Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Departamento de Matemática - Escuela de Ciencias Exactas y Naturales
COMPLEMENTOS DE MATEMÁTICA II
Licenciatura en Ciencias de la Computación - Año 2023
Docentes: Francisco Vittone - Mauro Lucci - Delfina Martin

Unidad 2: Conjuntos ordenados.

1. Introducción.

Las relaciones entre elementos de distintos conjuntos aparecen naturalmente en todas las ramas de la matemática, y constituyen posiblemente uno de los conceptos más claros e intuitivos. Supongamos que tenemos un conjunto A formado por todas las personas nacidas en la provincia de Santa Fe y un conjunto B formado por todas las ciudades de la provincia y nos interesa saber en qué localidad nació cada persona. Podemos establecer una relación entre los elementos del conjunto A y los del conjunto B que coloquialmente indicamos como "la persona x está relacionada con la localidad y si x nació en y". Si indicamos $x\,\mathcal{R}\,y$ si x nació en y, tendremos por ejemplo los siguientes elementos relacionados:

Fito Paez $\mathcal{R}$ Rosario, Luciana Aymar $\mathcal{R}$ Rosario, Lionel Scaloni $\mathcal{R}$ Pujato,

Soledad Pastorutti $\mathcal{R}$ Arequito, José Pedroni $\mathcal{R}$ Gálvez

Una forma diferente de denotar estos elementos relacionados es directamente listarlos como pares, claramente ordenados, donde el primer elemento del par debe pertenecer a A y el segundo a B. Así, una forma equivalente de denotar a la relación $\mathcal{R}$ es

(Fito Paez, Rosario), (Luciana Aymar,Rosario), (Lionel Scaloni,Pujato)

(Soledad Pastorutti,Arequito), (José Pedroni,Galvez)

Que los pares deben ser ordenados (es decir, que importa el orden en que los listemos para que la relación tenga sentido) resulta claro dado que expreciones como Rosario $\mathcal{R}$ Fito Paez carecen de sentido, pues deberían leerse como "Rosario nació en Fito Paez". Podemos sin embargo definir una relación $\mathcal{R}'$ entre los elementos de B y los de A que sea $x \in B$ está relacionado con $y \in A$ si x es la localidad de nacimiento de y. La relación parecería ser la misma, solo que estamos invirtiendo el orden de los elementos. Así tendremos

Rosario $\mathcal{R}'$ Fito Paez, Rosario $\mathcal{R}'$ Luciana Aymar, Pujato $\mathcal{R}'$ Lionel Scaloni, etc.

que como pares ordenados denotaremos como (Rosario,Fito Paez), (Rosario,Luciana Aymar), (Pujato,Lionel Scaloni), etc. Lo primero que podemos notar y que distingue las relaciones $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$ (aunque brindan esencialmente la misma información) es que en $\mathcal{R}$, cada elemento de A está relacionado con un *único* elemento de B (dado que una persona no puede haber nacido en dos lugares a la vez), mientras que en $\mathcal{R}'$, cada elemento de B estará relacionado con muchos elementos de A (dado que cada ciudad es lugar de nacimiento de muchas personas). Por lo tanto $\mathcal{R}$ define una *función*, mientras que $\mathcal{R}'$ no. La función definida por $\mathcal{R}$ no es inyectiva (distintos elementos de A están relacionados con un mismo elemento de B) y por lo tanto no es invertible. Sin embargo como relación tiene sentido hablar de su relación inversa, que está determinada por $\mathcal{R}'$. Formalizaremos estos conceptos en las próximas secciones.

2. Relaciones.

Dados dos conjuntos A y B resulta bastante intuitivo qué se entiende por una relación entre los elementos de A y los elementos de B. Sin embargo, cualquier forma de expresar esto coloquialmente (por ejemplo diciendo que una relación entre A y B es una correspondencia entre los elementos de A y de B, o es una *ley* que asigna a los elementos de A uno o algunos elementos de B) es extremadamente vaga. Para dar una definición formal, aunque menos intuitiva, basta notar que toda relación entre A y B queda completamente definida por los pares ordenados (x, y), con $x \in A$ e $y \in B$ que pretendemos que estén relacionados. De esta manera tenemos:

Definición **1.** *Sean A y B dos conjuntos. Una* ***relación*** *$\mathcal{R}$ de A en B es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B = \{(a, b) : a \in A,\ b \in B\}$. Si (a, b) escribiremos indistintamente $a\,\mathcal{R}\,b$ o $(a, b) \in \mathcal{R}$. Si a no está relacionado con b, o sea $(a, b) \notin \mathcal{R}$, lo denotaremos también como $a \not\mathcal{R}\, b$.*

Si $A = B$ una relación de A en A se dice una ***relación*** *(o relación binaria) en A.*

Se denomina ***dominio*** *de la relación $\mathcal{R}$ de A en B al subconjunto de A dado por*

$$Dom(\mathcal{R}) = \{a \in A \ : \ \exists\, b \in B \,/\, (a, b) \in \mathcal{R}\}$$

La ***imagen*** *de la relación $\mathcal{R}$ es el subconjunto de B dado por*

$$Im(\mathcal{R}) = \{b \in B \ : \ \exists\, a \in A \,/\, (a, b) \in \mathcal{R}\}$$

Como cualquier conjunto, una relaciones puede entonces definirse por extensión (listando todos los pares ordenados que constituirán sus elementos) o por comprensión, dando alguna propiedad que la defina.

En los ejemplos de la introducción, las relaciones están dadas por comprensión, aunque es posible, si deseramos, listarlas por extensión dado que tanto el conjunto A de personas nacidas en la provincia de Santa Fe como el conjunto B de todas las localidades de la provincia son conjuntos finitos. Veamos ahora otros ejemplos:

Ejemplos **1.**

1. Existen dos relaciones de un conjunto A en un conjunto B, denominadas *relaciones triviales*, y están dadas por $\mathcal{R}_0 = \emptyset$ y $\mathcal{R}_1 = A \times B$. En la primera, ningún elemento de A está relacionado con ningún elemento de B, y en la segundo cualquier elemento de A está relacionado con todos los elementos de B. En estos casos tenemos $Dom(\mathcal{R}_0) = \emptyset$, $Im(\mathcal{R}_0) = \emptyset$, $Dom(\mathcal{R}_1) = A$, $Im(\mathcal{R}_1) = B$.

2. Sea $B = \{1, 2\}$ y sea $A = \mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$. Definamos la siguiente relación binaria en A:

   $$\mathcal{R} = \{(\emptyset, \emptyset), (\emptyset, \{1\}), (\emptyset, \{2\}), (\emptyset, \{1, 2\}), (\{1\}, \{1\}), (\{1\}, \{1, 2\}), (\{2\}, \{2\}), (\{2\}, \{1, 2\}), (\{1, 2\}, \{1, 2\})\}$$

En este caso $\mathcal{R}$ está dada por extensión. Es fácil verificar que $\mathcal{R}$ también puede definirse comprensión por

$$C\,\mathcal{R}\,D \iff C \subset D.$$

o equivalentemente

$$\mathcal{R} = \{(C, D) \,:\, C, D \subset B \ \wedge \ C \subset D\}.$$

En este caso tenemos nuevamente $Dom(\mathcal{R}) = A$ e $Im(\mathcal{R}) = B$.

3. Sea $\mathcal{R} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\mathcal{R} = \{(m, n) \,:\, n = 7m\}$. En este caso no es posible definir a $\mathcal{R}$ por extensión ya que posee infinitos elementos. Podemos verificar fácilmente que $(1, 7)$, $(3, 21)$, $(100, 700)$ son elementos de $\mathcal{R}$. O sea, $1\,\mathcal{R}\,7$, $3\,\mathcal{R}\,21$, $100\,\mathcal{R}\,700$.

