## Álgebra Lineal - LCC - LM - PM **2020**

**Práctica**: CAPÍTULO 5 (SEGUNDA PARTE) - AUTOVECTORES Y AUTOVALORES

Salvo mención en contrario, los vectores se consideran en el espacio vectorial $\mathbb{C}^n$ sobre $\mathbb{C}$, con el producto interno estándar.

1. Sean $x = \begin{bmatrix} 2-4i \\ 4i \end{bmatrix}$ e $y = \begin{bmatrix} 2+4i \\ 4i \end{bmatrix}$.

   *a*) Calcular $\|x\|$ y $\|y\|$.

   *b*) Hallar $x^H y$.

2. Dadas $A$ y $B$ dos matrices. Demostrar:

   *a*) $(AB)^H = B^H A^H$.

   *b*) $(A^H)^H = A$.

3. Dada $A = \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ i & 0 & 1 \end{bmatrix}$:

   *a*) Escribir la matriz $A^H$ y calcular $C = A^H A$.

   *b*) ¿Cuál es la relación entre $C$ y $C^H$?

4. Dada $A$ matriz $m \times n$ de entradas complejas. Demostrar:

   *a*) $A^H A$ siempre es una matriz hermitiana.

   *b*) Si $A$ es una matriz hermitiana entonces su diagonal tiene entradas reales.

5. Encontrar la descomposicin espectral de las siguientes matrices

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix},\ Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ R = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

6. Sea $A$ una matriz hermitiana y $S$ la matriz que diagonaliza a $A$. Probar que $S$ puede ser elegida con sus columnas ortonormales.

7. Sea $U$ una matriz $n \times n$ unitaria. Entonces:

   *a*) $U^H U = UU^H = I$, es decir $U^{-1} = U^H$.

   *b*) Para todo $x \in \mathbb{C}^n$, $\|Ux\| = \|x\|$.

8. Calcular la tercera columna de $U$ de modo que dicha matriz resulte unitaria.

$$U = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{i\sqrt{2}}{2} & \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \\ \frac{i\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \end{bmatrix}.$$

9. Diagonalizar la matriz sesgada hermitiana $K = \begin{bmatrix} i & i \\ i & i \end{bmatrix}$ (esto es, describir $M$ y $\Lambda$ tales que $K = M^1 \Lambda M$).

10. Describir todas las matrices de tamaño $3 \times 3$ que simultáneamente son hermitianas, unitarias y diagonales.

11. Diagonalizar la siguiente matriz unitaria $V$ y describir $U$ y $\Lambda$ tales que $V = U\Lambda U^H$.

$$V = \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & -1 \end{bmatrix}.$$

12. Sea $T$ la transformación en el plano $xy$ que representa la reflexión a través de la recta $y = x$.

    *a*) Hallar la matriz asociada a $T$ respecto a la base estándar $\mathcal{B} = \{(1,0),(0,1)\}$, y también respecto a $\mathcal{B}' = \{(1,1),(1,-1)\}$.

*b*) Verificar que las matrices halladas en el ítem anterior son semejantes.

13. Sea $T$ una transformación lineal de un espacio vectorial de dimensión finita $V$ en sí mismo y, $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ dos bases ordenadas de $V$. Sean $A$ y $B$ las matrices asociadas a $T$ considerando las bases $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ respectivamente. Demostrar que $A$ y $B$ son semejantes.

    *Ayuda*: Probar que $B = M^{-1}AM$ donde $M$ es la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_1$.

14. Sea $T$ la proyección en $\mathbb{R}^2$ sobre la recta que pasa por el origen formando un ángulo $\theta$ con el eje $x$. Construir la matriz $A$ asociada a $T$ con la base canónica de $\mathbb{R}^2$ a partir de la matriz $B$ asociada a $T$ con una base que contiene un vector sobre la recta y un vector ortogonal a la recta.

15. Probar que la relación de semejanza entre matrices es una relación de equivalencia.

16. Probar que las matrices $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ son semejantes.

17. Sean $A$ y $B$ matrices semejantes. Probar que $A$ y $B$ tienen el mismo polinomio característico.

18. Probar que:

    *a*) Si $A$ es semejante a $B$ entonces $A^2$ es semejante a $B^2$.

    *b*) Existen matrices $A$ y $B$ no semejantes tales que $A^2$ y $B^2$ son semejantes.