Procesos Estocasticos

Proceso Estocastico

¿Qué es?

Es una colección o familia de variables aleatorias que evoluciona a lo largo del tiempo

Denotado

X_t

Ejemplo

La temperatura del clima en una ciudad

Conjunto de estados

¿Qué es?

Posibles valores que puede tomar la variable aleatoria

Denotado

S

Pueden ser

1 Discretos

La variable aleatoria solo puede tomar determinados valores

2 Continuos

Puede tomar cualquier valor comprendido en un rango

Proceso estocastico al tiempo

¿Qué es?

Las variables aleatorias de proceso estocastico ya sea en estado discreto o continuo se pueden ver afectadas por el tiempo

Denotado

t

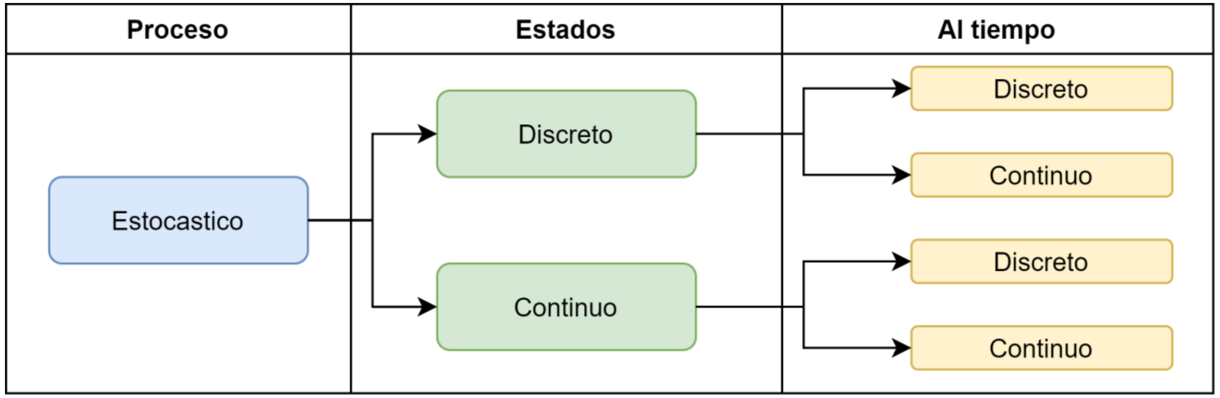
De manera

1 Discreta

El valor de la variable cambia en una serie de momentos determinados, un año, un mes, un dia, etc.

2 Continua

El valor de una variable cambia en cualquier momento en el tiempo



Proceso Estocastico

¿Qué es?

Denotado

Ejemplo

Conjunto de estados

¿Qué es?

Denotado

Pueden ser

1

2

Proceso estocastico al tiempo

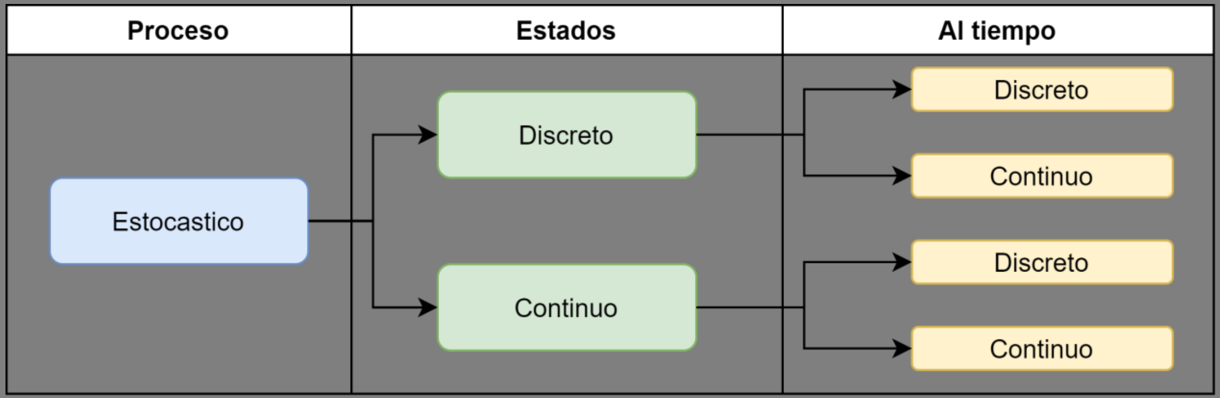
¿Qué es?

