Nombre y Apellido:

Examen Parcial 2

Ej. 1. Sea G un grupo y H un subgrupo de G. Se dice que H es un *subgrupo característico* de G si para cada automorfismo $\varphi : G \to G$ se verifica que $\varphi(H) \subset H$.

a) Probar que si H es un subgrupo característico de un grupo G entonces $H \lhd G$.

Sugerencia. Probar primero que para cada $a \in G$, $f_a : G \to G$ tal que $f_a(g) = aga^{-1}$ es un automorfismo de G.

Solución: Sea $a \in G$ y sea $f_a : G \to G$, $f_a(g) = aga^{-1}$. Veamos primero que f_a es un homomorfismo. En efecto, si $g_1, g_2 \in G$, entonces

$$f_a(g_1g_2) = a(g_1g_2)a^{-1} = ag_1eg_2a^{-1} = ag_1(a^{-1}a)g_2a^{-1} = (ag_1a^{-1})(ag_2a^{-1}) = f_a(g_1)f_a(g_2)$$

Veamos ahora que f_a es sobreyectivo. Sea $g' \in G$ cualquiera, debemos encontrar $g \in G$ tal que $f_a(g) = g'$. Para ello, se debe verificar que

$$aga^{-1} = g' \ (\implies g = a^{-1}g'a)$$

Pongamos entonces $g = a^{-1}g'a \in G$. Resulta

$$f_a(g) = a(a^{-1}g'a)a^{-1} = g'$$

como queríamos ver.

Finalmente, veamos que $\ker(f_a) = \{e\}$, con lo cual f_a será inyectivo. Sea $g \in \ker(f_a)$. Entonces

$$f_a(g) = e \implies aga^{-1} = e \implies g = a^{-1}ea = e$$

Luego $g = e$.

Concluimos que f_a es un automorfismo de G.

Veamos ahora que si H es un subgrupo característico de G, entonces H es normal en G.

Como $f(H) \subset H$ para cada automorfismo de G, tendremos que, en particular, $f_a(H) \subset H$ para cada $a \in G$. Es decir,

$$aHa^{-1} \subset H$$

para cada $a \in G$, con lo cual $H \lhd G$.

b) Sea H un subgrupo característico de un grupo G y sea $\varphi : G \to G$ un automorfismo. Probar que φ se induce a un automorfismo $\overline{\varphi} : G/H \to G/H$ y que la asignación $\varphi \mapsto \overline{\varphi}$ es un homomorfismo de $Aut(G)$ en $Aut(G/H)$.

Solución: Si H es un subgrupo característico de G, hemos probado que es normal en G. Luego G/H es un grupo y la proyección $\pi : G \to G/H$ es un epimorfismo de grupos. Vamos a proceder por el Primer Teorema de Isomorfismo, por lo que primero necesitamos definir un epimorfismo de grupos $\tilde{\varphi} : G \to G/H$. Consideremos un automorfismo $\varphi : G \to G$ y consideremos el homomorfismo

$$\tilde{\varphi} = \pi \circ \varphi : G \to G/H.$$

Como φ es biyectivo y π es sobre, $\tilde{\varphi}$ es sobre, esto es, es un epimorfismo de grupos.

Determinemos $\ker(\tilde{\varphi})$. Observemos primero que $H \subset \ker(\tilde{\varphi})$. En efecto, si $h \in H$ sabemos que en G/H, $[h] = H = [e]$, esto es, $\pi(h) = [h] = [e]$. Como además H es característico, $\varphi(h) \in H$. Luego

$$\tilde{\varphi}(h) = \pi(\varphi(h)) = [e]$$

y por lo tanto $h \in \ker(\tilde{\varphi})$.

