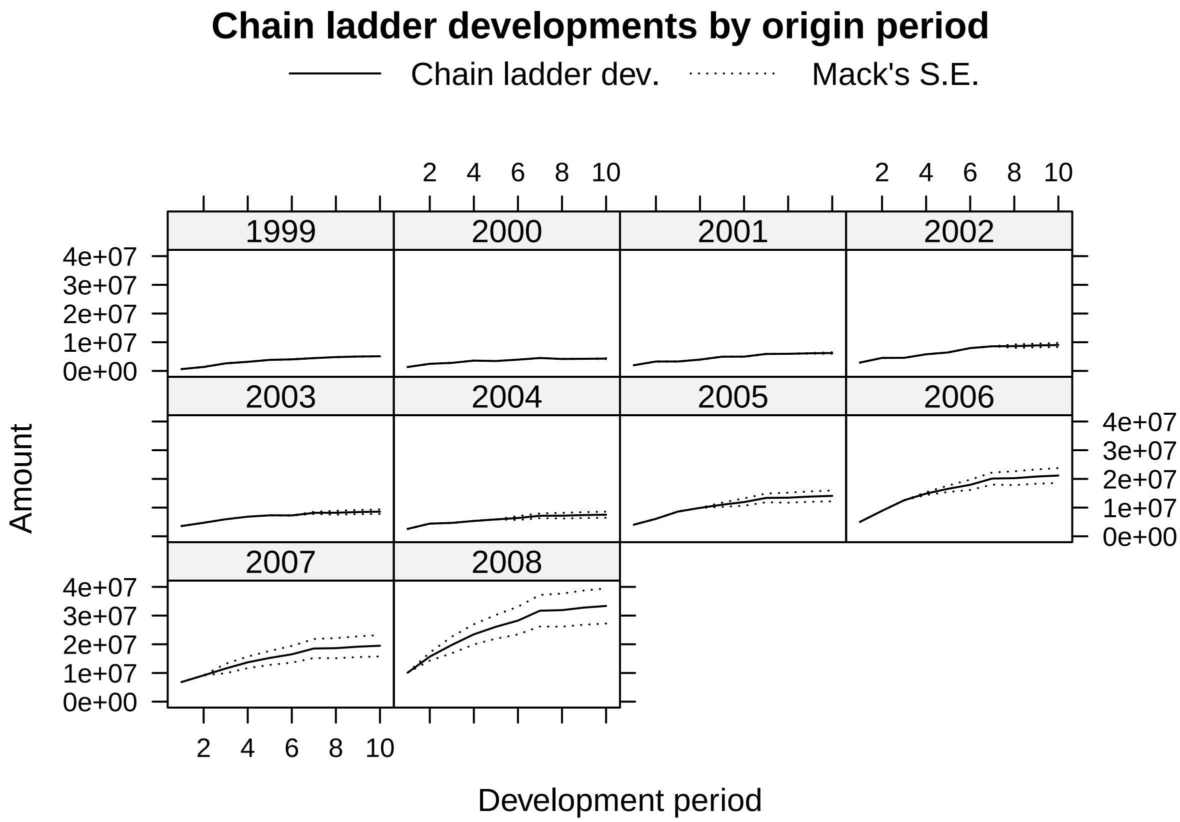
	Totals
Latest:	78772626.00
Dev:	0.61
Ultimate:	128879702.24
IBNR:	50107076.24
Mack S.E.:	11156939.54
CV(IBNR):	0.22

Cuadro 7: .

Y se accede a distintos gráficos con la función plot

También se puede graficar la predicción del desarrollo de los siniestros incurridos a futuro junto a una medida de la dispersión, separado por cada año de ocurrencia


Mack Chain Ladder Results
Forecast
Latest
Amount
Origin period
Chain ladder developments by origin period
Amount
Development period
Standardised residuals
Fitted
Standardised residuals
Origin period
Standardised residuals
Calendar period
Standardised residuals
Development period



4 Munich Chain Ladder

El método de Munich utiliza la correlación positiva entre el triángulo de siniestros incurridos y el triángulo de siniestros pagados acumulados para proyectar los futuros pagos. Para esto es necesario agregarla información los datos de siniestros pagos acumulados.