Denotado

De manera

1

2



Proceso Estocastico

Estado discreto

A tiempo discreto

Cadena

Una cadena es un proceso estocástico en el cual el tiempo se mueve de forma discreta y la variable aleatoria sólo toma valores discretos en el espacio de estados.

Ejemplo

Cadena de Markov

Se dice que una cadena es una cadena de Markov cuando cumple la propiedad de Markov "toda la historia pasada del proceso se puede resumir en la posición actual que ocupa el proceso para poder calcular la probabilidad de cambiar a otro estado"

Ejemplo

Dentro de una empresa, una maquina puede tomar dos estados, que esta operando o este fuera de funcionamiento, la verificación se realiza al principio de cada día.

Entonces los estados toman valor:

Fuera de funcionamiento : 0
En operación : 1

Proceso Estocastico

Estado discreto

A tiempo continuo

Proceso de saltos puros

Es un proceso que tiene estados discretos a un tiempo continuo, es decir los posibles valores que puede tomar un proceso se dan en cualquier instante del tiempo

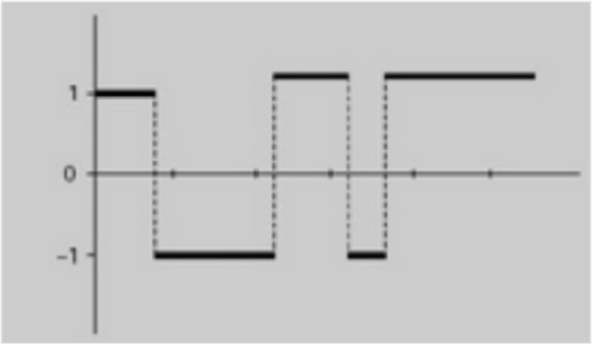
Ejemplo

Proceso de Poisson

Modela procesos de cola

Ejemplo

Una señal **telegráfica**, sólo hay dos posibles estados (1, -1) pero la oportunidad del cambio de estado se da en cualquier instante en el tiempo.



Proceso Estocastico

Estado discreto

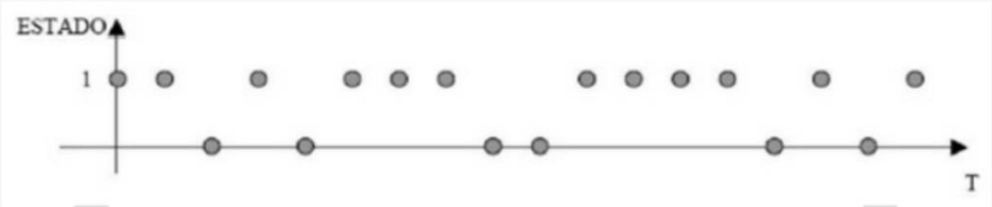
A tiempo discreto

Cadena

Ejemplo

Cadena de Markov

Ejemplo



Proceso Estocastico

Estado discreto

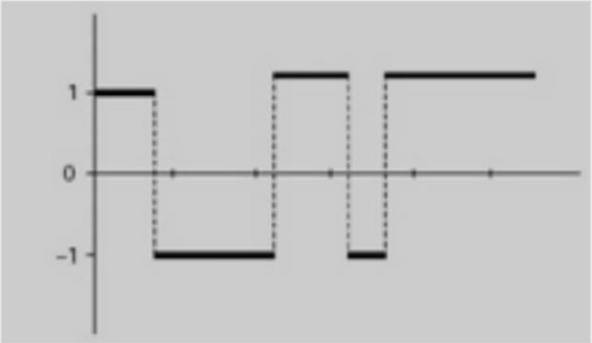
A tiempo continuo

Proceso de saltos puros

Ejemplo

Proceso de Poisson

Ejemplo



Cadenas de Markov

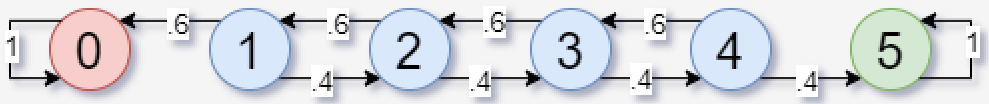
Su importancia viene de 2 hechos	
1	*Hay un largo número de fenomenos fisicos, biologicos y sociales, que pueden ser modelados de esta manera.*
2	*Existe ya una teoria muy desarrollada que nos ayuda a hacer calculos computacionales.*

