3. Sea $V = \left\{ \sum_{i=0}^{2} a_i x^i \ / \ a_i \in \mathbb{R} \right\}$ y $\mathcal{B}_1 = \{1, x, x^2\}$ base estándar de $V$.

   a) Probar que $\mathcal{B}_2 = \{x-1, 1, (x-1)^2\}$ es otra base de $V$.

   b) Hallar la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$.

   c) Utilizar lo obtenido en el ítem anterior y determinar la coordenadas de $p$ en la base $\mathcal{B}_2$ siendo $p(x) = 2x^2 - 5x + 6$. ¿Cuáles son las coordenadas de $p$ en la base $\{1, (x-1)^2, x-1\}$?

a) Veamos que los vectores de $\mathcal{B}_2$ son linealmente independientes.
Planteamos una combinación lineal igualada a 0:

$$a \cdot (x-1) + b \cdot 1 + c \cdot (x-1)^2 = 0$$

Trabajando el lado izquierdo llegamos a:

$$(b + c - a) \cdot 1 + (a - 2c) \cdot x + c \cdot x^2 = 0$$

Como $\mathcal{B}_1 = \{1, x, x^2\}$ es una base de $V$, los coeficientes tienen que ser 0:

$$\begin{array}{rcrcrcl} -a & + & b & + & c & = & 0 \\ a & & & - & 2c & = & 0 \\ & & & & c & = & 0 \end{array}$$

Como $a = b = c = 0$ es la única solución posible, resulta que los vectores $\mathcal{B}_2 = \{x-1, 1, (x-1)^2\}$ son linealmente independientes.

Usando el ejercicio 2a) adicional de la práctica anterior

> Sea $V$ un espacio vectorial, si $dim(V) = k$ entonces $k$ vectores l.i. en $V$ forman una base de $V$.

concluimos que $\mathcal{B}_2$ es una base.

b) IDEAS

Los problemas de cambio de base son más fáciles de trabajar en $\mathbb{R}^n$.
La manera de "transportar" el problema a $\mathbb{R}^n$ es por medio de isomorfismos.
Dado que $V$ es un espacio vectorial de dimensión 3, sabemos que **existe** $\varphi$ isomorfismo a $\mathbb{R}^3$.
Sin embargo, la **existencia** no es suficiente, necesitamos un $\varphi$ **concreto**.
Vamos a usar el siguiente resultado teórico para **construir** el isomorfismo $\varphi$:

> Una biyección de una base de $A$ en una base de $B$ induce un único isomorfismo $\varphi : A \to B$

SOLUCIÓN

Tenemos que elegir $\varphi \colon V \to \mathbb{R}^3$ de modo que nos facilite las cosas. La elección más natural es:

$$\varphi(1) = e_1, \ \varphi(x) = e_2, \ \varphi(x^2) = e_3.$$

Con este isomorfismo, las bases $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ de $V$ se convierten en las bases $U_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$ y $U_2 = \{e_2 - e_1, e_1, e_3 - 2e_2 + e_1\}$ de $\mathbb{R}_3$.
Las matrices asociadas a estas dos bases de $\mathbb{R}_3$ resultan más evidentes:

$$M_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad M_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_2 - e_1 & e_1 & e_3 - 2e_2 + e_1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Sea $v \in \mathbb{R}^3$, para recordar cuál es la matriz $M$ de cambio de base de $U_1$ a $U_2$ planteamos la igualdad:

$$v = M_1[v]_{U_1} = M_2[v]_{U_2}$$

Luego,

$$[v]_{U_2} = {M_2}^{-1}M_1[v]_{U_1} = M[v]_{U_1}$$

lo cual **implica** que $M = {M_2}^{-1}M_1$.

La manera eficiente de hacer el cálculo ${M_2}^{-1}M_1$ sería resolviendo el sistema matricial $M_2 M = M_1$.

Dado que el objetivo de esta práctica es evaluar los contenidos nuevos, podemos explicitar la solución sin exhibir cómo la obtenemos:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>IMPORTANTE</u>

Además del **implica** (que queda como ejercicio), hay otro detalle en esta demostración que no está justificado.

