Álgebra Lineal 2020 (LCC- LM- PM)
Cap.2: Espacios vectoriales-2da parte

Graciela Nasini - Yanina Lucarini - Eduardo Martinez

nasini,lucarini, eduardom@fceia.unr.edu.ar

Espacios columna y nulo y sistemas de ecuaciones lineales

Recordemos: dada una matriz A, $m \times n$,

- *Espacio columna de A*: subespacio de $\mathbb{R}^m$ generado por los vectores columna de A. Lo notamos $C(A)$.
- *Espacio nulo de A*: subespacio de $\mathbb{R}^n$ definido por $N(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$.

¿Qué relación tienen estos espacios vectoriales con el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones $Ax = b$?

Sabemos que $b \in C(A)$ si y solo si existe $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $Ax = b$.

¿Podrías explicar por qué?

Pero ahora el objetivo es describir el conjunto $\mathcal{S}$ de *todas las soluciones del sistema $Ax = b$*.

Observación: Para matrices $n \times n$ no singulares, $C(A) = \mathbb{R}^n$ y, para todo $b \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{S}$ tiene un único elemento i.e. $\mathcal{S} = \{A^{-1}b\}$.

Queremos poder describir $\mathcal{S}$ para toda matriz A.

Espacios columna y nulo y sistemas de ecuaciones lineales

El siguiente resultado será fundamental para poder describir el conjunto $\mathcal{S}$ de todas las soluciones del sistema $Ax = b$:

Teorema: Sea A una matriz $m \times n$ y $b \in \mathbb{R}^m$. Sea $\mathcal{S}$ el conjunto de soluciones del sistema $Ax = b$. Entonces:

1. $\mathcal{S} = \emptyset$ si y solo si $b \notin C(A)$.
2. Si $b \in C(A)$ y $x_P \in \mathcal{S}$, entonces $\mathcal{S} = \{x_P + x_N : x_N \in N(A)\}$

Prueba:

1. Se deduce de la propia definición de $C(A)$, el espacio columna de A.
2. 2.1 Probemos primero que $\{x_P + x_N : x_N \in N(A)\} \subseteq \mathcal{S}$.
   Sea $x_N \in N(A)$. Debemos probar que $x = x_P + x_N \in \mathcal{S}$. Tenemos:

   $$Ax = A(x_P + x_N) = Ax_P + Ax_N = b + 0 = b.$$

   Por lo tanto, $x \in \mathcal{S}$.

   2.2 Probemos ahora que $\mathcal{S} \subseteq \{x_P + x_N : x_N \in N(A)\}$.
   Sea $x \in \mathcal{S}$ y definamos $x_N = x - x_P$. Sólo debemos probar que $x_N \in N(A)$. Tenemos:

   $$Ax_N = A(x - x_P) = Ax - Ax_P = b - b = 0.$$

   Por lo tanto, $x_N \in N(A)$ y $x = x_P + x_N$.

Espacios columna y nulo y sistemas de ecuaciones lineales

Ejercicio: Sean $x_1 \neq x_2$ dos soluciones del sistema $Ax = b$.

1. Encontrar dos vectores en $N(A)$.
2. Encontrar una tercer solución del sistema $Ax = b$.

Solución:

1. Sabemos que cualquier solución del sistema $Ax = b$ se puede expresar como una solución particular más un elemento de $N(A)$. Eligiendo por ejemplo x_1 como solución particular, como x_2 también es solución del sistema, sabemos que existe $x_N \in N(A)$ tal que $x_2 = x_1 + x_N$. Entonces, $x_N = x_2 - x_1 \neq 0$ es un elemento de $N(A)$. Como $N(A)$ es un espacio vectorial, $7x_N$ es otro elemento de $N(A)$
2. Para obtener soluciones del sistema, debemos sumar una solución particular con un elemento de $N(A)$. Por ejemplo, tomando x_1 como solución particular y $7x_N = 7(x_2 - x_1) \in N(A)$, obtenemos $x_3 = x_2 + 7x_N = 8x_2 - 7x_1$.

