

Ley de números grandes

TAREA 13

Alumno:

Joaquín Arturo Velarde Moreno

1. Introducción

El objetivo de esta tarea es explicar conceptos de probabilidad introducidos en el material del curso de modelos probabilistas aplicados[2] y además con el uso de R poder comprobar numéricamente sus propiedades[3], este documento se encuentra alojado en el repositorio[1] como recurso libre.

2. La desigualdad de Markov

Es un teorema de la teoría de probabilidad, bautizado así por el matemático ruso Andrei Markov, que afirma que la probabilidad que una variable aleatoria X sea como mínimo igual a cierto valor a , es a lo más la esperanza de esta variable entre el valor a , lo cual se puede describir con la fórmula:

$$P(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.$$

Donde:

- X es una variable aleatoria.
- a es un número positivo diferente de 0 ($a \in \mathbb{R}_+^*$).
- $\mathbb{E}(X)$ es la esperanza de X .

Podemos comprobar esta propiedad numéricamente, supongamos que tenemos una distribución de Poisson con n datos, un promedio de 3 y asignamos un número cualquiera para a .

```
a <- 2
n <- 1000
E <- 3
X <- rpois(n, E)
```

Ahora, por medio de un *for* obtendremos la probabilidad de que nuestros resultados sean mayor o igual a nuestra a .

```
a <- 2
n <- 1000
E <- 3
X <- rpois(n, E)
contador = 0
for(i in 1:n)
{
  if(abs(X[i]) >= a)
  {
    contador = contador + 1
  }
}
```

Ahora para probar obtendremos la razón de nuestra esperanza entre nuestro número a .

```
> P <- contador/n
> print(P)
#[1] 0.809
> Cociente <- E/a
> print(Cociente)
#[2] 1.5
```

3. La desigualdad de Chebyshev

Es un teorema de probabilidad formulado por el matemático ruso Pafnuty Chebyshev y maestro de Andrei Markov. Esta desigualdad es la herramienta básica para demostrar resultados como la ley de los grandes números. Establece que la probabilidad de que la distancia de una variable aleatoria X a su promedio sea como mínimo un cierto número a , es a lo más la varianza entre el cuadrado del número a , el cual se puede describir como:

$$P(|X - \mu| \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{a^2}.$$

Donde:

- σ^2 es la varianza.
- μ es el promedio esperado.
- a es un número positivo diferente de 0 ($a \in R_+^*$).

En resumen, establece que la probabilidad de que la distancia de la media sea mayor a cierto número, es a lo más la varianza entre el cuadrado de cierto número. Así que, si la varianza es pequeña, la probabilidad de estar lejos en la media también es pequeña. Este teorema puede ser probado por el teorema de Markov. Si analizamos su teorema podremos ver que podemos sustituir elementos de la desigualdad con los de Chebyshev.

$$P(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.$$

Donde:

- $X = (X - \mu)^2$.
- $a = \epsilon^2$.

Si sustituimos las variables nos da algo esencialmente igual al teorema de Chebyshev.

$$P(|(X - \mu)^2| \geq \epsilon^2) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.$$

Nosotros sabemos que $\sigma^2 = V[X] = \mathbb{E}[(X - \mu)^2]$ y $P(|(X - \mu)^2| \geq \epsilon^2)$ es esencialmente lo mismo que $P(|(X - \mu)| \geq \epsilon)$, por lo tanto nos queda:

$$P(|X - \mu| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}.$$

4. Ley de números grandes

Es un teorema fundamental de la probabilidad que indica que si repetimos muchas veces un mismo experimento (que tiende al infinito), este se acercará a nuestro promedio teórico. Es decir, la probabilidad de que la diferencia entre el promedio analítico y el experimental sea mayor o igual a un número positivo cuando n se aproxima al infinito es de 0.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| \geq \epsilon\right) = 0.$$

Donde:

- n es el número de datos.
- P es la probabilidad.
- ϵ es un número positivo diferente de 0 ($\epsilon \in R_+^*$).
- μ es el promedio analítico.
- $\frac{S_n}{n}$ es el promedio experimental.

También se establece que la posibilidad de que la diferencia del promedio analítico y experimental sea menor que un número positivo cuando n se aproxima al infinito es de 1.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\frac{S_n}{n} - \mu| < \epsilon) = 1.$$

Donde:

- n es el número de datos.
- P es la probabilidad.
- ϵ es un número positivo diferente de 0 ($\epsilon \in R_+^*$).
- μ es el promedio analítico.
- $\frac{S_n}{n}$ es el promedio experimental.

