Incurred But Not Reported (IBNR)

Seguros Generales y Modelos de Riesgo

Ignacio Campón & Joaquín Viola

FCEA FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y DE ADMINISTRACIÓN
IESTA 80 AÑOS INSTITUTO DE ESTADÍSTICA
UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA URUGUAY

Índice

1 Introducción

En este trabajo se pretende abordar distintos métodos para el cálculo de reservas técnicas asociadas al IBNR. El IBNR por sus siglas en inglés, son los siniestros incurridos y que aún no fueron reclamados. En muchos países, los seguros de responsabilidad civil, cuentan con un período de 10 años para el reclamo de un seguro luego de que el siniestro haya ocurrido.

La idea principal de las reservas de IBNR es poder estar cubierto en el futuro de siniestros que ocurrieron en el año corriente (mientras está activa la poliza), pero el reclamo es efectuado en los años siguientes.

Para poder calcular las reservas de IBNR hay varios métodos, basados en la utilización de información previa (recolectada en años anteriores), para poder predecir cómo se comportan los reclamos en los años siguientes.

Se suele trabajar con 3 matrices triangulares, donde las filas son años, y las columnas son los años transcurridos. Observesé el cuadro 1, en la última fila se encuentra el último año, el cuál se tiene datos para una sola columna, el año corriente. La fila anterior tendrá una columna más, es decir tendrá información de dos períodos transcurridos, de esta manera se llega a la primer fila, la cuál es el último año que se tiene en cuenta, y para el cual se tiene información de todos los años transcurridos, de esta manera queda explicada la forma de la matriz triangular.

Cuadro 1: Siniestros incurridos acumulados por año y por período transcurrido en pesos.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1999	652799	1383776	2634200	3167840	3842289	4029679	4454460	4817622	5012751	5099688
2000	1360795	2480988	2806387	3592401	3451088	3931688	4491687	4165270	4221137	
2001	1985553	3275646	3290023	3945474	4961886	4975029	5914580	5969088		
2002	2901555	4528347	4556763	5790821	6444829	7957380	8581805			
2003	3572829	4717083	5937065	6835232	7309686	7276239				
2004	2578343	4423917	4664371	5348014	5882585					
2005	4051902	6081465	8618348	9901076						
2006	5030173	8881224	12548654							
2007	6849422	9171465								
2008	10120889									

La primer matriz triangular tiene la información de los pagos acumulados de los siniestros ocurridos en cada año, y cuando fueron pagados efectivamente. Para la primer fila, en la primer columna se tienen los pagos de los siniestros ocurridos y pagados hace 10 años, luego en la siguiente columna se tiene los siniestros ocurridos en ese año pero reclamados y pagados en el siguiente, más los de la columna anterior (por ser pagos acumulados) y así sucesivamente.

La segunda matriz es la matriz de siniestros pendientes de pagos, que tiene para cada celda (año), los siniestros ocurridos en la fila a la que pertenece, y reportados pasado los años según la columna en la que está, es decir, salvo los de la primera columna, todos son reportados luego de pasado cierta cantidad de años, pero que aún no han sido pagados, ya sea por litigio, o por que se está estimando el valor final a pagar.

En última instancia tenemos la matriz triangular de siniestros incurridos (cuadro 1). En cada celda se tiene la suma de las dos matrices anteriores que es el total de los siniestros acumulados y reservados ocurridos en cada año y que han ido ocurriendo a lo largo de los años siguientes. Cada diagonal (en el sentido inverso, $X_{1,n}, X_{2,n-1}, \dots, X_{n,1}$) corresponde a los pagos acumulados y reservados de un ejercicio contable.

La reserva de IBNR es la reserva que debe tener la compañía pasado n años (en general 10 años) para poder cubrir los siniestros ocurridos en el año actual, y que serán reportados durante los siguientes años.

Se trabajará con la matriz de siniestros trabajada en el curso de "Solvencias de Compañías Aseguradoras" brindado por el profesor *Enrique Arónica* en Noviembre de 2023 en la Facultad de Ciencias Económicas (UDELAR). Se cuenta con la matriz de pagos acumulados, la matriz de siniestros pendientes de pagos y la de siniestros incurridos.

La figura 1 fue realizada con la función `plot` de `R` base, la cual fue aplicada a un objeto (matriz de siniestros incurridos) de clase `triangle`. Esta figura nos permite ver como crecen los siniestros incurridos en cada período con el correr de los años, obteniendo así una línea para cada año de ocurrencia y observando el crecimiento de los siniestros incurridos durante los períodos de desarrollo. Cada línea representa los siniestros incurridos en un período, y se ve como va aumentando los pagos acumulados y reservados con el correr de los períodos.

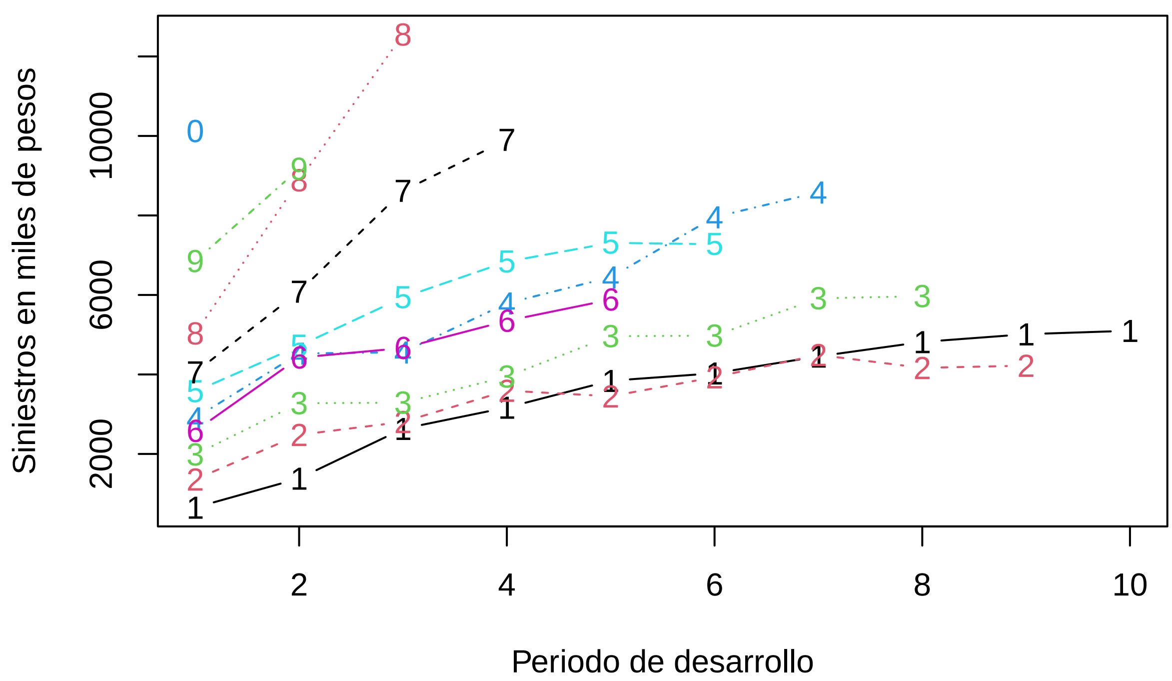


Figura 1: Desarrollo de los reclamos por año y período.

2 Chain-Ladder

El objetivo de este trabajo es presentar distintos métodos para estimar los siniestros incurridos que se tendrán pasado los años de desarrollo. Y de esta manera obtener la reserva necesaria para hacer frente a lo que será reclamado.

Una de las principales herramientas del Chain-Ladder son los factores de desarrollo que se definiran más adelante. Se utilizan tanto en las matrices de pagos acumulados como en la de siniestros incurridos, y es el factor por el que los valores van creciendo de un período a otro. A veces se utiliza un solo factor de desarrollo para todo el período de desarrollo (ejemplo, para el crecimiento de los siniestros/pagos del período 6 al 7, sin importar el año de ocurrencia, lo que sería columna por columna) y a veces es de particular interés los factores individuales, es decir, poder diferenciar tanto para el período de desarrollo como al año de ocurrencia (celda por celda).

En primer lugar se presentará el método de **Chain-Ladder clásico**, que utiliza la información del desarrollo de los reportes de los siniestros durante los años posteriores a que hayan ocurrido para predecir cómo se comportarán en el futuro, que en general, se suele asumir que luego de terminado el último período de desarrollo, no habrá nuevos reclamos y los costos no aumentarán. Luego, se presentará una variación del método, que utiliza un modelo de regresión en función de los años transcurridos a partir de los factores de desarrollos observados, de esta manera, obtener mediante estimaciones un factor de desarrollo mayor a 1 para el último período de desarrollo. Después se presentará el método de **Mack Chain-Ladder**, que bajo ciertos supuestos, obtiene una estimación de los desvíos de los siniestros a futuros y de la reserva de IBNR. Por último se presentará el método de **Munich Chain-Ladder** que utiliza un modelo de regresión y parte de la correlación existente entre los siniestros incurridos y los pagos acumulados.