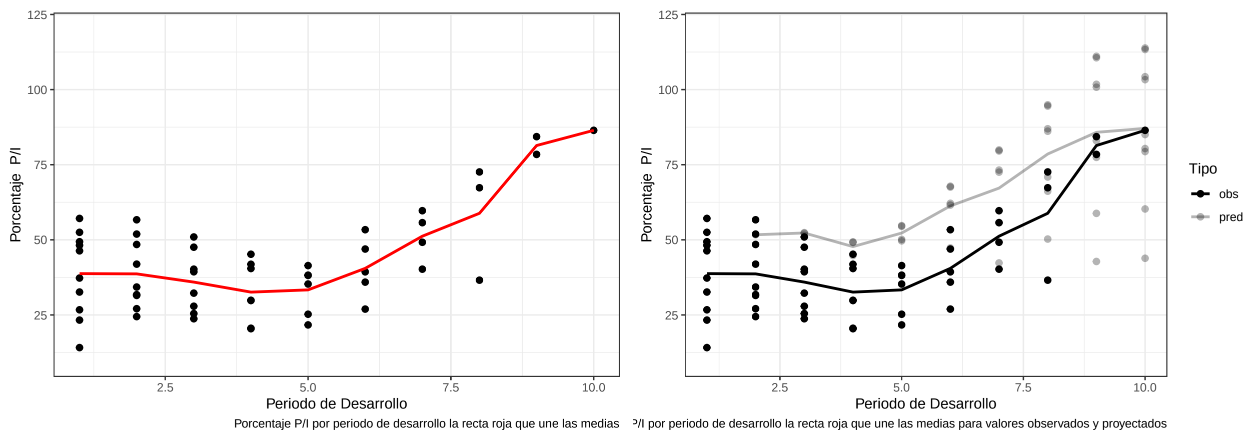
Llamando I a la matriz de siniestros incurridos y P a la matriz de siniestros pagados, se halla la matriz P/I calculada como la división de celda a celda de la matriz P entre la matriz I, y representa la fracción de los siniestros incurridos que ya están pago de cada año durante los períodos de desarrollo. Donde se suele observar que a medida que hay más períodos de desarrollo la mayoría de los siniestros han sido pagados.

4.1 Problemas del Chain-Ladder por separado (SCL)

Formalmente, se tiene que $(P/I)_{i,j} = P_{i,j}/I_{i,j}$, luego, mediante los métodos vistos antes de Chain Ladder se puede estimar los valores faltantes de ambas matrices con los factores de desarrollo año a año a partir de la diagonal inversa, obteniendo el resultado de los ratios si se hace Chain-Ladder por separado (Método SCL).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1999	0.5712	0.4191	0.2374	0.2043	0.2524	0.3934	0.5571	0.6733	0.8434	0.8644
2000	0.2671	0.2708	0.2546	0.2058	0.2168	0.2695	0.4919	0.7259	0.7843	
2001	0.3263	0.3150	0.3936	0.4187	0.4143	0.4693	0.4024	0.3657		
2002	0.1413	0.2445	0.3226	0.2988	0.3824	0.5337	0.5969			
2003	0.2329	0.3176	0.2790	0.2980	0.3529	0.3592				
2004	0.3728	0.3429	0.4024	0.4045	0.3816					
2005	0.5250	0.5667	0.5095	0.4520						
2006	0.4937	0.4846	0.4755							
2007	0.4634	0.5191								
2008	0.4818									

Cuadro 8: Proporción de siniestros incurridos que han sido pagos en cada período de desarrollo.



Se puede notar en la segunda figura que para los valores proyectados en las dos matrices por separado a partir de cierto período de desarrollo se tiene que los siniestros pagados significan una proporción mayor a 1 que los siniestros incurridos, este error se da debido a que se aplicó el método de Chain-Ladder por separado a ambos triángulos (SCL) y no se tuvo en cuenta la estructura de correlación entre ambos triángulos.