Este comportamiento se puede comprobar en R[3]; imaginemos una distribución normal con n datos con un promedio de μ y una desviación estándar de 2.

```
n <- 1000
mu <- 7
de <- 2
x <- rnorm(n,mu,de)
```

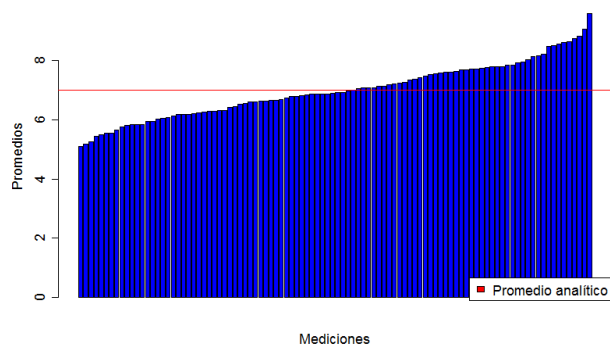
Si por medio de la función *sample* obtenemos el promedio de esos datos, tendremos un valor menor o mayor que nuestro promedio analítico.

```
Sample <- sample(x,50)
Promedio <- sum(Sample)/length(Sample)
print(Promedio)
> print(Promedio)
#[1] 6.574619
```

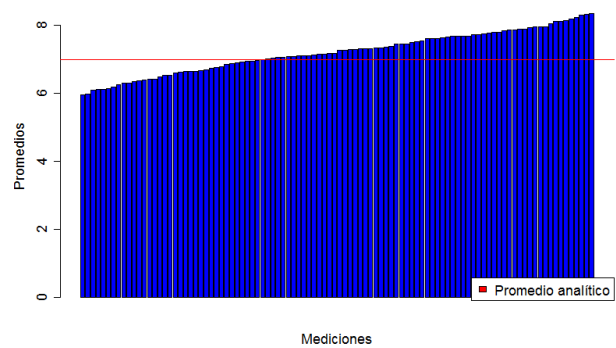
Si aumentáramos el número de elementos que tomamos en nuestra muestra, eventualmente nuestro promedio experimental y analítico serán cada vez mas cercanos (Figura 4.1).

Referencias

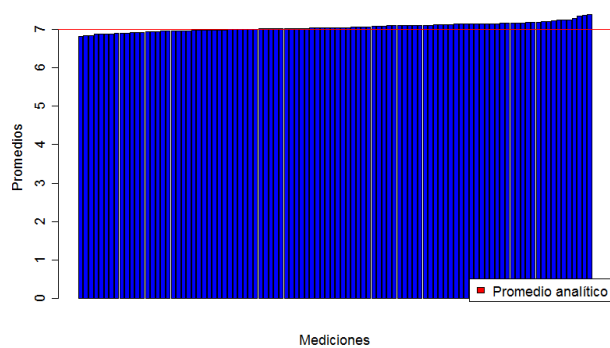
- [1] Joaquin Arturo Velarde Moreno. *Repositorio con material de la clase de probabilidad*. Recursos libre, disponible en https://github.com/joaquin3600/Modelos_Probabilistas_Aplicados. 2020.
- [2] Satu Elisa Schaeffer. *Modelos probabilistas aplicados*. Sitio en, <https://elisa.dyndns-web.com/teaching/prob/pisis/prob.html>.
- [3] The R Foundation. *The R Project for Statistical Computing*. <https://www.r-project.org/>. 2019.



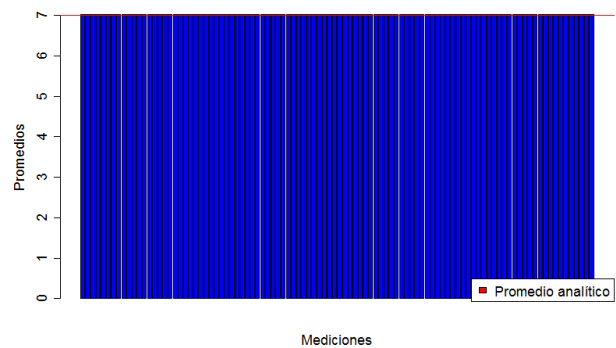
(a) Distribución del promedio de una muestra de 5 elementos aleatorios.



(b) Distribución del promedio de una muestra de 10 elementos aleatorios.



(c) Distribución del promedio de una muestra de 200 elementos aleatorios.



(d) Distribución del promedio de una muestra de 1000 elementos aleatorios.

Figura 4.1: Distribuciones de promedio en las muestras obtenidas al ir aumentando el número de muestras.