# Parcial 1 - 2023

## Ej 1:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n}{2n+3}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{4n}{2n+3} \underset{LH}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{4}{2} = 2 \neq 0 \Rightarrow$ la serie diverge por crit. necesario de convergencia

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}\pi}{5^n} = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{5^n} = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2^2}{5}\right)^n = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n$

$2^{2n} = {2^2}^n$

$\frac{4}{5} < 1$

Luego $S = \frac{1}{1 - 4/5} = 5$

$\therefore$ la serie converge a $5\pi$

## Ej 2:

a) Utilizando el método de redondeo, hallar el número máquina más próximo a 129 y a 128,75 si se trabaja con base 10 y mantisa de 2 dígitos.

pasando a mantisa de 2 dígitos con redondeo (9>5 ⇒ redondeo)

$fl(129) = (,129)_{10} \times 10^3 = (,13)_{10} \times 10^3$

$fl(128{,}75) = (,12875)_{10} \times 10^3 = (,13)_{10} \times 10^3$

pasando a mantisa de 2 dígitos con redondeo

$12875 = 1288 = 129 = 13$

7 impar $\quad$ 8>5 $\quad$ 9>5

b) Verificar, para $x = 128,75$, la conocida cota para el error relativo

$$\left|\frac{x - fl(x)}{x}\right| \leq \varepsilon,$$

si $\varepsilon = \frac{1}{2}\beta^{1-d}$, donde $\beta$ es la base y $d$ la longitud de la mantisa.

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\beta^{1-d} = \frac{1}{2}.10^{1-2} = \frac{1}{2}.10^{-1} = \frac{1}{2}.\frac{1}{10} = \frac{1}{20} = 0,05 = (,5)_{10} \times 10^{-1}$$

Luego,

$$\left|\frac{x - fl(x)}{x}\right| = \left|\frac{128,75 - \overset{(,13)_{10}\times 10^{3}}{130}}{128,75}\right| = \left|\frac{1,25}{128,75}\right| = (,97)_{10} \times 10^{-2} < (,5)_{10} \times 10^{-1}$$

Ej 3:

a)

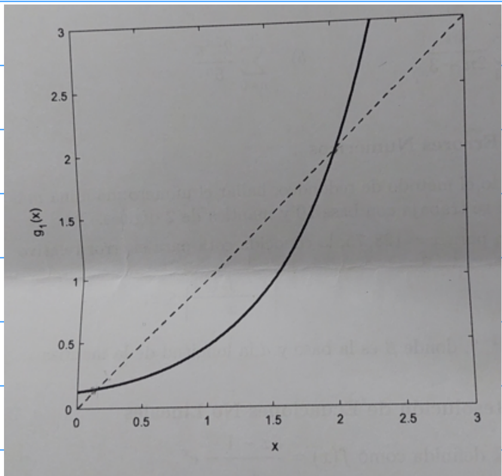


Figura 1: Gráfica de $g_1(x)$.

$g(x) = \frac{1}{8}(1 + xe^{x})$

$g'(x) = \frac{1}{8} \cdot (xe^{x})' = \frac{1}{8} \cdot (x'e^{x} + x(e^{x})')$

$= \frac{1}{8} \cdot (e^{x} + xe^{x})$

qvq $|g'(\alpha_1)| < 1$ y $|g'(\alpha_2)| < 1$

Sea $\alpha_1 = 0,2$ y $\alpha_2 = 2$

$g'(0,2) = \frac{1}{8} \cdot (e^{0,2} + 0,2e^{0,2}) = 0,1832 < 1$

$g'(2) = \frac{1}{8}(e^{2} + 2e^{2}) = 3,74 > 1$

$\therefore$ el método converge para $\alpha_1$ pero no $\alpha_2$

b)

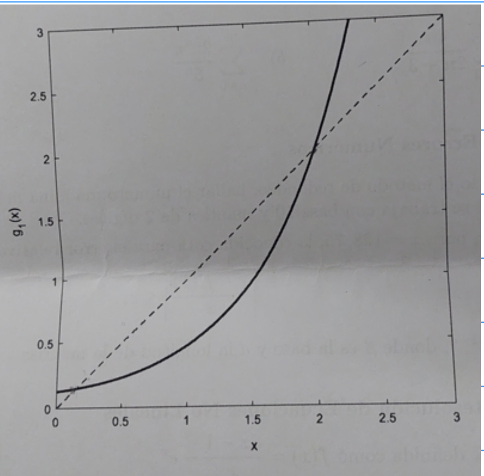


Figura 1: Gráfica de $g_1(x)$.

$g$ contractiva en $[x_1, x_2]$ si $|g(x_1) - g(x_2)| \leq \overset{[0,1)}{c} |x_1 - x_2|$

$\therefore$ $g$ contrac. en $[0, 2]$

Esto implica $\longrightarrow$ $0 < x < 2 \Rightarrow 0 < g(x) < 2$
$\hookrightarrow$ $\sup_{x \in [0,2]} |g'(x)| < 1$

c) converge a $\alpha_1$ para $[0,2)$ $\rightarrow$ por que?

d) • $a < x < b \Rightarrow a < g(x) < b$ $\rightarrow$ vale en $[0,2]$
• $\sup_{[0,2]} |g'(x)| < 1$

$g'(0) = \frac{1}{8}(e^0 + 2e^0) = \frac{3}{8} < 1 \Rightarrow \checkmark$

$g'(2) = \frac{1}{8}(e^2 + 2e^2) = 3{,}74 > 1 \Rightarrow \times$ $\longrightarrow$ consultar

a ojo, vale en $[0, 2)$

e) $g_2(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{\frac{3x-1}{x} - e^x}{1/x^2 - e^x} = x - \frac{\frac{3x-1}{xe^x} - 1}{\frac{1}{x^2e^x} - 1}$

$$f'(x) = \left(\frac{3x-1}{x} - e^x\right)'$$
$$= \left(\frac{8x-1}{x}\right)' - e^x$$
$$= (8x-1)' \cdot 1/x + (8x-1) \cdot -x^{-2} - e^x$$
$$= 8/x - 8/x + x^{-2} - e^x$$
$$= x^{-2} - e^x$$

$$= x - \frac{\frac{3x-1-xe^x}{xe^x}}{\frac{1-x^2e^x}{x^2e^x}}$$

$$= x - \frac{8x-1-xe^x}{xe^x} \cdot \frac{x^2e^x}{1-x^2e^x}$$

$$= x - \frac{(8x-1-xe^x)x}{1-x^2e^x}$$

$$= x - \frac{8x^2-x-x^2e^x}{1-x^2e^x}$$

f) qvq $|g_2'(\alpha_1)|<1$ y $|g_2'(\alpha_2)|<1$

Sea $\alpha_1 = 0,2$ y $\alpha_2 = 2$

$g_2'(\alpha_1)\ldots \to$ como se supone que derivemos

g)