Espacios columna y nulo y sistemas de ecuaciones lineales

El teorema anterior nos dice que para describir el conjunto $\mathcal{S}$ de soluciones del sistema $Ax = b$, debemos:

1. describir el espacio nulo de A, $N(A)$ y
2. conocer una solución particular x_P del mismo o decidir que no existe tal solución. Para esto, debemos decidir si $b \in C(A)$ o no.

Conclusión: resolver sistemas lineales con A matriz de coeficientes es *casi equivalente* a conocer los espacios columna y nulo de A.

Empecemos con el espacio nulo...

Habíamos comentado que el espacio nulo de una matriz $m \times n$ (subespacio de $\mathbb{R}^n$) podría tener cualquier *dimensión* entre 0 (A matriz singular) y n (A matriz nula). Hacia ese punto nos dirigimos.

Empezaremos analizando casos correspondientes a matrices A con una cierta estructura.

Matrices escalonadas

Definición: Una matriz A no nula $m \times n$ es una *matriz escalonada* si verifica las siguientes condiciones:

1. Si existe $i \in \{1, \ldots, m\}$ tal que la fila i de A es nula, i.e. $A_i = 0$, entonces $A_j = 0$ para todo j con $i < j \leq m$. (*las filas nulas están todas al final!*
2. Sea $m^* = \min\{i \in \{1, \ldots, m\} : A_{i+1} = 0\}$ si A tiene alguna fila nula; caso contrario, $m^* = m$. Para todo $i = 1, \ldots, m^*$, existe $j(i) \in \{1, \ldots, n\}$ tal que:
   2.1 $j(i) < j(i+1)$ para todo $i = 1, \ldots, m^* - 1$,
   2.2 $A_{ij(i)} \neq 0$,
   2.3 $A_{ik} = 0$ para todo $k < j(i)$ y $A_{kj(i)} = 0$ para todo $k > i$.

Para $i = 1, \ldots m^*$, a las entradas (no nulas) $(i, j(i))$, se las denomina *pivots* de A, a las filas A_i, filas pivots y a las columna $A^{j(i)}$, columnas pivots.

Veamos el esquema de una matriz escalonada.

Matrices escalonadas

$$A = \begin{bmatrix} \odot & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & \odot & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \odot & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \odot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz A del esquema es una matriz 5×8, $m^* = 4$, $j(1) = 1, j(2) = 2$, $j(3) = 4$ y $j(4) = 8$. $A_1, A_2, A_3 y A_4$ son filas pivots y A^1, A^2, A^4 y A^8 son columnas pivots.

Ejercicio: Si A es una matriz cuadrada no singular y escalonada, entonces A es una matriz triangular superior sin ceros en la diagonal.

Comentario: No es difícil ver que, así como el Método de Gauss, a través de matrices elementales y de permutación, transforma toda matriz cuadrada no singular en una matriz triangular superior sin ceros en la diagonal, también podemos llevar por este método a toda matriz $m \times n$ a su forma escalonada. Veremos un ejemplo.

Matrices escalonadas

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 6 & 4 & 4 \\ 2 & 6 & 9 & 7 & 8 \\ -1 & -3 & 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Usando como pivot la entrada $A_{11} = 1$ y realizando operaciones elementales, logramos los ceros debajo de esta entrada.

$$A \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

En una matriz escalonada las filas nulas deben ir todas al final, así que aplicamos una permutación (P_{24}) y llegamos a

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrices escalonadas

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como $A_{22} = 0$, debemos usar la entrada A_{23} como pivot y hacer los ceros por debajo de ella. En este caso llegamos ya a su forma escalonada:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrices escalonadas

Otro Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

En la primer columna no hay entradas no nulas que permitan tener el primer pivot en esta columna. Por lo tanto vamos a la primer entrada no nula de la primer fila, $A_{12} = 1$ y ése será el primer pivot.
Obtenemos

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

matriz escalonada, con una sola columna y una sola fila pivots.

