Convolución

TAREA 11

Alumno:
Joaquín Arturo Velarde Moreno

1. Introducción

En este reporte, con el uso del programa R 4.0.2 [2], me propongo demostrar y probar algunas propiedades de la covarianza propuestos en el material del curso [1].

2. Convolución

Supongamos que tenemos dos variables independientes discretas, X y Y, también tenemos la suma de estas dos variables como $Z = X + Y$, para encontrar el valor de Z, podemos usar la convolución, la cual es la operación matemática que muestra la probabilidad de que la suma de dos variables independientes sea un número específico.

$$P(Z = j) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} P(X = i)P(Y = j - i).$$

Tomemos por ejemplo un caso real en donde nos interesa saber la suma de las 2 caras de un dado al ser lanzadas, nuestras variables X y Y serian el resultado de cada cara por lo que $Z = X + Y$. Debido a que solo existen seis posibles resultados, al caer los dados la ecuación sería:

$$P(Z = j) = \sum_{i=1}^{6} P(X = i)P(Y = j - i).$$

3. Covarianza

La covarianza es un dato básico que existe para determinar una dependencia de dos variables aleatorias. A diferencia de los coeficientes de correlación, este no está estandarizado, por lo que puede tomar valores de ∞ hasta $-\infty$ y se representa como $Cov(X, Y)$, esto es igual a $E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$, por lo tanto:

$$Cov(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])].$$

3.1. Primera propiedad

Probaremos la primera propiedad de la covarianza de manera numérica empleando la herramienta R [2]. Si X, Y son variables aleatorias y a, b, c, d son constantes, tenemos que:

$$Cov(aX + b, cY + d) = acCov(X, Y).$$

Primero estableceremos nuestras variables aleatorias por medio de una distribución uniforme para X y asignando a nuestra Y una operación de X.

```
X <- runif(100)
Y <- X*2/3
```

después declaramos nuestras constantes.

```
X <- runif(100)
Y <- X*2/3
a <- 1
b <- 2
c <- 3
d <- 4
```

Ahora, representaremos el primer miembro de nuestra ecuación $Cov(aX + b, cY + d)$.

```
X <- runif(100)
Y <- X*2/3
a <- 1
b <- 2
c <- 3
d <- 4
PrimerMiembro = cov((a * X) + b, (c * Y) + d)
```

Por último, obtenemos el segundo miembro de nuestra ecuación $acCov(X, Y)$.

```
X <- runif(100)
Y <- X*2/3
a <- 1
b <- 2
c <- 3
d <- 4
PrimerMiembro  = cov((a * X) + b, (c * Y) + d)
SegundoMiembro = a * c * cov(X,Y)
#> print(PrimerMiembro)
#[1] 0.1518915
#> print(SegundoMiembro)
#[1] 0.1518915
```

con esto podemos demostrar que ambos miembros de la ecuación son lo mismo. para la prueba analítica tenemos que recordar que la $Cov(X, Y)$ es $E(XY) - E(X)E(Y)$. Si las variables son afectadas por nuestras constantes, entonces tenemos que.

$$\begin{aligned}
Cov(aX + b, cY + d) &= E[(aX + b)(cY + d)] - E(aX + b)E(cY + d) \\
&= E(acXY + adX + bcY + bd) - (acE(X)E(Y) + cbE(Y) + adE(X) + bd) \\
&= acE(XY) + adE(Y) + bcE(Y) + bd - (acE(X)E(Y) + cbE(Y) + adE(Y) + bd) \\
&= acE(XY) - acE(x)E(Y) \\
&= ac(E(XY) - E(X)E(Y)) \\
&= acCov(X, Y)
\end{aligned}$$

Por lo cual resulta que nuestra propiedad analítica es correcta.

3.2. Segunda propiedad

Probaremos ahora una segundo propiedad de la varianza de manera numérica empleando la herramienta R [2]. Si X, Y son variables aleatorias, entonces la varianza de la suma de las variables es igual a la varianza de X y Y más 2 veces la covarianza de X, Y :

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y).$$

Primero estableceremos nuestras variables aleatorias por medio de una distribución uniforme para X y asignando a nuestra Y una operación de X.

```
X <- runif(100)
Y <- X*2/3
```

Ahora representaremos los miembros de nuestra ecuación $Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y)$.

```
X <- runif(100)
Y <- X*2/3
PrimerMiembro    = var(X + Y)
SegundoMiembro   = var(X) + var(Y) + (2 * cov(X,Y))
#> print(PrimerMiembro)
#[1] 0.2186215
#> print(SegundoMiembro)
#[1] 0.2186215
```

con esto podemos demostrar que ambos miembros de la ecuación son lo mismo. Para la prueba analítica debemos que recordar que la $V(X)$ es $E((X)^2) - (E(X))^2$. Si tenemos ahora la suma de X y Y entonces:

$$\begin{aligned}
V(X+Y) &= E[(X+Y)^2] - (E(X+Y))^2 \\
&= E(X^2 + 2XY + Y^2) - (E(X) + E(Y))^2 \\
&= E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2) - (E(X))^2 + (E(Y))^2 + 2E(X)E(Y) \\
&= E(X^2) - (E(X))^2 + E(Y^2) - (E(Y))^2 \\
&= V(X) + V(Y) + 2Cov(X, Y)
\end{aligned}$$

por lo cual resulta que nuestra propiedad analíticamente es correcta.

Referencias

[1] Satu Elisa Schaeffer. *Modelos probabilistas aplicados*. Sitio en, `https://elisa.dyndns-web.com/teaching/prob/pisis/prob.html`.

[2] The R Foundation. *The R Project for Statistical Computing*. `https://www.r-project.org/`. 2019.