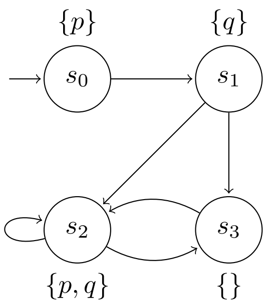
Práctica 7: Lógica Temporal

1. Sea $\mathcal{M}$ el siguiente sistema de transiciones:



Demuestre:

a) $\mathcal{M}, s_0 \models p$

b) $\mathcal{M}, s_0 \not\models q$

c) $\mathcal{M}, s_1 \models \exists \bigcirc p$

d) $\mathcal{M}, s_1 \not\models \forall \bigcirc p$

e) $\mathcal{M}, s_3 \models \forall \bigcirc p \wedge \forall \bigcirc q$

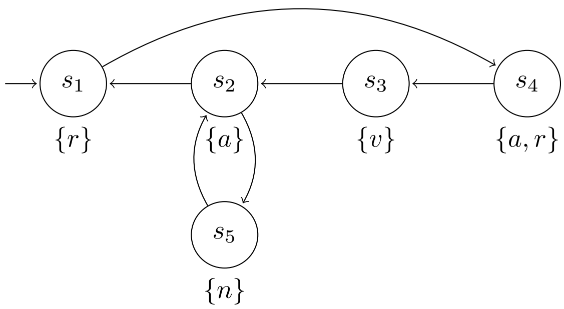
f) $\mathcal{M}, s_0 \models \forall[\top \, \mathbf{U} \, (p \wedge q)]$

g) $\mathcal{M}, s_0 \models \exists[(p \vee q) \, \mathbf{U} \, (\neg p \wedge \neg q)]$

h) $\mathcal{M}, s_0 \not\models \exists[p \, \mathbf{U} \, (\neg p \wedge \neg q)]$

2. Considere los operadores derivados $\forall\Box$ y $\exists\Diamond$. De forma similar a como se hizo en clase de teoría, defina una semántica para estos operadores en térmimos de trazas del sistema de transición.

3. Consideremos el sistema de transiciones para un semáforo visto en clase de teoría:



Determine el conjunto de estados que satisface cada fórmula:

a) $r \to \forall\bigcirc v$

b) $a \to \forall\bigcirc\forall\bigcirc a$

c) $\exists\Box\neg v$

d) $\forall\Diamond v$

e) $\forall\Diamond a$

f) $\forall\Box a$

g) $\forall\Box\forall\Diamond a$

h) $\forall(n\,\mathbf{U}\,\neg n)$

i) $\forall(\neg n\,\mathbf{U}\,n)$

j) $\exists(n\,\mathbf{U}\,r)$

k) $r \to \forall\Diamond v$

4. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son válidas?

a) $\models \phi \to \forall\Box\phi$

b) Si $\models \phi$ entonces $\models \forall\Box\phi$

c) $\models \exists\Box\phi \to \forall\Diamond\phi$

d) $\models \forall[\bot\,\mathbf{U}\,\phi] \to \phi$

5. Sean $\phi, \psi \in$ **CTL**. Decimos que ϕ es equivalente a ψ ($\phi \equiv \psi$) si y sólo si para todo sistema de transiciones $\mathcal{M}$ vale $\mathcal{M} \models \phi \iff \mathcal{M} \models \psi$.
Determine la veracidad de las siguientes afirmaciones, justificando su respuesta:

a) $\forall\bigcirc\phi \equiv \neg\exists\bigcirc\neg\phi$

b) $\forall\Diamond\phi \equiv \neg\exists\Box\neg\phi$

c) $\forall[\phi\,\mathbf{U}\,\psi] \equiv \psi \lor (\phi \land \forall\bigcirc\forall[\phi\,\mathbf{U}\,\psi])$

d) $\forall\Diamond\phi \lor \forall\Diamond\psi \equiv \forall\Diamond(\phi \lor \psi)$

e) $\forall\Box(\phi \land \psi) \equiv \forall\Box\phi \land \forall\Box\psi$

f) $\exists\Diamond(\phi \land \psi) \equiv \exists\Diamond\phi \land \exists\Diamond\psi$