   En este caso $Dom(\mathcal{R}) = \mathbb{N}$ pues para cada $n \in \mathbb{N}$, $m = 7n \in \mathbb{N}$ verifica $n\,\mathcal{R}\,m$. Sin embargo $Im(\mathcal{R}) \neq \mathbb{N}$, pues en efecto $1 \neq Im(\mathcal{R})$, $2 \notin Im(\mathcal{R})$, etc. Un elemento de $n \in \mathbb{N}$ está en $Im(\mathcal{R})$ si existe un número natural m tal que $n = 7m$, es decir, $Im(\mathcal{R})$ es el conjunto de los múltiplos positivos de 7.

4. Sea $i \in \mathbb{C}$ la unidad imaginaria y definamos una relación en $\mathbb{Z}$ pidiendo que $m\,\mathcal{R}\,n$ si $i^m = i^n$. Como bien sabemos, las potencias de i se repiten en ciclos de 4, esto es $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -i$, $i^3 = -1$ y a partir de allí todas se repiten. Tomemos $m \in \mathbb{Z}$ cualquiera y escribamos $m = 4k + r$, donde $0 \leq r < 4$ pues es el resto de dividir m por 4. Luego

   $$i^m = i^{4k+r} = i^{4k} i^r = (i^4)^k i^r = 1^k i^r = i^r.$$

   Concluimos que $m\,\mathcal{R}\,n$ si m y n tienen el mismo resto al dividirlos por 4. Resulta claro en este caso que $m\,\mathcal{R}\,n$ si y sólo si $n\,\mathcal{R}\,m$.

   Además si escribimos $m = 4k + r$, $n = 4k' + r'$, entonces

   $$m\,\mathcal{R}\,n \iff r = r' \iff m - n \text{ es múltiplo de } 4$$

   (dejamos como ejercicio verificar esta última equivalencia). Vemos aquí que existen muchas formas equivalentes de definir una misma relación. En este caso $Dom(\mathcal{R}) = Im(\mathcal{R}) = \mathbb{Z}$.

Definición **2.** *Sean A y B dos conjuntos. Una relación de A en B se denomina una **relación funcional** (o directamente una **función**) si se verifica que cada elemento de A está relacionado con un único elemento de B. Esto es, $\mathcal{R}$ es una relación funcional si:*

- *Para todo $x \in A$, existe $y \in B$ tal que $(x, y) \in \mathcal{R}$ (o sea que $Dom(\mathcal{R}) = A$);*
- *Si $(x, y) \in \mathcal{R}$ y $(x, y') \in \mathcal{R}$, entonces $y = y'$.*

Observación **1.** *La propiedad que caracteriza las relaciones funcionales es en realidad la segunda, es decir, aquellos elementos del dominio de la relación estén relacionados con un único elemento de B (y por lo tanto, podría ocurrir que $Dom(\mathcal{R}) \neq A$). Una relación que cumpla únicamente esta propiedad se denomina una **función parcial**. Toda función parcial es una función pensada como una relación de $Dom(\mathcal{R})$ en B. En áreas de la matemática (como en Análisis) no se suele hacer diferencia entre estos conceptos, sobreentendiendo que las funciones están naturalmente definidas en su dominio.*

Notación: Como es usual, denotaremos una relación funcional $\mathcal{R}$ de A en B por $f : A \to B$. Si $(a,b) \in \mathcal{R}$, dado que b es el único elemento de B relacionado con a, lo denotamos como de costumbre $b = f(a)$.

Si $X \subset A$ denotamos por

$$f(X) = \{b \in B \,:\, b = f(a) \text{ para algún } a \in X\}$$

y si $b \in B$, denotamos por

$$f^{-1}(b) = \{a \in A \,:\, f(a) = b\}.$$

Finalmente, si $Y \subset B$,

$$f^{-1}(Y) = \bigcup_{y \in Y} f^{-1}(y) = \{a \in A \,:\, f(a) = y \text{ para algún } y \in Y\}$$

Ejemplo **2.** Entre las relaciones dadas en los Ejemplos 1, es fácil verificar que la única relación funcional es la dada en el item 3, salvo por las relaciones triviales que son funciones sólo si $A = \emptyset$ o B tiene un único elemento (una función con dominio vacío es función sólo por cuestiones lógicas, dado que no hay elementos en A a los cuales aplicarles las condiciones que definen una función. En general obviaremos este caso).

Definición **3.** *Sea $f : A \to B$ una relación funcional. Decimos que f es:*

- ***inyectiva*** *si para cada $x \neq x' \in A$, $f(x) \neq f(x')$, o equivalentemente, si se verifica que para cada $x, x' \in A$*
$$f(x) = f(x') \implies x = x'.$$
- ***sobreyectiva*** *si $Im(f) = B$, o sea, para cada $y \in B$, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$.*
- ***biyectiva*** *si f es inyectiva y sobreyectiva.*

Una forma sencilla de representar relaciones entre conjuntos finitos es a partir de la *matriz de la relación*:

Definición **4.** *Si A y B son conjuntos finitos y $\mathcal{R}$ es una relación de A en B, podemos ordenar los elementos de ambos conjuntos poniendo $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $B = \{b_1, b_2, \ldots b_m\}$. Construimos una matriz $n \times m$ que denotamos por $M(\mathcal{R})$ del modo siguiente: si M_{ij} denota la entrada ij de la matriz $M(\mathcal{R})$ entonces*

$$M_{ij} = \begin{cases} 1 & si\ (a_i, b_j) \in \mathcal{R} \\ 0 & si\ (a_i, b_j) \notin \mathcal{R} \end{cases}$$

*$M(\mathcal{R})$ se denomina la **matriz de la relación** $\mathcal{R}$.*

Ejemplos **3.**

1. Es fácil verificar que las matrices de las relaciones triviales $\mathcal{R}_0 = \emptyset$ y $\mathcal{R}_1 = A \times B$ de un conjunto finito A en un conjunto finito B son la matriz nula (cuyas entradas son todas 0) en el primer caso, y la matriz cuyas entradas son todos 1 en el segundo.

2. Consideremos el conjunto $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ y la relación $\mathcal{R}$ en A dada por $x\,\mathcal{R}\,y$ si $y - x$ es par. Tendremos entonces que la matriz de $\mathcal{R}$ es la siguiente

$$M(\mathcal{R}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Consideremos ahora la relación $\mathcal{R}'$ en el mismo conjunto A dada por $x\,\mathcal{R}'y$ si $y = 2x$. Entonces

$$M(\mathcal{R}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como podemos observar en la matriz, en cada fila hay *a lo sumo* un 1, y todos los demás elementos son 0. Esto nos indica que $\mathcal{R}$ es una función parcial, pues cada elemento de A está relacionado con a lo sumo un elemento.

Para determinar el dominio de $\mathcal{R}$ basta quedarnos con los elementos que corresponden a filas no identicamente nulas (lo que indica que son elementos de A relacionados con alguien). Así, $Dom(\mathcal{R}') = \{0, 1, 2\}$. Para determinar la imagen, debemos quedarnos con las columnas que presentan al menos un 1 (o sea, no sean identicamente nulas). En este caso, $Im(\mathcal{R}') = \{0, 2, 4\}$.

4. Sean $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ y $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ y consideremos la relación $\mathcal{R}$ de A en B cuya matriz (para esa ordenación de los elementos de A y B) es

$$M(\mathcal{R}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De la matriz podemos obtener que $\mathcal{R} = \{(a_1, b_2), (a_2, b_3), (a_3, b_1)\}$. En cada fila de la matriz hay un único 1, y por lo tanto $\mathcal{R}$ es una relación funcional. Además en cada columna hay a lo sumo un 1, y por lo tanto deducimos que se trata de una función inyectiva. Por último, como hay una columna nula, la función no es sobreyectiva. En efecto, $Im(\mathcal{R}) = \{b_1, b_2, b_3\} \neq B$.

