

Ejercicio 1

1. Definir retículo distributivo y retículo modular
2. Mostrar que retículo distributivo implica retículo modular
3. Dar un ejemplo de un retículo que sea modular pero no distributivo. Justificar

Ejercicio 2

Sea G grupo y $Z(G) = \{g \in G : gh = hg \text{ para todo } h \in G\}$ su centro.

1. Demostrar que $Z(G)$ es subgrupo normal de G
2. Mostrar que si $G/Z(G)$ es cíclico, entonces G es abeliano.

Ejercicio 3

Sea \mathcal{C} categoría con coproductos y A, B, C objetos en \mathcal{C} . Mostrar que $(A + B) + C$ es coproducto definido por A y $B + C$. Ayuda: Definir morfismos $i_1 : A \rightarrow (A + B) + C$ y $i_2 : (B + C) \rightarrow (A + B) + C$.

Ejercicio 4

Sea \mathcal{C} una categoría con coproductos y objetos terminales.

1. Definir un funtor $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ tal que $T(C) = C + 1$ para todo objeto C en \mathcal{C}
2. Dotar de estructura monádica al funtor T

Ej 1:

I. ret. (X, \wedge, \vee) distrib. sii $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
 $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
 $\forall x, y, z \in X$

rec. (X, \wedge, \vee) modular sii X' distrib. $\forall X'$ subrec. de X ~~X~~
rec $(X, \leq) = (X, \wedge, \vee)$ modular sii $a \leq c \Rightarrow a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c$

II. qpg distrib. \Rightarrow modular

sea $(X, \leq) = (X, \wedge, \vee)$ distrib. $\Rightarrow x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
sup. luego $x \leq z \Rightarrow x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
 $= (x \vee y) \wedge z$

$\therefore (X, \wedge, \vee)$ modular

III. ni idea, lo dejaría para el final y arriesgaría

Ejercicio 2

Sea G grupo y $Z(G) = \{g \in G : gh = hg \text{ para todo } h \in G\}$ su centro.

1. Demostrar que $Z(G)$ es subgrupo normal de G
2. Mostrar que si $G/Z(G)$ es cíclico, entonces G es abeliano.

$$1. Z(G) = \{g \in G : gh = hg \forall h \in G\}$$

$$\text{q.p.q. } Z(G) \triangleleft G$$

$$i. Z(G) < G$$

$$eh = he \rightarrow \text{neutro pertenece solo a sí mismo}$$

$$(bb^{-1})h = h(bb^{-1}) \quad \text{asoc. solo por herencia de op}$$

$$b^{-1}bh = \underline{h}b^{-1}$$

$$b^{-1}h' = h'b^{-1} \quad \forall h' \in G \quad (\text{ya que } G \text{ grupo } \therefore bh \in G \forall b, h \in G)$$

$$ii. Z(G) \triangleleft G \quad \text{si: } gZ(G) = Z(G)g \quad \forall g \in G$$

$$\text{sea } g \in G, gZ(G) = \{gz : z \in Z(G)\}$$

$$= \{gz : zh = hz \forall h \in G\} \rightarrow \text{para } h = g$$

$$= \{zg : zh = hz \forall h \in G\}$$

$$= Z(G)g$$

$$2. \text{q.p.q. } G/Z(G) \text{ cíclico} \Rightarrow G \text{ abeliano}$$

$$G/Z(G) = \{gZ(G) : g \in G\} = \{Z(G)g : g \in G\}$$

\exists

$$G/Z(G) \text{ cíclico} \Rightarrow \exists xZ(G) \in G/Z(G) \text{ c.q. } \langle xZ(G) \rangle = G/Z(G)$$

$$\langle xZ(G) \rangle = \{(xZ(G))^c : c \in \mathbb{N}\} = G/Z(G) = \{yZ(G) : y \in G\}$$

$$= \{x^c Z(G) : x^c = y \in G\} = G/Z(G)$$

$$\Rightarrow \forall y \in G, \exists c \in \mathbb{N} \text{ c.q. } x^c = y \Rightarrow \langle x \rangle = G$$