Si ahora $g \in \ker(\tilde{\varphi})$, tenemos que

$$\tilde{\varphi}(g) = [e] \implies \pi(\varphi(g)) = [e] \implies \varphi(g) \in H$$

Ahora, si φ es un automorfismo de G, entonces φ^{-1} también es un automorfismo y como H es un subgrupo característico, $\varphi^{-1}(H) \subset H$. Tenemos entonces

$$\varphi(g) \in H \implies \varphi^{-1}(\varphi(g)) \in H \implies g \in H$$

Concluimos que $\ker(\tilde{\varphi}) = H$ y por el Primer Teorema de Isomorfismo, $\tilde{\varphi}$ induce un isomorfismo $\overline{\varphi} : G/H \to G/H$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & G \arrow[d, "\pi"] \\ G/H \arrow[r, "\overline{\varphi}"'] & G/H \end{tikzcd}$$

Finalmente, sea $\Psi : Aut(G) \to Aut(G/H)$ dado por $\Psi(\varphi) = \overline{\varphi}$. Entonces

$$\Psi(\varphi_1 \circ \varphi_2) = \overline{\varphi_1 \circ \varphi_2}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \overline{\varphi_1 \circ \varphi_2}([h]) &= \overline{\varphi_1 \circ \varphi_2}(\pi(h)) = \pi(\varphi_1 \circ \varphi_2(h)) = \pi(\varphi_1(\varphi_2(h))) \\ &= (\pi \circ \varphi_1)(\varphi_2(h)) = (\overline{\varphi_1} \circ \pi)(\varphi_2(h)) = \overline{\varphi}_1(\pi \circ \varphi_2(h)) = \overline{\varphi_1}(\overline{\varphi}_2 \circ \pi(h)) \\ &= \overline{\varphi}_1 \circ \overline{\varphi_2}([h]). \end{aligned}$$

Concluimos que

$$\Psi(\varphi_1 \circ \varphi_2) = \overline{\varphi_1 \circ \varphi_2} = \overline{\varphi}_1 \circ \overline{\varphi}_2 = \Psi(\varphi_1) \circ \Psi(\varphi_2)$$

y por lo tanto Ψ es un homomorfismo de grupos.

Solución alternativa - sin usar el Primer Teorema de Isomorfismo. Dado un automorfismo $\varphi : G \to G$, proponemos la función

$$\overline{\varphi} : G/H \to G/H, \ \overline{\varphi}([g]) = [\varphi(g)]$$

. Queda como ejercicio probar:

- $\overline{\varphi}$ está bien definida, es decir, si $g_1 \equiv_l g_2 \ (H)$ entonces $[\varphi(g_1)] \equiv_l [\varphi(g_2)] \ (H)$.

- φ se induce a $\overline{\varphi}$, es decir, que conmuta:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & G \arrow[d, "\pi"] \\ G/H \arrow[r, "\overline{\varphi}"'] & G/H \end{tikzcd}$$

- $\overline{\varphi}$ es un automorfismo, es decir, un isomorfismo de grupos de G/H en G/H.
- $\Psi : Aut(G) \to Aut(G/H)$ dado por $\Psi(\varphi) = \overline{\varphi}$ es un homomorfismo de grupos.

c) Considerar el grupo producto $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Encontrar un subgrupo normal de G que no sea un subgrupo característico (lo que prueba que la recíproca del item **a** es falsa).

Solución: Observemos que $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ es abeliano, y por lo tanto todo subgrupo es normal. Consideremos el subgrupo $H = \langle(\overline{1}, \overline{0})\rangle = \{(\overline{0}, \overline{0}), (\overline{1}, \overline{0})\}$. Queremos construir un automorfismo $\varphi : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ tal que $\varphi(H) \not\subset H$. Observemos que deberá ser $\varphi(\overline{0}, \overline{0}) = (\overline{0}, \overline{0})$ y $\varphi(\overline{1}, \overline{0}) \neq (\overline{1}, \overline{0})$. Pongamos entonces

$$\varphi(\overline{0}, \overline{0}) = (\overline{0}, \overline{0}), \quad \varphi(\overline{1}, \overline{0}) = (\overline{0}, \overline{1}), \quad \varphi(\overline{0}, \overline{1}) = (\overline{1}, \overline{0}), \quad \varphi(\overline{1}, \overline{1}) = (\overline{1}, \overline{1})$$