3. Operaciones entre relaciones

3.1. Relación inversa

Definición **5.** *Sea $\mathcal{R} \subset A \times B$ una relación de A en B. Se define la **relación inversa** de $\mathcal{R}$ como la relación $\mathcal{R}^{-1} \subset B \times A$ dada por*

$$\mathcal{R}^{-1} = \{(b, a) \in B \times A \,:\, (a, b) \in \mathcal{R}\}.$$

El siguiente resultado es inmediato, dejamos la prueba como ejercicio:

Lema **1.** *Sea $\mathcal{R}$ una relación de A en B y $\mathcal{R}^{-1}$ su relación inversa. Entonces $Dom(\mathcal{R}^{-1}) = Im(\mathcal{R})$ e $Im(\mathcal{R}^{-1}) = Dom(\mathcal{R})$.*

Ejercicio **1.** *Probar el Lema 1*

Ejemplos **4.**

1. La relación inversa de la relación $\mathcal{R}$ dada en la introducción es la relación $\mathcal{R}'$.

2. Si $\mathcal{R}_0$ y $\mathcal{R}_1$ son las relaciones triviales de A en B, entonces sus inversas son las respectivas relaciones triviales de B en A.

3. Consideremos la relación $\mathcal{R}$ dada en el item 3 de los Ejemplos 1. En este caso

$$\mathcal{R}^{-1} = \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,:\, n = 7m\}.$$

   Como hemos notado anteriormente, $\mathcal{R}$ es una relación funcional, que no es sobreyectiva (dado que $Im(\mathcal{R})$ es el conjunto de los múltiplos positivos de 7). Sin embargo es fácil ver que $\mathcal{R}$ es inyectiva puesto que si ponemos $f(m) = n$ para indicar que $n \,\mathcal{R}\, m$, tendemos

$$f(m) = f(m') \implies 7m = 7m' \implies m = m'.$$

   Observemos que $Dom(\mathcal{R}^{-1}) = Im(\mathcal{R}) \neq \mathbb{N}$, y por lo tanto $\mathcal{R}^{-1}$ no será una relación funcional. Dejamos como ejercicio probar que se trata de una función parcial.

4. Si consideramos ahora la relación $\mathcal{R}$ del item 4 de los Ejemplos 1, tenemos que

$$(n, m) \in \mathcal{R}^{-1} \;\Leftrightarrow\; (m, n) \in \mathcal{R} \;\Leftrightarrow\; m - n \text{ es múltiplo de 4 } \Leftrightarrow n - m \text{ es múltiplo de } 4 \;\Leftrightarrow (n, m) \in \mathcal{R}$$

   con lo cual $\mathcal{R}^{-1} = \mathcal{R}$.

5. Consideremos la relación dada en el item 4 de los Ejemplos 3, esto es $\mathcal{R} = \{(a_1, b_2), (a_2, b_3), (a_3, b_1)\}$ y su matriz está dada por

$$M(\mathcal{R}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces $\mathcal{R}^{-1} = \{(b_2, a_1), (b_3, a_2), (b_1, a_3)\}$ y su matriz es

$$M(\mathcal{R}^{-1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = M(\mathcal{R})^T$$

Nuevamente las filas de $\mathcal{R}^{-1}$ tienen a lo sumo un 1 y por lo tanto $\mathcal{R}^{-1}$ es una función parcial, que no es una función pues la cuarta fila es nula (en efecto, $Dom(\mathcal{R}^{-1}) = Im(\mathcal{R}) = \{b_1, b_2, b_3\} \neq B$). Por otra parte, $Im(\mathcal{R}^{-1}) = Dom(\mathcal{R}) = A$.

Observemos finalmente que la matriz de $\mathcal{R}^{-1}$ es la transpuesta de la matriz de $\mathcal{R}$.

Lema **2.** *Sean A y B conjuntos finitos, $\mathcal{R}$ una relación de A en B y $M(\mathcal{R})$ la matriz de $\mathcal{R}$. Entonces la matriz de $\mathcal{R}^{-1}$ es $M(\mathcal{R}^{-1}) = (M(\mathcal{R}))^T$.*[1]

Demostración. Observemos que la entrada ij de $M(\mathcal{R}^{-1})$ es

$$M(\mathcal{R}^{-1})_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (b_i, a_j) \in \mathcal{R}^{-1} \\ 0 & \text{si } (b_i, a_j) \notin \mathcal{R}^{-1} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } (a_j, b_i) \in \mathcal{R} \\ 0 & \text{si } (a_j, b_i) \notin \mathcal{R} \end{cases} = M_{ji}(\mathcal{R})$$

con lo cual $M(\mathcal{R}^{-1}) = M(\mathcal{R})^T$ como queríamos ver. □

Lema **3.** *Sea $\mathcal{R}$ una relación funcional. Entonces $\mathcal{R}^{-1}$ es una relación funcional si y sólo si $\mathcal{R}$ es biyectiva.*

Ejercicio **2.** *Demostrar el Lema 3*

3.2. Unión, intersección y diferencia de relaciones

Como las relaciones de un conjunto A en un conjunto B son subconjuntos de $A \times B$ es posible realizar entre ellas cualquiera de las operaciones entre conjuntos y obtener así una nueva relación de A en B (es importante para que esto tenga sentido que todas las relaciones intervinientes sean del mismo conjunto A al mismo conjunto B).

Es decir si $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$ son relaciones de A en B, entonces

- el complemento de $\mathcal{R}$,
$$\mathcal{C}\mathcal{R} = \{(a, b) \in A \times B \,:\, (a, b) \notin \mathcal{R}\};$$
- la unión de $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$
$$\mathcal{R} \cup \mathcal{R}' = \{(a, b) \,:\, a\,\mathcal{R}\,b \;\vee a\,\mathcal{R}'b\};$$
- la intersección de $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$
$$\mathcal{R} \cap \mathcal{R}' = \{(a, b) \,:\, a\,\mathcal{R}\,b \;\wedge a\,\mathcal{R}'b\};$$

[1] la T sobre la matriz representa su matriz transpuesta. Recordemos que la entrada ij de la matriz transpuesta M^T de una matriz M es $M^T_{ij} = M_{ji}$, la entrada ji de M.

- la diferencia de $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$

$$\mathcal{R} - \mathcal{R}' = \{(a,b) \,:\, (a,b) \in \mathcal{R} \wedge (a,b) \notin \mathcal{R}'\}$$

son todas relaciones de A en B.

Ejemplos **5.** 1. Consideremos las relaciones " $<$ ", " $\leq$ ", " $>$ ", " $\geq$ " y " $=$ " en $\mathbb{R}$. Entonces tendremos

$$\mathcal{C} \geq = <; \quad \mathcal{C} > = \leq; \quad (= \cup <) = \leq; \quad (= \cup >) = \geq; \quad (\leq - =) = <, \quad (\leq \cup >) = \mathcal{R}_1; \quad (\leq \cap >) = \mathcal{R}_0$$

donde $\mathcal{R}_0$ y $\mathcal{R}_1$ son las relaciones triviales del item 1 de los Ejemplos 1

2. Para las relaciones triviales $\mathcal{R}_0$ y $\mathcal{R}_1$ tenemos $\mathcal{C}\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}_1$, $\mathcal{C}\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_0$, $\mathcal{R}_0 \cap \mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_0$, $\mathcal{R}_0 \cup \mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_1$.

