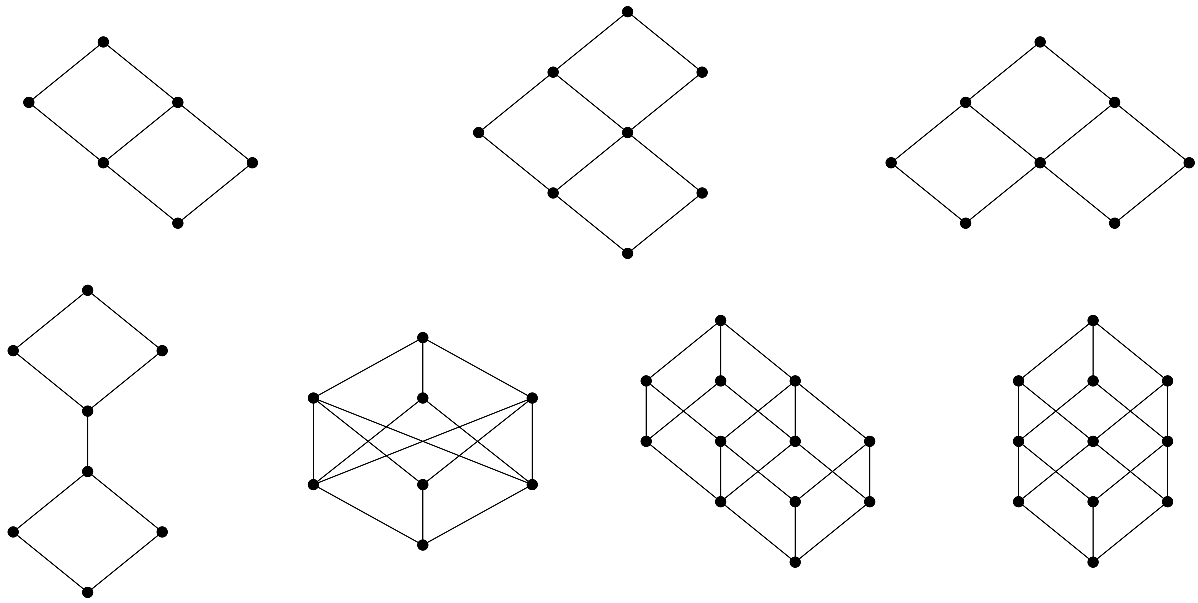
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Escuela de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Ciencia de la Computación
Complementos de Matemática II

Práctica 3: Retículos

1. Determinar cuáles de los siguientes diagramas de Hasse admiten estructura reticular.



2. Dar todos los diagramas posibles para retículos con 1, 2, 3, 4, 5, y 6 elementos respectivamente.

3. Mostrar que los siguientes posets son retículos. Determinar las operaciones $\vee$ y $\wedge$ en cada uno.

a) $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^2), \subseteq)$, donde $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ es el conjunto de subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^2$.

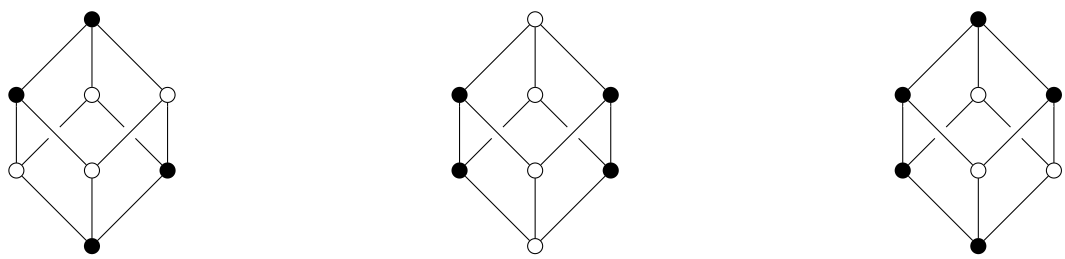
b) $(B^A, \leq)$, donde: A es un conjunto cualquiera, $(B, \preceq)$ es un retículo, $B^A = \{f : A \to B\}$ es el conjunto de funciones de A en B y $\leq$ está dado por

$$f \leq g \;\Leftrightarrow\; f(a) \preceq g(a),\; \forall\, a \in A$$

c) Álgebra de Lindenbaum-Tarski.

4. Sean $(L_1, \preceq_1)$ y $(L_2, \preceq_2)$ retículos y consideremos el orden lexicográfico $\preceq_{lex}$ en $L_1 \times L_2$. ¿En qué casos $(L_1 \times L_2, \preceq_{lex})$ es un retículo? En esos casos, ¿cuáles son las operaciones $\vee$ y $\wedge$?

5. Determinar si en los siguientes diagramas, los puntos negros determinan un subretículo.



6. Sea $(X, \preceq)$ un retículo y $a, b \in X$ con $a \preceq b$. Probar que los siguientes subconjuntos de X son subretículos.

a) $I_a = \{x \in X : x \preceq a\}$

b) $S_a = \{x \in X : b \preceq x\}$

c) $[a, b] = \{x \in X : a \preceq x \preceq b\}$.