Para concluir el principal resultado de este método se debe hacer cuentas con los factores de desarrollo y las proyecciones tanto en la matriz de pagos acomulados como la de siniestros incurridos. Para esto define el promedio de los ratios en el tiempo de desarrollo t:

$$(P/I)_t := \frac{\sum_{j=1}^{n} P_{j,t}}{\sum_{j=1}^{n} I_{j,t}} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} I_{j,t}} \cdot \sum_{j=1}^{n} I_{j,t} \cdot (P/I)_{j,t}$$

Y luego, definiendo $c_i : n - i + 1$ como el último período de desarrollo del que se tiene información para los siniestros, tanto los pagados acumulados como los incurridos en el momento i y se puede observar que los pares (i, c_i) son los índices de la diagonal invertida de las matrices. Luego, observando que para el año i, los valores de $P_{i,t}$ y $I_{i,t}$ son proyecciones para $t > c_i$ se tiene que el ratio $(P/I)_{i,t}$ se calcula

$$(P/I)_{i,t} = \frac{P_{i,t}}{I_{i,t}} = \frac{P_{i,c_i} \cdot q_{c_i}^{P} \cdot \ldots \cdot q_{t-1}^{P}}{I_{i,c_i} \cdot q_{c_i}^{I} \cdot \ldots \cdot q_{t-1}^{I}}$$

A partir de las fórmulas de los factores de desarrollo, se nota que para $t > c_i$:

$$(P/I)_{i,t} = \frac{P_{i.c_i} \cdot \frac{\sum_{j=1}^{n} P_{j,t}}{\sum_{j=1}^{n} P_{j,c_i}}}{I_{i.c_i} \cdot \frac{\sum_{j=1}^{n} I_{j,t}}{\sum_{j=1}^{n} I_{j,c_i}}}$$

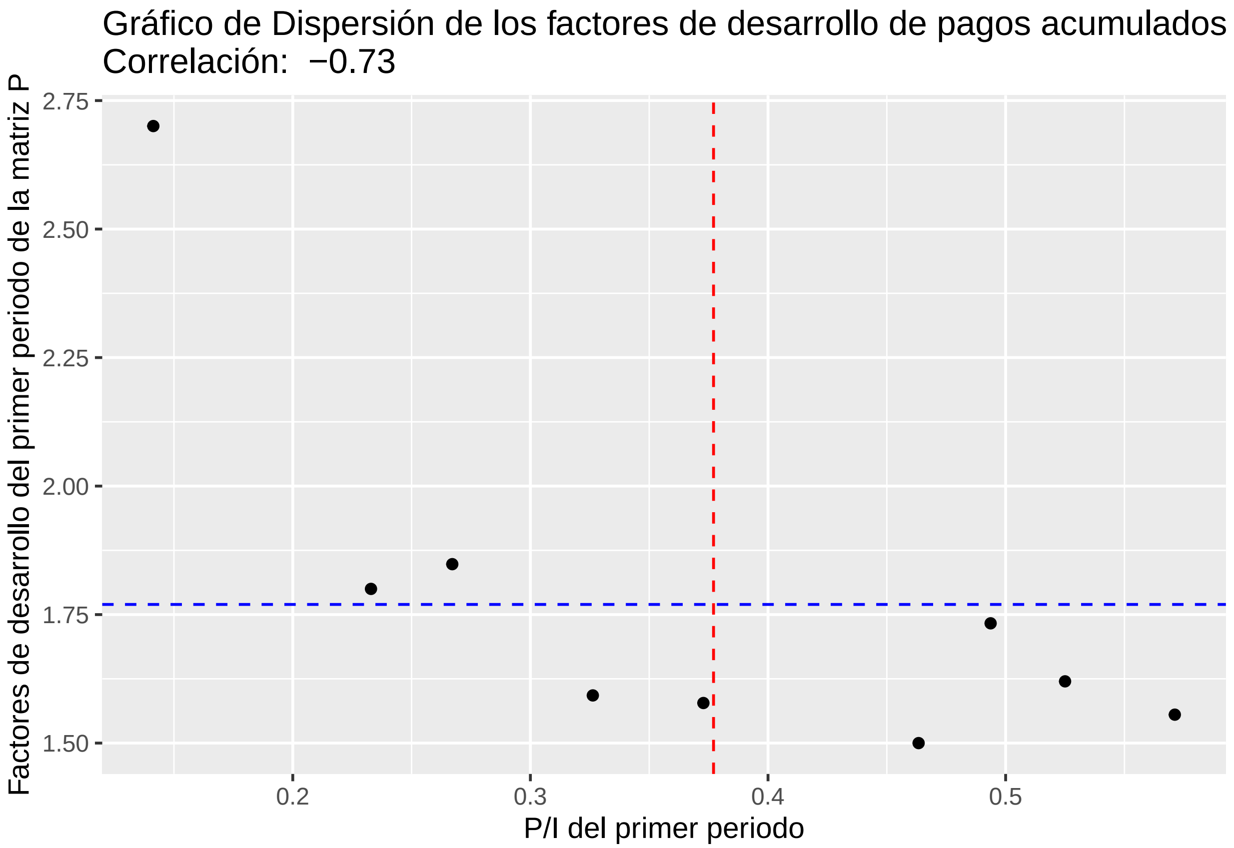
Y reordenando se tiene la siguiente relación para los ratios proyectados mediante la aplicación de Chain-Ladder por separado:

$$\frac{(P/I)_{i,t}}{(P/I)_t} = \frac{(P/I)_{i,c_i}}{(P/I)_{c_i}}$$

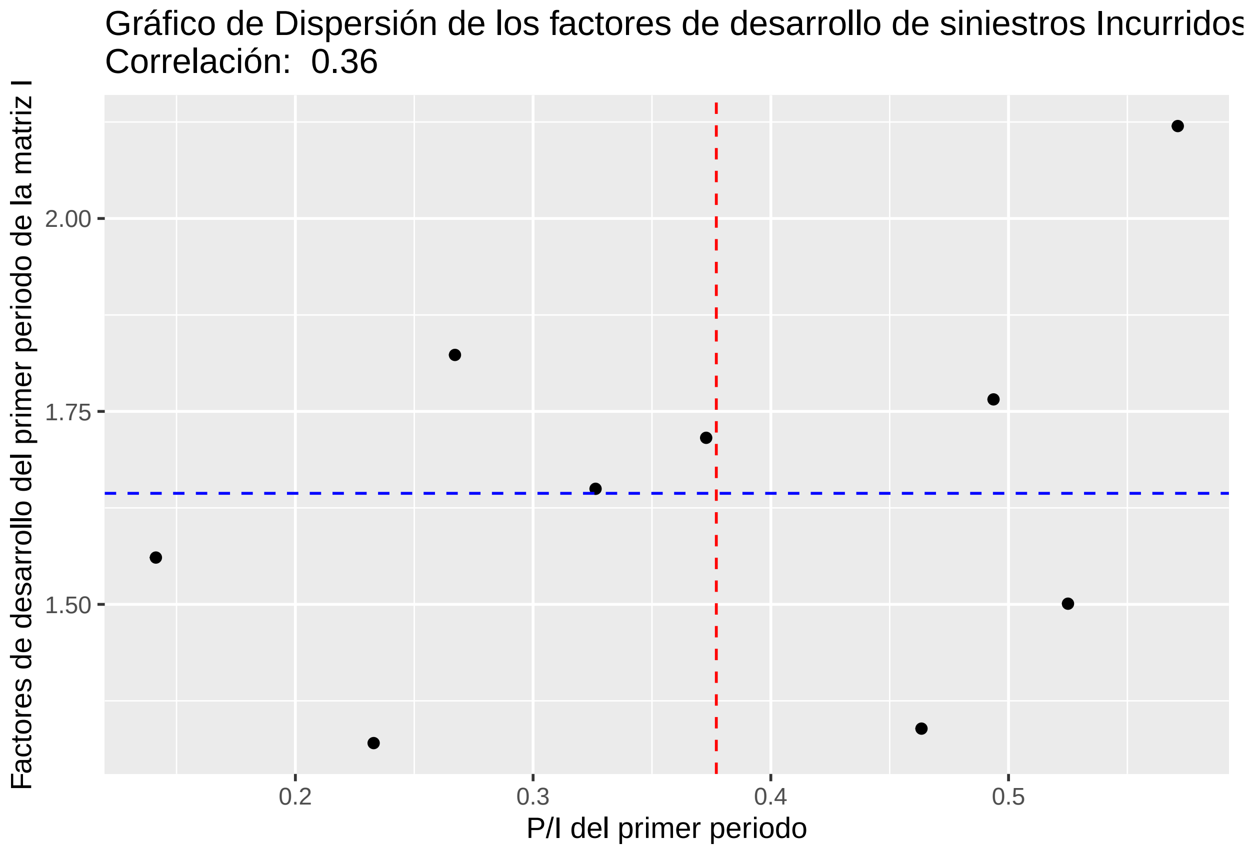
Que indica que para cada año de accidente, el ratio de $(P/I)_{i,t}$ con el $(P/I)_t$ promedio en el período de desarrollo t, debe cumplir la misma relación que en el período c_i, y esto se ve claramente en el gráfico de la derecha cuando se hace Chain-Ladder por separado siendo la principal debilidad del método.

