Práctica. Ejercicios

TAREA 12

Alumno:
Joaquín Arturo Velarde Moreno

1. Introducción

El objetivo de esta tarea es resolver una serie de problemas seleccionados del libro Introducción a la probabilidad[1] con el uso del Wolfram Aplha[2].

2. Ejercicio 1, página 393

Sea $Z_1, Z_2, ..., Z_N$ describa un proceso de ramificación en el que cada padre tiene j ramas con probabilidad p_j. Encuentre la probabilidad d de que el proceso finalmente se extinga
(a) $p_0 = \frac{1}{2}, p_1 = \frac{1}{4}, p_2 = \frac{1}{4}$.

(b) $p_0 = \frac{1}{3}, p_1 = \frac{1}{3}, p_2 = \frac{1}{3}$.

(c) $p_0 = \frac{1}{3}, p_1 = 0, p_2 = \frac{2}{3}$.

(d) $p_j = \frac{1}{2}, p_1 = \frac{1}{4}, p_2 = \frac{1}{4}$.

(e) $p_j = (\frac{1}{3})(\frac{2}{3})^j$, for $j = 0, 1, 2, ...$

(f) $p_j = \exp^{-2} 2^j$, for $j = 0, 1, 2, ...$(estime d numéricamente)..

Para el punto (a) usamos un teorema el cual nos puede dar dos casos, sea N el número de hijos y d la probabilidad que el proceso muera, tenemos: $E[N] \leq 1$, entonces $d = 1$ o
$E[N] > 1$, entonces $d = \text{mín}(d = h(d))$.

Por lo que, primeramente, podemos obtener la esperanza de N.

$E(N) = \sum_{i=0}^{2} N_i P(N_i)$.

$E(N) = 0 + \frac{1}{4} + 2 * \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

De acuerdo con nuestro teorema, si $E[N] \leq 1$ entonces $d = 1$.

Para el punto (b) podemos usar el mismo teorema, podemos obtener primero la esperanza de N.
$E(N) = \sum_{i=0}^{2} N_i P(N_i)$.

$E(N) = 0 + \frac{1}{3} + 2 * \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$.

De acuerdo con nuestro teorema, si $E[N] \leq 1$ entonces $d = 1$.

Para el punto (c) intentaremos el mismo teorema, obteniendo la esperanza de N.
$E(N) = \sum_{i=0}^{2} N_i P(N_i)$.

$E(N) = 0 + 0 + 2 * \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$.

De acuerdo con nuestro teorema si $E[N] > 1$ entonces d sera la más pequeña de la ecuación d = h(d).
Esto también se puede representar como:
$d = P_0 + P_1 d + P_2 d^2$.
$d = \frac{1}{3} + (0)d + \frac{2}{3}d^2$.
Si lo igualamos a 0 tenemos,
$\frac{2}{3}d^2 - d + \frac{1}{3} = 0$.
Este ecuación podemos resolverla con la fórmula general la cual es:

$$d = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Para obtener nuestro valor tenemos que obtener la solución más pequeña de la fórmula general.
$d = \frac{-1+\sqrt{-1^2-4(\frac{2}{3})(\frac{1}{3})}}{2(\frac{2}{3})}$.

$d = \frac{-1+\sqrt{-1-\frac{8}{9}}}{\frac{4}{3}}$.
$d = \frac{0{,}37}{\frac{4}{3}}$.
$d = 0{,}277$.

$d = \frac{-1-\sqrt{-1^2-4(\frac{2}{3})(\frac{1}{3})}}{2(\frac{2}{3})}$.

$d = -0{,}66$.

Con esto obtenemos el d que salió menor, $-0{,}66$, sin embargo resultó negativo, por lo cual es necesario seguir haciendo pruebas.

Para el punto (d) obtendremos la esperanza de N.

$E(N) = \sum_{N=0}^{+\infty} N(\frac{1}{2^{N+1}})$.

Debido a su naturaleza, es un poco más complicado obtener la siguiente esperanza, por lo cual utilizamos el siguiente código en wolframalpha para calcular la probabilidad.

