Álgebra Lineal - LCC - LM - PM 2020

Práctica 3 (*cuarta parte*): ESPACIOS VECTORIALES

Ejercicios del 1. al 5., páginas 1 a 5, Capítulo 2 (cuarta parte)

1. Sea $\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base para un espacio vectorial V.
   a) Demostrar que $\mathcal{B}_2 = \{v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3\}$ también es una base.
   b) Hallar la matriz de cambio de base M de $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_1$.

2. Sean $\mathcal{B}_1 = \{(1, 3), (-2, -2)\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{(-12, 0), (-4, 4)\}$ dos bases de $\mathbb{R}^2$.
   a) Determinar la matriz de cambio de base M_1 de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$.
   b) Determinar la matriz de cambio de base M_2 de $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_1$.
   c) ¿Qué relación existe entre M_1 y M_2?
   d) Dado $x = (2, -1)$ en la base $\mathcal{B}_2$, determinar las coordenadas de x en la base $\mathcal{B}_1$.

3. Sea $V = \left\{ \sum_{i=0}^{2} a_i x^i \ / \ a_i \in \mathbb{R} \right\}$ y $\mathcal{B}_1 = \{1, x, x^2\}$ base estándar de V.
   a) Probar que $\mathcal{B}_2 = \{x - 1, 1, (x - 1)^2\}$ es otra base de V.
   b) Hallar la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$.
   c) Utilizar lo obtenido en el ítem anterior y determinar la coordenadas de p en la base $\mathcal{B}_2$ siendo $p(x) = 2x^2 - 5x + 6$. ¿Cuáles son las coordenadas de p en la base $\{1, (x - 1)^2, x - 1\}$?

4. Hallar la matriz de cambio de base de:
   a) la base estándar de $\mathbb{R}^{2\times 2}$, $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$, a la base $\mathcal{B}' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \right\}$.
   Determinar las coordenadas de A en la base $\mathcal{B}'$ para $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ una matriz cualquiera.
   b) la base $\{1, x, -1 + 2x^2, -3x + 4x^3\}$ de $\mathbb{R}_3[x]$ a la base $\{1, -\frac{1}{2} + x, -x + x^2, \frac{1}{4} - \frac{3}{2}x^2 + x^3\}$.

5. Sea $\mathcal{B} = \{(1, 0), (0, 1)\}$ la base estándar de $\mathbb{R}^2$ y $A = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$. ¿Existe una base $\mathcal{B}'$ tal que A es la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$? De existir, hallar dicha base.

Ejercicios del 6. al 8., páginas 6 a 11, Capítulo 2 (cuarta parte), para el ejercicio 7. repasar Capítulo 2 (tercera parte)

6. Encontrar una inversa a izquierda y/o una inversa a derecha (cuando existan) para las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad T = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}.$$

7. Sea A una matriz de tamaño $m \times n$ y supongamos que las columnas de A son linealmente independietes.
   a) ¿Cuál es el rango de A?
   b) ¿Cuál es el espacio nulo de A?
   c) ¿Se puede asegurar la existencia de inversa a izquierda o derecha de A?

8. Supongamos que A tiene una inversa a derecha B. Así,

$$\begin{aligned} AB &= I \\ A^T AB &= A^T \\ B &= (A^T A)^{-1} A^T \\ BA &= (A^T A)^{-1}(A^T A) = I \end{aligned}$$

Entonces se satisface que $BA = I$, es decir, B es una inversa a izquierda de A. ¿Qué paso no está justificado?

Ejercicios del 9. al 11., páginas 12 a 26, Capítulo 2 (cuarta parte)

9. Para cada una de las siguientes funciones $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ determinar si se trata de una transformación lineal y en caso afirmativo: obtener $nul(T)$ y $rec(T)$, calcular su dimensión y determinar si T es inversible.

   a) $T((x,y))=(y,x)$.
   b) $T((x,y))=(x^2,y^2)$.
   c) $T((x,y))=(x,-y)$.
   d) $T((x,y))=(x,0)$.

   Observación:
   $nul(T)=\{x\in dom(T)\colon T(x)=0\}$
   $rec(T)=\{y\in codom(T)\colon T(x)=y$ para algún $x\in dom(T)\}$

10. Sean V y W espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$ y $\mathcal{L}(V,W)=\{T:V\to W: T\,transformación\,lineal\}$. Probar que para $T_1,T_2\in\mathcal{L}(V,W)$:

    a) $\{v\in V: T_1(v)=T_2(v)\}\underset{s.e.}{\subset} V$.
    b) Si $V=\langle U\rangle$ y $T_1(u)=T_2(u),\forall u\in U$, entonces $T_1(v)=T_2(v),\forall v\in V$.

11. Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita y $T\in\mathcal{L}(V,W)$. Probar que:

    a) Si T inyectiva, entonces T transforma conjuntos $l.i.$ de V en conjuntos $l.i.$ de W.
    b) Si T sobreyectiva, entonces T transforma conjuntos generadores de V en conjuntos generadores de W.
    c) T isomorfismo si y solo si T transforma bases de V en bases de W.

Ejercicios 12. y 13., páginas 12 a 31, Capítulo 2 (cuarta parte)

12. Consideramos la transformación lineal T definida por:

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathbb{R}^{2\times 2} & \to & \mathbb{R}_3[x] \\ & \begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix} & \mapsto & T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}\right)=2dx^3+(a+b)x^2+(a-c)x+2(c+d). \end{array}$$

    a) Probar que T es lineal.
    b) Hallar una base para $nul(T)$ y una para $rec(T)$.
    c) Determinar si T es un isomorfismo.

13. Sea $T_w:\mathbb{C}\to\mathbb{C}/\ T_w(z)=z+w\bar{z}$, donde $w=a+ib$ para $a,\ b\in\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ son los números complejos vistos como un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

    a) Considerar $w=1+i$ y calcular $T_w(2+3i)$.
    b) Comprobar que T_w es una transformación lineal entre espacios vectoriales.
    c) Si $B=\{1,i\}$ es base de $\mathbb{C}$, hallar la matriz de T_w en dicha base.
    d) Probar que T_w es isomorfismo si y sólo si $a^2+b^2\neq 1$.

Ejercicios 14. a 21., páginas 27 a 31, Capítulo 2 (cuarta parte), en algunos se utilizan los conceptos vistos en las páginas 1 a 5

14. Sea $V=\mathbb{R}^n$, fijamos la base canónica $\mathcal{B}=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$. Para cada $T_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ hallar A_i tal que $A_ix=T_i(x),\forall x\in\mathbb{R}^n,i=1,\cdots,4$.

    a) $T_1(x)=x,\forall x\in\mathbb{R}^n$.
    b) $T_2(x)=0,\forall x\in\mathbb{R}^n$.
    c) $T_3(x)=c\cdot x,c\in\mathbb{R},\forall x\in\mathbb{R}^n$.

d) Sean p, q enteros distintos entre 1 y n inclusives,

$$T_4(x) = y, \text{ donde } y = (y_k)_{k=1}^n \text{ con } y_k = \begin{cases} x_k & \text{para } k \neq p, \quad k \neq q \\ x_p & \text{para } k = q \\ x_q & \text{para } k = p \end{cases}$$

15. Sea $T : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ tal que $T(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) = a_0 + a_1(x+1) + \cdots + a_n(x+1)^n$. Probar que T es isomorfismo.

16. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ transformación lineal tal que

$$T((0,0,1)) = (2,3,5), \qquad T((0,1,1)) = (1,0,0), \qquad T((1,1,1)) = (0,1,-1).$$

   a) Probar que con esta información es posible obtener $T(v), \forall v \in \mathbb{R}^3$.

   b) Determinar, fijada la base canónica en $\mathbb{R}^3$, la matriz de T.

   c) Utilizando el item anterior, obtener $\dim(nul(T))$ y $rg(T) = \dim(rec(T))$.

   d) Determinar si T es inversible.

17. Determinar, si existe, una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ que verifique: $T((1,-1,1)) = (1,0)$ y $T((1,1,1)) = (0,1)$.

18. Sea V el espacio vectorial de los números complejos y $\mathbb{K}$ el cuerpo de los números reales. Con las operaciones usuales, V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Describir explícitamente un isomorfismo de este espacio con $\mathbb{R}^2$.

19. Mostrar que $\mathbb{K}^{m \times n}$ es isomorfo a $\mathbb{K}^{mn}$.

20. Sean V y W dos espacios vectoriales de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$. Probar que V y W son isomorfos si y sólo si $\dim V = \dim W$.

21. Sea T la transformación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ definida por

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, 2x_3 - x_1).$$

   a) Si $\mathcal{B}$ es la base ordenada estándar de $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{B}'$ es la base ordenada estándar para $\mathbb{R}^2$, determinar la matriz de T relativa al par $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$.

   b) Si $\mathcal{B} = \{(1,0,-1), (1,1,1), (1,0,0)\}$ y $\mathcal{B}' = \{(0,1), (1,0)\}$ ¿Cuál es la matriz de T relativa a al par $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$?