4.2 Modelado con Munich Chain-Ladder

Veamos que la correlación entre los factores de desarrollo para cada año de ocurrencia del primer período de desarrollo de la matriz de pagos acumulados, es decir, el vector de $q_{i,1}^{P}$ $\forall i = \{1, 2, \ldots, 10\}$ respecto a los ratios $(P/I)_{i,1}$ es de -0.7278.



Y por otro lado, haciendo lo mismo para los factores de desarrollo individuales del primer período de la matriz de siniestros incurridos y los ratios del primer período de desarrollo se tiene una correlación positiva más débil de 0.3572

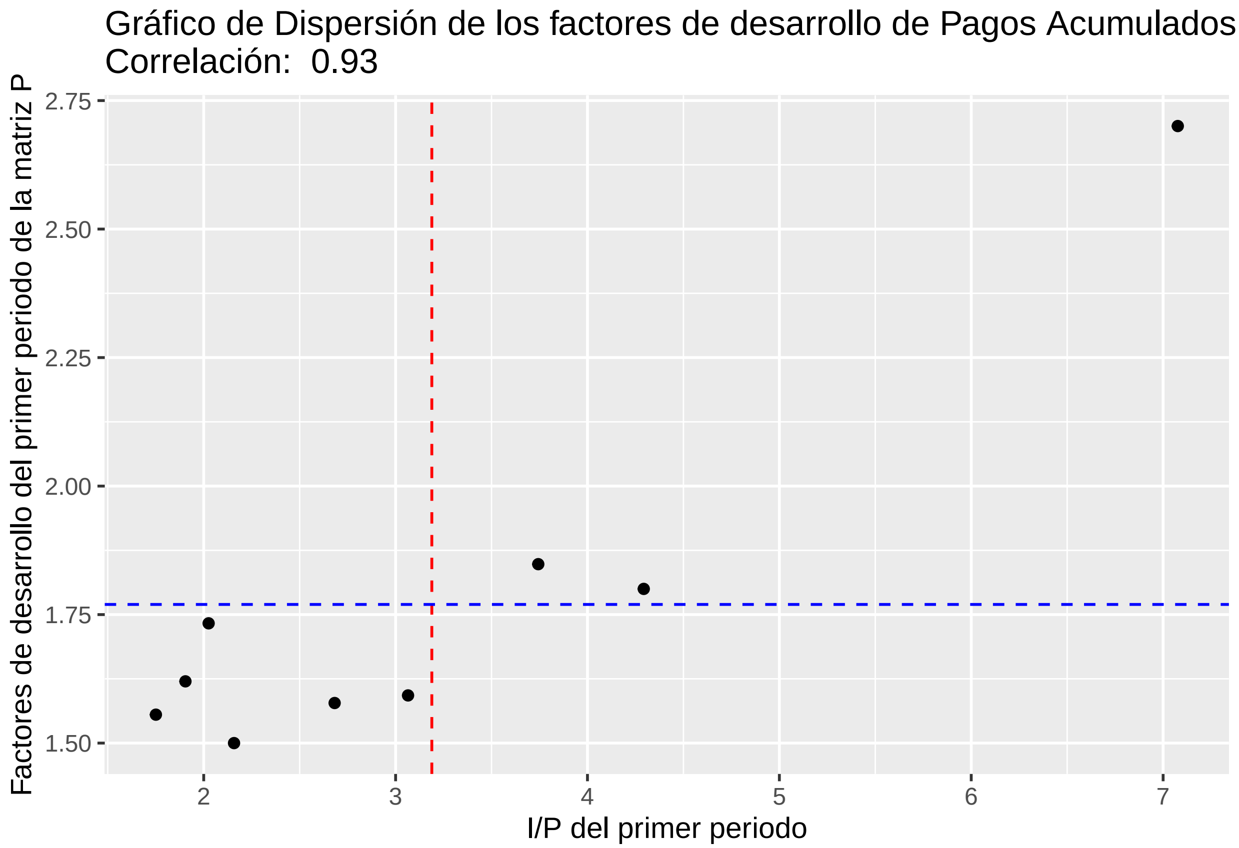


Parece ser que uno de los problemas principales es asumir un factor igual para todos los años de ocurrencia, dado un período de desarrollo y se nota que estos factores depende de los ratios (P/I).

También es claro que con el correr de los períodos de desarrollo se tendrán menos puntos en nuestro gráfico, y los resultados serán menos consistentes, y además, los factores de desarrollo individuales para cada año deben ser ajustados tanto para la matriz de pagos acumulados como la de siniestros incurridos, pero la pregunta es en que medida cada uno, esto expresa la idea básica para resolver el problema del método SCL.

Siendo que para cada período de desarrollo se tiene un gráfico de puntos como el anterior, pero cada vez con menos puntos, la idea es hacer una regresión lineal en cada caso, y estimar el factor de desarrollo para cada (P/I), y de esta forma se puede predecir la parte restante de la matriz. Por ejemplo, para el factor de desarrollo individual $q_{1,10}$ que no se tiene valores de la columna siguiente del triángulo para calcularlo, se puede predecir con la regresión a partir del valor $(P/I)_{1,10}$

El método de Munich Chain-Ladder también incorpora los ratios $(I/P) = 1/(P/I)$, y la regresión de los factores de desarrollo de los pagos acumulados se hace respecto a este ratio.