2.1 Chain Ladder 'clásico'

Uno de los métodos más utilizados es el de "Chain Ladder" (Escalera de Cadena). A partir de la matriz que se puede ver en el cuadro 1, cálcula los factores de desarrollo, que miden el crecimiento de los gastos por siniestro pasado los años. El factor de desarrollo representa la proporción que aumentan el monto de los siniestros incurridos entre dos períodos consecutivos (el factor de desarrollo q_j representa el aumento de los siniestros incurridos entre el período j y el $j+1$). Para el cálculo de este, se suma todos los siniestros incurridos en el período $j+1$, es decir $\sum_{i=1}^{n-j} X_{i,j+1}$ y se los divide entre la misma cantidad de filas, del período anterior (j), es decir $\sum_{i=1}^{n-j} X_{i,j}$ de esta forma se obtiene:

$$\hat{q}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} X_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{n-j} X_{i,j}}$$

Obersevesé la figura 2, la cual representa la matriz de los siniestros incrurridos,equivalente al cuadro 1. En sombreado las columnas del período 1 y 2 necesarias para cálcular $\hat{q}_1$.

Siniestros Incurridos										
Período de Ocurrencia	Período de Desarrollo									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1999/2000	652.799	1.383.776	2.634.200	3.167.840	3.842.289	4.029.679	4.454.460	4.817.622	5.012.751	5.099.688
2000/2001	1.360.795	2.480.988	2.806.387	3.592.401	3.451.088	3.931.688	4.491.687	4.165.270	4.221.137	
2001/2002	1.985.553	3.275.646	3.290.023	3.945.474	4.961.886	4.975.029	5.914.580	5.969.088		
2002/2003	2.901.555	4.528.347	4.556.763	5.790.821	6.444.829	7.957.380	8.581.805			
2003/2004	3.572.829	4.717.083	5.937.065	6.835.232	7.309.686	7.276.239				
2004/2005	2.578.343	4.423.917	4.664.371	5.348.014	5.882.585					
2005/2006	4.051.902	6.081.465	8.618.348	9.901.076						
2006/2007	5.030.173	8.881.224	12.548.654							
2007/2008	6.849.422	9.171.465								
2008/2009	10.120.889									

Figura 2: En sombreado, las filas de la columna correspondiente al período de desarrollo 1 y 2, que se dividen para calcular el factor de desarrollo del período 1.

Por otro lado, se define el *factor de desarrollo acumulado*, Q_j, que se obtiene de de manera iterativa, de la forma:

$$Q_{j-1} = q_{j-1} \cdot Q_j$$

En particular, para el último período de desarrollo se tiene, en general, que $Q_n = 1$ con n correspondiente al último período.

Una vez obtenidos los factores, se puede predecir los siniestros incurridos para los valores por debajo de la diagonal de la manera:

$$X_{i,c_i+1} = X_{i,c_i} \cdot q_{c_i}$$

siendo i el período de ocurrencia, c_i es el último período de desarrollo que se tiene información y q_{c_i} el factor de desarrollo del período de desarrollo c_i.

De forma inmediata, se puede obtener con los factores de desarrollo acumulado el total a pagar y reservar por los siniestros ocurridos en el año i (X_i) de la manera:

$$X_i = Q_{c_i} \cdot X_{i,c_i}$$

Que da el mismo resultado que hacer $X_i = X_{i,c_i} \cdot q_{c_i} \cdot \dots \cdot q_n$, es decir, predecir todos los valores de la fila por debajo de la diagonal, y quedarnos con la última columna. Donde $c_i = n - i + 1$ y queda definida la diagonal con todos los pares (i, c_i).

Luego, denominamos a X_i como la *pérdida esperada* por los siniestros incurridos en el año i. La reserva de $IBNR_i$ del período i, es la reserva para los siniestros ocurridos en el año i y que fueron denunciados en los años posteriores. Será calculada como la diferencia entre la pérdida esperada, y el último período para el que tenemos los pagos acumulados y reservados en la matriz de siniestros incurridos (X_{i,c_i})

$$IBNR_i = X_i - X_{i,c_i}$$

Finalmente obtenemos el $IBNR$ como la suma total de los $IBNR_i$ para cada período de ocurrencia:

$$IBNR = \sum_{i=1}^{n} IBNR_i = \sum_{i=1}^{n} X_i - X_{i,c_i}$$

El cuadro 2 representa un resúmen de los cálculos a realizar para obtener el $IBNR$, en la primer columna se representa el X_{i,c_i}, en la segunda el Q_i, en la tercera X_i y en la última el $IBNR_i$.

Cuadro 2: Cálculo del IBNR según el método clásico.

	Último siniestro incurrido	Factor de desarrollo acumulado	Pérdida Esperada	IBNR
1999	5099688.00	1.00	5099688.00	0.00
2000	4221137.00	1.02	4292896.33	71759.33
2001	5969088.00	1.04	6237696.96	268608.96
2002	8581805.00	1.05	9028058.86	446253.86
2003	7276239.00	1.18	8585962.02	1309723.02
2004	5882585.00	1.28	7517943.63	1635358.63
2005	9901076.00	1.42	14069429.00	4168353.00
2006	12548654.00	1.69	21169579.30	8620925.30
2007	9171465.00	2.12	19489363.12	10317898.12
2008	10120889.00	3.30	33368571.03	23247682.03
Total	78772626.00		128859188.25	50086562.25

En algunas ocasiones, la asignación de un valor $Q_n = 1$ para el último período de desarrollo puede no ser lo mejor para la representación de la realidad, de esta forma, se puede asignar un valor mayor a 1 para el factor de desarrollo del último año, $Q_n > 1$, por ejemplo $Q_n = 1,05$, cabe aclarar que los siguientes factores de desarrollo quedaran determinados a partir de este primero.

2.2 Chain Ladder con regresión

Este modelo permite calcular el factor de desarrollo para Q_n asumiendo una estructura de regresión para los factores de desarrollos (simples) en función de los períodos de desarrollo. Si bien estos no varían mucho a lo largo del tiempo, si se puede observar una estructura de regresión lineal si hacemos el logaritmo del aumento proporcional $(q-1)$ de los siniestros incurridos en función de los períodos de desarrollo $Log(q-1) \sim$ períodos de desarrollo.

$$Log(q_j - 1) = \alpha + \beta \cdot j$$

siendo α la ordenada en el origen, β la pendiente y j el período de de desarrollo.

El cuadro 3 representa los factores de desarrollo para cada período, q_j, de los siniestros incurridos presentados en el cuadro 1.

Para modelar una regresión lineal de la forma $Log(q_j - 1) = \alpha + \beta \cdot j$, es necesario haber calculado los factores de desarrollo. Previamente chequendo si para el gráfico de dispersión de los datos corresponde el modelo de regresión lineal. Una vez obtenidos los q_j se modela. La figura 3 representa el resultado de la misma.

Cuadro 3: Factores de desarrollo de los sinisestros incurridos.

	Factores de desarrollo
1	1.551
2	1.260
3	1.187
4	1.112
5	1.083
6	1.122
7	1.006
8	1.028
9	1.017

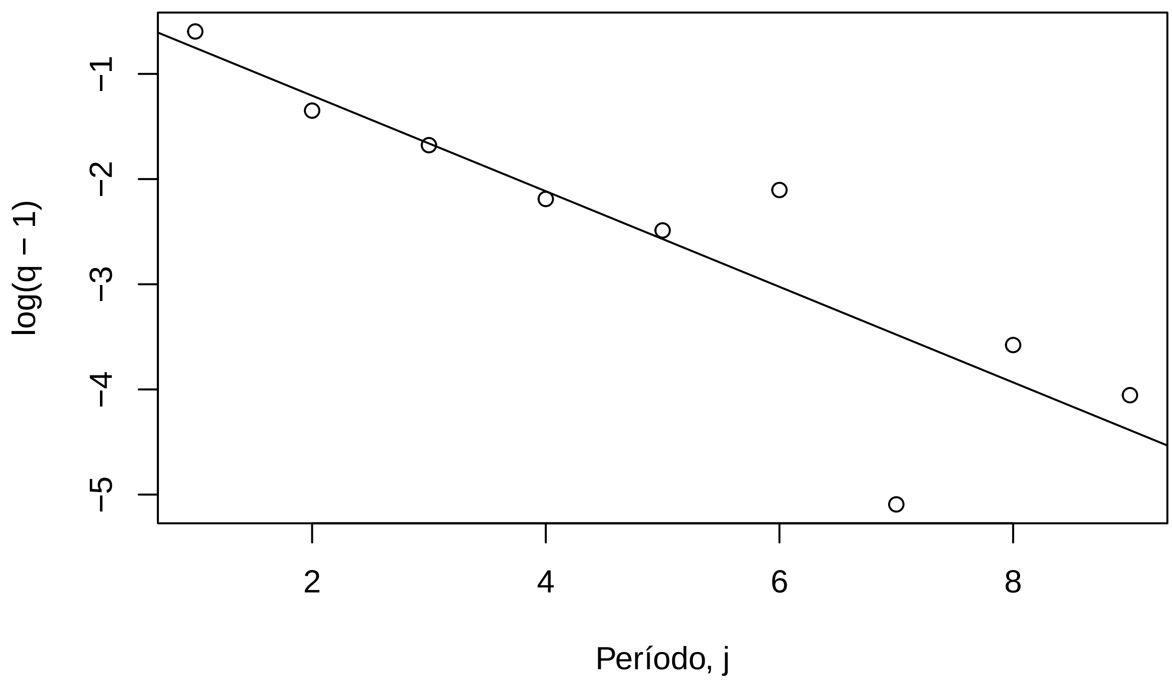
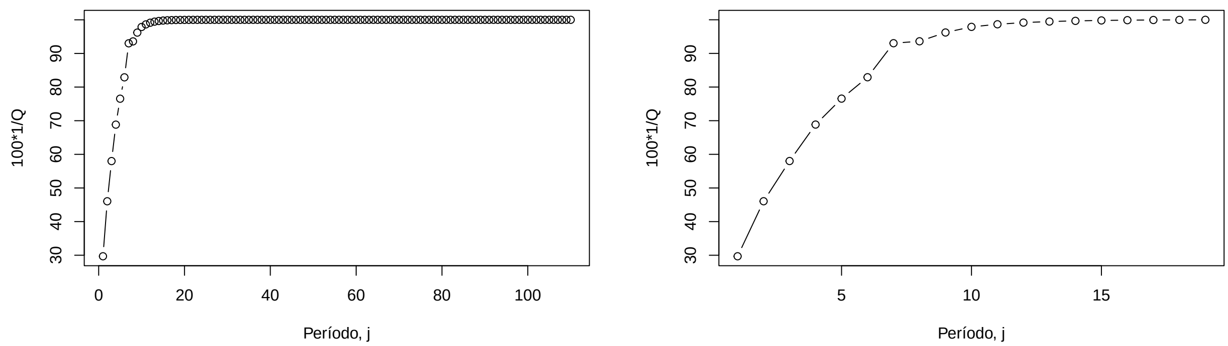


Figura 3: Extrapolación Log-lineal de los factores año a año.