3. Supongamos que $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$ son dos relaciones de un conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ en $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$. Supongamos que $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$ están dadas por las siguientes matrices:

$$M(\mathcal{R}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M(\mathcal{R}') = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces es sencillo verificar que las matrices de las distintas operaciones entre $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$ son

$$M(\mathcal{R} \cup \mathcal{R}') = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M(\mathcal{R} \cap \mathcal{R}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M(\mathcal{C}\mathcal{R}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M(\mathcal{R} - \mathcal{R}') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio **3.** *Dadas dos relaciones $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$ de un conjunto finito A a un conjunto finito B, determinar $M(\mathcal{R})$, $M(\mathcal{R} \cup \mathcal{R}')$, $M(\mathcal{R} \cap \mathcal{R}')$ y $M(\mathcal{R} - \mathcal{R}')$ en función de $M(\mathcal{R})$ y $M(\mathcal{R}')$.*

3.3. Composición

Definición **6.** *Sean $\mathcal{R}_1$ una relación de A en B y $\mathcal{R}_2$ una relación de B en C. Se denomina* ***composición*** *de $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ a la relación de A en C dada por*

$$\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1 = \{(a,c) \in A \times C \,:\, \exists\, b \in B \,/ (a,b) \in \mathcal{R}_1 \,\wedge\, (b,c) \in \mathcal{R}_2\}.$$

Ejemplo **6.** Sea $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{x,y,z,w\}$, $C = \{5,6,7\}$. Consideremos la relación $\mathcal{R}$ de A en B dada por $\mathcal{R}_1 = \{(1,x),(2,x),(3,y),(3,z)\}$ y las relaciones $\mathcal{R}'$ y $\mathcal{R}''$ de B en C dadas por $\mathcal{R}' = \{(x,6),(w,5)\}$, $\mathcal{R}'' = \{(w,5),(w,6)\}$. Entonces tendremos que

$$\mathcal{R}' \circ \mathcal{R} = \{(1,6),(2,6)\}, \quad \mathcal{R}'' \circ \mathcal{R} = \emptyset$$

Por otra parte observemos que las matrices de estas relaciones (para los elementos ordenados en la forma que están listados) son

$$M(\mathcal{R}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M(\mathcal{R}') = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M(\mathcal{R}'') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$M(\mathcal{R}' \circ \mathcal{R}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M(\mathcal{R}' \circ \mathcal{R}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio **4.** 1. *Comparar la matriz $M(\mathcal{R}' \circ \mathcal{R})$ con el producto de matrices $M(\mathcal{R}) \cdot M(\mathcal{R}')$, y la matriz $M(\mathcal{R}'' \circ \mathcal{R})$ con el producto $M(\mathcal{R}) \cdot M(\mathcal{R}'')$ en el ejemplo anterior.*

2. *Si $\mathcal{R}$ es una relación cualquiera de A en B y $\mathcal{R}'$ es una relación de B en C (con A, B y C conjuntos finitos cualesquiera), ¿qué relación existe entre $M(\mathcal{R}' \circ \mathcal{R})$ y $M(\mathcal{R}) \cdot M(\mathcal{R}')$?*

Ejercicio **5.** *Probar que si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son relaciones funcionales, entonces $g \circ f$ es una relación funcional (y la definición que dimos de composición de relaciones coincide en este caso con la noción usual de composición de funciones).*

3.4. Restricción

En muchos casos es útil restringir la relación de un conjunto A en B a subconjuntos de A y B, para obtener una nueva relación. Por ejemplo si $\mathcal{R}$ es una función parcial, su restricción a su dominio dará una relación funcional. Si si $\mathcal{R}$ fuese una relación funcional inyectiva, la restricción de B a $Im(\mathcal{R})$ permitirá definir una función biyectiva (y por lo tanto invertible).

Definición **7.** *Sea $\mathcal{R}$ una relación de un conjunto A en un conjunto B y sea $A' \subset A$, $B' \subset B$. La **restricción** de $\mathcal{R}$ a $A' \times B'$ es una nueva relación de A' en B', denotada $\mathcal{R}_{|A' \times B'}$ definida por*

$$\mathcal{R}_{|A' \times B'} = \{(a, b) \in A' \times B' \,:\, a \,\mathcal{R}\, b\} = \mathcal{R} \cap (A' \times B').$$

Ejemplo **7.** Consideremos la relación $\mathcal{R}$ de un conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ en $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$. Supongamos que

$$M(\mathcal{R}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tomemos $A' = \{a_1, a_2\}$, $B' = \{b_1, b_2\}$. Entonces para obtener $\mathcal{R}_{|A' \times B'}$ simplemente debemos eliminar las filas y las columnas de $M(\mathcal{R})$ correspondientes a los elementos que no están en A' (para el caso de las filas) y que no están en B' (para el caso de las columnas). De esta forma

$$M(\mathcal{R}_{|A'\times B'}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

o sea que $\mathcal{R}_{|A'\times B'} = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2)\}$.

Notación: En el caso de relaciones funcionales solemos restringir la función a un subconjunto del dominio. De esta manera si $f : A \to B$ es una relación funcional y $A' \subset A$, es usual denotar $f_{|A'} : A' \to B$ a la restricción $f_{|A'\times B}$.

4. Propiedades de las relaciones en un conjunto

En esta sección nos dedicaremos a estudiar relaciones de un conjunto A en sí mismo. En estos casos particulares, que son los más interesantes, las relaciones pueden poseer o no una serie de propiedades particulares que dan lugar a las denominadas *relaciones de equivalencia* y *relaciones de orden*. Dedicaremos la próxima Unidad al estudio de estas últimas.

Definición **8.** *Sea $\mathcal{R}$ una relación en un conjunto A. Decimos que $\mathcal{R}$ es:*

- ***reflexiva*** *si para cada $x \in A$ se verifica que $x \,\mathcal{R}\, x$ (o sea, $(x, x) \in \mathcal{R}$).*
- ***simétrica*** *si cada vez que $x \,\mathcal{R}\, y$, entonces $y \,\mathcal{R}\, x$, esto es,*

$$(x, y) \in \mathcal{R} \implies (y, x) \in \mathcal{R}.$$

- ***transitiva*** *si cada vez que $x \,\mathcal{R}\, y$ e $y \,\mathcal{R}\, z$ entonces $x \,\mathcal{R}\, z$, esto es,*

$$(x, y) \in \mathcal{R} \;\wedge\; (y, z) \in \mathcal{R} \implies (x, z) \in \mathcal{R}.$$

- ***antisimétrica*** *si cada vez que $x \,\mathcal{R}\, y$ e $y \,\mathcal{R}\, x$ entonces $x = y$, esto es,*

$$(x, y) \in \mathcal{R} \;\wedge (y, x) \in \mathcal{R} \implies x = y.$$

Ejemplos **8.** 1. Sea $\mathcal{R}$ la relación en $\mathbb{N}$ definida por $a \,\mathcal{R}\, b$ si a divide a b (es decir, si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $b = ka$).

Como $a = 1 \cdot a$ cualquiera sea $a \in \mathbb{N}$, resulta que $a \,\mathcal{R}\, a$ para cada $a \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $\mathcal{R}$ es reflexiva.

La relación claramente no es simétrica pues por ejemplo $1 \,\mathcal{R}\, 2$ pero $2 \not\mathcal{R}\, 1$.

Veamos si es transitiva: si $a \,\mathcal{R}\, b$ y $b \,\mathcal{R}\, c$ quiere decir que existen $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ tales que $b = k_1 a$ y $c = k_2 b$, de donde $c = k_2 b = (k_2 k_1) a$ con $k_2 k_1 \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $b \,\mathcal{R}\, c$ y $\mathcal{R}$ es entonces transitiva.

Finalmente, si $a \,\mathcal{R}\, b$ y $b \,\mathcal{R}\, a$ entonces existen $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ tales que $b = k_1 a$ y $a = k_2 b$, de donde $b = (k_1 k_2) b$. Luego $k_1 k_2 = 1$, y como son números naturales debe ser $k_1 = k_2 = 1$, o sea, $a = b$. Por lo tanto $\mathcal{R}$ es antisimétrica.

2. Sea $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ y sea $\mathcal{R}$ la relación en A dada por

$$M(\mathcal{R}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Observemos primero que $M(\mathcal{R})$ tiene todos 1 en la diagonal, es decir que $a_i \,\mathcal{R}\, a_i$ para cada $i = 1, 2, 3$, con lo cual $\mathcal{R}$ es reflexiva.