Ejercicio 22., páginas 27 a 36, Capítulo 2 (cuarta parte)

22. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$ y $S, T \in \mathcal{L}(V)$. Probar que, $T \circ S$ es inversible si y solo si S y T son inversibles.

Ejercicios 23. a 26., páginas 27 a 36, Capítulo 2 (cuarta parte) y apunte de Transformaciones Particulares

23. *a*) Encontrar la matriz asociada a la transformación lineal que resulta de la composición de las transformaciones lineales que representan la rotación de un vector en un ángulo de $90°$ y la proyección sobre el eje x (en ese orden).

   b) Hallar la matriz que representa la proyección de un vector sobre el *eje* x seguida de la proyección de un vector sobre el *eje* y.

24. La matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

   produce una transformación llamada *esfuerzo constante*, que deja fijo al *eje* y. Hacer un bosquejo para indicar qué ocurre cuando se aplica dicha transformación a los vectores $(1,0)$, $(2,0)$ y $(-1,0)$. ¿Cómo se transforma el *eje* x?

25. *a*) Encontrar la *matriz de permutación cíclica* A de tamaño 4×4 que transforma el vector (x_1, x_2, x_3, x_4) en (x_2, x_3, x_4, x_1).

   b) ¿Cuál es la transformación asociada a A^2?

c) Demostrar que $A^3 = A^{-1}$.

26. *a*) Encontrar la matriz A de tamaño 4×3 que representa el *desplazamiento derecho* que transforma (x_1, x_2, x_3) en $(0, x_1, x_2, x_3)$.

    b) Calcular la matriz B de tamaño 3×4 que representa el *desplazamiento izquierdo* que transforma (x_1, x_2, x_3, x_4) en (x_2, x_3, x_4).

    c) ¿Cuáles son los productos AB y BA?

EJERCICIOS ADICIONALES

1. *a*) Dado $x = (-26, 32) \in \mathbb{R}^2$ en la base estándar. Encontrar la representación de $x \in \mathbb{R}^2$ en la base $\beta' = \{(-6, 7), (4, -3)\}$.

   b) Dado $x = (0, -20, 7, 15) \in \mathbb{R}^4$ en la base estándar. Encontrar la representación de $x \in \mathbb{R}^4$ en la base $\beta' = \{(9, -3, 15, 4), (3, 0, 0, 1), (0, -5, 6, 8), (3, -4, 2, -3)\}$.

2. Determinar la matriz de cambio de base de $\beta = \{(1, 3, 2), (2, -1, 2), (5, 6, 1)\}$ a $\beta' = \{e_1, e_2, e_3\}$.

3. Consideremos la base canónica de $V = \mathbb{R}^2$ dada por $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ y la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que aplica los vectores e_1 y e_2 como sigue:

   $$T(e_1) = e_1 + e_2, \qquad\qquad T(e_2) = 2 \cdot e_1 - e_2.$$

   Obtener:

   a) $T(3 \cdot e_1 - 4 \cdot e_2)$ y $T^2(3 \cdot e_1 - 4 \cdot e_2)$,

   b) las matrices asociadas a T y T^2 en la base $\mathcal{B}$,

   c) $T(v), \forall v \in V$.

4. Sean $T_{1,2} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T_1((x, y, z)) = (x, y, 0)$ y $T_2((x, y, z)) = (x, y, y)$. Hallar $T_1 \circ T_2$ y $T_2 \circ T_1$. Analizar si son epimorfismos, monomorfismos, isomorfismos o ninguna de ellas.

5. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(v) = (x + y, x + z, \alpha(v))$, donde $v = (x, y, z)$ y $\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Determinar, si es posible, α de modo que T resulte lineal.

6. Una matriz $n \times n$, $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ con entradas en $\mathbb{C}$ tal que $A = \overline{A}^t$, i.e. $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$, para todos $i, j = 1, \cdots, n$, se dice *Hermitiana*.

   Sea W el conjunto de todas las matrices Hermitianas 2×2.

   a) Verificar que W es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

   b) Verificar que la aplicación

   $$(x, y, z, t) \mapsto \begin{bmatrix} t + x & y + iz \\ y - iz & t - x \end{bmatrix}$$

   es un isomorfismo de $\mathbb{R}^4$ en W.