Luego, se sugiere extrapolar los datos para 100 períodos de desarrollo, y se puede observar que el $Log(q_j - 1)$ empieza a converger cuando j aumenta. De esta forma podemos obtener una estimación para Q_n, podemos calcular como:

$$\hat{Q}_n = \prod_{j \geq n} \hat{q}_j$$

De esta forma para los siniestros incurridos que venimos viendo, se obtiene $\hat{Q}_n = 1.021795$. La figura 4 representa la extrapolación a 100 períodos de desarrollo.



(a) 109 períodos de desarrollo. (b) Primeros 19 períodos de desarrollo.

Figura 4: Patrón de desarrollo de reclamaciones esperado.

Nuestros factores de desarrollo serán los obtenidos normalmente hasta el momento $n-1 = 9$ y para $q_n = q_{10}$ se le asigna el valor de $\hat{Q}_n$ calculado anteriormente, que para el último período de desarrollo era válida la equivalencia.

De esta forma, se hace el análogo al cuadro 2 y se cálcula nuevamente el $IBNR$ con este método, observesé los resultados en el cuadro 4.

Cuadro 4: Cálculo del IBNR según el método con regresión.

	Último siniestro incurrido	Factor de desarrollo acumulado	Pérdida Esperada	IBNR
1999	5099688.000	1.022	5211881.136	112193.136
2000	4221137.000	1.040	4389982.480	168845.480
2001	5969088.000	1.069	6380955.072	411867.072
2002	8581805.000	1.075	9225440.375	643635.375
2003	7276239.000	1.206	8775144.234	1498905.234
2004	5882585.000	1.306	7682656.010	1800071.010
2005	9901076.000	1.453	14386263.428	4485187.428
2006	12548654.000	1.724	21633879.496	9085225.496
2007	9171465.000	2.172	19920421.980	10748956.980
2008	10120889.000	3.368	34087154.152	23966265.152
Total	78772626.000		131693778.363	52921152.363

Se observa que al asignarle un factor de desarrollo acumulado mayor a 1 para el último período de desarrollo, se obtiene que las reservas por IBNR aumentan aproximadamente en \$3.000.000 respecto al método clásico representado en el cuadro 2, este monto representa aproximadamente un aumento del %5 en las reservas. Esto se traduce en menores ganancias para la compañia aseguradora pero permite estar mas cubierto frente a acontecimientos siniestrales ocurridos pero no reportados.

3 Mack Chain-Ladder

Thomas Mack publica en 1993 un método para obtener estimaciones de los errores estándar de las estimaciones de pérdida esperada, y por consecuencia del IBNR, se puede aplicar tanto en la matriz triangular de pérdida acumulada como en la matriz triangular de siniestros incurridos, y es un método para predecir el triángulo inferior faltante de la matriz, es decir, los siniestros incurridos a futuro de cada año de ocurrencia para cada período de desarrollo.

Para predecir los siniestros incurridos a futuro $X_{i,j}$ con $j > n - i + 1$ se asume:

- $\mathbb{E}(q_{i,j}|X_{i,1}, \dots, X_{i,j}) = q_j$ con $q_{i,j} = \frac{X_{i,j+1}}{X_{i,j}}$
- $\mathbb{V}(q_{i.j}|X_{i,1}, \dots, X_{i,j}) = \frac{\sigma_j^2}{w_{i,j} X_{i,j}^{\alpha}}$
- $\{X_{i,1}, \dots, X_{i,n}\}, \{X_{k,1}, \dots, X_{k,n}\}$ son independientes del período de origen $(i \neq k)$

Con $w_{i,j} \in [0; 1]$ y $\alpha \in \{0, 1, 2\}$, se obtienen estimaciones insesgadas de las pérdidas esperadas y de las reservas de IBNR junto a los errores estándar y el coeficiente de variación.

Luego, a partir de la fórmula del error cuadrático medio, $ECM(\hat{X}_{i,n}) = \mathbb{E}((\hat{X}_{i,n} - X_{i,n})^2 | X_{i,1} \dots, X_{i,n-i+1}) = \mathbb{V}(\hat{X}_{i,n}) + (\mathbb{E}(X_{i,n}|X_{i,1} \dots, X_{i,n-i+1}) - \hat{X}_{i,n})^2$ se podrá calcular el error cuadrático medio como la suma de los errores estocásticos y el error de estimación y se necesitará una fórmula para la varianza.

Se puede notar que el factor de desarrollo q_j es el promedio ponderado de los factores $q_{i,j} = X_{i,j+1}/X_{i,j}$, por lo que la varianza de $X_{i,j+1}/X_{i,j}$ (dado los siniestros hasta el período de desarrollo j) es inversamente proporcional a $X_{i,j}$, donde se asume que todos los siniestros incurridos pesan igual y $\alpha = 1$ en las condiciones planteadas anteriormente.

$$\mathbb{V}(X_{i,j+1}|X_{i,1}, \dots, X_{i,j}) = X_{i,j} \cdot \sigma_j^2$$

Donde σ_j^2 es un parámetro desconocido que debe ser estimado, y es la varianza implícita bajo el método de 'Chain Ladder'. Por lo que la varianza estimada será la suma de los errores al cuadrado ponderados de la estimación de los factores de desarrollo año a año.

$$\hat{\sigma_j}^2 = \frac{1}{n-j-1} \cdot \sum_{i=1}^{n-j} X_{i,j} \left(\frac{X_{i,j+1}}{X_{i,j}} - \hat{q_j} \right)^2 = \frac{1}{n-j-1} \cdot \sum_{i=1}^{n-j} X_{i,j} \left(q_{i,j} - \hat{q_j} \right)^2$$

Siendo $\hat{\sigma_j}^2$ un estimador insesgado para $1 \leq j \leq n-2$, obteniendo una estimación del desvío al hacer la raíz. Para estimar σ_{n-1} , si se tiene que $\hat{q}_{n-1} = 1$ se puede utilizar $\sigma_{n-1} = 0$ ya que se asume que el desarrollo de los siniestros termina en el tiempo $n - 1$, de lo contrario se puede extrapolar utilizando la reducción exponencial de los desvíos de forma tal que $\hat{\sigma}_{n-1}$ cumpla con la razón.

$$\frac{\hat{\sigma}_{n-3}}{\hat{\sigma}_{n-2}} = \frac{\hat{\sigma}_{n-2}}{\hat{\sigma}_{n-1}}$$

$$\hat{\sigma}_{n-1} = \frac{\hat{\sigma}^2_{n-2}}{\hat{\sigma}_{n-3}}$$

Siendo R_i las reservas de IBNR del año i, estas son calculadas como $R_i = X_{i,n} - X_{i,n-i+1}$ y estimadas de la forma $\hat{R}_i = \hat{X}_{i,n} - X_{i,n-i+1}$ donde el total de los costos incurridos del año i son estimados a través de los factores de desarrollo, ya sea calculando el total para todos los años de desarrollo con los factores año a año, o a través del factor de desarrollo acumulado $\hat{X}_{i,n} = Q_{n-i+1} \cdot X_{i,n-i+1}$. Luego, como la única parte aleatoria de $\hat{R}_i$ es $\hat{X}_{i,n}$ el $ECM(\hat{R}_i) = ECM(\hat{X}_{i,n})$

$$\widehat{ECM}(\hat{R}_i) = \hat{X}^2_{i,n} \sum_{j=n-i+1}^{n-1} \frac{\hat{\sigma_j}^2}{\hat{q}_j} \left(\frac{1}{\hat{X}_{i,j}} - \frac{1}{\sum_{l=1}^{I-j} X_{l,j}} \right)$$

La función `MackChainLadder` del paquete `ChainLadder` nos da una tabla con las reservas de IBNR para cada año, su desvío y su coeficiente de variación, y las mismas medidas para el total, teniendo especial atentción de que el desvío del total no es igual a la suma del desvío, nos muestra la última pérdida obtenida, la última pérdida esperada, la relación entre estas, la reserva de IBNR, el desvío y el coeficiente de variación.

