9. Si la ecuación $Ax = b$ tiene solución, entonces existe un único p en $C(A^T)$ solución del sistema.

Si x es una solución del sistema $Ax = b$ entonces $x = x_N + x_C$ con $x_N \in N(A)$ y $x_C \in C(A^T)$. Como

$$b = Ax = A(x_N + x_C) = Ax_N + Ax_C = Ax_C$$

resulta que x_C es solución del sistema y tenemos probada la existencia.

Supongamos ahora que existen $p_1, p_2 \in C(A^T)$ soluciones del sistema $Ax = b$. Por un lado, $p_1 - p_2 \in C(A^T)$ y además, $Ap_1 = b$ y $Ap_2 = b$. De estas últimas igualdades resulta,

$$Ap_1 = Ap_2 \Leftrightarrow A(p_1 - p_2) = 0.$$

Luego, $p_1 - p_2 \in N(A) = (C(A^T))^\perp$.
Por lo tanto, $p_1 - p_2 \in C(A^T) \cap (C(A^T))^\perp = \{0\}$. Entonces $p_1 = p_2$.

10. Sea W un subespacio vectorial de V y $\{w^1, \dots, w^p\}$ base ortogonal de W. Sea $v \in V - W$, probar que $v - proy_{s/W}\ v$ es perpendicular a w para todo $w \in W$.

Sea $w \in W$. Como $\{w^1, \dots, w^p\}$ es base de W, existen $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ tales que $w = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j w^j$. Además, por ser $\{w^1, \dots, w^p\}$ base ortogonal de W, dado $v \in V$, $proy_{s/W}\ v = \sum_{i=1}^{p} \frac{\langle v, w^i \rangle}{\|w^i\|^2} w^i$.

Para probar que $v - proy_{s/W}\ v$ es perpendicular a w para todo $w \in W$ si $v \in V - W$, vamos a ver que

$$\langle v - proy_{s/W}\ v, w \rangle = 0.$$

$$\langle v - proy_{s/W}\ v, w \rangle = \left\langle v - \sum_{i=1}^{p} \frac{\langle v, w^i \rangle}{\|w^i\|^2} w^i, \sum_{j=1}^{p} \alpha_j w^j \right\rangle = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \langle v, w^j \rangle - \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{p} \alpha_j \frac{\langle v, w^i \rangle}{\|w^i\|^2} \langle w^i, w^j \rangle =$$
$$\sum_{j=1}^{p} \alpha_j \langle v, w^j \rangle - \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \frac{\langle v, w^j \rangle}{\|w^j\|^2} \langle w^j, w^j \rangle = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \langle v, w^j \rangle - \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \frac{\langle v, w^j \rangle}{\|w^j\|^2} \|w^j\|^2 =$$
$$\sum_{j=1}^{p} \alpha_j \langle v, w^j \rangle - \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \langle v, w^j \rangle = 0.$$

11. Sea W un subespacio de $\mathbb{R}^n$ con una base ortogonal $\{w^1, \dots, w^p\}$ y sea $\{v^1, \dots, v^q\}$ una base ortogonal de $W^\perp$.
   1. Explicar por qué $\{w^1, \dots, w^p, v^1, \dots, v^q\}$ es un conjunto ortogonal.
   2. Explicar por qué el conjunto definido en el ítem anterior genera $\mathbb{R}^n$.
      Sugerencia: Utilizar el ejercicio 10..
   3. Demostrar que $\dim W + \dim W^\perp = n$.

$a)$ Tenemos que verificar tres posibles productos internos:

- Como $\{w_1, \dots, w_p\}$ es un conjunto ortogonal: $\langle w_i, w_j \rangle = 0$ para $i, j = 1, \dots, p$ tal que $i \neq j$.
- Como $\{v_1, \dots, v_q\}$ es un conjunto ortogonal: $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ para $i, j = 1, \dots, q$ tal que $i \neq j$.
- Por definición de $W^\perp$: $\langle w_i, v_j \rangle = \langle v_j, w_i \rangle = 0$ para $i = 1, \dots, p$ y $j = 1, \dots, q$.

Concluimos que $\{w_1, \dots, w_p, v_1, \dots, v_q\}$ es un conjunto ortogonal.

b) Consideramos $V := \langle\{w_1, \ldots, w_p, v_1, \ldots, v_q\}\rangle$. Dado que $V \subseteq \mathbb{R}^n$ solo necesitamos probar una contención.

Supongamos a modo de contradicción que existe $v \in \mathbb{R}^n - V$.

Dado que $W \subset V$ resulta que $v \notin W$ y por lo tanto, si consideramos $\bar{v} := v - proy_{s/W} v$, entonces por el ejercicio 10 (tomando la base $\{w_1, \ldots, w_p\}$ para W) resulta que $\bar{v} \in W^{\perp}$.

Observando que $\bar{v} \in W^{\perp} \subset V$ y $proy_{s/W} v \in W \subset V$, resulta que la suma $\bar{v} + proy_{s/W} v$ está en el espacio vectorial V, pero esto es una contradicción porque $\bar{v} + proy_{s/W} v = v \notin V$.

Concluimos que $\mathbb{R}^n \subseteq V$ y por lo tanto $V = \mathbb{R}^n$.

c) Dado que, por a), el conjunto $\{w_1, \ldots, w_p, v_1, \ldots, v_q\}$ es un conjunto ortogonal de vectores no nulos (porque cada elemento forma parte de una base) los vectores son linealmente independientes.

Como en b) probamos que es un conjunto que genera el espacio, resulta que es base. Como la cantidad de elementos de una base es invariante tenemos que $p + q = n$, es decir, $\dim W + \dim W^{\perp} = n$.