Gauss nos permite extender el resultado que teníamos para matrices cuadradas no singulares:

Teorema: Para cualquier matriz A, $m \times n$, existe una matriz de permutación P, una matriz triangular inferior L con 1's en la diagonal y una matriz escalanada U tal que $PA = LU$.

Para resolver el sistema $Ax = b$, encontrada la matriz escalonada U, seguiremos operando con matrices elementales de manera de llegar a una matriz *escalonada reducida*.

Matrices escalonadas

Definición: Una matriz R es *escalonada reducida* si R es escalonada con todos los pivots iguales a 1 y todas las entradas por encima de los pivots nulas.

Veamos el esquema de una matriz escalonada reducida:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & * & 0 & * & * & * & 0 \\ 0 & 1 & * & 0 & * & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tal como hicimos con Gauus-Jordan, cualquier matriz escalonada puede transformarse, via matrices elementales, en una matriz escalonada reducida. Veamos en el ejemplo que veníamos trabajando.

Matrices escalonadas

Habíamos llegado a esta matriz escalonada:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Primero debemos hacer los ceros por arriba de los pivots. En este caso sólo tenemos un pivot no nulo (distinto de la entrada 11) y es el pivot 6, de la segunda fila. Obtenemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para obtener los 1's en los pivots, dividimos cada fila por su pivots (equivalentemente, pre multiplicamos por una matriz diagonal).

Espacio nulo matrices escalonadas reducidas

Obtenemos:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

¿Por qué queremos llegar a la escalonada reducida?

Recordemos que el objetivo es poder describir el conjunto $\mathcal{S}$ de soluciones de un sistema $Ax = b$, cualquiera sea la matriz A y vimos que $N(A)$ juega un rol fundamental en esta descripción.

Si R en la matriz escalonada reducida que se obtiene a partir de A con permutaciones y operaciones elementales, está claro que $N(A) = N(R)$.

Veremos que describir $N(R)$ es bastante sencillo.

Resolviendo el sistema $Rx = 0$

Consideremos el sistema $Rx = 0$, con R una matriz escalonada reducida:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & * & 0 & * & * & * & 0 \\ 0 & 1 & * & 0 & * & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Las variables correspondientes a las columnas pivots se denominan *variables pivots* y las restantes, *variables libres*.

Por cada valor arbitrario que le asignemos a las variables libres obtendremos una solución del sistema donde los valores de las variables pivots quedan unívocamente definidas.

En nuestro ejemplo, teníamos:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Aquí las variables pivots son x_1 y x_3 mientras que las x_2, x_4 y x_5 son libres.

Resolviendo el sistema $Rx = 0$

Consideremos

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Las filas nulas corresponden a ecuaciones del tipo $0x = 0$ y podemos descartarlas.
Si asignamos valores arbitrarios a las libres, por ejemplo, $x_2 = t$, $x_4 = s$ y $x_5 = w$, las variables pivots x_1 y x_3 deben satisfacer las dos primeras ecuaciones. Tenemos entonces:

$$\begin{aligned} x_1 + 3t \quad\; - s - 2w &= 0 \\ x_3 + s + \tfrac{4}{3}w &= 0 \end{aligned}$$

Equivalentemente:

$$\begin{aligned} x_1 &= -3t + s + 2w \\ x_3 &= \qquad\; -s - \tfrac{4}{3}w \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema $Rx = 0$

O sea, las soluciones del sistema $Rx = 0$ son de la forma

$$x = \begin{bmatrix} -3t + s + 2w \\ t \\ -s - \frac{4}{3}w \\ s \\ w \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -\frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

con $t, s, w \in \mathbb{R}$.