Por otra parte, $M(\mathcal{R})^T = M(\mathcal{R})$. Esto implica que si $a_i \,\mathcal{R}\, a_j$, entonces la entrada ij de la matriz será 1 y al ser $M(\mathcal{R})$ una matriz simétrica también tendremos que la entrada ji es 1, o sea, $a_j \,\mathcal{R}\, a_i$. Por lo tanto $\mathcal{R}$ es una relación simétrica.

$\mathcal{R}$ no es antisimétrica pues $a_1 \,\mathcal{R}\, a_3$ y $a_3 \,\mathcal{R}\, a_1$ y sin embargo $a_1 \neq a_3$ (es fácil ver que la única relación no vacía simultáneamente simétrica y antisimétrica es la igualdad).

Observemos finalmente que $a_1 \,\mathcal{R}\, a_3$ y $a_3 \,\mathcal{R}\, a_2$ pero sin embargo $a_1 \not\mathcal{R} a_2$, con lo cual $\mathcal{R}$ no es transitiva.

3. Fijemos $m \in \mathbb{Z}$ y definamos una relación $\mathcal{R}$ en $\mathbb{Z}$ poniendo $a \,\mathcal{R}\, b$ si $b - a$ es múltiplo de m (un ejemplo particular de esta relación fue visto en el item 4 de los Ejemplos 1 para $m = 4$). Recordemos que un entero n cualquiera es múltiplo de m si existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = km$.

Observemos que dado $a \in \mathbb{Z}$, $a - a = 0 = 0 \cdot m$ con lo cual $a \,\mathcal{R}\, a$, o sea $\mathcal{R}$ es reflexiva.

Si $a \,\mathcal{R}\, b$ entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $a - b = km$. Pero entonces

$$b - a = -(a - b) = (-k)m$$

con $-k \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto $b \,\mathcal{R}\, a$, y entonces $\mathcal{R}$ es simétrica.

Finalmente, si $a \,\mathcal{R}\, b$ y $b \,\mathcal{R}\, c$, existirán $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ tales que $b - a = k_1 m$ y $c - b = k_2 m$. Sumando miembro a miembro ambas igualdades resulta

$$c - a = (c - b) + (b - a) = (k_2 + k_1)m$$

con lo cual $a \,\mathcal{R}\, c$. Luego $\mathcal{R}$ es transitiva. Esta relación es particularmente importante y recibe el nombre de **congruencia módulo** m. Volveremos a ella más adelante.

Definición **9.** *Una relación $\mathcal{R}$ en un conjunto A se denomina*

- *un* ***preorden*** *si $\mathcal{R}$ es reflexiva y transitiva.*
- *una relación de* ***equivalencia*** *si $\mathcal{R}$ es reflexiva, simétrica y transitiva.*
- *una relación de* ***orden*** *(u* ***orden parcial****) si $\mathcal{R}$ es reflexiva, antisimétrica y transitiva.*

Observación **2.** *Toda relación de equivalencia es un preorden y toda relación de orden es un preorden. Sin embargo, como la única relación simultáneamente simétrica y antisimétrica es la igualdad, ninguna relación distinta de esta puede ser al mismo tiempo una relación de equivalencia y una relación de orden.*

Ejemplos **9.** 1. La relación $\mathcal{R}$ en $\mathbb{N}$ dada por $a\,\mathcal{R}\,b$ si a divide a b (item 1 de los Ejemplos 8) es una relación de orden.

2. La relación de congruencia módulo m en $\mathbb{Z}$ (item 3 de los Ejemplos 8) es una relación de equivalencia.

3. Las relaciones $\leq$ y $\geq$ (en $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$) son relaciones de orden.

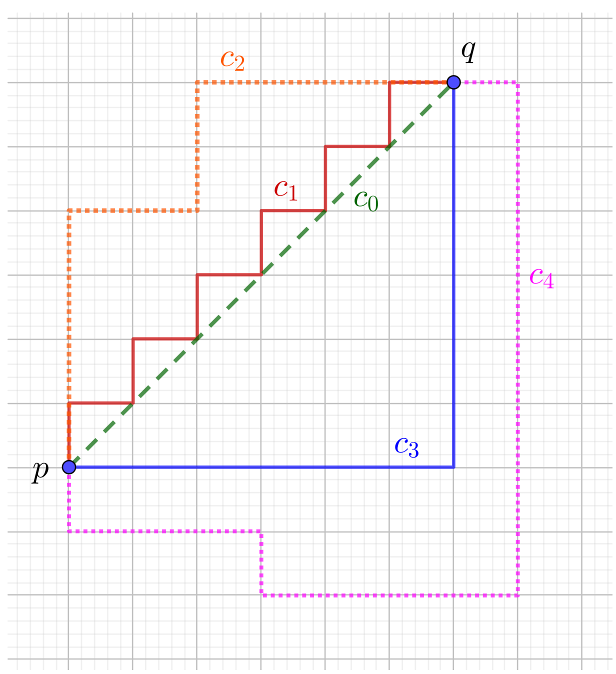
Dedicaremos la próxima Unidad al estudio de las relaciones de preorden y orden. Para finalizar esta Unidad repasaremos algunas propiedades de las relaciones de equivalencia.

5. Clases de equivalencia y conjunto cociente

En lo que sigue, denotaremos una relación de equivalencia genérica en un conjunto A por $\sim$.

La relación de equivalencia por excelencia en un conjunto A es la igualdad, o sea aquella definida por $x \sim y$ si $x = y$. Para esta relación, cada elemento de A está relacionado únicamente con si mismo, por lo cual la relación es reflexiva y trivialmente simétrica y transitiva. En muchos problemas sin embargo resulta conveniente considerar elementos que sean equivalentes, sin necesariamente ser iguales. Las relaciones de equivalencia por lo tanto generalizan el concepto de igualdad y permiten "clasificar" objetos en un conjunto que tengan las mismas propiedades (aquellas, justamente, que definen la relación).

Consideremos por ejemplo dos puntos p y q en el plano que representan dos ubicaciones en una ciudad y sea A el conjunto de todos los caminos entre p y q. Supongamos que interesa estudiar qué camino elegir para ir de p a q de modo que la distancia recorrida sea la menor posible. Podemos considerar el conjunto A de todos los caminos entre p y q, y la relación de equivalencia en A dada por $c_1 \sim c_2$ si c_1 y c_2 son caminos de igual longitud (dejamos como ejercicio verificar que efectivamente se trata de una relación de equivalencia).



En la figura, la distancia entre p y q se realiza por el segmento de recta c_0. Pero c_0 no es en realidad un camino válido (o sea $c_0 \notin A$) pues en el medio habrá seguramente obstáculos (como edificios) que debemos sortear. Los caminos c_1, c_2 y c_3 tienen la misma longitud 12, y por lo tanto son equivalentes. Quiere decir que para ir de p a q por cualquiera de ellos recorreremos la misma distancia. El camino c_4 tiene longitud 18, y por lo tanto no es equivalente a los demás.

Si agrupamos todos los caminos equivalentes entre sí en un mismo conjunto, tendremos definido lo que llamaremos una *clase de equivalencia*. Cada uno de los caminos que pertenecen a la clase será un *representante* de la clase. Más aún, la propiedad que comparten los elementos de la clase permite "etiquetarlos": 12 representará la clase de todos los caminos de longitud 12 (o sea equivalentes a c_1, c_2 o c_3), 18 la de los caminos de longitud 18 (equivalentes a c_4), etc. Tendremos garantizado así que cualquier elemento que elijamos en la clase con la etiqueta 12 será un camino de longitud 12, y lo mismo con cualquier otra clase.