Demostramos que $M$ es la matriz de cambio de base de $U_1$ a $U_2$...

¿Es la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$?

La respuesta es sí y se deja como **ejercicio** demostrarlo.

$c)$ Observando que

$$[p]_{\mathcal{B}_1} = (6, -5, 2)$$

calculamos:

$$[p]_{\mathcal{B}_2} = M[p]_{\mathcal{B}_1} = (-1, 3, 2).$$

Para corroborar que no cometimos errores, podemos constatar observando la siguiente igualdad de polinomios:

$$6 \cdot 1 - 5 \cdot x + 2 \cdot x^2 = -1 \cdot (x-1) + 3 \cdot 1 + 2 \cdot (x-1)^2$$

Conmutando la expresión de la derecha, vemos claramente que las coordenadas de $p$ en la base $\{1, (x-1)^2, x-1\}$ son 3, 2 y -1 respectivamente.

Queda como **ejercicio** ver cuál es la nueva matriz de cambio de base.

10. Sean $V$ y $W$ espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$ y $\mathcal{L}(V, W) = \{T : V \to W : T\, transformación\, lineal\}$. Probar que para $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(V, W)$:

   *a*) $\{v \in V : T_1(v) = T_2(v)\} \underset{s.e.}{\subset} V$.

   *b*) Si $V = \langle U \rangle$ y $T_1(u) = T_2(u), \forall u \in U$, entonces $T_1(v) = T_2(v), \forall v \in V$.

*a*) Llamamos $A = \{v \in V : T_1(v) = T_2(v)\}$.
Vamos a probar que $A \underset{s.e.}{\subset} V$.

- Es claro que $A \subseteq V$ (por definición de $A$).
- $A \neq \emptyset$ pues $0 \in A$ ya que $0 \in V$ y $T_1(0) = 0 = T_2(0)$ ($T_1, T_2$ transformaciones lineales).
- Sean $u, v \in A$, ¿$u + v \in A$?
  Primero observemos que $u + v \in V$ ya que $V$ es un espacio vectorial. Además,
  $T_1(u + v) \underbrace{=}_{(1)} T_1(u) + T_1(v) \underbrace{=}_{(2)} T_2(u) + T_2(v) \underbrace{=}_{(3)} T_2(u + v)$.
  Por lo tanto, $u + v \in A$.
- Sean $\alpha \in \mathbb{K}$ y $v \in A$, ¿$\alpha v \in A$? Por un lado, es claro que $\alpha v \in V$ ya que $V$ es un espacio vectorial. Además,
  $T_1(\alpha v) \underbrace{=}_{(1)} \alpha T_1(v) \underbrace{=}_{(2)} \alpha T_2(u) \underbrace{=}_{(3)} T_2(\alpha v)$.

(1) $T_1$ es una transformación lineal.
(2) $u, v \in A$ entonces $T_1(u) = T_2(u)$ y $T_1(u) = T_2(v)$.
(3) $T_2$ es una transformación lineal.

*b*) Ahora veamos que, si $V = \langle U \rangle$ y $T_1(u) = T_2(u), \forall u \in U$, entonces $T_1(v) = T_2(v), \forall v \in V$.
Consideramos $v \in V$. Como $V = \langle U \rangle$ entonces $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u^i$ con $\alpha_i \in \mathbb{K}$ y $u^i \in U$. Luego,
$T_1(v) = T_1\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u^i\right) \underbrace{=}_{(1)} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T_1(u^i) \underbrace{=}_{(2)} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T_2(u^i) \underbrace{=}_{(3)} T_2\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u^i\right) = T_2(v)$.
(1) $T_1$ es una transformación lineal.
(2) $T_1(u) = T_2(u), \forall u \in U$.
(3) $T_2$ es una transformación lineal.

12. Consideramos la transformación lineal $T$ definida por:

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathbb{R}^{2\times 2} & \to & \mathbb{R}_3[x] \\ & \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} & \mapsto & T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = 2dx^3 + (a+b)x^2 + (a-c)x + 2(c+d). \end{array}$$

   *a*) Probar que $T$ es lineal.

   *b*) Hallar una base para $nul(T)$ y una para $rec(T)$.

