Convolución

TAREA 10

Alumno:
Joaquín Arturo Velarde Moreno

1. Introducción

En este reporte, con el uso del programa R 4.0.2 [2], me propongo demostrar y probar algunas propiedades de la covarianza propuestos en el material del curso [1].

2. Convolución

Supongamos que tenemos 2 variables independientes de discretas, X y Y, también tenemos la suma de estas 2 variables como $Z = X + Y$, para obtener esto podemos usar la convolución, el cual es la probabilidad de que la suma de 2 variables independientes sea un numero especifico.

$$P(Z = j) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} P(X = i)P(Y = j - i).$$

Tomemos por ejemplo un caso real en donde nos interesa saber la suma de las 2 caras de un dado al ser lanzadas, nuestras variables X y Y serian el resultado de cada cara por lo que $Z = X + Y$, debido a que solo existen 6 posibles resultados al caer los dados la ecuación seria.

$$P(Z = j) = \sum_{i=1}^{6} P(X = i)P(Y = j - i).$$

3. Covarianza

La covarianza es un dato básico que existe para determinar una dependencia de dos variables aleatorias. A diferencia de los coeficientes de correlación, este no está estandarizado, por lo que puede tomar valores de ∞ hasta $-\infty$ y se representa como $Cov(X, Y)$, esto es igual a $E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$, por lo tanto:

$$Cov(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])].$$

3.1. Primera propiedad

Probaremos la primera propiedad de la covarianza de manera numérica empleando la herramienta R [2]. Si X, Y son variables aleatorias y a, b, c, d son constantes, tenemos que:

$$Cov(aX + b, cY + d) = acCov(X, Y).$$

Primero estableceremos nuestras variables aleatorias por medio de una distribución uniforme para X y asignando a nuestra Y una operación de X.

```
X <- runif(100)
Y <- X*2/3
```

después declaramos nuestras constantes.

```
X <- runif(100)
Y <- X*2/3
a <- 1
b <- 2
c <- 3
d <- 4
```

Ahora, representaremos el primer miembro de nuestra ecuación $Cov(aX + b, cY + d)$.

```
X <- runif(100)
Y <- X*2/3
a <- 1
b <- 2
c <- 3
d <- 4
PrimerMiembro = cov((a * X) + b, (c * Y) + d)
```

Por último, obtenemos el segundo miembro de nuestra ecuación $acCov(X, Y)$.

```
X <- runif(100)
Y <- X*2/3
a <- 1
b <- 2
c <- 3
d <- 4
PrimerMiembro  = cov((a * X) + b, (c * Y) + d)
SegundoMiembro = a * c * cov(X,Y)
#> print(PrimerMiembro)
#[1] 0.1518915
#> print(SegundoMiembro)
#[1] 0.1518915
```

con esto podemos demostrar que ambos miembros de la ecuación son lo mismo. para la prueba analítica tenemos que recordar que la $Cov(X, Y)$ es $E(XY) - E(X)E(Y)$. Si las variables son afectadas por nuestras constantes, entonces tenemos que.

$$\begin{aligned}
Cov(aX + b, cY + d) &= E[(aX + b)(cY + d)] - E(aX + b)E(cY + d) \\
&= E(acXY + adX + bcY + bd) - (acE(X)E(Y) + cbE(Y) + adE(X) + bd) \\
&= acE(XY) + adE(Y) + bcE(Y) + bd - (acE(X)E(Y) + cbE(Y) + adE(Y) + bd) \\
&= acE(XY) - acE(x)E(Y) \\
&= ac(E(XY) - E(X)E(Y)) \\
&= acCov(X, Y)
\end{aligned}$$

Por lo cual resulta que nuestra propiedad analítica es correcta

3.2. Segunda propiedad

Probaremos ahora una segundo propiedad de la varianza de manera numérica empleando la herramienta R [2]. Si X, Y son variables aleatorias, entonces la varianza de la suma de las variables es igual a la varianza de X y Y más 2 veces la covarianza de X, Y :

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y).$$

Primero estableceremos nuestras variables aleatorias por medio de una distribución uniforme para X y asignando a nuestra Y una operación de X.

```
X <- runif(100)
Y <- X*2/3
```

Ahora representaremos los miembros de nuestra ecuación $Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y)$.

```
X <- runif(100)
Y <- X*2/3
PrimerMiembro   = var(X + Y)
SegundoMiembro  = var(X) + var(Y) + (2 * cov(X,Y))
#> print(PrimerMiembro)
#[1] 0.2186215
#> print(SegundoMiembro)
#[1] 0.2186215
```

con esto podemos demostrar que ambos miembros de la ecuación son lo mismo. Para la prueba analítica debemos que recordar que la $V(X)$ es $E((X)^2) - (E(X))^2$. Si tenemos ahora la suma de X y Y entonces:

$$
\begin{aligned}
V(X+Y) &= E[(X+Y)^2] - (E(X+Y))^2 \\
&= E(X^2 + 2XY + Y^2) - (E(X) + E(Y))^2 \\
&= E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2) - (E(X))^2 + (E(Y))^2 + 2E(X)E(Y) \\
&= E(X^2) - (E(X))^2 + E(Y^2) - (E(Y))^2 \\
&= V(X) + V(Y) + 2Cov(X, Y)
\end{aligned}
$$

por lo cual resulta que nuestra propiedad analíticamente es correcta.

Referencias

[1] Satu Elisa Schaeffer. *Modelos probabilistas aplicados*. Sitio en, https://elisa.dyndns-web.com/teaching/prob/pisis/prob.html.

[2] The R Foundation. *The R Project for Statistical Computing*. https://www.r-project.org/. 2019.