Estas clases tienen además dos propiedades fundamentales que generalizaremos a cualquier relación de equivalencia: la unión de todas ellas es todo el conjunto A, es decir, cualquier camino entre p y q está en alguna clase; la intersección de dos cualesquiera de ellas (distintas) es vacío, es decir, no puede haber un camino que tenga simultáneamente dos longitudes diferentes.

Formalizaremos estas consideraciones en la siguiente

Definición **10.** *Sea $\sim$ una relación de equivalencia en un conjunto A. Para cada $x \in A$ se define la* ***clase de equivalencia*** *de x como el conjunto*

$$[x] = \{y \in A \,:\, x \sim y\}.$$

En muchos casos usaremos también la notación $\overline{x}$ para denotar la clase de equivalencia de x.

Las clases de equivalencia tienen las siguientes propiedades:

Teorema **4.** *Sea $\sim$ una relación de equivalencia en un conjunto no vacío A. Entonces:*

1. *$[x] \neq \emptyset$ para cada $x \in A$.*

2. *$x \sim y$ si y sólo si $[x] = [y]$.*

3. *si $x \not\sim y$ entonces $[x] \cap [y] = \emptyset$.*

4. *la unión de todas las clases de equivalencia es el conjunto A.*

Demostración. 1. Es trivial, pues al ser $\sim$ una relación reflexiva, $x \in [x]$ para cada $x \in A$.

2. $\Rightarrow$) Supongamos primero que $x \sim y$. Como la relación es simétrica, $y \sim x$. Si ahora $z \in [x]$, entonces $x \sim z$, y como $y \sim x$ y la relación es transitiva resultará $y \sim z$, o sea, $z \in [y]$. Hemos probado que $[x] \subset [y]$. La prueba de la contención $[y] \subset [x]$ es análoga y se deja como ejercicio.

   $\Leftarrow$) Supongamos ahora que $x, y \in A$ son tales que $[x] = [y]$. Entonces, como la relación es reflexiva, en particular $y \sim y$, es decir, $y \in [y] = [x]$, y por lo tanto $x \sim y$.

3. Probaremos la contrarecíproca. Supongamos que $[x] \cap [y] \neq \emptyset$. Entonces existe $z \in A$ tal que $z \in [x]$ y $z \in [y]$. Por el item anterior resultará $[z] = [x]$ y $[z] = [y]$, con lo cual $[x] = [y]$ y por lo tanto $x \sim y$.

4. Claramente cada clase de equivalencia es, por definición, un subconjunto de A y por lo tanto la unión de todas ellas es también un subconjunto de A. Para probar la otra contención, basta observar que para cualquier $x \in A$, $x \sim x$ y por lo tanto $x \in [x]$. Luego x está en la unión de todas las clases de equivalencia.

$\square$

Este resultado muestra que una relación de equivalencia *parte* al conjunto A en subconjuntos disjuntos 2 a 2 (las clases de equivalencia) cuya unión es todo A:

Definición **11.** *Sea $A \neq \emptyset$ un conjunto. Una* ***partición*** *de A es una colección $\mathcal{P} = \{B_i\}_{i \in I}$ de subconjuntos no vacíos de A tales que:*

1. $\bigcup_{i \in I} B_i = A$*;*

2. si $i \neq j$*,* $B_i \cap B_j = \emptyset$*.*

Es decir, una partición de A es una colección de subconjuntos disjuntos 2 a 2 cuya unión es todo A.

Del Teorema 4 resulta que toda relación de equivalencia en A determina una partición de A (el conjunto de las clases de equivalencia definidas por la relación). Veremos que vale la recíproca:

Teorema **5.** *Sea $\mathcal{P} = \{B_i\}_{i \in I}$ una partición de un conjunto $A \neq \emptyset$. Entonces la relación $\sim$ en A dada por $x \sim y$ si $x, y \in B_i$ para algún $i \in I$ es una relación de equivalencia en A. Más aún, si $x \in B_i$ entonces $[x] = B_i$.*

Demostración. Observemos que como $\bigcup_{i \in I} B_i = A$, entonces para cada $x \in A$ existe $i \in I$ tal que $x \in B_i$, y por lo tanto $x \sim x$, o sea, $\sim$ es reflexiva.

Si ahora tomamos $x \sim y$, tendremos que existe $i \in I$ tal que $x, y \in B_i$, con lo cual $y, x \in B_i$ y por lo tanto $y \sim x$. Luego $\sim$ es simétrica.

Veamos finalmente que $\sim$ es transitiva. Sean $x, y, z \in A$ tales que $x \sim y$ e $y \sim z$. Existirán $i, j \in I$ tales que $x, y \in B_i$ y $y, z \in B_j$. Si fuese $i \neq j$, tendríamos que $B_i \cap B_j = \emptyset$, pero esto no puede ocurrir pues $y \in B_i \cap B_j$. Luego $i = j$ y por lo tanto $x, z \in B_i$. Concluimos que $x \sim z$.

La última afirmación es inmediata, dado que si $x \in B_i$, B_i es el conjunto de los elementos de A relacionados con x, por definición de $\sim$. $\square$

Si consideramos ahora el conjunto $\mathcal{E}$ de todas las relaciones de equivalencia en A y $\mathcal{P}_A$ el conjunto de todas las particiones de A podemos definir una función

$$f : \mathcal{E} \to \mathcal{P}_A$$

tal que $f(\sim) = \mathcal{P}_\sim$ donde $\mathcal{P}_\sim = \{[x] : x \in A\}$ es el conjunto de clases de equivalencia definidas por $\sim$, que como vimos es una partición de A.

Por el Teorema 5, para cada partición $\mathcal{P} \in \mathcal{P}_A$, existe una relación de equivalencia $\sim$ en A tal que las clases de equivalencia definidas por $\sim$ coinciden con los subconjuntos que forman la partición. Por lo tanto, para cada $P \in \mathcal{P}_A$ existe $\sim \in \mathcal{E}$ tal que $f(\sim) = \mathcal{P}$. Luego f es sobreyectiva.

Finalmente, si $\sim$ y $\sim^*$ son dos relaciones de equivalencia en A tales que $f(\sim) = f(\sim^*)$ entonces las clases de equivalencia de $\sim$ coinciden con las clases de equivalencia de $\sim^*$ (pues ambas inducen la misma partición de A). Si $x \in A$, denotemos por $[x]$ y $[x]^*$ las clases de equivalencia de x para las relaciones $\sim$ y $\sim^*$ respectivamente. Por lo tanto tenemos que si $f(\sim) = f(\sim^*)$, entonces $[x] = [x]^*$ para cada $x \in A$. Luego, por el item 2 del Teorema 4, si $x, y \in A$ tendremos que

$$x \sim y \;\Leftrightarrow\; [x] = [y] \;\Leftrightarrow\; [x]^* = [y]^* \;\Leftrightarrow\; x \sim^* y$$

con lo cual $\sim = \sim^*$ y por lo tanto f es inyectiva.

Concluimos que f es una función biyectiva. Las funciones biyectivas entre conjuntos (especialmente cuando estos conjuntos definen algún tipo de estructura en otro conjunto) se denominan *correspondencias biunívocas*. Resumimos el análisis anterior en el siguiente resultado:

Teorema **6.** *Existe una correspondencia biunívoca entre el conjunto de relaciones de equivalencia en un conjunto $A \neq \emptyset$ y el conjunto de particiones de A.*

Definición **12.** *Sea A un conjunto no vacío y $\sim$ una relación de equivalencia en A. Se denomina **conjunto cociente** de A por $\sim$ y se denota $A/\sim$ a la partición*

$$A/\sim = \{[x] \,:\, x \in A\}$$

que $\sim$ induce en A.

Ejemplo **10.** Consideremos la relación $\mathcal{R}$ en un conjunto finito $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ dada por la matriz

$$M(\mathcal{R}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Observando que todos los elementos de la diagonal son 1, obtenemos que $a_i \,\mathcal{R}\, a_i$ para cada $i = 1, \ldots, 5$ y por lo tanto $\mathcal{R}$ es una relación reflexiva.

