Ejercicio 1

1. Definir retículo distributivo y retículo modular
2. Mostrar que retículo distributivo implica retículo modular
3. Dar un ejemplo de un retículo que sea modular pero no distributivo. Justificar

Ejercicio 2

Sea G grupo y $Z(G) = \{g \in G : gh = hg$ para todo $h \in G\}$ su centro.

1. Demostrar que $Z(G)$ es subgrupo normal de G
2. Mostrar que si $G/Z(G)$ es cíclico, entonces G es abeliano.

Ejercicio 3

Sea $\mathcal{C}$ categoría con coproductos y A, B, C objetos en C. Mostrar que $(A+B)+C$ es coproducto definido por A y $B+C$. *Ayuda:* Definir morfismos $i_1 : A \to (A+B)+C$ y $i_2 : (B+C) \to (A+B)+C$.

Ejercicio 4

Sea C una categoría con coproductos y objetos terminales.

1. Definir un funtor $T : C \to C$ tal que $T(C) = C+1$ para todo objeto C en C
2. Dotar de estructura monádica al funtor T

Ej 1:

I. ret. $(X, \wedge, \vee)$ distrib. sii $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
$\forall x, y, z \in X$

~~ret. $(X, \wedge, \vee)$ modular sii X' distrib. $\forall X'$ subret. de X~~ ✗

ret $(X, \leq) = (X, \wedge, \vee)$ modular sii $a \leq c \Rightarrow a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c$

II. qpq distrib. $\Rightarrow$ modular

sea $(X, \leq) = (X, \wedge, \vee)$ distrib. $\Rightarrow x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

sup. luego $x \leq z \Rightarrow x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
$= (x \vee y) \wedge z$

$\therefore (X, \wedge, \vee)$ modular

III. ni idea, lo dejaría para el final y arriesgaría

Ejercicio 2

Sea G grupo y $Z(G) = \{g \in G : gh = hg \text{ para todo } h \in G\}$ su centro.

1. Demostrar que $Z(G)$ es subgrupo normal de G
2. Mostrar que si $G/Z(G)$ es cíclico, entonces G es abeliano.

1. $Z(G) = \{g \in G : gh = hg \ \forall h \in G\}$

qpq $Z(G) \triangleleft G$

i. $Z(G) < G$

$eh = he$ ⟶ neutro pertenece vale fácil

$(bb^{-1})h = h(bb^{-1})$ asoc. vale por herencia de op

$b^{-1}\underbrace{bh} = \underbrace{hb}b^{-1}$

$b^{-1}h' = h'b^{-1} \ \forall h' \in G$ (ya que G grupo $\therefore bh \in G \ \forall b, h \in G$)

ii. $Z(G) \triangleleft G$ sii $gZ(G) = Z(G)g \ \forall g \in G$

sea $g \in G$, $gZ(G) = \{gz : z \in Z(G)\}$

$= \{gz : zh = hz \ \forall h \in G\}$ ⟶ para $h = g$

$= \{zg : zh = hz \ \forall h \in G\}$

$= Z(G)g$

2. qpq $G/Z(G)$ cíclico $\Rightarrow G$ abeliano

$G/Z(G) = \{gZ(G) : g \in G\} = \{Z(G)g : g \in G\}$

$G/Z(G)$ cíclico $\Rightarrow \exists xZ(G) \in G/Z(G)$ tq $\langle xZ(G) \rangle = G/Z(G)$

$\langle xZ(G) \rangle = \{(xZ(G))^c : c \in \mathbb{N}\} = G/Z(G) = \{yZ(G) : y \in G\}$

$= \{x^c Z(G) : x^c = y \in G\} = G/Z(G)$

$\Rightarrow \forall y \in G, \exists c \in \mathbb{N}$ tq $x^c = y \Rightarrow \langle x \rangle = G$

Luego G es cíclico $\Rightarrow G$ es abeliano

ya que: $x^{c+1} = x \cdot x^c = x \cdot y \neq y \cdot x = x^c \cdot x = x^{c+1}$

Ejercicio 3

Sea $\mathcal{C}$ categoría con coproductos y A, B, C objetos en $\mathcal{C}$. Mostrar que $(A+B)+C$ es coproducto definido por A y $B+C$. *Ayuda:* Definir morfismos $i_1 : A \to (A+B)+C$ y $i_2 : (B+C) \to (A+B)+C$.