Cuadro 5: Estimaciones mediante Método Mack Chain-Ladder por año de Ocurrencia

	Latest	Dev.To.Date	Ultimate	IBNR	Mack.S.E	CV(IBNR)
1999	5099688.00	1.00	5099688.00	0.00	0.00	
2000	4221137.00	0.98	4294344.90	73207.90	158102.19	2.16
2001	5969088.00	0.96	6242289.13	273201.13	246430.13	0.90
2002	8581805.00	0.95	9029697.31	447892.31	708612.58	1.58
2003	7276239.00	0.85	8589919.40	1313680.40	782964.48	0.60
2004	5882585.00	0.78	7521436.22	1638851.22	1070034.24	0.65
2005	9901076.00	0.70	14077508.98	4176432.98	1880770.51	0.45
2006	12548654.00	0.59	21175489.41	8626835.41	2602113.44	0.30
2007	9171465.00	0.47	19492933.42	10321468.42	3717510.05	0.36
2008	10120889.00	0.30	33356395.46	23235506.46	6120205.09	0.26

Cuadro 6: Estimaciones mediante Método Mack Chain-Ladder para el total

	Totals
Latest:	78772626.00
Dev:	0.61
Ultimate:	128879702.24
IBNR:	50107076.24
Mack S.E.:	11156939.54
CV(IBNR):	0.22

También se puede acceder a los factores mediante `mackTRI$f` (Cuadro 7), o a la matriz completa con la estimación de los siniestros incurridos en los años siguientes mediante `mackTRI$FullTriangle` (Cuadro 8).

Cuadro 7: Factores de desarrollo

	Factores de desarrollo
1	1.551
2	1.260
3	1.187
4	1.112
5	1.083
6	1.122
7	1.006
8	1.028
9	1.017
10	1.000

Cuadro 8: Matriz Completa con la estimación de los Siniestros Incurridos a futuro

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1999	652799	1360795	1985553	2901555	3572829	2578343	4051902	5030173	6849422	10120889
2000	1383776	2480988	3275646	4528347	4717083	4423917	6081465	8881224	9171465	15694252
2001	2634200	2806387	3290023	4556763	5937065	4664371	8618348	12548654	11551567	19767093
2002	3167840	3592401	3945474	5790821	6835232	5348014	9901076	14893269	13709884	23460415
2003	3842289	3451088	4961886	6444829	7309686	5882585	11010150	16561547	15245604	26088346
2004	4029679	3931688	4975029	7957380	7276239	6371162	11924596	17937063	16511825	28255109
2005	4454460	4491687	5914580	8581805	8163841	7148357	13379234	20125140	18526042	31701847
2006	4817622	4165270	5969088	8634502	8213971	7192252	13461390	20248719	18639802	31896514
2007	5012751	4221137	6135874	8875763	8443483	7393214	13837522	20814500	19160627	32787752
2008	5099688	4294345	6242289	9029697	8589919	7521436	14077509	21175489	19492933	33356395

La función `plot` recibe como argumento un objeto del tipo `MackChainLadder` y genera graficos con las estimaciones de los siniestros incurridos a futuro y un intervalo de confianza así como información sobre los residuos estandarizados.

También se puede graficar la predicción del desarrollo de los siniestros incurridos a futuro junto a una medida de la dispersión, separado por cada año de ocurrencia, se puede notar que para años de ocurrencia más reciente, para los cuáles se requiere estimar más valores, el intervalo de confianza empieza en períodos de desarrollo anteriores, y tiene mayor amplitud.

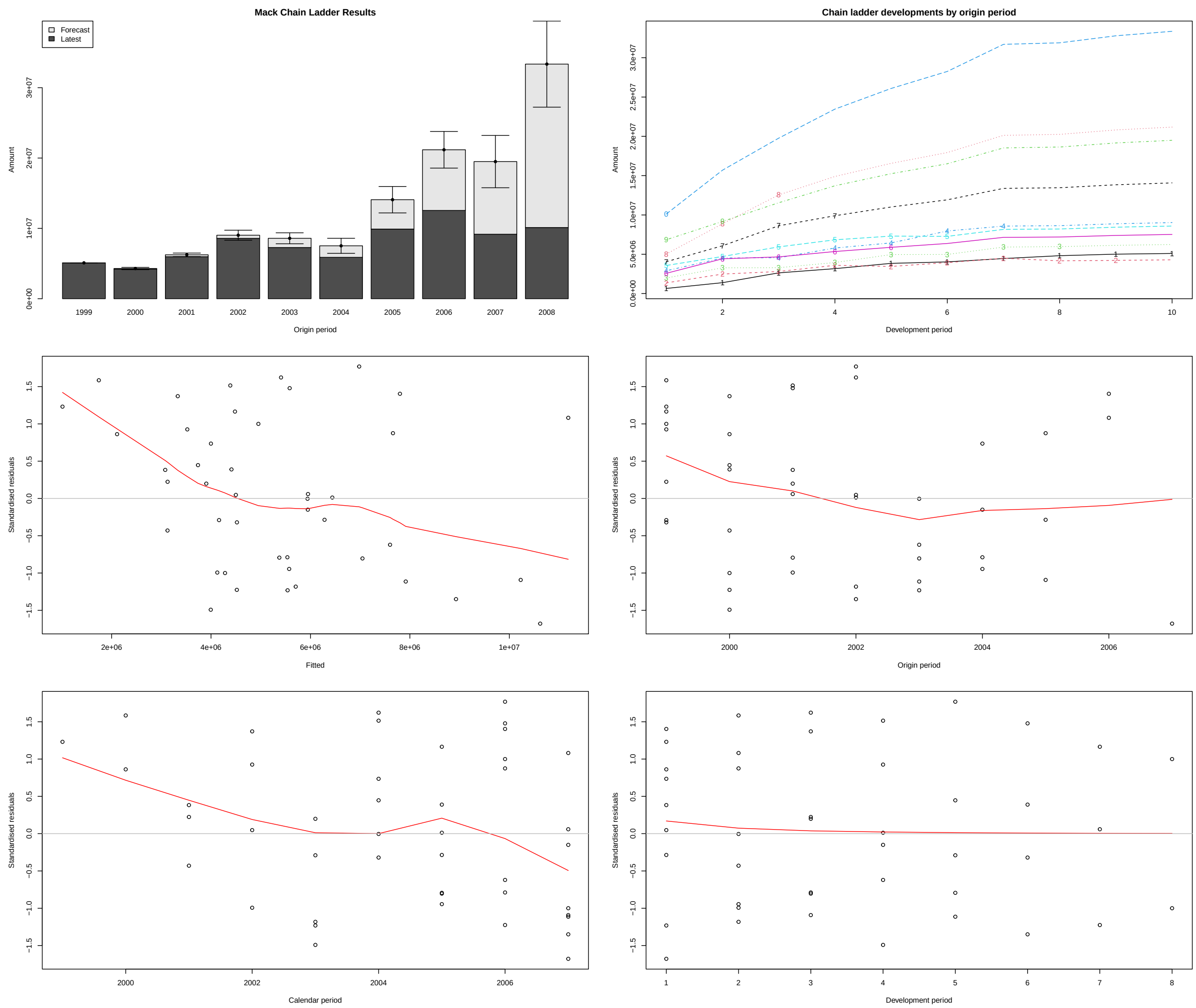


Figura 5: Gráfico estandar para objetos MackChain-Ladder

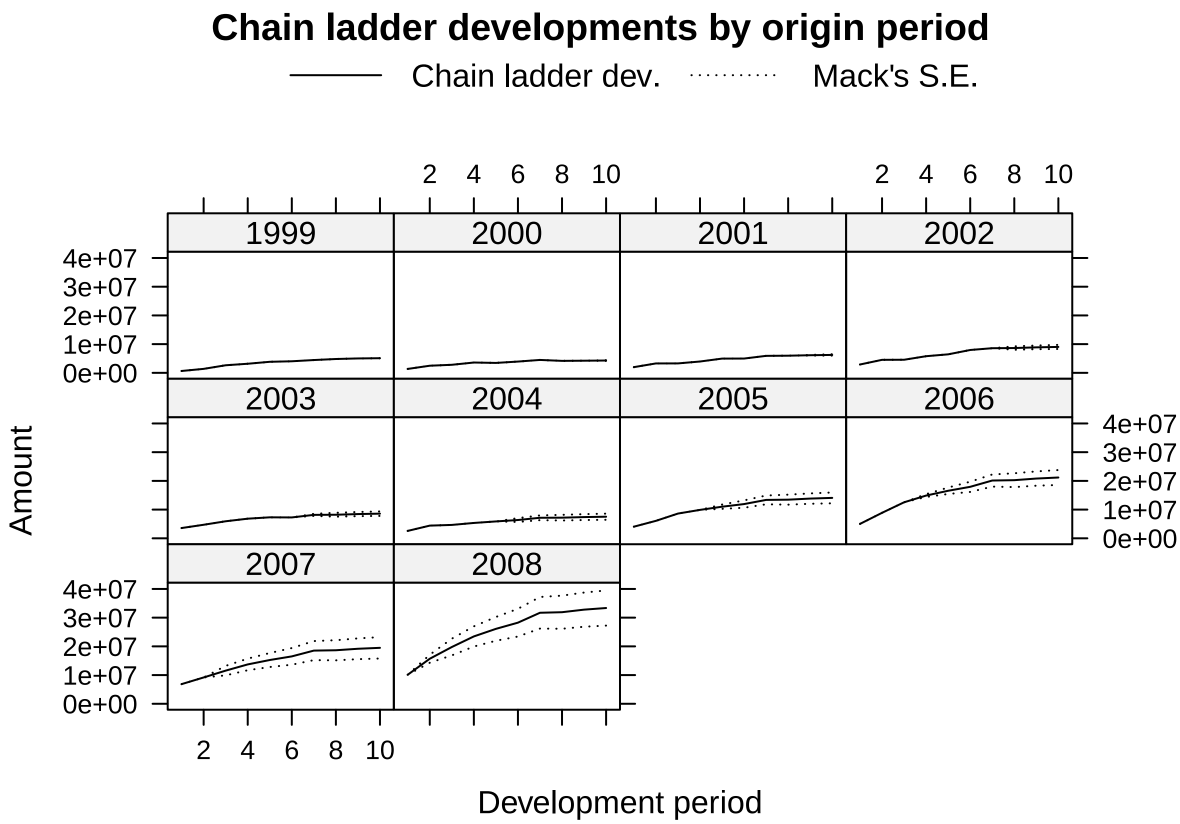


Figura 6: lattice = TRUE para obtener la estimación del desarrollo para cada año de ocurrencia

4 Munich Chain Ladder

El método de Munich utiliza la correlación positiva entre el triángulo de siniestros incurridos y el triángulo de siniestros pagados acumulados para proyectar los futuros pagos. Como hasta ahora se venía trabajando con el triángulo de siniestros incurridos, ahora se debe agregar el triángulo de pagos acumulados.

