Ajuste de curvas

TAREA 7

Alumno:
Joaquín Arturo Velarde Moreno

1. Introducción

El objetivo del siguiente reporte es describir cómo se obtiene la correlación lineal a través de varios ejemplos de funciones matemáticas; ver su representación gráfica y la forma de su curva. Para cumplir con este objetivo, usaremos el programa R 4.0.2 [2] y de este modo, haremos cálculos con una serie de datos. Usaremos como apoyo el material de la Dra. Elisa Schaefer [1].

2. Definición correlación lineal

La correlación es una medida de la presencia de una relación lineal en un conjunto de datos que provienen de dos variables medidas al mismo tiempo sobre cada individuo; también se les conoce como datos bivariados. Estos se pueden representar gráficamente, como se muestra en una encuesta que se hizo a alumnas de una escuela (Figura 2.1). En la que se midió el peso y la altura de cada una de ellas; en la representación gráfica se puede ver que hay una relación entre el peso y estatura de estos individuos.

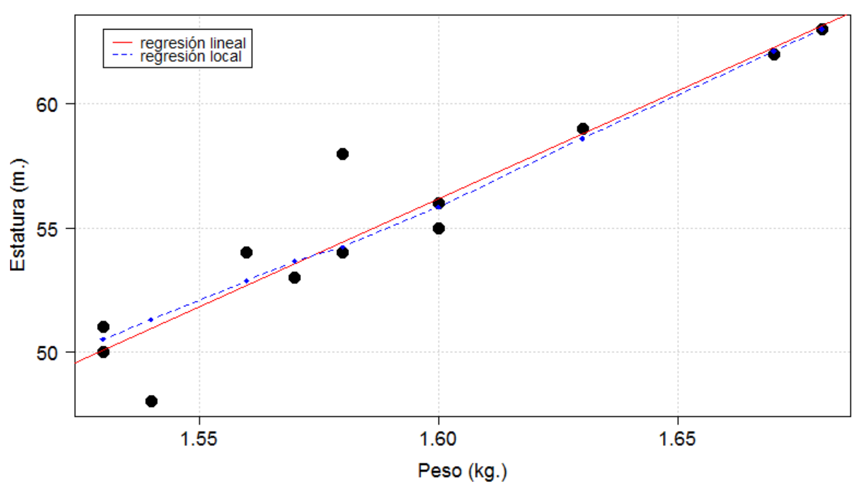


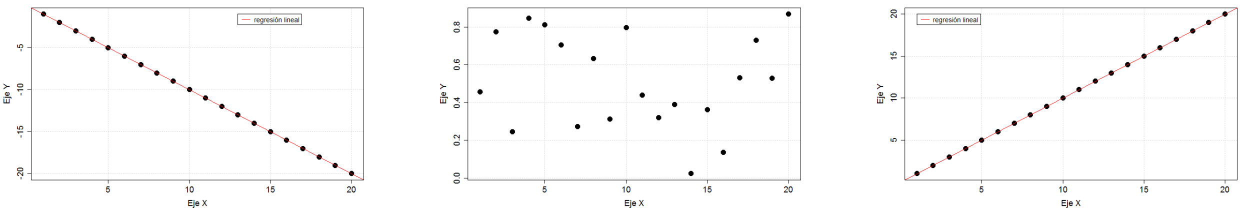
Figura 2.1: Relación entre peso(kg.) y altura(m.) de alumnas.

En el presente reporte usaremos la correlación de Pearson, al cual denotaremos por r, el rango de la correlación r va de *1* a *-1*, esto puede generar 3 casos (Figura 4.1).

- r igual a 1: positiva.

- r igual a -1: negativa.
- r igual a 0: sin correlación.

La mayoría de las veces no tendremos mediciones exactas para cada caso, si no que tendremos un aproximado a cada estado, con este aproximado podremos decidir si nuestros datos tienen una relación o si son independientes entre si.



(a) Correlación negativa Y disminuye cuando X crece.

(b) No hay relación alguna en los datos.

(c) Correlación negativa Y aumenta cuando X crece.

Figura 2.2: Correlaciones en sus valores negativo, positivo y 0.

3. Fórmula

La correlación de Pearson puede ser obtenida por la siguiente expresión:

$$\frac{\Sigma\left(x \ \times \ y\right) \ - \ \frac{1}{n}\left(\Sigma x \ \times \Sigma y\right)}{\sqrt{\left(\Sigma x^2 - \frac{1}{2}\left(\Sigma x\right)^2\right) \times \left(\Sigma y^2 - \frac{1}{2}\left(\Sigma y\right)^2\right)}}.$$

donde:

- x y y son nuestros datos bivariados.
- n es el numero de datos.