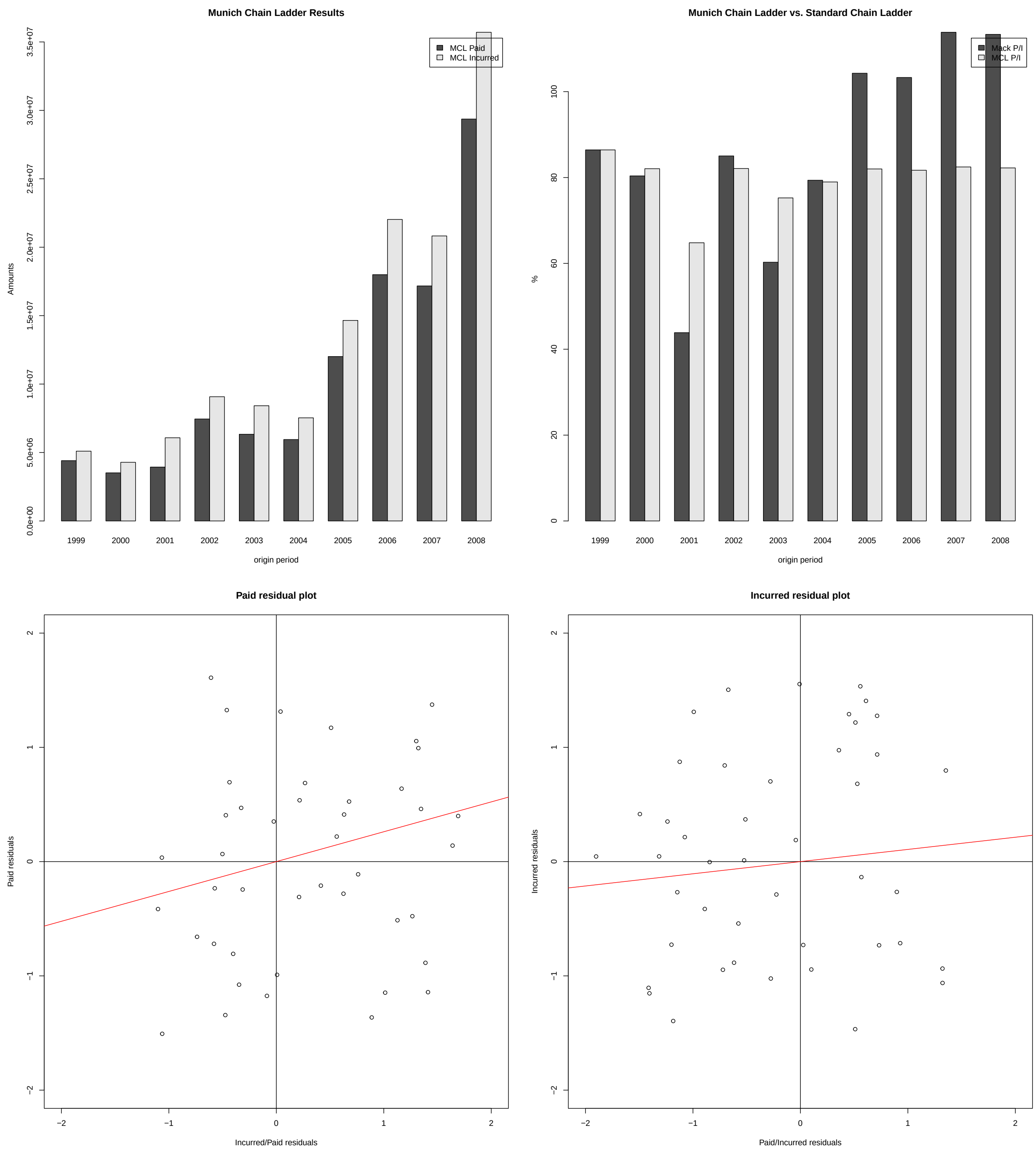


El segundo problema que se puede observar, es que, con el pasar de los períodos de desarrollo, se tienen menos datos, y las estimaciones son muy volátiles, incluso algunas veces se pueden obtener regresiones con el signo incorrecto en el coeficiente. Y por último, a veces no hay una estructura clara que refleje correlación. O la misma es muy débil.

El método de Munich considera todos los coeficientes de desarrollo juntos, para todos los años y todos los períodos, y también los ratios (P/I) y (I/P) teniendo todos los valores estandarizados, es decir, restando la esperanza y diviendo entre el desvío, obteniendo así datos con media 0 y desvío 1.

Luego, como los datos están estandarizados, se puede graficar todos los datos juntos para los factores de desarrollo individuales estandarizados de los pagos acumulados vs los ratios (I/P) y los factores de desarrollo individuales estandarizados de los siniestros incurridos vs los ratios (P/I), luego se puede hacer la regresión con la nube de puntos que, que ahora tiene más datos, y calcular la estimación de los factores de desarrollo a partir del modelo lineal. Lo mismo para la estimación de los factores de desarrollo individuales para los estimar la parte de la matriz que falta. Todo este método se puede aplicar a partir de la función 'MunichChainLadder' del paquete ChainLadder, a la que se le debe pasar como argumento los dos triangulos, el de pagos acumulados y el de siniestros incurridos.