$\mathcal{C}$ cat. con coprod. $\Rightarrow$

$\forall A, B \in ob\,\mathcal{C}, \exists! [f,g] : A+B \to C \ \forall C \in ob\,\mathcal{C}$ tq conmuta

↪ con $f : A \to C$ y $g : B \to C$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i_A"] \arrow[dr, "f"'] & A+B \arrow[d, dashed, "{![f,g]}"] & B \arrow[l, "i_B"'] \arrow[dl, "g"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed, "{[f,g]}"] \arrow[dr, "g"] & \\ A & A \times B \arrow[l, "\pi_A"] \arrow[r, "\pi_B"'] & B \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & A+B \arrow[d, "{[i_1,\, i_2 \circ i_{B,B+C}]}"', "{= i_{A+B,(A+B)+C}}"] & & B \arrow[ll, "i_{B,A+B}"'] \arrow[d, "i_{B,B+C}"] \arrow[loop above, "id_B"] \arrow[ddll, "f"'] \\ A \arrow[ur, bend left, "i_{A,A+B}"] \arrow[r, "i_1"] \arrow[ddr, "j"'] & (A+B)+C \arrow[dd, dashed, "{[j,[f,g]]}"] & & B+C \arrow[ll, "i_2"'] \arrow[u, bend right, "{[id_B, m]}"'] \arrow[ddll, "{[f,g]}"] \\ & & & C \arrow[u, "i_{C,B+C}"'] \arrow[ull, "i_{C,(A+B)+C}"] \arrow[dll, "g"] \arrow[uu, bend right, "m"'] \\ & D & & \end{tikzcd}$$

$i_1 = [i_1,\, i_2 \circ i_{B,B+C}] \circ i_{A,A+B} = i_{A+B,(A+B)+C} \circ i_{A,A+B}$

$i_2 = i_{A+B,(A+B)+C} \circ i_{B,A+B} \circ [id_B, m]$

↪ $\exists$ por ser cat con coprod.

$\therefore \exists$ el coprod. de A y $B+C$, $((A+B)+C, i_1, i_2)$

Ejercicio 4

Sea C una categoría con coproductos y objetos terminales.

1. Definir un funtor $T : C \to C$ tal que $T(C) = C + 1$ para todo objeto C en C
2. Dotar de estructura monádica al funtor T

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i_A"] \arrow[d, "k"'] \arrow[dr, "i_B \circ k"'] & A+1 \arrow[d, "k+id_1"] & 1 \arrow[l, "i_{1A}"'] \arrow[d, "id_1"] \arrow[dl, "i_{1B} \circ id_1"] \\
B \arrow[r, "i_B"'] & B+1 & 1 \arrow[l, "i_{1B}"]
\end{tikzcd}
$$

$T(A) = A+1$

$T(k) = k + id_1$

$\mathcal{C}$

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i_A"] \arrow[r, bend left] \arrow[dr, "j"'] \arrow[rrrr, bend right=60, "k"'] & A+1 \arrow[d, dashed, "{[j,h]}"] \arrow[rr, dashed, bend left=40] & 1 \arrow[l, "i_{1A}"'] \arrow[dl, "h"] \arrow[r, "i_{1B}"] \arrow[dr, "f"'] & B+1 \arrow[d, dashed, "{[f,g]}"] & B \arrow[l, "i_B"'] \arrow[l, bend right] \arrow[dl, "g"] \\
& D & & E &
\end{tikzcd}
$$

funtor:

- $\forall f \in Hom_{\mathcal{C}}(A,B),\ F(f) \in Hom_{\mathcal{C}}(F(A),F(B))$

  $F(f) = f + id_1 \Rightarrow F(f) \in Hom_{\mathcal{C}}(A+1, B+1) = Hom_{\mathcal{C}}(F(A), B(A))$

- $\forall A \in ob\mathcal{C},\ F(id_A) = id_{F(A)}$

  $F(id_A) = id_A + id_1 = id_{A+1} = id_{F(A)}$

- $\forall f \in Hom_{\mathcal{C}}(B,C), g \in Hom_{\mathcal{C}}(A,B),\ F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$

$F(f \circ g) = (f \circ g) + id_1 = f + id_1 \circ g + id_1 = F(f) \circ F(g)$