φ es claramente una función biyectiva, con lo cual solo resta probar que es un homomorfismo de grupos. Como para cada $x \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, $x + x = (\overline{0}, \overline{0})$, $(\overline{0}, \overline{0}) + x = x + (\overline{0}, \overline{0}) = x$, tenemos:

$$\varphi(x + x) = \varphi(\overline{0}, \overline{0}) = (\overline{0}, \overline{0}) = \varphi(x) + \varphi(x)$$

$$\varphi((\overline{0}, \overline{0}) + x) = \varphi(x) = \varphi(\overline{0}, \overline{0}) + \varphi(x)$$

Luego solo nos queda evaluar cómo actúa φ en las sumas de elementos distintos entre sí y distintos de $(\overline{0}, \overline{0})$. Tenemos:

$$\varphi((\overline{1}, \overline{0}) + (\overline{0}, \overline{1})) = \varphi(\overline{1}, \overline{1}) = (\overline{1}, \overline{1}) = (\overline{0}, \overline{1}) + (\overline{1}, \overline{0}) = \varphi(\overline{1}, \overline{0}) + \varphi(\overline{0}, \overline{1})$$

$$\varphi((\overline{1}, \overline{0}) + (\overline{1}, \overline{1})) = \varphi(\overline{0}, \overline{1}) = (\overline{1}, \overline{0}) = (\overline{0}, \overline{1}) + (\overline{1}, \overline{1}) = \varphi(\overline{1}, \overline{0}) + \varphi(\overline{1}, \overline{1})$$

$$\varphi((\overline{0}, \overline{1}) + (\overline{1}, \overline{1})) = \varphi(\overline{1}, \overline{0}) = (\overline{0}, \overline{1}) = (\overline{1}, \overline{0}) + (\overline{1}, \overline{1}) = \varphi(\overline{0}, \overline{1}) + \varphi(\overline{1}, \overline{1})$$

Las demás igualdades se obtienen del hecho que $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ es abeliano.

Notar que así definido φ, se cumple que $\varphi(\overline{a}, \overline{b}) = (\overline{b}, \overline{a})$ para todo $(\overline{a}, \overline{b}) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Luego se puede probar alternativamente que φ es un homomorfismo de la siguiente forma:

$$\varphi((\overline{a}, \overline{b}) + (\overline{c}, \overline{d})) = \varphi(\overline{a} + \overline{c}, \overline{b} + \overline{d}) = (\overline{b} + \overline{d}, \overline{a} + \overline{c}) = (\overline{b}, \overline{a}) + (\overline{d}, \overline{c}) = \varphi(\overline{a}, \overline{b}) + \varphi(\overline{c}, \overline{d}).$$

Por lo tanto φ es un automorfismo y $\varphi(H) \not\subset H$, con lo cual H es un subgrupo normal de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ que no es característico.

Ej. 2. Sea Rel tal que $\operatorname{ob}\mathrm{Rel}$ es la clase de todos los conjuntos y $\operatorname{mor}\mathrm{Rel}$ son las relaciones entre conjuntos, es decir, $\mathcal{R} \in \mathrm{Hom}(A, B)$ si $\mathcal{R}$ es una relación binaria de A en B. La composición de morfismos es la composición de relaciones. Dando por sabido que la composición de relaciones es asociativa:

a) Dar explicitamente las funciones dom, codom y el morfismo identidad id_A para cada objeto A de Rel y probar que Rel es una categoría.

Solución

- Dada una relación binaria R de A en B, definimos:

$$\operatorname{dom} : \operatorname{mor}\mathrm{Rel} \to \operatorname{ob}\mathrm{Rel},\ \operatorname{dom}(R) = A.$$

$$\operatorname{codom} : \operatorname{mor}\mathrm{Rel} \to \operatorname{ob}\mathrm{Rel},\ \operatorname{codom}(R) = B.$$