   *c*) Determinar si $T$ es un isomorfismo.

12. En el enunciado del ejercicio dice, consideramos la transformación lineal $T$, debería decir consideramos la aplicación $T$ (para que tenga sentido el apartado $a$)).

   *a*) Vamos a probar que $T$ es lineal.

   Sean $A_1 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

   ¿$T(\alpha A_1 + A_2) = \alpha T(A_1) + T(A_2)$?

   $$\begin{aligned} T(\alpha A_1 + A_2) &= T\left(\begin{bmatrix} \alpha a_1 + a_2 & \alpha b_1 + b_2 \\ \alpha c_1 + c_2 & \alpha d_1 + d_2 \end{bmatrix}\right) \\ &= 2(\alpha d_1 + d_2)x^3 + (\alpha a_1 + a_2 + \alpha b_1 + b_2)x^2 + (\alpha a_1 + a_2 - \alpha c_1 + c_2)x + 2(\alpha c_1 + c_2 + \alpha d_1 + d_2) \\ &= \alpha[2d_1x^3 + (a_1+b_1)x^2 + (a_1-c_1)x + 2(c_1+d_1)] + [2d_2x^3 + (a_2+b_2)x^2 + (a_2-c_2)x + 2(c_2+d_2)] \\ &= \alpha T(A_1) + T(A_2) \end{aligned}$$

   Por lo tanto $T$ es una transformación lineal.

   *b*), *c*) Primero hallamos una base para $nul(T)$ y una para $rec(T)$.

   Comenzamos describiendo el espacio nulo asociado a la transformación lineal $T$:

   $$\begin{aligned} nul(T) &= \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} : T(A) = 0\} = \\ &= \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} : 2dx^3 + (a+b)x^2 + (a-c)x + 2(c+d) = 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0\right\} \underbrace{=}_{(*)} \left\{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}. \end{aligned}$$

   (*) $2d = 0$, $a + b = 0$, $a - c = 0$ y $c + d = 0$ entonces $a = b = c = d = 0$.

   Por lo tanto la base de $nul(T)$ es el conjunto $\emptyset$.

   Ahora bien, como $nul(T) = 0$ y $T$ es una transformación lineal, $T$ es un monomorfismo. Además, $\mathbb{R}^{2\times 2}$ y $\mathbb{R}_3[x]$ son espacios vectoriales isomorfos a $\mathbb{R}^4$, entonces la matriz $A$ asociada a la transformación lineal $T$ es de tamaño $4 \times 4$ y como $nul(T) = 0$, $A$ es de rango completo. Luego, $C(A) = \mathbb{R}^4$ y resulta $T$ sobreyectiva, es decir, $rec(T) = \mathbb{R}_3[x]$.

   Por lo tanto, podemos concluir que $T$ es un isomorfismo y una base para $rec(T)$ es $\{1, x, x^2, x^3\}$.

16. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ transformación lineal tal que

$$T((0,0,1)) = (2,3,5), \qquad T((0,1,1)) = (1,0,0), \qquad T((1,1,1)) = (0,1,-1).$$

$a)$ Probar que con esta información es posible obtener $T(v), \forall v \in \mathbb{R}^3$.

$b)$ Determinar, fijada la base canónica en $\mathbb{R}^3$, la matriz de $T$.

$c)$ Utilizando el item anterior, obtener $\dim(nul(T))$ y $rg(T) = \dim(rec(T))$.

$d)$ Determinar si $T$ es inversible.

$a)$ De una manera similar al 3a) se demuestra que $\mathcal{B}_1 := \{(0,0,1),(0,1,1),(1,1,1)\}$ es base de $\mathbb{R}^3$. Sea $v \in \mathbb{R}^3$, resulta que existen únicos $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que

$$a \cdot (0,0,1) + b \cdot (0,1,1) + c \cdot (1,1,1) = v.$$

VALOR DE $T(v)$

Además de la linealidad, la existencia de $a, b, c$ es clave para explicitar un valor posible de $T(v)$:

$$\begin{aligned} T(v) &= T(a \cdot (0,0,1) + b \cdot (0,1,1) + c \cdot (1,1,1)) \\ &= a \cdot T((0,0,1)) + b \cdot T((0,1,1)) + c \cdot T((1,1,1)) \\ &= a \cdot (2,3,5) + b \cdot (1,0,0) + c \cdot (0,1,-1) \\ &= (2a+b, 3a+c, 5a-c) \end{aligned}$$

BUENA DEFINICIÓN DE $T(v)$

Esta parte azul no es necesaria para el ejercicio PERO la escribimos para que se entienda la importancia de la unicidad.