Observar que $N(R)$ es el espacio generado por los vectores

$$\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -\frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

que son soluciones especiales del sistema $Rx = 0$.

¿Cómo encontramos estas soluciones especiales?

Tenemos una solución especial por cada variable libre, que se obtiene fijando esa variable libre en 1 y las restantes en cero.

Resolviendo el sistema $Rx = 0$

Resumiendo, con

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$N(R)$ es el espacio generado por las soluciones especiales. Llamamos N a la matriz cuyas columnas son las soluciones especiales de $Rx = 0$. O sea,

$$N = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Observar que los valores de las variables pivots en las soluciones especiales corresponden a los valores opuesto de las entradas de las filas pivots en la columnas de las variables libres.

Describiendo $N(A)$

Como vimos, toda matriz A puede transformarse en una matriz R escalonada reducida via operaciones elementales y permutaciones, de manera que $N(A)$, el conjunto de soluciones del sistema $Ax = 0$, coincide con el conjunto de soluciones del sistema $Rx = 0$.

Para describir $N(A)$, cualquiera sea A, seguimos los siguientes pasos:

1. Encontramos R e identificamos variables libres y variables pivots.
2. Para cada variable libre, encontramos la solución del sistema donde esa variable libre vale 1 y las restantes libres valen 0.
3. El espacio $N(A)$ es el espacio generado por las soluciones especiales encontradas en el item anterior.

Observación: Si A es una matriz $m \times n$ con $m < n$, la matriz R tiene a lo sumo m pivots (a lo sumo, uno por fila). Por lo tanto, el sistema $Rx = 0$ tiene a lo sumo m variables pivots. Como $m < n$, el sistema tiene al menos una variable libre, con su correspondiente solución especial, no nula.

Describiendo $N(A)$

Por lo observado anteriormente, siempre que $m < n$, el sistema $Ax = 0$ (o equivalentemente el espacio $N(A)$) tiene soluciones distintas de la trivial ($x = 0$).

Más aún, si $m < n$, $N(A)$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$, cuya *dimensión* coincide con el número de variables libres (si hay sólo una, será una recta en $\mathbb{R}^n$, por ejemplo).

Esta idea de *dimensión* de los subespacios la veremos más adelante. Pero es importante ir recordando:

1. La *dimensión* del espacio columna coincide con el número de variables pivots.
2. La *dimensión* del espacio nulo coincide con el número de variables libres.

Antes terminemos de resolver los sistemas $Ax = b$, con b cualquier vector.

Resolviendo $Ax = b$

Habíamos visto que el conjunto $\mathcal{S}$ de soluciones del sistema $Ax = b$ se podía describir a partir de una solución particular del mismo más cualquier elemento de $N(A)$. Ya vimos cómo describir todos los elementos de $N(A)$, nos falta saber cómo encontrar una solución particular de $Ax = b$.

Esta solución particular puede encontrarse fácilmente si aplicamos al lado derecho b las mismas operaciones que aplicamos para llevar A a su forma escalonada U o a su forma escalonada reducida R. Luego, eligiendo cualquier valor de las variables libres, obtenemos la solución particular (si la hubiera). Por supuesto, la solución particular más sencilla de obtener será la que corresponde a poner las variables libres en 0.

Resolviendo $Ax = b$

En nuestro ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 6 & 4 & 4 \\ 2 & 6 & 9 & 7 & 8 \\ -1 & -3 & 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

fue transformada via operaciones elementales y permutaciones a su forma escalonada

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si estamos resolviendo el sistema $Ax = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$ y aplicamos a b las mismas operaciones, obtenemos el sistema equivalente:

Resolviendo $Ax = b$

(continuación)

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_1 + b_4 \\ b_3 - \frac{5}{2} b_1 - \frac{1}{2} b_4 \\ b_2 - 2b_1 \end{bmatrix} = b'$$

Las dos últimas ecuaciones de este sistema son:
$0 = b_3 - \frac{5}{2} b_1 - \frac{1}{2} b_4 \quad$ y $\quad 0 = b_2 - 2b_1$.