$$\text{Luego } G \text{ es cíclico} \Rightarrow G \text{ es abeliano}$$

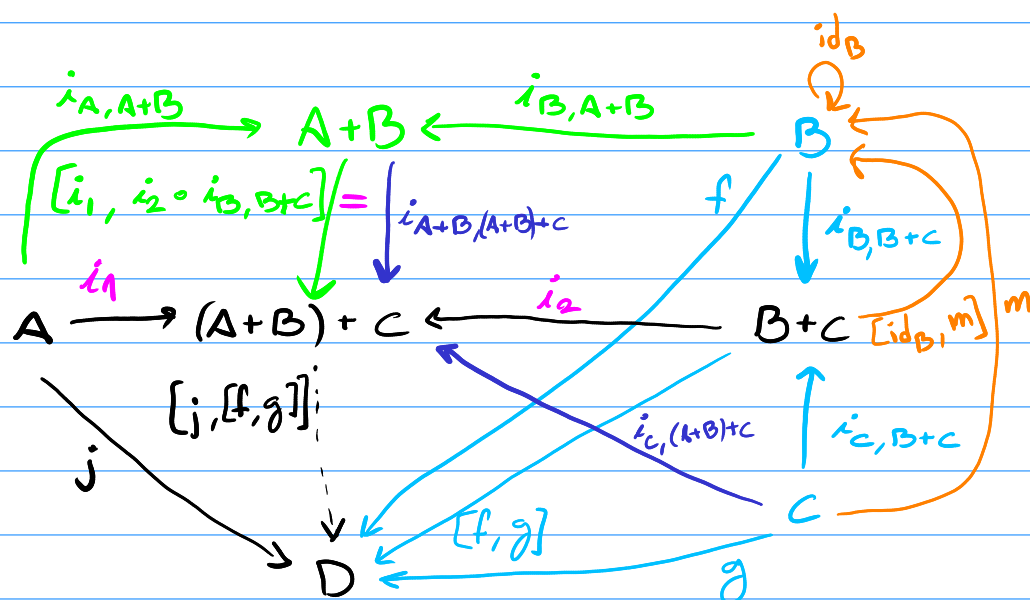
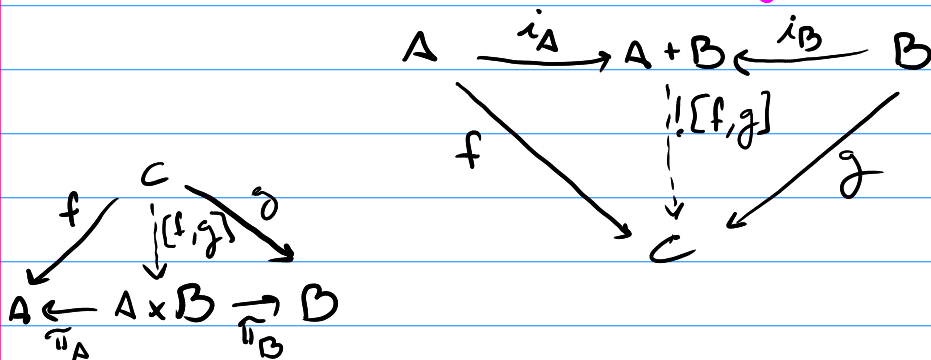
$$\text{ya que: } x^{c+1} = x \cdot x^c = x \cdot y = y \cdot x = x^c \cdot x = x^{c+1}$$

Ejercicio 3

Sea \mathcal{C} categoría con coproductos y A, B, C objetos en \mathcal{C} . Mostrar que $(A + B) + C$ es coproducto definido por A y $B + C$. Ayuda: Definir morfismos $i_1 : A \rightarrow (A + B) + C$ y $i_2 : (B + C) \rightarrow (A + B) + C$.

ζ cat. con coprod. \Rightarrow

$\forall A, B \in \text{ob } \zeta, \exists! [f, g] : A + B \rightarrow C \ \forall C \in \text{ob } \zeta \text{ eq conmuta}$
 $\hookrightarrow \text{con } f : A \rightarrow C \ \& \ g : B \rightarrow C$



$$i_1 = [i_1, i_2 \circ i_{B, B+C}] \circ i_{A, A+B} = i_{A+B, (A+B)+C} \circ i_{A, A+B}$$

$$i_2 = i_{A+B, (A+B)+C} \circ i_{B, A+B} \circ [id_B, m]$$

$\hookrightarrow \exists$ por ser cat con coprod.

