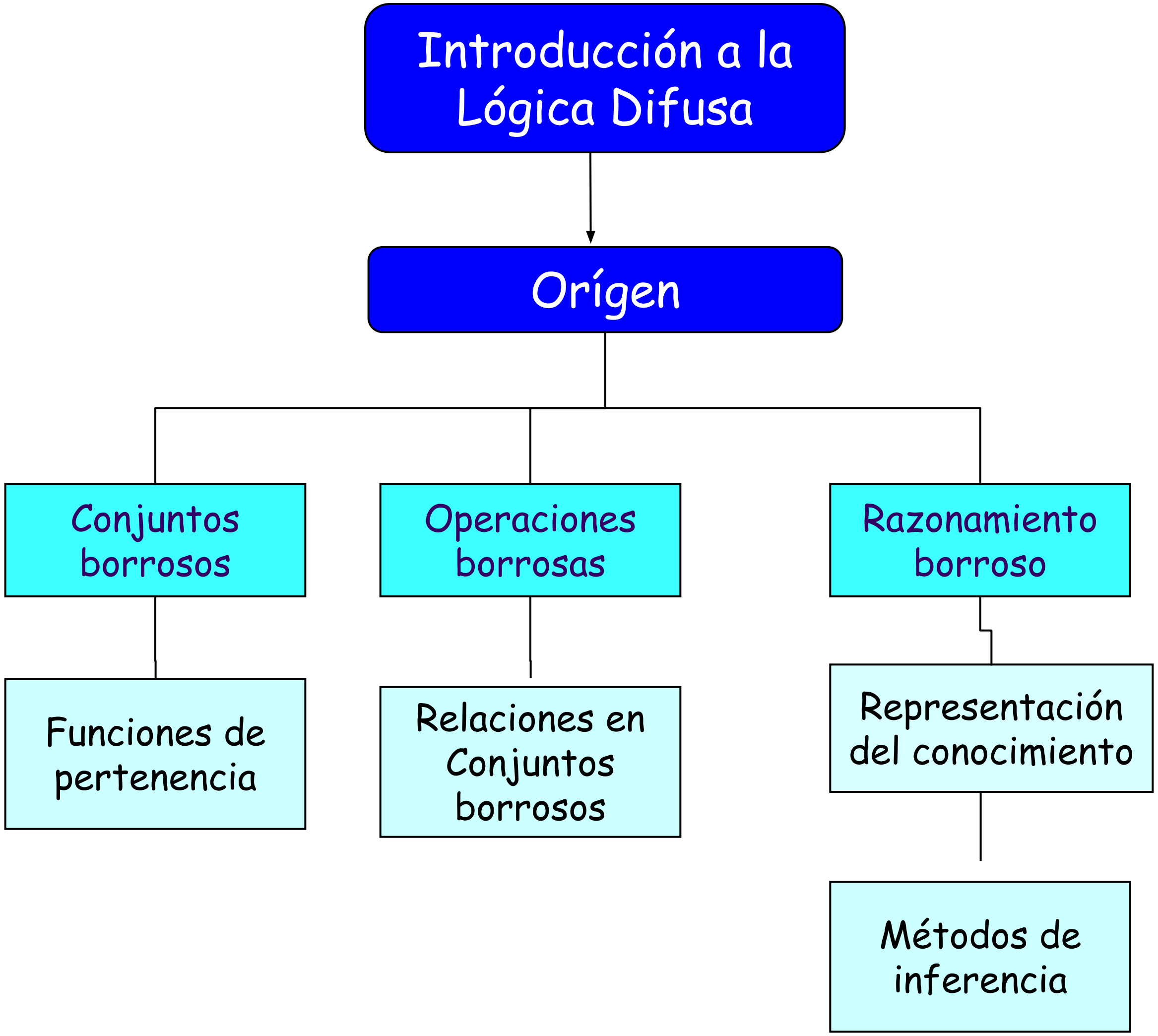
Sistemas Borrosos o Difusos (Fuzzy Systems)

Introducción a la Inteligencia Artificial

(slides: Pilar Bulacio)

Contenido

- Introducción
- Conjuntos borrosos
- Operaciones con conjuntos borrosos
- Razonamiento borroso
  - Representación del conocimiento
  - Métodos de inferencia
  - Fuzzificadores-Defuzzificadores


Introducción a la Lógica Difusa
Orígen
Conjuntos borrosos
Operaciones borrosas
Razonamiento borroso
Funciones de pertenencia
Relaciones en Conjuntos borrosos
Representación del conocimiento
Métodos de inferencia

Historia de FL

Lofty Zadeh (1921-2017) es el padre del término “fuzzy”, en 1965 publica “Fuzzy Sets” en la revista *Information and Control*.