Matematicamente se expresa	
$p(i,j) \geq 0$	por que son probabilidades
$\sum_j p(i,j) = 1$	la suma de las probabilidades de todos los posibles valores en ***j*** debe ser uno

Ejemplo 1.1

Considera un juego de apuestas por turnos.

1	***n***	número de veces que juega.	
2	X_n	Cantidad de dinero despues de jugar ***n*** veces	
3	***Restriccion***	El juego termina si llega a ***$N***	
4	***Restriccion***	El juego termina si llega a ***$0***	
5	Ganas : $1	***0.4***	***p***
6	Pierdes: $1	***0.6***	***1-p***
7	***N***	***5***	



	0	1	2	3	4	5
0	1	0	0	0	0	0
1	0.6	0	0.4	0	0	0
2	0	0.6	0	0.4	0	0
3	0	0	0.6	0	0.4	0
4	0	0	0	0.6	0	0.4
5	0	0	0	0	0	1

Propiedad de Markov

X_n *tiene la propiedad de Markov , es decir los estados anteriores son irrelevantes para predecir el siguiente estado* X_{n+1}

si estamos jugando al tiempo ***n****, tu fortuna* ***X*** *es decir* $X_n = i$ *con intervalo de* $0 < i < N$*, cualquier otro estado tendra que:*

$$P(X_{n+1} = i+1 | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, , , X_0 = i_0) = 0.4$$

Decimos que X_n

Es una ***cadena de Markov a tiempo discreta*** *con una* ***matriz de transicion p(i,j) si para cada j, i ,*** i_{n-1} ***...*** i_0

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, , , X_0 = i_0) = p(i,j)$$

Cadenas de Markov

Ejemplo 1.3

Cadena de clima, aunque no es una cadena de Markov podemos proponerla con:

1	***n***	Número de dias
2	X_n	Sea el clima en el dia ***n***
3	**S**	Espacio de estados

LLuvioso	***1***
Soleado	***2***

p(i, j)

	1	2
1	0.6	0.4
2	0.2	0.8

Decimos que X_n

*Es una **cadena de Markov a tiempo discreta** con una **matriz de transicion p(i,j) si para cada j, i , i_{n-1} ... i_0***

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, X_0 = i_0) = p(i,j)$$

Cadenas de Markov

Ejemplo 1.4

Clase social

1	***n***	Número de generaciones
2	X_n	Clase social en la generacion ***n***
3	**S**	Espacio de estados

Bajo	***1***
Medio	***2***
Alto	***3***

p(i, j)

	1	2	3
1	0.7	0.2	0.1
2	0.3	0.5	0.2
3	0.2	0.4	0.4

Decimos que X_n

*Es una **cadena de Markov a tiempo discreta** con una **matriz de transicion p(i,j) si para cada j, i , i_{n-1} ... i_0***

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, X_0 = i_0) = p(i,j)$$

Cadenas de Markov

Su importancia viene de 2 hechos

1

2

Matematicamente se expresa

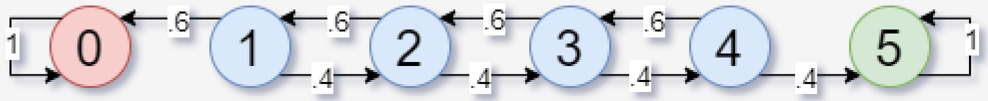
por que son probabilidades

la suma de las probabilidades de todos los posibles valores en ***j*** debe ser uno

Ejemplo 1.1

Considera un juego de apuestas por turnos.