6. Walter desconfía de la siguiente equivalencia usada en el paso 1 del algoritmo de verificación para **CTL**:

$$\forall[\phi\,\mathbf{U}\,\psi] = \neg(\exists[\neg\psi\,\mathbf{U}\,(\neg\phi \land \neg\psi)] \lor \exists\Box\neg\psi)$$

Además, Paula observa que la longitud de la nueva fórmula es mucho mayor que la anterior, pudiendo esto derivar en un mayor tiempo de ejecución para el programa.
Es por esto que ambos deciden calcular *directamente* el conjunto $\mathbf{Sat}(\forall[\psi_1\,\mathbf{U}\,\psi_2])$, siguiendo una idea similar a la vista en clase para los operadores $\forall\Diamond$ y $\exists\,\mathbf{U}$. Ayúdelos a hacerlo.

7. Las funciones *inev* y *ex-until* vistas en clase pueden reescribirse de la siguiente forma:

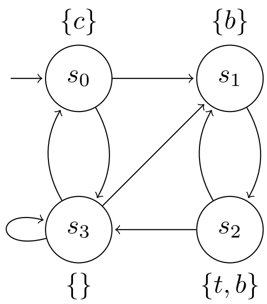
```
inev(Y)
  n ← 0;
  Yn ← Y;
  repeat
    n ← n + 1;
    Yn ← Yn-1 ∪ pre∀(Yn-1);
  until (Yn = Yn-1);
  return Yn;
```

```
ex-until(X, Y)
  n ← 0;
  Yn ← Y;
  repeat
    n ← n + 1;
    Yn ← Yn-1 ∪ (X ∩ pre∃(Yn-1));
  until (Yn = Yn-1);
  return Yn;
```

Considere el sistema de transiciones $\mathcal{M}$ que se muestra en la figura.

a) Sea $\phi = \exists[\neg c\,\mathbf{U}\,(b \wedge \neg t)]$. Calcule $\mathbf{Sat}(\phi)$ y decida si vale $\mathcal{M} \models \phi$.

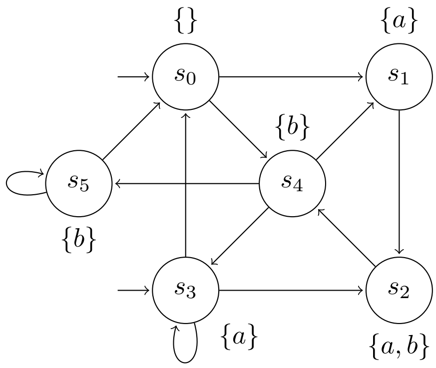
b) ¿Es cierto que $\mathcal{M}, s_0 \models \forall\Box(\neg c \rightarrow \forall\bigcirc b)$?



8. Considere el sistema de transiciones $\mathcal{M}$ que se muestra en la figura y las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= \exists\Box\forall\Diamond\neg b \\
\phi_2 &= \exists[\exists\bigcirc a\,\mathbf{U}\,\neg a] \\
\phi_3 &= \forall\bigcirc(\exists\Box\neg a \vee \exists\Box b)
\end{aligned}$$

Calcule $\mathbf{Sat}(\phi_i)$ y decida si vale $\mathcal{M} \models \phi_i$ $(1 \leq i \leq 3)$.



9. En clase de teoría vimos que:

- $\mathbf{Sat}(\neg\phi) = S - \mathbf{Sat}(\phi)$
- $\mathbf{Sat}(\phi \wedge \psi) = \mathbf{Sat}(\phi) \cap \mathbf{Sat}(\psi)$

Derive una expresión para $\mathbf{Sat}(\phi \rightarrow \psi)$ en función de $\mathbf{Sat}(\phi)$ y $\mathbf{Sat}(\psi)$.