*sum(n * (1/2**(n+1))) from 0 to infinity.*

Esto nos da que $d = 1$.

Para el punto (e) obtendremos la esperanza de N.

$E(N) = \sum_{N=0}^{+\infty} N((\frac{1}{3})(\frac{2}{3})^N)$.

Debido a su naturaleza es un poco más complicado obtener la siguiente esperanza, por lo que utilizamos el siguiente código en wolframalpha para calcular la probabilidad.

*sum(n * (1/3)(2/3)**n) from 0 to infinity.*

Esto nos da que $d = 2$, Por lo que será necesario revisar aún más este problema. Para el punto (f) obtendremos la esperanza de N.

$E(N) = \sum_{N=0}^{+\infty} N(\exp^{-2}(2^N))$.

Debido a su naturaleza es un poco más complicado obtener la siguiente esperanza, por lo que utilizamos el siguiente código en wolframalpha para poder obtener la probabilidad.

*sum(n * ((exp**-2)(2**n)) from 0 to infinity.*

Esto nos da que $d = 1$.

3. Ejercicio 3, página 393

En el problema de las letras encadenadas (vea el ejemplo 10.14) encuentre el beneficio esperado si
(a) $p_0 = \frac{1}{2}, p_1 = 0, p_2 = \frac{1}{2}$.

(b) $p_0 = \frac{1}{6}, p_1 = \frac{1}{2}, p_2 = \frac{1}{3}$.

Demuestre que si $p_0 > \frac{1}{2}$, no puedes esperar obtener ganancias.

Para el punto (a) tenemos que sacar la esperanza $E(Z_1) = \sum_{n=0}^{2} P_n N$.

Esto es $E(Z_1) = 2(\frac{1}{2})$ por lo tanto nuestra esperanza es $E(Z_1) = 1$.
Esto lo sustituimos en la ganancia esperada $50m + 50m^{12} - 100$, por lo que tenemos $50 + 50 * 1^{12} - 100 = 0$

Para el punto (b) también obtenemos la esperanza $E(Z_1) = \sum_{n=0}^{2} P_n N$.

Esto es $E(Z_1) = \frac{1}{2} + 2(\frac{1}{3})$ por lo tanto nuestra esperanza es $E(Z_1) = 1{,}16$.
Esto lo sustituimos en la ganancia esperada $50m + 50m^{12} - 100$, por lo que tenemos $50 * (1{,}16) + 50(1{,}16)^{12} - 100 = 254$.
Demostraremos ahora que si $P_0 > \frac{1}{2}$ entonces no tendremos ganancias, si tenemos que $P_0 > \frac{1}{2} entonces P_1 + P_2 < \frac{1}{2}$ lo cual tendremos que nuestro valor esperado es $E(Z_1) = P_1 + P_2$ y esto a su vez seria que $E(Z_1) < 1$, por lo que al obtener nuestras ganancias tendríamos $50m + 50m^{12} - 100 < 0$ puesto que $m = E(Z1)$.

4. Ejercicio 6, página 403

X una variable aleatoria continua cuya función característica Sea X una variable aleatoria continua cuya función característica $k_X(t)$ es
$k_X(t) = \exp^{-|t|}, -\infty < t < +\infty$.

Muestre de manera directa que la densidad fx de X es
$fx(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$.
$fx(x) = \frac{1}{2x} \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{itx}) e^{-|t|} dt$.

5. Ejercicio 1, página 402

Sea X una variable aleatoria continua con valores en [0,2] y densidad fx.Encuentra la función generatriz de momentos $g(t)$ para X si
(a) $fx(x) = \frac{1}{2}$.

(b) $fx(x) = (\frac{1}{2})x$.

(c) $fx(x) = 1 - (\frac{1}{2})x$.

(d) $fx(x) = |1 - x|$.

(e) $fx(x) = (\frac{3}{8})x^2$.

Sugerencia: utilice la definición integral, como en los ejemplos 10.15 y 10.16

Para el punto (a) obtenemos $g(t)$ integrando de la siguiente manera $\int_0^2 exp^{tx}(\frac{1}{2})dx$.
Utilizamos el siguiente código en wolframalpha para poder obtener la función generadora.