1	***n***		
2	X_n		
3	***Restriccion***	El juego termina	
4	***Restriccion***	El juego termina	
5	Ganas : $1	***0.4***	***p***
6	Pierdes: $1	***0.6***	***1-p***
7	***N***	***5***	



	0	1	2	3	4	5
0						
1						
2						
3						
4						
5						

Propiedad de Markov

X_n *tiene la propiedad de Markov , es decir los estados anteriores son irrelevantes para predecir el siguiente estado* X_{n+1}

*si estamos jugando al tiempo **n**, tu fortuna **X** es decir $X_n = i$ con intervalo de $0 < i < N$, cualquier otro estado tendra que:*

$$P(X_{n+1} = i + 1 | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, , , X_0 = i_0) = 0.4$$

Decimos que X_n

*Es una **cadena de Markov a tiempo discreta** con una **matriz de transicion p(i,j) si para cada j, i , i_{n-1} ... i_0***

Cadenas de Markov

Ejemplo 1.3

Cadena de clima, aunque no es una cadena de Markov podemos proponerla con:

1	n	
2	X_n	
3	S	

LLuvioso	*1*
Soleado	*2*

$$\begin{array}{c|cc} & 1 & 2 \\ \hline 1 & 0.6 & 0.4 \\ 2 & 0.2 & 0.8 \end{array}$$

Decimos que X_n

*Es una **cadena de Markov a tiempo discreta** con una **matriz de transicion p(i,j) si para cada j, i , i_{n-1} ... i_0***

Cadenas de Markov

Ejemplo 1.4

Movilidad social

1	n	
2	X_n	
3	S	

Bajo	*1*
Medio	*2*
Alto	*3*

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 2 & 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 3 & 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{array}$$

Decimos que X_n

*Es una **cadena de Markov a tiempo discreta** con una **matriz de transicion p(i,j) si para cada j, i , i_{n-1} ... i_0***

Cadena de Ehrenfest

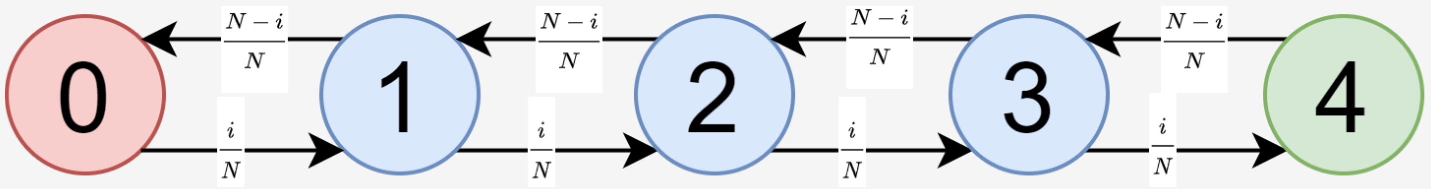
1	*Este modelo se origino en fisica como un modelo para 2 volumenes cubicos de aire conectados por un hollo pequeño.*

Ejemplo 1.2

Aleatoriamente escogemos una de las ***N*** bolas y lo movemos a al otro contenedor

1	***n***	tiempo
2	X_n	número de bolas que existen en el contenedor ***A***
3	***N***	***4***
4	***S***	***{0,1,2,3,4}***
5	***p(i, i + 1)***	***N - i/N***
6	***p(i, i - 1)***	***i/N***
7	***i***	$0 \le i \le N$

	0	1	2	3	4
0	0	1	0	0	0
1	***i/N***	0	***N - i/N***	0	0
2	0	i/N	0	***N - i/N***	0
3	0	0	***i/N***	0	***N - i/N***
4	0	0	0	**1**	0



Para incrementar	**Para decrementar**
$P(X_{n+1} = i+1 \vert X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1},,, X_0 = i_0) = \frac{N-i}{N}$	$P(X_{n+1} = i-1 \vert X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1},,, X_0 = i_0) = \frac{i}{N}$

*Es una **cadena de Markov por que no importa el estado anterior para el siguiente estado***

Cadena de Ehrenfest

1

Ejemplo 1.2

Aleatoriamente escogemos una de las ***N*** bolas y lo movemos a al otro contenedor

1	n	
2	X_n	
3	N	4
4	S	
5	$p(i, i+1)$	
6	$p(i, i-1)$	
7	i	

	0	1	2	3	4
0					
1					
2					
3					
4					

Para incrementar	Para decrementar

*Es una **cadena de Markov por que no importa el estado anterior para el siguiente estado***