  Observaciones complementarias. Estas funciones no coinciden con la definición de dominio e imagen de una relación estudiadas en la unidad 1. En consecuencia, una relación vista como subconjunto de pares ordenados puede corresponderse con más de un morfismo. Por ejemplo, para todo conjuntos A y B, la relación trivial $\{\}$ pertenece a $\operatorname{Hom}(A, B)$. Por lo tanto, para que dom y codom sean efectivamente funciones (y asignen a cada morfismo un único objeto), no alcanza con especificar el morfismo a partir de un conjunto de pares ordenados, sino que siempre se debe indicar de qué producto cartesiano provienen. Así entonces, la $R_0 = \{\}$ de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ tiene $\operatorname{dom}(R_0) = \mathbb{N}$ y $\operatorname{codom}(R_0) = \mathbb{N}$, mientras que la $R_0' = \{\}$ de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$ tiene $\operatorname{dom}(R_0') = \mathbb{N}$ y $\operatorname{codom}(R_0') = \mathbb{R}$.
  Esto no es nuevo, de hecho algo similar ocurre en Set. Por ejemplo, la función sucesor en los enteros vista como conjunto de pares es $\{(x, x+1) : x \in \mathbb{Z}\}$ y pertenece a $Hom(\mathbb{Z}, B)$, para todo conjunto B tal que $\mathbb{Z} \subset B$.

- La composición $\circ$ en Rel es la composición de relaciones (también la denotaremos $\circ_{\mathrm{Rel}}$ cuando haya ambigüedades). Dada una relación R de A en B y una relación S de B en C, sabemos que $S \circ R = \{(a, c) \in A \times C : \exists b \in B : (a, b) \in R \wedge (b, c) \in S\}$ es una relación de A en C, es decir, $S \circ R \in \operatorname{Hom}(A, C)$.

- Por enunciado sabemos que la composición de relaciones es asociativa.

- Dado un objeto A, proponemos como id_A a la relación de igualdad en A. Es decir, $\mathrm{id}_A = \{(a, a) \in A \times A : a \in A\}$, o dicho de otra forma, $(a, a') \in \mathrm{id}_A$ si y sólo si $a = a'$. Sean relaciones R de A en B y S de B en A, tenemos que probar que $R \circ \mathrm{id}_A = R$ y $\mathrm{id}_A \circ S = S$. Probaremos únicamente la primer igualdad y la segunda quedará como ejercicio.

  Notar que $R \circ \mathrm{id}_A = R$ es una igualdad de relaciones, por lo tanto procedemos por doble inclusión.

  $\subset$) Sea $(a, b) \in R \circ \mathrm{id}_A$. Luego existe $a' \in A$ tal que $(a, a') \in \mathrm{id}_A$ y $(a', b) \in R$. Por definición de id_A, tenemos que $a = a'$ y por lo tanto resulta $(a, b) \in R$.

  $\supset$) Sea $(a, b) \in R$. Luego tomando $a' = a$ se tiene que $(a, a') \in \mathrm{id}_A$ y $(a', b) \in R$, por lo tanto $(a, b) \in R \circ \mathrm{id}_A$.

Por lo tanto, Rel es una categoría.

b) Determinar, si existen, los objetos iniciales, terminales y nulos de Rel.

Solución.

Dado que Set es una subcategoría de Rel, una primer pregunta que nos hacemos es si los objetos iniciales y terminales de Set también lo son en Rel.

- El conjunto $\emptyset$ también es un objetivo inicial de Rel y la prueba es análoga a la de Set. Esto es, para todo conjunto A, existe una única relación de $\emptyset$ en A, es decir, un subconjunto de $\emptyset \times A = \emptyset$, que es justamente la relación trivial $R_0 = \{\}$ (en particular es una relación funcional).

- Un conjunto $\{x\}$ con un único elemento no es un objeto terminal en Rel, dado que para todo conjunto $A \neq \emptyset$, existen al menos dos relaciones en $\operatorname{Hom}(A, \{x\})$, por ejemplo, $R_0 = \{\}$ y $R = \{(a, x)\}$ para algún $a \in A$.

Sabemos que cualquier conjunto con más de un elemento, no es un objeto terminal en Set y por lo tanto tampoco lo será en Rel (ya que todo morfismo en Set también es un morfismo en Rel).

Nos queda por analizar el caso del conjunto vacío $\emptyset$. El conjunto $\emptyset$ es un objetivo terminal en Rel, dado que, para todo conjunto A, existe una única relación de A en $\emptyset$, es decir, un subconjunto de $A \times \emptyset = \emptyset$, que es justamente la relación trivial $R_0 = \{\}$.