Con la función `plot` pasándole un objeto del tipo `MunichChainLadder` genera la siguiente figura con 4 gráficos. El primero de ellos contiene la estimación de los siniestros pagados e incurridos ocurridos para cada período mediante el método de Munich Chain-Ladder, el siguiente gráfico muestra la obtención de los ratios (P/I) en términos porcentuales obtenidos mediante Munich Chain-Ladder (MCL), o lo obtenidos si se hacía Chain-Ladder por separado (Mack), mostrando como así se hubiesen obtenidos ratios por encima de 1 (o por encima de %100 en términos porcentuales). El gráfico de abajo a la izquierda, muestra la dispersión de todos los factores centrados y estandarizados de los pagos acumulados vs los ratios (I/P) con su respectiva regresión. Y el último gráfico muestra lo mismo pero para los factores de los siniestros incurridos respceto al ratio (P/I).



Al pedir el resumen con la función `summary` del objeto `Munich Chain Ladder` nos devuelve los últimos pagos acumulados y últimos siniestros incurridos, y el ratio P/I, luego también tiene las proyecciones de los pagos y de los incurridos mediante el método de Munich, y el ratio, al pedir que sea por año de origen mediante `summary(BayernMunich)$ByOrigin` esta informacioón nos la devuelve por año de origen, y se puede observar como ningún ratio supera la unidad.

	Latest Paid	Latest Incurred	Latest P/I Ratio	Ult. Paid	Ult. Incurred	Ult. P/I Ratio
1999	4408012.35	5099688.00	0.86	4408012.35	5099688.00	0.86
2000	3310585.34	4221137.00	0.78	3516429.02	4285192.30	0.82
2001	2183145.17	5969088.00	0.37	3938896.95	6078382.19	0.65
2002	5122735.27	8581805.00	0.60	7450536.68	9075686.58	0.82
2003	2613770.37	7276239.00	0.36	6336075.64	8419911.00	0.75
2004	2244504.33	5882585.00	0.38	5950165.65	7535352.06	0.79
2005	4475502.88	9901076.00	0.45	12013700.59	14652550.55	0.82
2006	5966324.20	12548654.00	0.48	17995072.95	22028140.99	0.82
2007	4760793.00	9171465.00	0.52	17172978.06	20825622.64	0.82
2008	4876379.00	10120889.00	0.48	29364788.76	35705671.10	0.82

Cuadro 9:

También se puede acceder al resumen pero para el total mediante `summary(BayernMunich)$Totals`, donde se tendrá la suma de las columnas anteriores, en la primer fila la sumade las diagonales, y su ratio, y en la segunda lo estimado y su ratio.

	Paid	Incurred	P/I Ratio
Latest:	39961751.923	78772626.000	0.507
Ultimate:	108146656.650	133706197.413	0.809

Cuadro 10: .

Si se estima de esta manera el factor de desarrollo individual para poder estimar los valores que están enseguida por debajo de la diagonal invertida, y luego de forma iterativa se completa la matriz, tanto la de pagos acumulados como la de siniestros incurridos, al final del período, cuando se evalúen los ratios (P/I) no se obtendrán los valores mayores a 1 que se obtenían cuando se hacía las dos matrices por separado.

Bibliografía

Alfaro Fuentes, Daniel de Jesús. 2016. «Modelos Chain-Ladder clásicos y bayesianos para el cálculo de reservas auxiliado con R». Tesis de Licenciatura, México: Universidad Nacional Autónoma de México. https://repositorio.unam.mx/contenidos/291089.

Gesmann, Markus, Daniel Murphy, Yanwei (Wayne) Zhang, Alessandro Carrato, Mario Wuthrich, Fabio Concina, y Eric Dal Moro. 2023. *ChainLadder: Statistical Methods and Models for Claims Reserving in General Insurance*. https://CRAN.R-project.org/package=ChainLadder.

Mack, Thomas. 1993. «Distribution-free Calculation of the Standard Error of Chain Ladder Reserve Estimates». *ASTIN Bulletin* 23 (2): 213-25. https://doi.org/10.2143/AST.23.2.2005092.

Quarg, Gunther, y Thomas Mack. 2004. «Munich Chain Ladder». *Blätter DGVFM* 26: 597-630. https://doi.org/10.1007/BF02808969.