Llamando I a la matriz de siniestros incurridos y P a la matriz de siniestros pagados acumulados, se halla la matriz P/I calculada como la división de celda a celda de la matriz P entre la matriz I, y representa la fracción de los siniestros incurridos que ya están pago de cada año ocurrencia durante los períodos de desarrollo. Donde se suele observar que a medida que hay más períodos de desarrollo la mayoría de los siniestros han sido pagados.

Cuadro 9: Proporción de siniestros incurridos que han sido pagos en cada período de desarrollo.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1999	0.5712	0.4191	0.2374	0.2043	0.2524	0.3934	0.5571	0.6733	0.8434	0.8644
2000	0.2671	0.2708	0.2546	0.2058	0.2168	0.2695	0.4919	0.7259	0.7843	
2001	0.3263	0.3150	0.3936	0.4187	0.4143	0.4693	0.4024	0.3657		
2002	0.1413	0.2445	0.3226	0.2988	0.3824	0.5337	0.5969			
2003	0.2329	0.3176	0.2790	0.2980	0.3529	0.3592				
2004	0.3728	0.3429	0.4024	0.4045	0.3816					
2005	0.5250	0.5667	0.5095	0.4520						
2006	0.4937	0.4846	0.4755							
2007	0.4634	0.5191								
2008	0.4818									

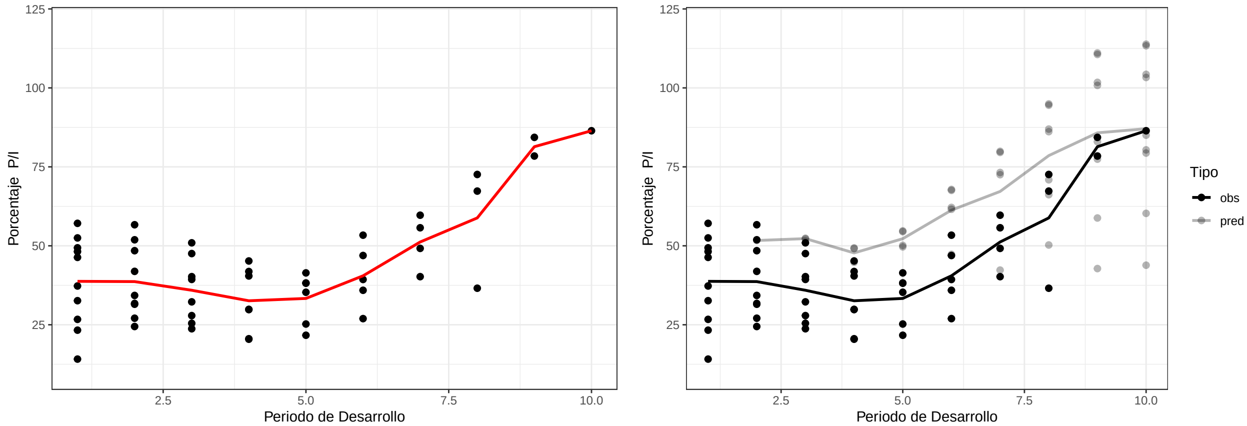
4.1 Problemas del Chain-Ladder por separado (SCL)

Formalmente, se tiene que $(P/I)_{i,j} = P_{i,j}/I_{i,j}$, luego, mediante los métodos vistos antes de Chain Ladder se puede estimar los valores faltantes de ambas matrices con los factores de desarrollo año a año a partir de la diagonal inversa, obteniendo el resultado de los ratios si se hace Chain-Ladder por separado (Método SCL).

Se puede notar en la figura 7b que para los valores proyectados en las dos matrices por separado a partir de cierto período de desarrollo se tiene que los siniestros pagados significan una proporción mayor a 1 que los siniestros incurridos, este error se da debido a que se aplicó el método de Chain-Ladder por separado a ambos triángulos (SCL) y no se tuvo en cuenta la estructura de correlación entre ambos triángulos.

Para concluir el principal resultado de este método, se debe hacer cuentas con los factores de desarrollo y las proyecciones tanto en la matriz de pagos acomulados como la de siniestros incurridos. Para esto define el promedio de los ratios en el período de desarrollo t:

$$(P/I)_t := \frac{\sum_{j=1}^{n} P_{j,t}}{\sum_{j=1}^{n} I_{j,t}} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} I_{j,t}} \cdot \sum_{j=1}^{n} I_{j,t} \cdot (P/I)_{j,t}$$



(a) Valores observados.

(b) Valores observados y proyectados.

Figura 7: Ratio P/I en 100% con recta que une las medias por período de desarrollo

Y luego, recordando que $c_i : n - i + 1$ es el último período de desarrollo del que se tiene información para los siniestros, tanto los pagados acumulados como los incurridos en el año i y se puede observar que los pares (i, c_i) son los índices de la diagonal invertida de las matrices. Observando que para el año i, los valores de $P_{i,t}$ y $I_{i,t}$ son proyecciones para $t > c_i$ se tiene que el ratio $(P/I)_{i,t}$ se calcula

$$(P/I)_{i,t} = \frac{P_{i,t}}{I_{i,t}} = \frac{P_{i,c_i} \cdot q^P_{c_i} \cdot \ldots \cdot q^P_{t-1}}{I_{i,c_i} \cdot q^I_{c_i} \cdot \ldots \cdot q^I_{t-1}}$$

A partir de las fórmulas de los factores de desarrollo, se nota que para $t > c_i$:

$$(P/I)_{i,t} = \frac{P_{i.c_i} \cdot \frac{\sum_{j=1}^n P_{j,t}}{\sum_{j=1}^n P_{j,c_i}}}{I_{i.c_i} \cdot \frac{\sum_{j=1}^n I_{j,t}}{\sum_{j=1}^n I_{j,c_i}}}$$

Y reordenando se tiene la siguiente relación para los ratios proyectados mediante la aplicación de Chain-Ladder por separado:

$$\frac{(P/I)_{i,t}}{(P/I)_t} = \frac{(P/I)_{i,c_i}}{(P/I)_{c_i}}$$

Que indica que para cada año de accidente, el ratio de $(P/I)_{i,t}$ con el $(P/I)_t$ promedio en el período de desarrollo t, debe cumplir la misma relación que en el período c_i, y esto se ve claramente en el gráfico 7b cuando se hace Chain-Ladder por separado siendo la principal debilidad de este método.

4.2 Modelado con Munich Chain-Ladder

El modelo de Munich Chain-Ladder incorpora la correlación entre la matriz de pagos acumulados P y la de siniestros incurridos I. Vemos que la correlación entre los factores de desarrollo para cada año de ocurrencia del primer período de desarrollo de la matriz de pagos acumulados, es decir, el vector de $q^P_{i,1}$ $\forall i = \{1, 2, \ldots, 10\}$ respecto a los ratios $(P/I)_{i,1}$ es de -0.7278.

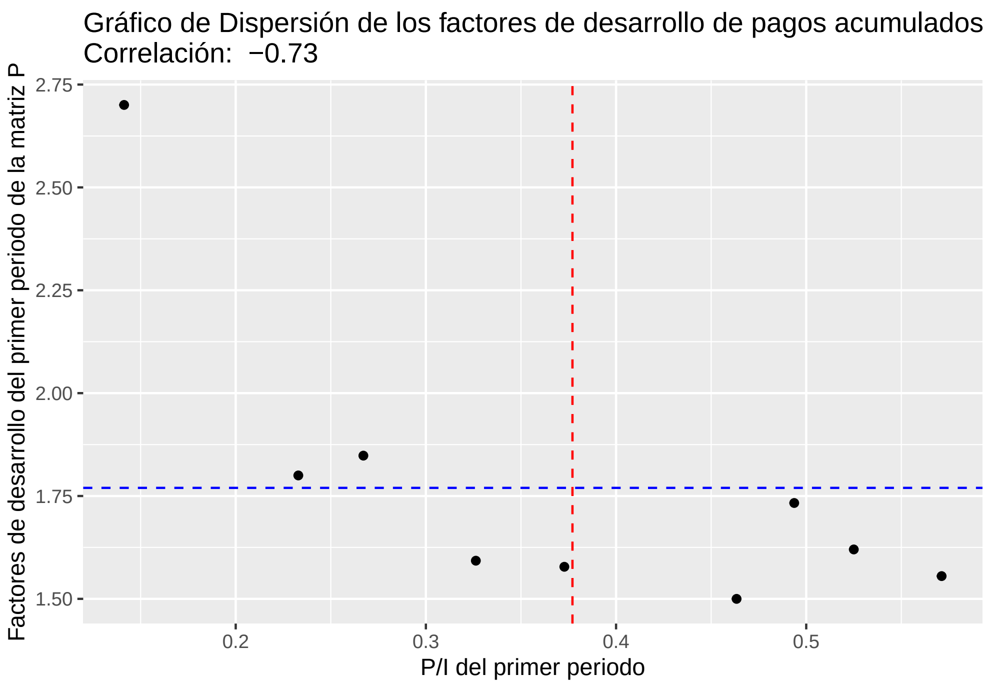


Figura 8: Gráfico de Puntos de Ratios P/I y Factores de desarrollo de la matriz de pagos acumulados para el primer período

Y por otro lado, haciendo lo mismo para los factores de desarrollo individuales del primer período de la matriz de siniestros incurridos y los ratios del primer período de desarrollo se tiene una correlación positiva más débil de 0.3572

Parece ser que uno de los problemas principales de hacer SCL es asumir un factor igual para todos los años de ocurrencia, dado un período de desarrollo y se nota que estos factores depende de los ratios (P/I).