- Por lo tanto, $\emptyset$ es objeto nulo. Además, todos estos objetos son únicos, dado que de existir otros diferentes deberían ser isomorformos a $\emptyset$ y esto no es posible (en el siguiente item veremos qué estructura tienen los isomorfismos en Rel y quedará finalizada esta prueba).

c) Determinar qué morfismos son isomorfismos en Rel.

Solución. Sean A, B objetos de Rel y R un morfismo de $\mathrm{Hom}(A, B)$. Vamos a probar que R es un isomorfismo en Rel si y solo si R es una relación funcional biyectiva.

Observemos primero que para cada conjunto A, la relación id_A no es más que la relación funcional dada por la función identidad de A. Por lo tanto, es inmediato que si R es una relación funcional biyectiva, entonces R es un isomorfismo en Rel con inversa R^{-1}.

Veamos que vale la recíproca. Supongamos que R es una relación de A en B para la cual existe una relación S de B en A tal que $R \circ S = \mathrm{id}_B$ y $S \circ R = \mathrm{id}_A$. Pongamos *Dom* y *Codom* el dominio y codominio de una relación (que no coinciden necesariamente con las funciones dom y codom de Rel). Observemos que $Dom(S \circ R) \subset Dom(R)$ y $Codom(R \circ S) \subset Codom(R)$. Luego

$$A = Dom(\mathrm{id}_A) = Dom(S \circ R) \subset Dom(R) \subset A$$

$$B = Codom(\mathrm{id}_B) = Codom(R \circ S) \subset Codom(R) \subset B$$

concluimos que $Dom(R) = A$ y $Codom(R) = B$. Con un argumento completamente análogo, $Dom(S) = B$ y $Codom(S) = A$.

Por otra parte, si $(a, b) \in R$ y $(a, b') \in R$, como $Dom(S) = B$, existirán $a_1, a_1' \in A$ tales que $(b, a_1), (b', a_1') \in S$, y por lo tanto (a, a_1), $(a, a_1') \in S \circ R$. Como $S \circ R = \mathrm{id}_A$, concluimos que debe ser $a = a_1 = a_1'$. Pero entonces

$$(b, a) \in S, (a, b') \in R \;\Rightarrow\; (b, b') \in R \circ S = \mathrm{id}_B \quad \Rightarrow b = b'.$$

Concluimos que R es una relación funcional, y análogamente S también lo es, luego tanto R como S deben ser funciones biyectivas (pues son inversa una de la otra).

Ej. 3. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando adecuadamente la respuesta.

a) Un *anillo* es un conjunto R con dos operaciones denotadas $+$ y $\cdot$ tales que $(R, +)$ es un grupo abeliano, cuyo neutro se denota por 0, $(R, \cdot)$ es un semigrupo, y vale

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c, \quad c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b$$

para cada $a, b, c \in R$. Si $(R, +, \cdot)$ es un anillo, 0 es un elemento absorvente de $(R, \cdot)$.

Solución: (Verdadero) Sea $c \in R$.

$$c \cdot 0 = c \cdot (0 + 0) = c \cdot 0 + c \cdot 0.$$
$$0 \cdot c = (0 + 0) \cdot c = 0 \cdot c + 0 \cdot c.$$

Como $(R, +)$ es grupo, por las leyes de cancelación resulta

$$\begin{aligned} 0 &= c \cdot 0 \\ 0 &= 0 \cdot c. \end{aligned}$$

con lo cual 0 es elemento absorvente de $(R, \cdot)$.

b) Sea $f : G \to G$ un homomorfismo de grupos y sea $x \in G$ un elemento de orden finito. Entonces el orden de $f(x)$ divide al orden de x.

Solución: (Verdadero) Sea $x \in G \,/\, o(x) < \infty$ y $f : G \to G$ homomorfismo de grupos.

Supongamos $o(x) = m \in \mathbb{N} \implies m$ es el mínimo natural $/x^m = e$.

Luego, $(f(x))^m = f(x^m) = f(e) = e$.

$$\therefore o(f(x)) \leq o(x) = m < \infty$$

Supongamos $o(f(x)) = n \in \mathbb{N}, n \leq m$.