Por lo tanto, el sitema tendrá solución si y solo si nuestro vector lado derecho b verifica estas ecuaciones.
Equivalentemente, $b \in C(A)$ si y sólo si
$0 = b_3 - \frac{5}{2} b_1 - \frac{1}{2} b_4 \quad$ y $\quad 0 = b_2 - 2b_1$.

Si $b \in C(A)$, las dos últimas ecuaciones del sistema $Ux = b'$ se satisfacen y nos queda sólo resolver:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 &= b_1 \\ 6x_3 + 6x_4 + 8x_5 &= b_1 + b_4 \end{aligned}$$

Resolviendo $Ax = b$

(continuación)
Nos queda sólo resolver:

$$
\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 &= b_1 \\
6x_3 + 6x_4 + 8x_5 &= b_1 + b_4,
\end{aligned}
$$

donde x_1 y x_3 son variables pivots y las restantes son variables libres.

Estamos buscando una solución particular del sistema, asignemos un valor arbitrario a las variables libres... lo más sencillo es asignarle el valor cero.

Tenemos entonces: $x_2 = x_4 = x_5 = 0$ y

$$
\begin{aligned}
x_1 + 3x_3 &= b_1 \\
6x_3 &= b_1 + b_4,
\end{aligned}
$$

un sistema triangular superior sin ceros en la diagonal que resolvemos por sustitución para atrás.

Resolvemos con $b = (0, 0, 1, 2) \in C(A)$. La solución particular del sistema correspondiente a las variables libres en cero es

$$x_P = (-1, 0, \frac{1}{3}, 0, 0).$$

Resolviendo $Ax = b$

Tenemos entonces que el conjunto $\mathcal{S}$ de soluciones del sistema $Ax = b$ está descripto por los x's tales que $x = x_P + x_N$, donde x_P es la solución particular encontrada y x_N es cualquier vector en $N(A)$. Por lo visto anteriormente, los elementos de $\mathcal{S}$ son los $x \in \mathbb{R}^5$ tales que

$$x = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -\frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

con $t, s, w \in \mathbb{R}$.

Observación: El espacio $\mathcal{S}$ es un espacio 3-dimensional en $\mathbb{R}^5$, pero no es un subespacio vectorial (no contiene $x = 0$). Es paralelo al espacio nulo de la matriz de coeficientes, desplazado por una solución particular.

Resolviendo $Ax = b$

Importante: El proceso de eliminación revela las variables pivots y libres. El número de variables pivots es el *rango* de la matriz, concepto que será fundamental en lo que sigue.

¿Cuál es el rango de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}?$$

Vimos que su forma escalonada era

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, hay una sola fila y columna pivots y el rango de A es 1.
Ejercicio: A es una matriz $m \times n$ de rango 1 si y solo si existen $u \neq 0 \in \mathbb{R}^m$ y $v \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $A = u \times v$
Ejercicio: Antes de seguir, ver el ejemplo al final de la Sección 2.2 del libro de Strang, antes del Conjunto de Problemas 2.2.

Algunos ejemplos

(del Conjunto del Problemas 2.2 de Strang)

Volvamos a

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Ya vimos que la forma reducida de A es

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, x_2 es la variable pivot y x_1, x_3 y x_4 son variables libres. ¿Para qué vectores $b = (b_1, b_2)$ el sistema $Ax = b$ tiene solución?. Si aplicamos las mismas operaciones a b obtenemos $b' = (b_1, b_2 - 2b_1)$. Por lo tanto, para que se satisfaga la segunda ecuación necesitamos que $b_2 = 2b_1$. Equivalentemente,

$$C(A) = \{(b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2 : b_2 = 2b_1\}.$$

Sea $b \in C(A)$, ¿Cuál es el conjunto solución de $Ax = b$?