También es claro que con el correr de los períodos de desarrollo se tendrán menos puntos en nuestro gráfico, y los resultados serán menos consistentes, y además, los factores de desarrollo individuales para cada año deben ser ajustados tanto para la matriz de pagos acumulados como la de siniestros incurridos, pero la pregunta es en que medida cada uno, esto expresa la idea básica para resolver el problema del método SCL.

Siendo que para cada período de desarrollo se tiene un gráfico de puntos como el anterior, pero cada vez con menos puntos, la idea es hacer una regresión lineal en cada caso, y estimar el factor de desarrollo para cada (P/I), y de esta forma se puede predecir la parte restante

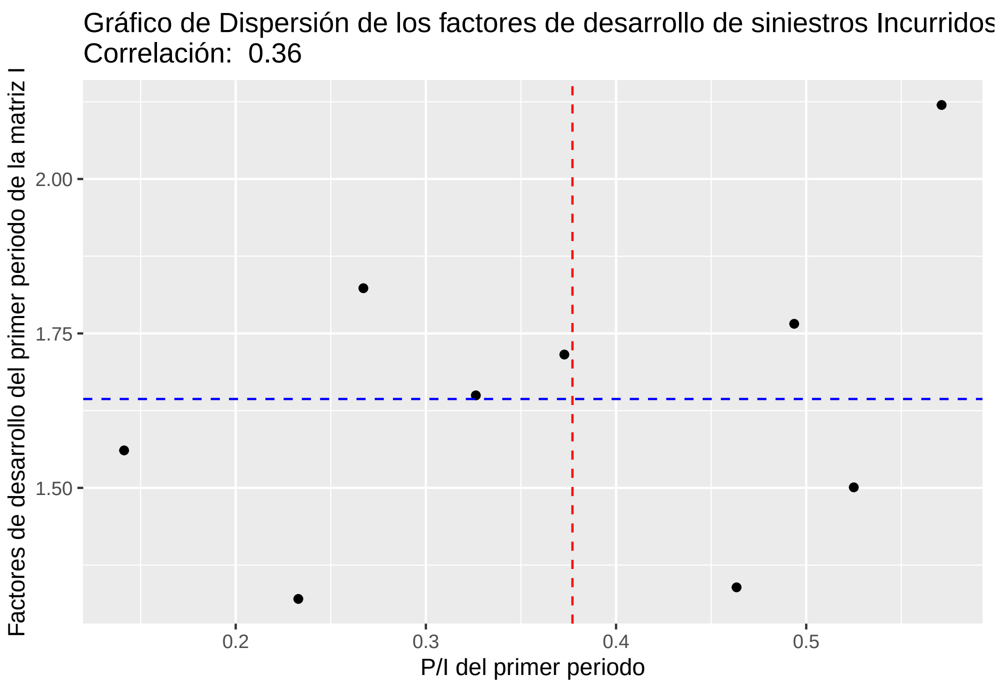


Figura 9: Gráfico de Puntos de Ratios P/I y Factores de desarrollo de la matriz de siniestros incurridos para el primer período

de la matriz. Por ejemplo, para el factor de desarrollo individual $q_{1,10}$ que no se tiene valores de la columna siguiente del triángulo para calcularlo, se puede predecir con la regresión a partir del valor $(P/I)_{1,10}$

El método de Munich Chain-Ladder también incorpora los ratios $(I/P) = 1/(P/I)$, y la regresión de los factores de desarrollo de los pagos acumulados se hace respecto a este ratio.

El segundo problema que se puede observar, es que, con el pasar de los períodos de desarrollo, se tienen menos datos, y las estimaciones son más volátiles, incluso algunas veces se pueden obtener regresiones con el signo incorrecto en el coeficiente. Y por último, a veces no hay una estructura clara que refleje correlación. O la misma es muy débil.

El método de Munich utiliza los coeficientes de desarrollo centrados y estandarizados al considerarlos todos juntos, y de esta manera se puede trabajar con el vector que los contiene a todos, y así eliminar el problema de tener menos datos para la regresión.

La regresión que se hace busca predecir los factores de desarrollo estandarizados en función de los ratios estandarizados, y justamente por tener los datos estandarizados permite trabajar con todos los factores individuales y sus respectivos ratios sin importar el año y período de desarrollo al que pertenezca.

Los factores $(q^I_{i,t})$ $\forall t \geq c_i$ se estimaran mediante la regresión respecto a (P/I) y los factores (q^P_{i,c_i}) será respecto a (I/P).

Este es un método iterativo, ya que en cada paso se va obteniendo estimaciones para completar la matriz I y P en conjunto. Con los datos iniciales, se obtienen las matrices

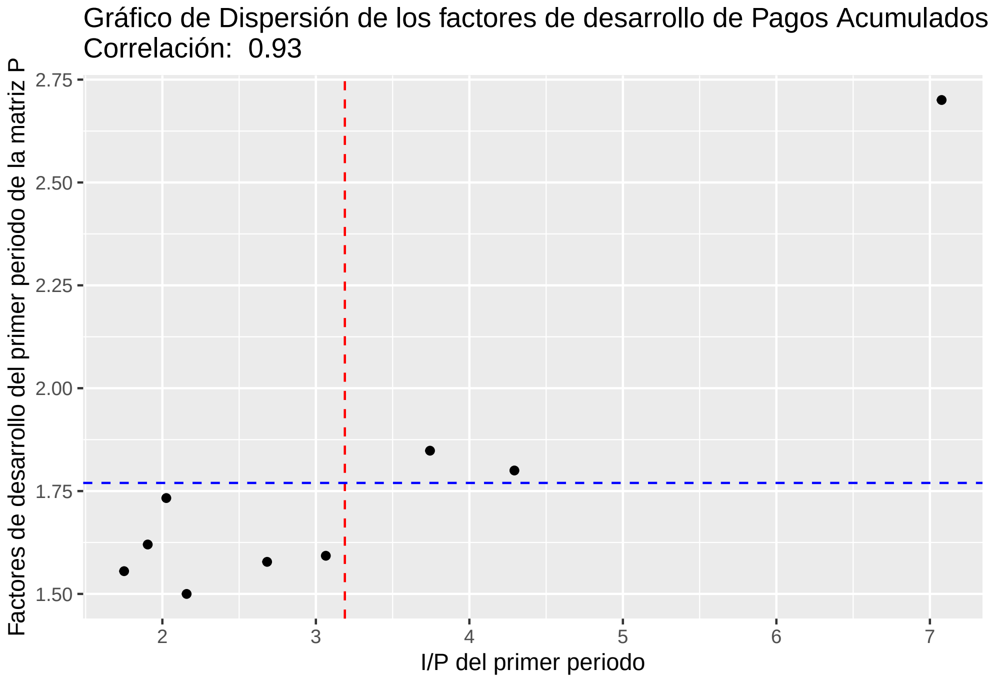


Figura 10: Gráfico de Puntos de Ratios I/P y Factores de desarrollo de la matriz de pagos acumulados para el primer período

(P/I) y (I/P) con forma triangular, y se puede observar que cuando se obtienen los factores de desarrollo individuales $q_{i,j}$, los mismos pueden ser presentados en una matriz triangular como las anteriores, pero sin la diagonal. Estos valores serán estimados tanto para los factores de desarrollo de los siniestros incurridos (q^I_{i,c_i}) como los factores de pagos acumulados(q^P_{i,c_i}) mediante la regresión según los datos originales. Luego, con los factores estimados, se puede estimar los valores por debajo de la diagonal de la matriz I y de la matriz P. Por último, se completa la matriz (P/I) y (I/P) con los datos nuevos estimados, y se vuelve a estimar los siguientes factores de desarrollo.

Este método se puede aplicar a partir de la función `MunichChainLadder` del paquete `ChainLadder`, a la que se le debe pasar como argumento los dos triangulos, el de pagos acumulados y el de siniestros incurridos.