Por el algoritmo de la división, como $o(x) = m > 0$, existen únicos $q, r \,/m = q \cdot n + r$ donde $0 \leq r < n$. Quiero ver que $r = 0$.

$$(f(x))^m = (f(x))^{q \cdot n + r} = ((f(x))^n)^q \cdot (f(x))^r = e^q \cdot (f(x))^r = (f(x))^r$$

Dado que $0 \leq r < n$ y n es el mínimo natural tal que $(f(x))^n = e$, resulta $r = 0$.

$$\therefore {}^{m}\Big|_{n} = {}^{o(x)}\Big|_{o(f(x))}$$

c) Sea M un monoide y $\mathscr{C}_M$ la categoría asociada. En $\mathscr{C}_M$ existen ecualizadores de todo par de morfismos.

Solución: (Falso) Sea $(*, e)$ ecualizador de los morfismos $f, g : * \to *$ en $mor(\mathscr{C}_M)$. Se verifica

- $f \circ e = g \circ e$
- $\forall e' : * \to * \,/\, f \circ e' = g \circ e'$ entonces $\exists!\, k : * \to * \,/\, e \circ k = e'$.

$$\begin{tikzcd}
* \arrow[r, "e"] & * \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & * \\
* \arrow[u, dashed, "k"] \arrow[ur, "e'"] & &
\end{tikzcd}$$

Consideremos ahora el monoide $(\mathbb{N}_0, +)$, $f = 1$ y $g = 2$. Es fácil ver que $\nexists n \in \mathbb{N}_0 \,/1 + n = 2 + n$.

d) Si $\mathscr{C}$ es una categoría con coproductos, entonces $A + B \simeq B + A$.

Solución: (Verdadero) Sean $(A + B, i_A, i_B)$ y $(B + A, j_B, j_A)$ coproductos de A y B y de B y A respectivamente.

Por P.U. de $(A + B, i_A, i_B)$ se tiene que $\forall C$ objeto y $\forall f : A \to C$, $\forall g : B \to C$ morfismos $\exists![f, g] : A + B \to C$ tal que (I) conmuta. Es decir

$$[f,g] \circ i_A = f \qquad [f,g] \circ i_B = g$$

(I)

$$\begin{tikzcd}
& C & \\
A \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "i_A"'] & A+B \arrow[u, dashed, "{[f,g]}"'] & B \arrow[ul, "g"'] \arrow[l, "i_B"]
\end{tikzcd}$$

En particular vale para $C \doteq B + A$, $f \doteq j_A$ y $g \doteq j_B$.

$$[j_A, j_B] \circ i_A = j_A \qquad [j_A, j_B] \circ i_B = j_B$$

(II)

$$\begin{tikzcd}
& B+A & \\
A \arrow[ur, "j_A"] \arrow[r, "i_A"'] & A+B \arrow[u, dashed, "{[j_A,j_B]}"'] & B \arrow[ul, "j_B"'] \arrow[l, "i_B"]
\end{tikzcd}$$

Análogamente, por P.U. de $(B + A, j_B, j_A)$, $[i_B, i_A]$ es el único morfismo que conmuta (IV).

$$[h,k] \circ j_B = h \qquad [h,k] \circ j_A = k$$

(III)

$$\begin{tikzcd}
& D & \\
B \arrow[ur, "h"] \arrow[r, "j_B"'] & B+A \arrow[u, dashed, "{[h,k]}"'] & A \arrow[ul, "k"'] \arrow[l, "j_A"]
\end{tikzcd}$$

$$[i_B, i_A] \circ j_B = i_B \qquad [i_B, i_A] \circ j_A = i_A$$

(IV)

$$\begin{tikzcd}
& A+B & \\
B \arrow[ur, "i_B"] \arrow[r, "j_B"'] & B+A \arrow[u, dashed, "{[i_B,i_A]}"'] & A \arrow[ul, "i_A"'] \arrow[l, "j_A"]
\end{tikzcd}$$

Consideremos en (I) $C \doteq A + B$, $f \doteq i_A$ y $g \doteq i_B$, y llamemos a dicho diagrama (V). Entonces id_{A+B} conmuta (V) trivialmente. Más aún, por P.U de $A + B$, $[i_A, i_B]$ es el único morfismo que lo conmuta, entonces debe valer $[i_A, i_B] = id_{A+B}$.

