Álgebra Lineal - LCC - LM - PM 2020

Práctica: CAPÍTULO 3 (segunda parte)

Cuando no se especifica lo contrario, el producto interno en $\mathbb{R}^n$ es $x^T y$ y el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ se considera con suma y producto por escalares habituales.

1. Sea V un espacio vectorial con producto interno y W un subespacio vectorial de V. Demostrar las siguientes proposiciones:

   a) $v \in W^\perp$ si y solo si v es ortogonal a todo vector $u \in U$ donde $\langle U \rangle = W$.

   b) $W^\perp$ es un subespacio vectorial de V.

   c) $(W^\perp)^\perp = W$.

2. Sean $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ matrices reales de tamaño $n \times n$ y

   $$\langle A, B \rangle = \sum_{i,j} a_{ij} b_{ij},$$

   un producto interno en el espacio de las matrices reales $n \times n$.

   a) Hallar una base ortogonal para $\mathbb{R}^{n\times n}$ para dicho producto interno.

   b) Hallar $W^\perp$ siendo $W \subseteq \mathbb{R}^{2\times 2}$ el espacio generado por $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$.

   c) Ídem *b*) para $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$.

3. Calcular el complemento ortogonal del subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores $(1, 1, 2)$ y $(1, 2, 3)$.
   Sugerencia: Pensar los vectores como filas de una matriz A.

4. Si V es el complemento ortogonal de W en $\mathbb{R}^n$, ¿existe una matriz tal que el espacio fila coincide con V y el espacio nulo es W?

5. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

   a) Si V es ortogonal a W, entonces $V^\perp$ es ortogonal a $W^\perp$.

   b) Si V es ortogonal a W y W es ortogonal a Z entonces V es ortogonal a Z.

6. Sea S el hiperplano de $\mathbb{R}^4$ que contienen a todos los vectores que satisfacen la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. Calcular una base para el espacio $S^\perp$.

7. Sean

   $$u^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix}, u^2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, u^3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}, u^4 = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} 10 \\ -8 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

   Sean $V = \left\langle \{u^1, u^2, u^3\} \right\rangle \subseteq \mathbb{R}^4$ y $W = \left\langle \{u^4\} \right\rangle \subseteq \mathbb{R}^4$.

   a) Probar que $V = W^\perp$.

   b) Escribir x como suma de dos vectores, uno en V y el otro en W.

8. En cada uno de los siguientes casos, considerar a L como el subespacio de $\mathbb{R}^3$ tal que $L = \langle a \rangle$. Calcular $proy_{s/L}\, b$ y comprobar que el vector $b - proy_{s/L}\, b$ es perpendicular al vector a.

   a) $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $a = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

b) $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $a = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$.

9. Si la ecuación $Ax = b$ tiene solución, entonces existe un único p en $C(A^T)$ solución del sistema.

10. Sea W un subespacio vectorial de V y $\{w^1, \ldots, w^p\}$ base ortogonal de W. Sea $v \in V - W$, probar que $v - proy_{s/W}\, v$ es perpendicular a w para todo $w \in W$.

11. Sea W un subespacio de $\mathbb{R}^n$ con una base ortogonal $\{w^1, \ldots, w^p\}$ y sea $\{v^1, \ldots, v^q\}$ una base ortogonal de $W^\perp$.

    a) Explicar por qué $\{w^1, \ldots, w^p, v^1, \ldots, v^q\}$ es un conjunto ortogonal.

    b) Explicar por qué el conjunto definido en el ítem anterior genera $\mathbb{R}^n$.
    Sugerencia: Utilizar el ejercicio 10..

    c) Demostrar que $\dim W + \dim W^\perp = n$.