Con la función `plot` pasándole un objeto del tipo `MunichChainLadder` genera la figura 11 con 4 gráficos. El primero de ellos contiene la estimación de los siniestros pagados e incurridos para cada año de ocurrencia mediante el método de Munich Chain-Ladder, el siguiente gráfico muestra la obtención de los ratios (P/I) en términos porcentuales obtenidos mediante Munich Chain-Ladder (MCL), y los obtenidos si se hacía Chain-Ladder por separado (Mack), mostrando como así se hubiesen obtenidos ratios por encima de 1 (o por encima de %100 en términos porcentuales). El gráfico de abajo a la izquierda, muestra la dispersión de todos los factores centrados y estandarizados de los pagos acumulados vs los ratios (I/P) con su respectiva regresión. Y el último gráfico muestra lo mismo pero para los factores de los siniestros incurridos respceto al ratio (P/I).

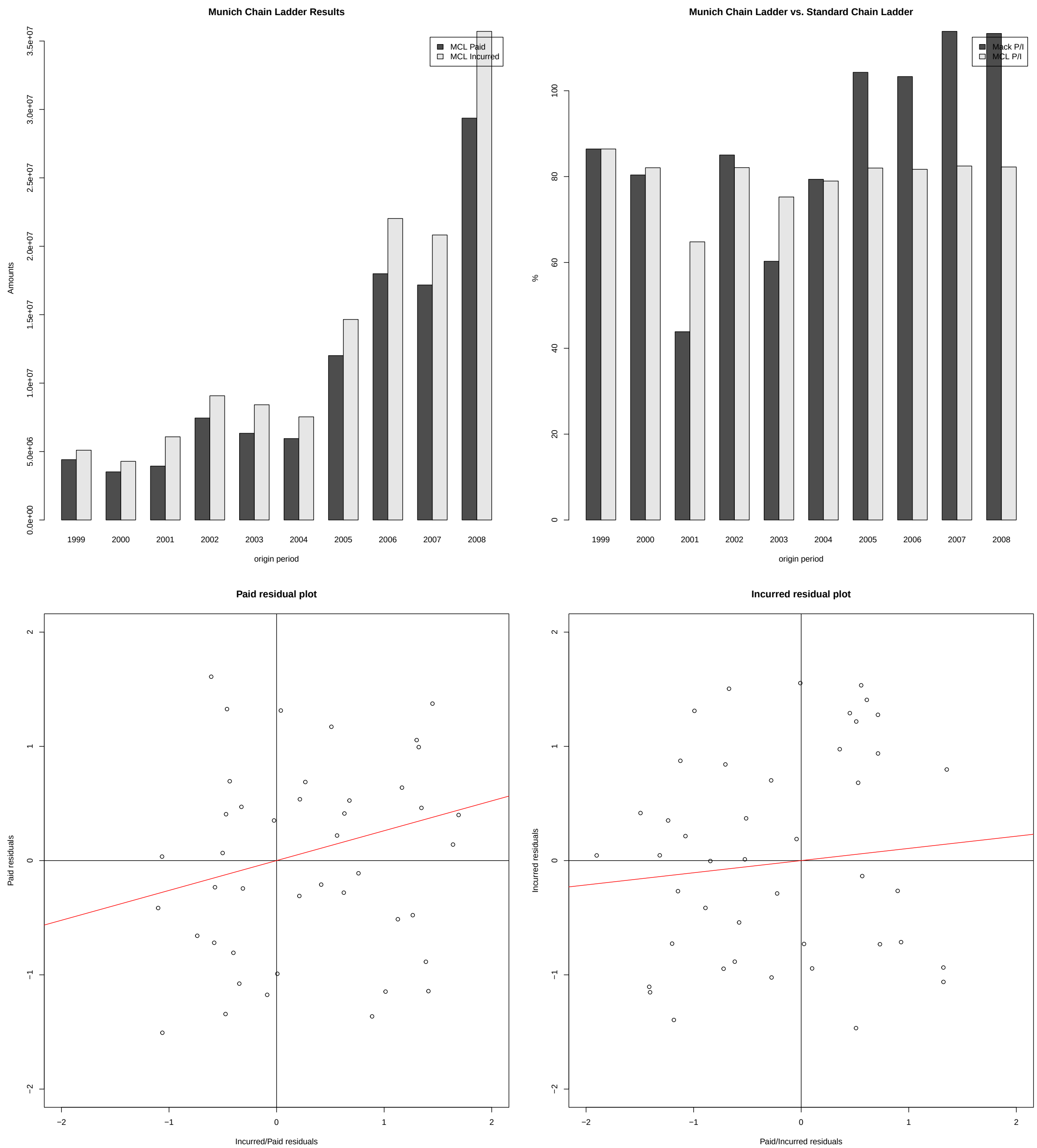


Figura 11: Gráfico automático para objetos de tipo Munich Chain-Ladder

Al pedir el resumen con la función `summary` del objeto `Munich Chain Ladder` nos devuelve los últimos pagos acumulados y últimos siniestros incurridos, y el ratio P/I, luego también tiene las proyecciones de los pagos y de los incurridos mediante el método de Munich, y el ratio, al pedir que sea por año de origen mediante `summary(BayernMunich)$ByOrigin` esta informacioón nos la devuelve por año de origen ((tabla 10)), y se puede observar como ningún ratio al final de los 10 períodos de desarrollos supera la unidad.

Cuadro 10: Resumen por año de ocurrencia del método Munich Chain-Ladder

	Latest Paid	Latest Incurred	Latest P/I Ratio	Ult. Paid	Ult. Incurred	Ult. P/I Ratio
1999	4408012.35	5099688.00	0.86	4408012.35	5099688.00	0.86
2000	3310585.34	4221137.00	0.78	3516429.02	4285192.30	0.82
2001	2183145.17	5969088.00	0.37	3938896.95	6078382.19	0.65
2002	5122735.27	8581805.00	0.60	7450536.68	9075686.58	0.82
2003	2613770.37	7276239.00	0.36	6336075.64	8419911.00	0.75
2004	2244504.33	5882585.00	0.38	5950165.65	7535352.06	0.79
2005	4475502.88	9901076.00	0.45	12013700.59	14652550.55	0.82
2006	5966324.20	12548654.00	0.48	17995072.95	22028140.99	0.82
2007	4760793.00	9171465.00	0.52	17172978.06	20825622.64	0.82
2008	4876379.00	10120889.00	0.48	29364788.76	35705671.10	0.82

También se puede acceder al resumen pero para el total mediante `summary(BayernMunich)$Totals`, donde se tendrá la suma de las columnas anteriores, en la primer fila la sumade las diagonales, y su ratio, y en la segunda lo estimado y su ratio ((tabla 11).

Cuadro 11: Resumen para el total del método Munich Chain-Ladder

	Paid	Incurred	P/I Ratio
Latest:	39961751.923	78772626.000	0.507
Ultimate:	108146656.650	133706197.413	0.809

Si se estima de esta manera el factor de desarrollo individual para poder estimar los valores que están enseguida por debajo de la diagonal invertida, y luego de forma iterativa se completa la matriz, tanto la de pagos acumulados como la de siniestros incurridos, al final del período, cuando se evalúen los ratios (P/I) no se obtendrán los valores mayores a 1 que se obtenían cuando se hacía las dos matrices por separado.

5 Bootstrap

5.1 Modelado

El método de Bootstrap se aplica sobre la matriz triangular de pagos acumulados. Para la aplicación de bootstrap es necesario primero hacer un modelo estocástico para la reserva de pagos acumulados, Kremer (1982) considera un modelo para el logaritmo de los pagos acumulados, pero presentaremos el modelo de Poisson sobre-disperso dentro de los modelos lineales generalizados, dado que permite considerar que la varianza no sea constante para todos los valores predichos. Además, como se verá luego, es uno de los modelos que acepta la función `BootChainLadder`. Además estaremos considerando a la función logarítmica como función de enlace.

Para los pagos acumulados del año i del período de desarrollo j ($P_{i.j}$) se tendrá:

$$\mathbb{E}(P_{i,j}) = m_{i,j} \text{ , } \mathbb{V}(P_{i,j}) = \phi \mathbb{E}(P_{i,j}) = \phi m_{i,j} log(m_{i,j}) = \eta_{i,j} \eta_{i,j} = c + \alpha_i + \beta_j \text{ , } \alpha_1 = \beta_1 = 0$$

En donde α_i es el parámetro asociado al año de ocurrencia i y β_j para el período de desarrollo j, donde se toman los años y los períodos como 'factores', o variables categóricas. Y son estimados mediante máxima verosimilitud.

Luego, con los valores de α_i y β_j estimados a partir del modelo se puede estimar $\eta_{i,j}$ para los valores de $j > c_i$, y se tiene que $\mathbb{E}(P_{i,j}) = m_{i,j} = e^{\eta_{i,j}}$ para completar el triangulo de pagos acumulados y la reserva de IBNR para cada año.

El otro modelo que acepta la función es el modelo Gamma, que es igual al modelo Poisson sobre-disperso, solo que la varianza será calcula $\mathbb{V}(P_{i,j}) = \phi \cdot \mathbb{E}(P_{i,j})^2 = \phi \cdot m_{i,j}^2$.

5.2 Proceso de Bootstrap

En 1999 England y Verrall proponen un método de bootstrap a partir de los modelos antes presentados. Consistene en aplicar el modelo y estimar los valores de α_i y β_j, luego predecir los valores de $P_{i,j}$ del triángulo superior, y calcular los residuos de Pearson.

$$r_p = \frac{P_{i,j} - \hat{m}_{i,j}}{\sqrt{\hat{m}_{i,j}}}$$

Luego se aplica Bootstrap sobre los valores de los residuos de Pearson, y se calculan los valores de pago acumulado del triángulo superior de la forma:

$$P^*_{i,j} = r^*_p \cdot \sqrt{\hat{m}_{i,j}} + \hat{m}_{i,j}$$

Con la muestra de pagos acumulados se vuelve a ajustar el modelo elegido, se calcula el triángulo inferior de la matriz de pago y se calcula la reserva de IBNR para cada año. Este método se repite N veces, y el error estandar de las estimaciones será el desvío de los valores obtenidos en cada muestra de bootstrap.