Algunos ejemplos

Primero vamos a describir $N(A)$. Para ellos encontramos las 3 soluciones especiales x^1, x^2 y x^3 de la ecuación $0x_1 + x_2 + 0x_3 + 3x_4 = 0$, fijando una variable libre en 1 y las restantes en 0.

1. $x_1^1 = 1, x_3^1 = x_4^1 = 0$ implica $x_2^1 = 0$,
2. $x_3^2 = 1, x_1^2 = x_4^2 = 0$ implica $x_2^2 = 0$,
3. $x_4^3 = 1, x_3^3 = x_1^3 = 0$ implica $x_2^3 = -3$

Así, $N(A)$ es el espacio generado por

$$x^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \; x^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ y } x^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Algunos ejemplos

Para encontrar una solución particular de $Ax = b$, debemos encontrar una solución de la ecuación $0x_1 + x_2 + 0x_3 + 3x_4 = b_1$. Buscamos la correspondiente a fijar todas las variables libres en cero y nos da:

$$x_P = \begin{bmatrix} 0 \\ b_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Así el conjunto de soluciones de $Ax = b$ está descripto por los $x \in \mathbb{R}^4$ tales que $x = x_P + tx^1 + sx^2 + wx^3$, para $t, s, w \in \mathbb{R}$.

Algunos ejemplos

Pensemos ahora en sentido contrario: debemos encontrar una matriz 2×3 y $b \in \mathbb{R}^2$ tales que el conjunto solución del sistema $Ax = b$ se describe por

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Lo más sencillo es pensar en una matriz A que sea escalonada reducida. ¿Cuántos pivots debe tener?

De acuerdo a la descripción de las soluciones del sistema, hay sólo una variable libre. Por lo tanto, debe tener dos pivots. Tenemos entonces que A tendrá la forma

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & r \\ 0 & 1 & s \end{bmatrix}.$$

Como $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ es la solución particular correspondiente a poner la variable libre en cero, tenemos que $b = (1, 2)$.

Algunos ejemplos

Finalmente, $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ es la solución especial de $Ax = 0$ correspondiente a fijar la variable libre x_3 en 1. Y sabemos que los valores de las variables pivots x_1 y x_2 correspondientes a esta solución están en A, en la columna correspondente a la variable libre, con signos opuestos. Por lo tanto

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Algunos ejemplos

Veamos este caso: Sean A una matriz $m \times n$ de rango r, $b \in \mathbb{R}^m$, x_P una solución particular del sistema $Ax = b$ y N la matriz $n \times (n-r)$ correspondiente a todas las soluciones especiales de $N(A)$.
Encontrar una solución particular y todas las soluciones especiales de

1. $Ax = 2b$
   En este caso, la matriz de coeficientes se mantiene y por lo tanto, tenemos el mismo espacio nulo y la misma matriz N de soluciones especiales.
   Sólo debemos encontrar una solución particular. Es fácil chequear que $2x_P$ es solución particular de este sistema.

2. $\begin{bmatrix} A \\ A \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} b \\ b \end{bmatrix}$

   En este caso tenemos que $\begin{bmatrix} A \\ A \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} Ax \\ Ax \end{bmatrix}$. Entonces, una solución particular es $\begin{bmatrix} x_P \\ x_P \end{bmatrix}$.

Algunos ejemplos

2. (continuación)
   Veamos quién es la matriz de soluciones especiales del espacio nulo.

   En este caso debemos convencernos que si R es la matriz escalonada reducida que se obtiene a partir de A, entonces $\begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}$ es la matriz escalonada reducida que se obtiene a partir de $\begin{bmatrix} A \\ A \end{bmatrix}$.

   Entonces, el rango es r y las variables libres son las mismas que en el sistema $Ax = b$. Por lo tanto N es la matriz de soluciones especiales también para este caso.