Tarea convolución

TAREA 10

Alumno:
Joaquín Arturo Velarde Moreno

1. Introducción

En este reporte hago uso del programa R 4.0.2 [2] para poder demostrar y probar algunas propiedades de la covarianza propuestos del material del curso[1].

2. Covarianza

La covarianza es un dato básico que existe para determinar una dependencia entre 2 variables aleatorias, a diferencia de los coeficientes de correlación este no esta estandarizado, por lo que puede tomar valores de ∞ hasta $-\infty$ y lo representamos como $Cov(X, Y)$, esto es igual a $E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$ por lo tanto:

$$Cov(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])].$$

2.1. Primera propiedad

Probaremos la siguiente propiedad de la covarianza, de manera numérica empleando la herramienta R [2], si X, Y son variables aleatorias y a, b, c, d son constantes tenemos que:

$$Cov(aX + b, cY + d) = acCov(X, Y).$$

Primero estableceremos nuestras variables aleatorias por medio de una distribución uniforme para X y asignando a nuestra Y una operación de X.

```
X <- runif(100)
Y <- X*2/3
```

después declaramos nuestras constantes.

```
X <- runif(100)
Y <- X*2/3
a <- 1
b <- 2
c <- 3
d <- 4
```

Ahora representaremos el primer miembro de nuestra ecuación $Cov(aX + b, cY + d)$.

```
X <- runif(100)
Y <- X*2/3
a <- 1
b <- 2
c <- 3
d <- 4
PrimerMiembro = cov((a * X) + b, (c * Y) + d)
```

Por ultimo obtenemos nuestro segundo miembro de nuestra ecuación $acCov(X,Y)$.

```
X <- runif(100)
Y <- X*2/3
a <- 1
b <- 2
c <- 3
d <- 4
PrimerMiembro  = cov((a * X) + b, (c * Y) + d)
SegundoMiembro = a * c * cov(X,Y)
#> print(PrimerMiembro)
#[1] 0.1518915
#> print(SegundoMiembro)
#[1] 0.1518915
```

con esto podemos demostrar que ambos miembros de la ecuación son lo mismo, para la prueba analítica tenemos que recordar que la $Cov(X,Y)$ es $E(XY)-E(X)E(Y)$. Si tenemos nuestras variables siendo afectadas por las constantes entonces tenemos que.

$$\begin{aligned}
Cov(aX+b,cY+d) &= E[(aX+b)(cY+d)]-E(aX+b)E(cY+d) \\
&= E(acXY+adX+bcY+bd)-(acE(X)E(Y)+cbE(Y)+adE(X)+bd) \\
&= acE(XY)+adE(Y)+bcE(Y)+bd-(acE(X)E(Y)+cbE(Y)+adE(Y)+bd) \\
&= acE(XY)-acE(x)E(Y) \\
&= ac(E(XY)-E(X)E(Y)) \\
&= acCov(X,Y)
\end{aligned}$$

por lo que nos queda que nuestra propiedad analíticamente es correcta.

2.2. Segunda propiedad

Probaremos ahora una segundo propiedad de la varianza, de manera numérica empleando la herramienta R [2], si X,Y son variables aleatorias, entonces la varianza de la suma de las variables es igual a la varianza de X y Y mas 2 veces la covarianza de X,Y :

$$Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)+2Cov(X,Y).$$

Primero estableceremos nuestras variables aleatorias por medio de una distribución uniforme para X y asignando a nuestra Y una operación de X.

```
X <- runif(100)
Y <- X*2/3
```

Ahora representaremos los miembros de nuestra ecuación $Var(X)+Var(Y)+2Cov(X,Y)$.

```
X <- runif(100)
Y <- X*2/3
PrimerMiembro   = var(X + Y)
SegundoMiembro  = var(X) + var(Y) + (2 * cov(X,Y))
#> print(PrimerMiembro)
#[1] 0.2186215
#> print(SegundoMiembro)
#[1] 0.2186215
```

con esto podemos demostrar que ambos miembros de la ecuación son lo mismo, para la prueba analítica tenemos que recordar que la $V(X)$ es $E((X+Y)^2)-(E(X+Y))^2$. Si tenemos nuestras sumadas tenemos que:

$$\begin{aligned}
V(X+Y) &= E[(X+Y)^2]-(E(X+Y))^2 \\
&= E(X^2+2XY+Y^2)-(E(X)+E(Y))^2 \\
&= E(X^2)+2E(XY)+E(Y^2)-(E(X))^2+(E(Y))^2+2E(X)E(Y) \\
&= E(X^2)-(E(X))^2+E(Y^2)-(E(Y))^2 \\
&= V(X)+V(Y)+2Cov(X,Y)
\end{aligned}$$

por lo que nos queda que nuestra propiedad analíticamente es correcta.

Referencias

[1] Satu Elisa Schaeffer. *Modelos probabilistas aplicados*. Sitio en, `https://elisa.dyndns-web.com/teaching/prob/pisis/prob.html`.

[2] The R Foundation. *The R Project for Statistical Computing*. `https://www.r-project.org/`. 2019.