7. Sea una función $f : X \to Y$. Considerar las funciones:

$$F : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X),\ F(B) = f^{-1}(B) \text{ (imagen inversa)}$$
$$G : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y),\ G(A) = f(A) \text{ (imagen directa)}$$

a) Mostrar que F define un morfismo de retículo.

b) Mostrar que G define un morfismo de retículo si y solo si f es inyectiva.

8. Sea $(L, \preceq)$ un retículo. Un *polinomio* p en n-variables es una función $p : L^n \to L$ que pertenece al conjunto inductivo P_L:

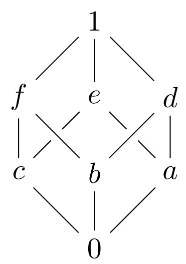
- $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\pi_i \in P_L$, donde $\pi_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$.
- Si $f, g \in P_L$ entonces $f \vee g \in P_L$, donde $(f \vee g)(\overline{x}) = f(\overline{x}) \vee g(\overline{x})$.
- Si $f, g \in P_L$ entonces $f \wedge g \in P_L$, donde $(f \wedge g)(\overline{x}) = f(\overline{x}) \wedge g(\overline{x})$.

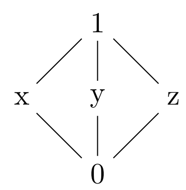
Probar que todo $p \in P_L$ es un morfismo de orden entre $(L^n, \preceq_{prod})$ y $(L, \preceq)$.

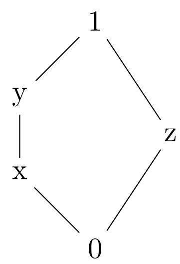
9. Sea $n = p_1 p_2 \cdots p_k \in \mathbb{N}$ tal que p_i es primo para todo $i = 1, \ldots, k$ y sea $X = \{p_1, \ldots, p_k\}$. Probar que $(D_n, |)$ es un retículo isomorfo a $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$.

10. Determinar si los retículos del ejercicio 3 son acotados.

11. Determinar si cada uno de los siguientes retículos admite estructura de retículo complementado. En caso afirmativo, decidir cuántas funciones complemento distintas se pueden definir.







12. Probar que todo retículo finito es acotado. ¿Es cierto el recíproco?

13. Sea $(L, \preceq) = (L, \vee, \wedge)$ un retículo. Probar que para cada $x, y, z \in L$,

a) $x \vee (y \wedge z) \preceq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

b) $x \wedge (y \vee z) \succeq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.

14. Sea $(L, \preceq)$ un retículo. Probar que son equivalentes:

a) $(L, \preceq)$ es modular.

b) $a \succeq c \Rightarrow a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee c$ para todos $a, b, c \in X$.

c) $a \vee (b \wedge (a \vee c)) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ para todos $a, b, c \in X$

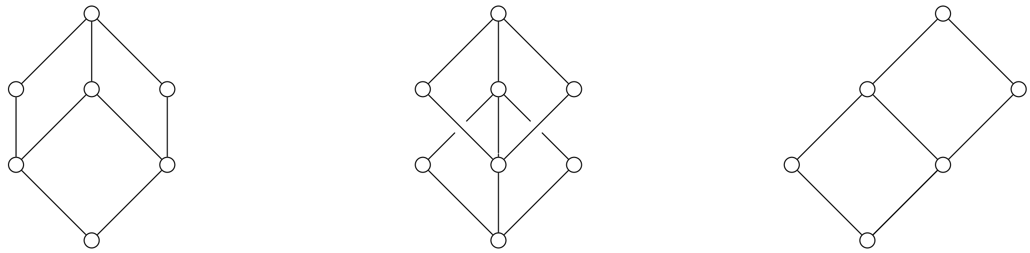
d) $a \wedge (b \vee (a \wedge c)) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ para todos $a, b, c \in X$

15. Sean L y S dos retículos y sea $f : S \to L$ un morfismo de retículos. Probar que:

a) Si L es distributivo (resp. modular) y L' es un subretículo de L, entonces L' es distributivo (resp. modular).

b) Si L es distributivo (resp. modular) entonces $f(L)$ es un subretículo distributivo (resp. modular) de S.

16. Justificar si los siguientes retículos son no-modulares, modulares pero no-distributivos, o distributivos.



17. Considerar el retículo $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^2), \subseteq)$ de subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^2$.

a) ¿Es $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^2), \subseteq)$ un subretículo de $(\mathcal{P}(\mathbb{R}^2), \subseteq)$?

b) Mostrar que $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^2), \subseteq)$ es un retículo modular no distributivo.

18. Sean L y L' dos retículos y sea $S = L \times L'$ con el orden producto. Probar que:

a) Si L y L' son acotados, S es acotado.

b) Si L y L' son complementados, S es complementado.

c) Si L y L' son distributivos, entonces S es distributivo.

d) Si L y L' son modulares, entonces S es modular.

19. Determinar si los retículos del ejercicio 1 son no-modulares, modulares pero no-distributivos, o distributivos.

20. Sean L y S dos álgebras de Boole.

a) ¿Qué condiciones debe cumplir un subretículo L' de L para que L' sea un álgebra de Boole?

b) Probar que $L \times S$ con el orden producto es un álgebra de Boole.