*integrate (e**(tx)*(1/2) dx) from 0 to 2.*

Obtenemos $g(t) = \frac{\exp^{2t} - 1}{2t}$
Para el punto (b) obtenemos $g(t)$ integrando de la siguiente manera $\int_0^2 exp^{tx}(\frac{1}{2})xdx$.
Utilizamos el siguiente código en wolframalpha para poder obtener la función generadora.

*integrate (e**(tx)*(1/2)*x dx) from 0 to 2.*

Obtenemos $g(t) = \frac{e^{2t}(2t-1)+1}{2t^2}$.
Para el punto (c) obtenemos $g(t)$ integrando de la siguiente manera $\int_0^2 exp^{tx}(1 - \frac{1}{2}x)dx$.
Utilizamos el siguiente código en wolframalpha para poder obtener la función generadora.

*integrate (e**(tx)*(1-(1/2)*x) dx) from 0 to 2.*

Obtenemos $g(t) = \frac{-2t+\exp^{2t} - 1}{2t^2}$.

Para el punto (d) obtenemos $g(t)$ integrando de la siguiente manera $\int_0^2 exp^{tx}(|1 - x|)dx$.
Utilizamos el siguiente código en wolframalpha para poder obtener la función generadora.

*integrate (e**(tx)*(—1-x—) dx) from 0 to 2.*

Obtenemos $g(t) = \frac{(\exp^2 - 1)(\exp^t(t-1)+t+1)}{t^2}$.
Para el punto (e) obtenemos $g(t)$ integrando de la siguiente manera $\int_0^2 exp^{tx}(\frac{3}{8}x^2)dx$.
Utilizamos el siguiente código en wolframalpha para poder obtener la función generadora.

*integrate (e**(tx)*(3/8)*x**2 dx) from 0 to 2.*

Obtenemos $g(t) = \frac{3(e^{2t}(4t^2-4t+2)-2)}{8t^3}$.

6. Ejercicio 10, página 404

Sea X_1,X_2, ...,X_n un proceso de ensayos independientes con densidad
Sea $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$.
Sea $A_n = \frac{S_n}{n}$.
Sea $S_n^* = (S_n - n\mu)/\sqrt{n\sigma^2}$.
$f(x) = \frac{1}{2}\exp^{-|x|}, -\infty < t < +\infty$.

(a) Encuentre la media y la varianza de $f(x)$.

(b) Encuentre la función generadora de momentos para X_1, S_n, A_n, y S_n^*.

(c) qué se puede decir sobre la función generadora de momentos de S_n^* con $n \to \infty$.

(c) qué se puede decir sobre la función generadora de momentos de A_n con $n \to \infty$.

Para el punto (a) tenemos que encontrar la varianza $V = E(X^2) - E(X)^2$, por lo que primero obtendremos la esperanza.
Para la esperanza de X tenemos $\int_{-\infty}^{+\infty} x(\frac{1}{2}\exp^{-|x|})dx$.

Utilizamos el siguiente código en wolframaplha para obtener la esperanza.

integrate x(1/2 * exp**-x)dx from 0 to positive infinity.*

Esto nos da 0.25, por lo que $E(X)^2 = 0{,}0625$.

Para la esperanza de X^2 tenemos $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(\frac{1}{2}\exp^{-|x|})dx$.

Utilizamos el siguiente código en wolframaplha para obtener la esperanza.

*integrate (x**2)*(1/2 * exp**-x)dx from 0 to positive infinity.*

Esto nos da 0.2215, por lo que $E(X^2) = 0{,}2215$.

Por ultimo obtenemos nuestra varianza $V = 0{,}2215 - 0{,}0625 = 0{,}159$.

Para el punto (b) empezamos con encontrar nuestra función generadora X_1 por lo que $g_{X_1}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp^{xt}(\frac{1}{2}\exp^{-|x|})dx$.

Referencias

[1] J. Laurie Snell Charles M. Grinstead. *Introduction to Probability.* American Mathematical Society.

[2] *WolframAlpha computational intelligence.* `https://www.wolframalpha.com/`. Accessed: 2020-11-24.