Por otra parte, $M(\mathcal{R})^T = M(\mathcal{R})$, lo que implica que $\mathcal{R}$ es simétrica.

Finalmente, es fácil ver que $M(\mathcal{R}) \cdot M(\mathcal{R}) = M(\mathcal{R})$ y por lo tanto $\mathcal{R}$ es transitiva (ver el Ejercicio 9c de la Práctica 1).

Concluimos que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia. Para obtener las clases de equivalencia, debemos recordar que cada elemento de A pertenece a una única clase. Por lo tanto, como

$$[a_1] = \{a_1, a_4\}$$

automáticamente $[a_4] = [a_1]$. Tenemos además

$$[a_2] = \{a_2, a_5\}, \quad [a_3] = \{a_3\}$$

y como todos los elementos de A ya aparecen en alguna de las clases de equivalencia anteriores, estas son todas. Por lo tanto, el concunto cociente $A/\mathcal{R}$ está dado por

$$A/\mathcal{R} = \{[a_1], [a_2], [a_3]\} = \{\{a_1, a_4\}, \{a_2, a_5\}, \{a_3\}\}.$$

Ejemplo **11. Los enteros módulo** m. Consideremos la relación de congruencia módulo m en $\mathbb{Z}$ definida en el item 3 de los Ejemplos 8. De ahora en más denotaremos $x \equiv y\,(m)$ para indicar esta relación. Es decir,

$$x \equiv y\,(m) \;\Leftrightarrow\; \exists\, k \in \mathbb{Z} \,:\, x - y = km.$$

Ya vimos que $\equiv$ es una relación de equivalencia en $\mathbb{Z}$. Veamos cuál es el conjunto cociente que define.

Sea $x \in \mathbb{Z}$ cualquiera. Por el algoritmo de la división existen únicos $c \in \mathbb{Z}$ y $r \in \mathbb{Z}$ tal que $0 \leq r < m$ y

$$x = cm + r.$$

c es el *cociente* y r es el *resto* de dividir x por m. Para simplificar la notación escribiremos $r = r_m(x)$ para indicar el resto de dividir x por m.

Observemos que

$$x - r = cm,\; c \in \mathbb{Z} \implies x \equiv r\,(m) \implies [x] = [r]. \tag{1}$$

Quiere decir que todo entero x está relacionado con $r_m(x)$, y como el resto de la división por m puede variar entre 0 y $m-1$, hay a lo sumo m clases de equivalencia distintas para esta relación.

Más aún, si $0 \leq r, r' < m$, entonces $-m < r - r' < m$, con lo cual $r - r'$ es múltiplo de m si y sólo si $r - r' = 0$, es decir, si y sólo si $r = r'$.

Concluimos que los número $0, 1, \ldots, m-1$ no están relacionados entre sí, y por lo tanto definen clases de equivalencia distintas.

El conjunto cociente $Z/\equiv$ se denota como $\mathbb{Z}_m$ y la clase de equivalencia $[k]$ de $k \in \mathbb{Z}$ suele denotarse en este caso por $\overline{k}$. Por lo tanto tenemos que

$$\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{m-1}\}$$

es un conjunto finito de m elementos. Observemos que $\overline{0}$ es el conjunto de los múltiplos de m.

Por otra parte, en función de 1 y del Teorema 4 tendremos que

$$x \equiv y\,(m) \;\Leftrightarrow\; [x] = [y] \;\Leftrightarrow\; [r_m(x)] = [r_m(y)] \;\Leftrightarrow\; r_m(x) = r_m(y)$$

lo que nos da una forma equivalente de definir la congruencia módulo m en términos del resto de la división por m.

Para el caso particular de $m = 2$, tendremos que $\mathbb{Z}_2 = \{\overline{0}, \overline{1}\}$, donde $\overline{0}$ es el conjunto de los número pares (los múltiplos de 2) y $\overline{1}$ es el conjunto de números impares.

Ejemplo **12.** Sea $\mathcal{V}$ el conjunto de todos los espacios vectoriales reales de dimensión finital y definamos en $\mathcal{V}$ la relación $V_1 \sim V_2$ si existe un isomorfismo lineal $T : V_1 \to V_2$. Dejamos como ejercicio probar que se trata efectivamente de una relación de equivalencia. Dado un espacio vectorial V cualquiera, la clase de equivalencia $[V]$ estará compuesta por todos los espacios vectoriales isomorfos a V. Como sabemos del álgebra lineal, dos espacios vectoriales de dimensión finita son isomorfos si y sólo si tienen la misma dimensión. Por lo tanto podemos "etiquetar" cada clase de equivalencia con un número natural n, de modo que n represente la clase de equivalencia formada por todos los espacios vectoriales de dimensión n. De esta manera podemos identificar el conjunto cociente $\mathcal{V}/\sim$ con $\mathbb{N}$, y un representante "canónico" de la clase de equivalencia etiquetada por $n \in \mathbb{N}$ es $\mathbb{R}^n$.

Como veremos en múltiples oportunidades este ejemplo es típico en matemática. Cada vez que estudiamos una estructura (algebraica, diferenciable, etc), es importante definir qué se entiende por una estructura equivalente (en este caso se usa más comunmente la palabra *isomorfa*), lo que definirá siempre una relación de equivalencia y permitirá clasificar las estructuras en clases de equivalencia. Todos los elementos de la clase compartirán así las mismas propiedades relativas a la estructura que estamos estudiando, y por lo tanto para determinar las propiedades de cualquier elemento de la clase bastará estudiar un representante adecuado. Por ejemplo, en álgebra lineal, como hemos notado, $\mathbb{R}^n$ es un representante de la clase de equivalencia de los espacios vectoriales reales de dimensión n. Por lo tanto basta estudiar las propiedades de $\mathbb{R}^n$ (como espacio vectorial) para deducir propiedades sobre cualquier otro espacio vectorial de dimensión n.

Ejemplo **13. Definición de $\mathbb{Z}$.** Hasta ahora hemos visto como las relaciones de equivalencia permiten clasificar los elementos de un conjunto A en clases de elementos que podemos considerar equivalentes para alguna propiedad que nos interese estudiar. Veremos en este último ejemplo que el conjunto cociente $A/\sim$ tiene en muchos casos interes en sí mismo y permite definir nuevos objetos interesantes. Es el caso del conjunto numérico $\mathbb{Z}$.

Olvidemos por el momento todo lo que sabemos de los distintos conjuntos numéricos y planteemonos el problema de cómo definirlos. Como ocurre frecuentemente, los objetos con los que trabajamos habitualmente y nos resultan más simples son aquellos que presentan más complicaciones a la hora de dar una definición formal de ellos. El problema es que se trata de objetos tan "básicos" que no podemos recurrir a nociones previas para definirlos. Se consideran *elementos primitivos* y es necesario desarrollar una teoría axiomática para determinarlos a partir de sus propiedades.

Para los conjuntos numéricos existen fundamentalmente dos teorías que avanzan, por así decirlo, en sentidos opuestos. Una de ellas, estudiada en el curso de Análisis Matemático I, parte de la definición axiomática de $\mathbb{R}$ y de sus operaciones, para luego definir $\mathbb{N}$ como el menor conjunto inductivo de $\mathbb{R}$ y a partir de $\mathbb{N}$ definir $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$. Es decir, partimos del conjunto más grande, $\mathbb{R}$, para luego definir los demás conjuntos numéricos como subconjuntos de $\mathbb{R}$, aprovechando de las propiedades axiomáticas de $\mathbb{R}$.

La segunda forma va en sentido inverso, y permite arrancando de $\mathbb{N}$ definir los demás conjuntos. Esta definición presenta una dificultad. Si sólo tenemos definidos los números naturales, ¿cómo podemos definir, por ejemplo, los enteros, si constituyen un conjunto más grande que $\mathbb{N}$? Como veremos en seguida, las relaciones de equivalencia cumpen un rol fundamental en este proceso.