Esta ecuación puede ser expresada en R de la siguiente manera:

```
n                  <- length(VectorX)
SumatoriaX         <- sum(VectorX)
SumatoriaY         <- sum(VectorY)

numerador          <- sum(VectorX * VectorY) - (SumatoriaX * SumatoriaY) / n
denominadorX       <- sum(VectorX **2) - (SumatoriaX**2) / n
denominadorY       <- sum(VectorY **2) - (SumatoriaY**2) / n
denominador        <- sqrt(denominadorX * denominadorY)
correlacion        <- numerador / denominador
```

Existe una manera mas sencilla de hacer este calculo, obteniendo los promedios de cada vector a los cuales denotaremos como X y Y, pudiéndose expresar de la siguiente manera:

$$\frac{\Sigma\left(x \ \times \ y\right)}{\sqrt{\Sigma x^2 \times \Sigma y^2}}.$$

donde:

- $y = Y - \mu Y$.
- $x = X - \mu X$.

Esta ecuación puede ser expresada en R de la siguiente manera:

```
x          <- VectorX - mean(VectorX)
y          <- VectorY - mean(VectorY)

correlacion     <- sum(x * y) / sqrt(sum(x**2) * sum(y**2))
```

4. Transformadas

No todos los conjuntos de datos vienen de manera lineal, algunas vienen muy dispersos y otros forman curvas, como es el caso del ejemplo de la función $f(x) = x^2$ (Figura 4.3). En estos casos lo mejor es trabajar con transformadas, estas son manipulaciones que se hacen a un vector de los datos para poder acomodarlos una relación lineal. una opción sencilla es la escalera de Tukey:

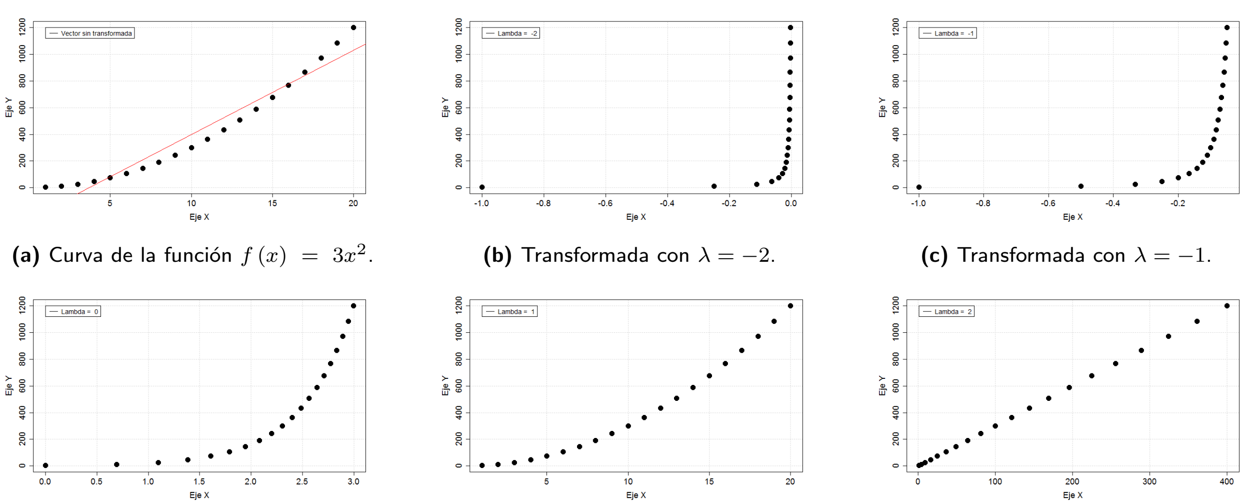
Cuadro 1: Escalera de Tuker con un rango de -2 a 2.

λ	-2	-1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\log x$	$\sqrt{x}$	x	x^2

Podemos calcular comparar cada transformada en R de la siguiente manera:

```
for(i in seq(-2,2,1))
{
    if(i > 0)
    { z <- x^i}
    else if(i < 0)
    { z <- -1*x^i}
    else
    { z <- log(x)}
    cor(y,z)
 }
```

Dada la función $f(x) = 3x^2$ podemos buscar una transformada por la escalera de Tukey que nos encuentre el λ que mas haga una relación lineal en nuestros conjuntos.



(a) Curva de la función $f(x) = 3x^2$.

(b) Transformada con $\lambda = -2$.

(c) Transformada con $\lambda = -1$.

(d) Transformada con $\lambda = 0$.

(e) Transformada con $\lambda = 1$.

(f) Transformada con $\lambda = 2$.

Figura 4.1: Transformadas de la función $f(x) = 3x^2$.