Por último, el parámetro de escala del desvío ϕ es estimado con los desvíos de Pearson de la forma:

$$\phi_P = \frac{\sum r_p^2}{n - p}$$

Con n el número de datos en la muestra, que cuando se trabaja con 10 años y 10 períodos son 55 datos (el triángulo superior) y p la cantidad de parámetros.

5.3 Aplicación de Bootstrap en R

Este modelo se aplica con el comando `BootChainLadder`, que tiene como argumento los datos (la matriz triangular de pagos acumulados), la cantidad de muestras con Bootstrap que se va a obtener ($R = 999$ por defecto), y el modelo que asumirá, que puede ser el Poisson sobre-disperso o el Gamma (`process-distr=c("gamma","od.pois")`) y adicionalmente se le puede fijar una semilla para replicar los resultados (`seed=NULL`)

Se puede acceder al resumen de los valores obtenidos tanto para cada año de ocurrencia (tabla 12) como para el total, y obtener los cuantiles para las reservas por IBNR.

Cuadro 12: Resumen por año del método Bootstrap Chain-Ladder

	Latest	Mean Ultimate	Mean IBNR	SD IBNR	IBNR 75%	IBNR 95%
1999	4408012.3	4408012.3	0.0	0.0	0.0	0.0
2000	3310585.3	3477147.3	166562.0	293342.7	265009.2	713760.9
2001	2183145.2	2772883.6	589738.4	545102.8	798041.6	1594449.0
2002	5122735.3	7802772.8	2680037.5	1433663.1	3464629.7	5386333.8
2003	2613770.4	5262936.8	2649166.4	1351740.2	3373788.6	5335618.8
2004	2244504.3	6176158.7	3931654.4	1913837.5	5034009.6	7659572.0
2005	4475502.9	15239044.7	10763541.8	4157532.0	13027862.4	18640394.9
2006	5966324.2	22453405.4	16487081.2	5848680.1	19854084.4	26332960.7
2007	4760793.0	23008730.0	18247937.0	6594537.1	21886641.0	30280424.2
2008	4876379.0	39571561.3	34695182.3	11953587.7	42260201.1	55774681.4

Cuadro 13: Resumen Para el total del método Bootstrap Chain-Ladder

	Totals
Latest:	39961751.9
Mean Ultimate:	130172652.9
Mean IBNR:	90210901.0
SD IBNR:	25006409.7
Total IBNR 75%:	103925962.8
Total IBNR 95%:	136562111.7

También se puede obtener el gráfico con la función `plot` a un objeto de la clase `'BootChainLadder'`. En los dos gráficos superiores de la figura 12 se obtien el histograma del total de reservas de IBNR y la función de distribución de las reservas por IBNR. Mientras que en la parte inferior se obtienen gráficos de dispersión de los costos últimos simulados para cada año de origen con la media en rojo y de las simulaciones de los costos acumulados actuales para cada año, con el valor observado en la diagonal en rojo.

Además también se pueden obtener los cuantiles de interés para cada año mediante la función `quantile` para obtener un intervalo de confianza al 95%, ya que la función `summary` brinda el cuantil 0.75 y el 0.95

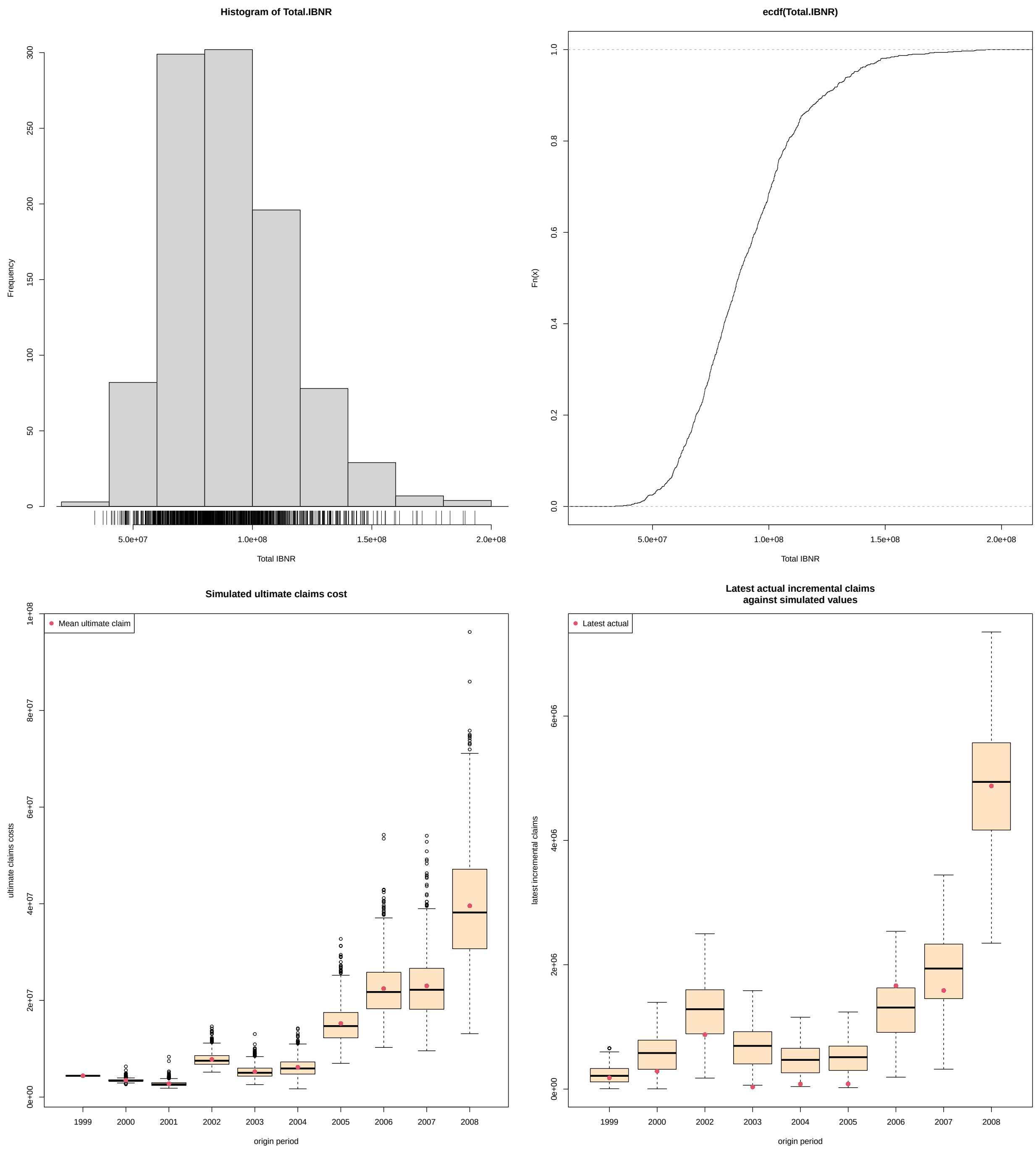


Figura 12: Gráfico automático para objetos de tipo Bootstrap Chain-Ladder

Cuadro 14: IC al 95 por año del método Bootstrap Chain-Ladder

	IBNR 2.5%	IBNR 97.5%
1999	0.0	0.0
2000	-175984.8	884742.0
2001	1868.2	1934375.2
2002	623701.1	6199430.7
2003	577961.4	5934189.9
2004	965675.3	8408063.9
2005	4451607.8	20659547.9
2006	6901482.5	30215920.3
2007	8361546.3	33780130.5
2008	15094097.2	61506628.6

En la tabla 14 se puede observar que para el primer año de origen se tiene una límite inferior del intervalo negativo, esto se debe a que la media es 0, y la parte de simulación de los errores se generan valores negativos, esto se puede arreglar o bien truncando el intervalo de confianza, o asumiendo que la reserva para el primer año es 0 y no tiene varianza ni desvío.

Bibliografía

Alfaro Fuentes, Daniel de Jesús. 2016. «Modelos Chain-Ladder clásicos y bayesianos para el cálculo de reservas auxiliado con R». Tesis de Licenciatura, México: Universidad Nacional Autónoma de México. https://repositorio.unam.mx/contenidos/291089.

England, P. D., y Richard Verrall. 2002. «Stochastic Claims Reserving in General Insurance». *British Actuarial Journal* 8 (agosto). https://doi.org/10.1017/S1357321700003809.

Gesmann, Markus, Daniel Murphy, Yanwei (Wayne) Zhang, Alessandro Carrato, Mario Wuthrich, Fabio Concina, y Eric Dal Moro. 2023. *ChainLadder: Statistical Methods and Models for Claims Reserving in General Insurance*. https://CRAN.R-project.org/package=ChainLadder.

Mack, Thomas. 1993. «Distribution-free Calculation of the Standard Error of Chain Ladder Reserve Estimates». *ASTIN Bulletin* 23 (2): 213-25. https://doi.org/10.2143/AST.23.2.2005092.

Quarg, Gunther, y Thomas Mack. 2004. «Munich Chain Ladder». *Blätter DGVFM* 26: 597-630. https://doi.org/10.1007/BF02808969.