Comencemos suponiendo que efectivamente tenemos definido el conjunto de los números naturales con la operación suma $(+)$ y el producto $(\cdot)$ habituales, que son las únicas que tiene sentido en $\mathbb{N}$. Esto puede hacerse a partir de los denominados *axiomas de Peano*, que enunciamos a continuación, aunque no nos dedicaremos a estudiarlos:

Axioma 1: Existe un conjunto no vacío, denotado por $\mathbb{N}$, que contiene al menos un elemento, denotado por 1.

Axioma 2: Existe una función $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, denominada "sucesor" que verifica:

1. Para todo $n \in \mathbb{N}$, la proposición $S(n) = 1$ es falsa. Es decir, 1 no es sucesor de ningún elemento de $\mathbb{N}$.

2. Para cada $n, m \in \mathbb{N}$, si $S(n) = S(m)$, entonces $n = m$.

Axioma 3: Principio de inducción. Si $K \subset \mathbb{N}$ satisface las dos propiedades siguientes:

1. $1 \in K$;

2. Si $n \in K$ entonces $S(n) \in K$.

entonces $K = \mathbb{N}$.

Observemos que el Axioma 2 establece que dos números naturales distintos tienen sucesores distintos (o sea, la función S es inyectiva).

A partir del Axioma 3 podemos probar que $Im(S) = \mathbb{N} - \{1\}$. En efecto, como 1 no es sucesor de ningún elemento de $\mathbb{N}$, es claro que $Im(S) \subset \mathbb{N} - \{1\}$. Si ahora aplicamos el Principio de inducción al conjunto $K = Im(S) \cup \{1\}$ tenemos claramente que $1 \in K$, y si $n \in K$, entonces $S(n) \in Im(S) \subset K$. Luego $K = \mathbb{N}$. Con el mismo principio se prueba fácilmente que $S(k) \neq k$ para cada $k \in \mathbb{N}$. De esta manera, tenemos que todo número natural distinto de 1 es sucesor de algún (único) número natural, y que ningún número natural es sucesor de sí mismo.

A diferencia de la teoría axiomática de $\mathbb{R}$, la suma y el producto no se define axiomáticamente, sino que puede definirse recursivamente a partir de la función sucesor, y puede probarse usando el Principio de inducción que verifican las propiedades conocidas (asociatividad y conmutatividad). La suma puede definirse como la función $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, dada por:

- $n + 1 = S(n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

- $n + S(m) = S(n + m)$, para cada $n, m \in \mathbb{N}$.

y el producto como la función $\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, dada por:

- $n \cdot 1 = n$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

- $n \cdot S(m) = n \cdot m + n$, para cada $n, m \in \mathbb{N}$.

Concentrémonos ahora en cómo definir $\mathbb{Z}$ en un universo donde únicamente contamos con números naturales. $\mathbb{Z}$ "surge" de la necesidad de encontrar soluciones a ecuaciones del tipo $x + b = a$ con $a, b \in \mathbb{N}$. La solución claramente debe ser el número entero $a - b$, que aún no está definido. Sin embargo nuestro conocimiento nos dice que cualquier número entero puede definirse como la diferencia de dos números naturales, y por lo tanto basta recordar quienes son a y b, en ese orden, para definir el entero $a - b$. En otras palabras, podríamos a priori definir un entero z como un par ordenado (a, b) de números naturales, entendiendo que para obtener z hay que "restar" a a el número b.

Esta presentación tiene una falla automática. Cada número entero admite una infinidad de representaciones de este tipo, arrancando por 0 que podría expresarse por el par (a, a) para cualquier a, o por -1, que puede expresarse como $(b, b+1)$ cualquiera sea $b \in \mathbb{N}$. De la misma manera, si queremos definir -2 con este método tenemos que

$$-2 = 1 - 3 = 2 - 4 = 3 - 5 = 4 - 6 = \cdots .$$

Es decir, que el -2 puede representarse por los pares $(1, 3)$, $(2, 4)$, $(3, 5)$, $(4, 6)$, y generalmente, por aquellos dados por $(a, a + 2)$ cualquiera sea $a \in \mathbb{N}$.

Para resolver este problema de "multirepresentatividad" recurrimos a un conjunto cociente, donde todos estos elementos equivalentes están reunidos en un único elemento del cociente, o sea, en una clase de equivalencia.

Veamos antes que nada cómo podemos caracterizar los pares de números naturales que definen un mismo número entero. Supongamos que los pares (a, b) y (c, d) definen el mismo entero. Esto quiere decir que

$$a - b = c - d.$$

Como la resta no es una operación que esté definida en $\mathbb{N}$, debemos transformar esta condición en una suma. Claramente, tendremos que (a, b) y (c, d) definen el mismo entero si y sólo si

$$a + d = c + b.$$

Podemos ahora formalizar la definición de $\mathbb{Z}$ utilizando sólo las propiedades de los números naturales.

En $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definimos la relación $\sim$ dada por $(a, b) \sim (c, d)$ si y sólo si $a + d = c + b$. Dejamos como ejercicio probar que $\sim$ es una relación de equivalencia en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. El conjunto cociente $\mathbb{N} \times \mathbb{N}/\sim$ se denomina conjunto de **números enteros** y se denota por $\mathbb{Z}$. Es decir, cada elemento de $\mathbb{Z}$, denominado un **número entero**, es una clase de equivalencia $[(a, b)]$ de un par ordenado (a, b) de números naturales por la relación $\sim$.

Tomemos un par cualquiera (a, b) de números naturales. Tenemos tres opciones: $a = b$, $a < b$ o $b < a$ (estamos suponiendo aquí que tenemos un orden bien definido en $\mathbb{N}$, veremos cómo hacerlo a partir de los axiomas de Peano en la próxima Unidad).

- Si $a = b$, el número entero $[(a, a)]$ se denota por 0. Observemos que todos los pares (a, a) y (c, c) están relacionados entre sí, pues trivialmente $a + c = c + a$ y por lo tanto el cero está bien definido. Un representante canónico de esta clase es el $(1, 1)$.

- Si $b < a$, entonces existirá $k \in \mathbb{N}$ tal que $a = b + k$. Supongamos ahora que $c, d \in \mathbb{N}$ son tales que $c = d + k$. Entonces

  $$a + d = (b + k) + d = (d + k) + b = c + b.$$

  Es decir, $[(a, b)] = [(c, d)] = \{(p + k, p) \; : \; p \in \mathbb{N}\}$. De esta manera, podemos pensar a cada número natural k como el número entero $[(a + k, a)]$ (cualquiera sea $a \in \mathbb{N}$). Vía esta identificación, obtenemos que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ y el número entero $[(a+k,a)]$ se denota directamente por k. Un representante canónico de esta clase es el par $(k+1,1)$.

- Si $a < b$, entonces existirá $k \in \mathbb{N}$ tal que $b = a+k$. De manera análoga al caso anterior puede probarse que todos los pares de la forma $(a, a+k)$ están relacionados entre sí y por lo tanto definen una misma clase de equivalencia, o sea, un mismo número entero. Denotaremos al entero $[(a, a+k)]$ por $-k$. Un representante canónico de $-k$ es el par $(1, 1+k)$.

Resumiendo, con las "etiquetas" anteriores estamos en condiciones de expresar a $\mathbb{Z}$ como

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n \,:\, n \in \mathbb{N}\}$$

teniendo en cuenta que $n \in \mathbb{N}$ representa al entero $[(1+n,1)]$, $0 = [(1,1)]$ y $-n = [(1,1+n)]$.

Ejercicio **6.** *Una vez que tenemos definido $\mathbb{Z}$, ¿de qué manera podemos definir una relación de equivalencia $\sim$ en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ de modo de poder definir $\mathbb{Q}$ como el cociente $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/\sim$?*