Una alternativa optimizada es la transformada Box-Scott, en esta expresion X se transforma a $\frac{(x^{\Lambda} - 1)}{\Lambda}$. Podemos calcular comparar cada transformada en R de la siguiente manera:

```
for(i in seq(-2,2,0.05))
{
    z <- (abs(x)^i-1)/i
    w <- c(w,cor(y,z))
    v <- c(v,i)
}
plot(v, w)
```

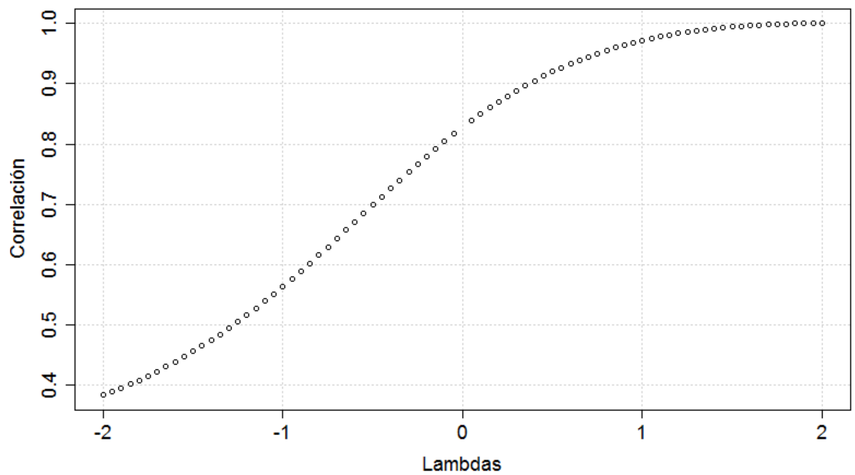


Figura 4.2: Lambdas y su correlación usando la transformada de Box-Scott en la función $f(x) = 3x^2$.

Referencias

[1] Satu Elisa Schaeffer. *Modelos probabilistas aplicados*. Sitio en, https://elisa.dyndns-web.com/teaching/prob/pisis/prob.html.

[2] The R Foundation. *The R Project for Statistical Computing*. https://www.r-project.org/. 2019.

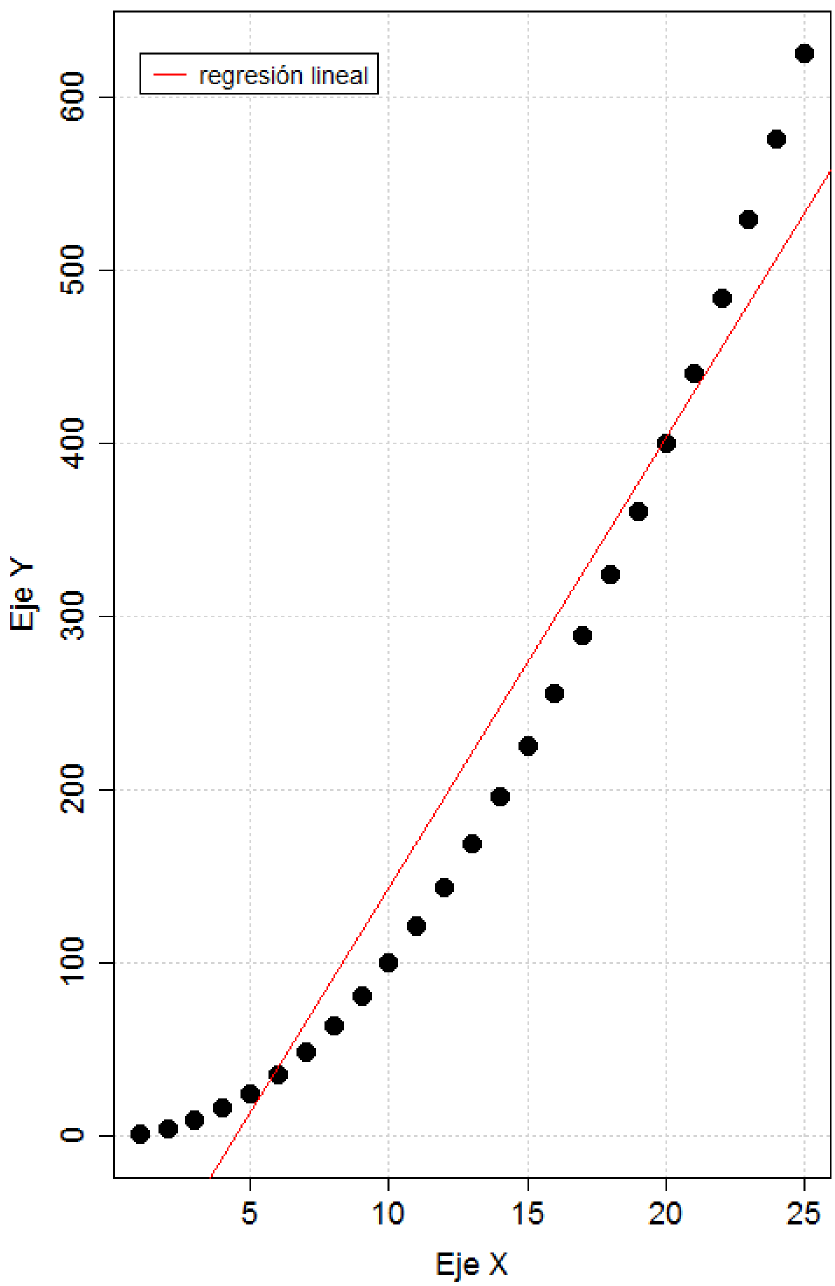


Figura 4.3: Relación entre el conjunto X y el Y al aplicar $f(x) = x^2$.