Supongamos que agregamos al enunciado la hipótesis $T((1,2,3)) = (1,0,0)$

Resulta que el razonamiento de la parte roja sigue siendo válido PERO este nos dice que $T((1,2,3)) = (3,4,4)$, mientras que la nueva hipótesis nos dice otra cosa.

Esta contradicción tiene dos causas:

- El conjunto sobre el que damos información

$$\{(0,0,1),(0,1,1),(1,1,1),(1,2,3)\}$$

  es linealmente dependiente, y por ende tenemos más de una forma de escribir a $(1,2,3)$.
- La información que damos es inconsistente (si agregásemos $T((1,2,3)) = (3,4,4)$ en vez de $T((1,2,3)) = (1,0,0)$ no habría inconvenientes).

Observamos que si trabajamos sobre una base estos dos hechos no son posibles porque tenemos unicidad.

<u>Resumiendo</u>: la unicidad no está demás.

$b)$ <u>IDEAS</u>

> Sea $T \colon U \to V$ transformación lineal.
> Si fijamos las bases $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ de $U$ y $B$ de $V$, entonces la matriz asociada a $T$ es única y está determinada por los coeficientes de $T(u_i)$ en la base $B$, para $i = 1, 2, \ldots, n$.

<u>SOLUCIÓN</u>

Sea $\mathcal{B} := \{(0,0,1),(0,1,1),(1,1,1)\}$.

Si notamos con $(a_i, b_i, c_i)$ a los coeficientes del vector canónico $e_i$ en la base $\mathcal{B}$, con $i$ de 1 a 3, tenemos que:

$$\begin{aligned} T(e_i) &= T(a_i \cdot (0,0,1) + b_i \cdot (0,1,1) + c_i \cdot (1,1,1)) \\ &= a_i \cdot T((0,0,1)) + b_i \cdot T((0,1,1)) + c_i \cdot T((1,1,1)) \\ &= a_i \cdot (2,3,5) + b_i \cdot (1,0,0) + c_i \cdot (0,1,-1) \end{aligned}$$

Luego, si $M$ es la matriz asociada a $T$ respecto de la base canónica $\mathcal{C}$ del dominio y codominio (observar que son el mismo espacio), entonces:

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Dado que los $(a_i, b_i, c_i)$ son solución del siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{bmatrix} = e_i$$

Juntándolos todos tenemos que:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

lo cual implica

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \tag{2}$$

Reemplazando (2) en (1) llegamos a que:

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ -1 & -5 & 5 \end{bmatrix}$$

$c)$ Como la matriz $M$ en su forma escalonada es

$$U := \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

resulta que:

- $dim(nul(T)) = dim(nul(M)) = dim(nul(U)) = 0$
- $rg(T) = dim(rec(T)) = dim(C(M)) = dim(C(U)) = 3$

$d)$ Como $dim(nul(T)) = 0$ resulta que $T$ es un monomorfismo.
Como $dim(rec(T)) = 3 = dim(\mathbb{R}^3)$ resulta que $T$ es un epimorfismo.
Como $T$ es un monomorfismo y epimorfismo resulta que $T$ es un isomorfismo. En particular, $T$ es biyectiva.
Como $T$ es biyectiva resulta que $T$ es inversible.

20. Sean $V$ y $W$ dos espacios vectoriales de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$. Probar que $V$ y $W$ son isomorfos si y solo si $\dim V = \dim W$.

    Es uno de los Lemas de las slides del Capítulo 2 (cuarta parte). Faltaba justificar una parte del mismo, ¿pudieron hacerlo?, ¿tienen alguna pregunta al respecto?, ¿lo vemos en el foro?