(V)

$$\begin{tikzcd}
& A+B & \\
A \arrow[ur, "i_A"] \arrow[r, "i_A"'] & A+B \arrow[u, dashed, "id_{A+B}"'] & B \arrow[ul, "i_B"'] \arrow[l, "i_B"]
\end{tikzcd}$$

(VI)

$$\begin{tikzcd}
& B+A & \\
B \arrow[ur, "j_B"] \arrow[r, "j_B"'] & B+A \arrow[u, dashed, "id_{B+A}"'] & A \arrow[ul, "j_A"'] \arrow[l, "j_A"]
\end{tikzcd}$$

Análogamente, por P.U del $B+A$, $[j_B, j_A] = id_{B+A}$ es el único morfismo que conmuta (VI).

Entonces queremos ver que

I. $[i_B, i_A] \circ [j_A, j_B]$ conmuta (V)

II. $[j_A, j_B] \circ [i_B, i_A]$ conmuta (VI)

I.
$$[i_B, i_A] \circ [j_A, j_B] \circ i_A = [i_B, i_A] \circ j_A = i_A$$
$$[i_B, i_A] \circ [j_A, j_B] \circ i_B = [i_B, i_A] \circ j_B = i_B$$

II.
$$[j_A, j_B] \circ [i_B, i_A] \circ j_B = [j_A, j_B] \circ i_B = j_B$$
$$[j_A, j_B] \circ [i_B, i_A] \circ j_A = [j_A, j_B] \circ i_A = j_A$$

Finalmente, concluímos que

I. $[i_B, i_A] \circ [j_A, j_B] = id_{A+B}$

II. $[j_A, j_B] \circ [i_B, i_A] = id_{B+A}$

con lo cual $A + B \simeq B + A$.

Solución alternativa: Sabemos que el coproducto, si existe, es único salvo isomorfismos. Consideremos que $(B + A, \tilde{i}_B, \tilde{i}_A)$ es un coproducto de B y A (notar que usaremos una notación diferente de la solución anterior). Vamos a probar que $(B + A, \tilde{i}_A, \tilde{i}_B)$ es un coproducto de A y B (ergo, debe ser isomorfo a $A + B$). Sea C un objeto de $\mathscr{C}$ y sean $f \in \mathrm{Hom}(A, C)$ y $g \in \mathrm{Hom}(B, C)$. Queremos encontrar el único morfismo $h : B + A \to C$ que hace conmutar el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\tilde{i}_A"] \arrow[dr, "f"'] & B + A \arrow[d, dashed, "h?"] & B \arrow[l, "\tilde{i}_B"'] \arrow[dl, "g"] \\
& C &
\end{tikzcd} \tag{1}$$

- **Existencia.** Por P.U. del coproducto $(B+A, \tilde{i}_B, \tilde{i}_A)$, existe un único morfismo $[g, f] : B+A \to C$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "\tilde{i}_B"] \arrow[dr, "g"'] & B + A \arrow[d, dashed, "{[g,f]}"] & A \arrow[l, "\tilde{i}_A"'] \arrow[dl, "f"] \\
& C &
\end{tikzcd} \tag{2}$$

  Proponemos $h = [g, f]$ y resulta que

$$h \circ \tilde{i}_A = [g, f] \circ \tilde{i}_A = f$$
$$h \circ \tilde{i}_B = [g, f] \circ \tilde{i}_A = g$$

- **Unicidad.** Sup. existe $\tilde{h} : B + A \to C$ tal que (1) conmuta.

  Por P.U. del coproducto $(B + A, \tilde{i}_B, \tilde{i}_A)$, $[g, f]$ es el único morfismo que conmuta (2) y, dado que $\tilde{h}$ también lo conmuta, resulta $[g, f] = \tilde{h}$.

Luego $(B + A, \tilde{i}_A, \tilde{i}_B)$ es un coproducto de A y B, de donde $A + B \simeq B + A$.