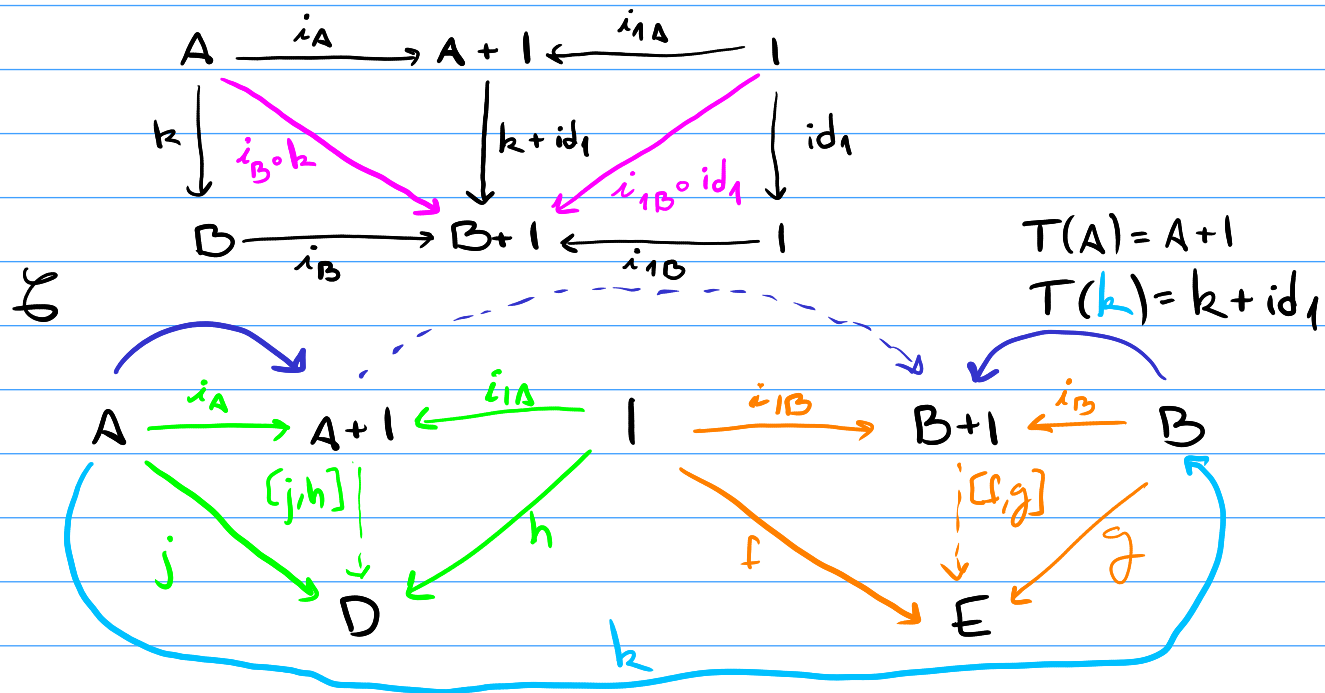
$\therefore \exists$ el coprod. de A y $B + C$, $((A + B) + C, i_1, i_2)$

Ejercicio 4

Sea C una categoría con coproductos y objetos terminales.

1. Definir un funtor $T : C \rightarrow C$ tal que $T(C) = C + 1$ para todo objeto C en C

~~4~~ Dotar de estructura monádica al funtor T



functor:

$$\bullet \forall f \in \text{Hom}_Z(A, B), F(f) \in \text{Hom}_Z(F(A), F(B))$$

$$F(f) = \bar{f} + id_1 \Rightarrow F(f) \in \text{Hom}_Z(A+1, B+1) = \text{Hom}_Z(F(A), F(B))$$

- $\forall A \in \text{ob } \mathcal{C}, F(\text{id}_A) = \text{id}_{F(A)}$

$$F(\text{id}_A) = \text{id}_A + \text{id}_1 = \text{id}_{A+1} = \text{id}_{F(A)}$$

• $\forall f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C), g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B), F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$

$$F(f \circ g) = (f \circ g) + \text{id}_1 = f + \text{id}_1 \circ g + \text{id}_1 = F(f) \circ F(g)$$