La intención de Zadeh era crear un formalismo para manejar de forma más eficiente la imprecisión del razonamiento humano.

Fuzzy Logic (FL)

Es una rama de AI que permite trabajar con **razonamientos imprecisos** partiendo de conocimiento impreciso que se representa mediante **conjuntos borrosos (fuzzy sets)**.

- Lógicas multivaluadas

Conjuntos clásicos

A subconjunto de X se define por una *función de pertenencia* $f_A(x)$ que asocia a cada elemento de X un número real en $\{0, 1\}$, donde el valor $f_A(x)$ representa la pertenencia de x en A".

- *Si* $f_A(x) = 1,\ x \in A$
- *Si* $f_A(x) = 0,\ x \notin A$

Conjuntos borrosos

Definición Formal: Sea X un espacio de objetos, un ***conjunto borroso*** A en X se caracteriza por una *función de pertenencia* $f_A(x)$ que asocia a cada elemento de X un número real en **[0; 1]**, donde el valor $f_A(x)$ representa el "**grado de pertenencia** de x en A".

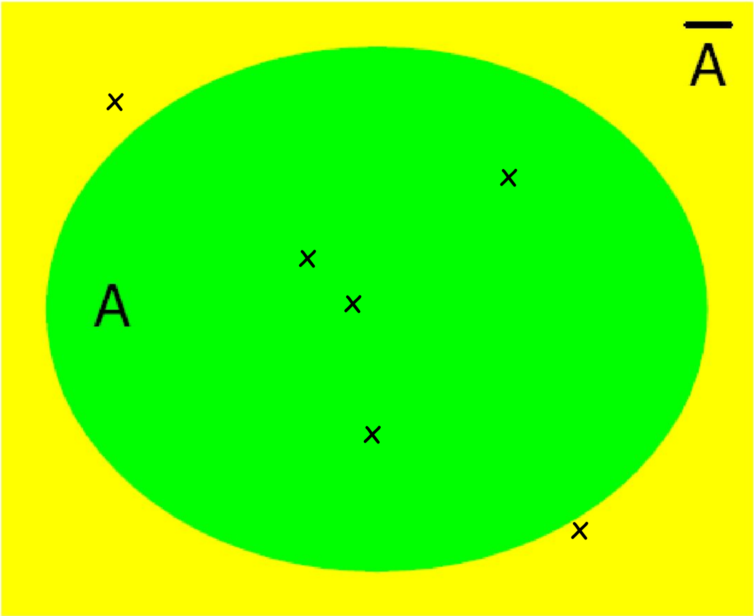
$$A = \{x, f_A(x)\}$$

Ej: A = (a_1/x_1, a_2/x_2.....a_n/ x_n) considerando el conjunto difuso *alta* asociado a la variable lingüística *estatura:*

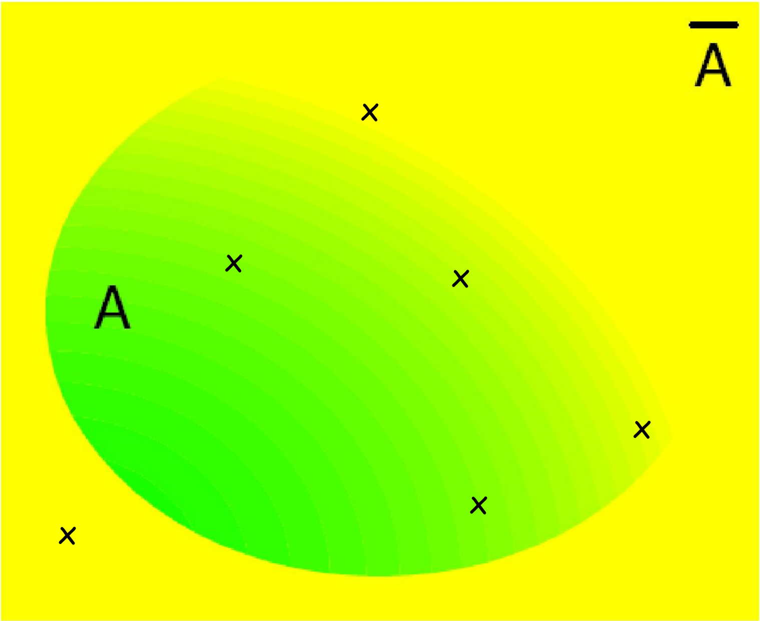
ALTA = (0/1.65, 0.8/1.75, 0.9/1.85, 1/1.95)

Tipos de conjuntos

Clásico



Borrosos

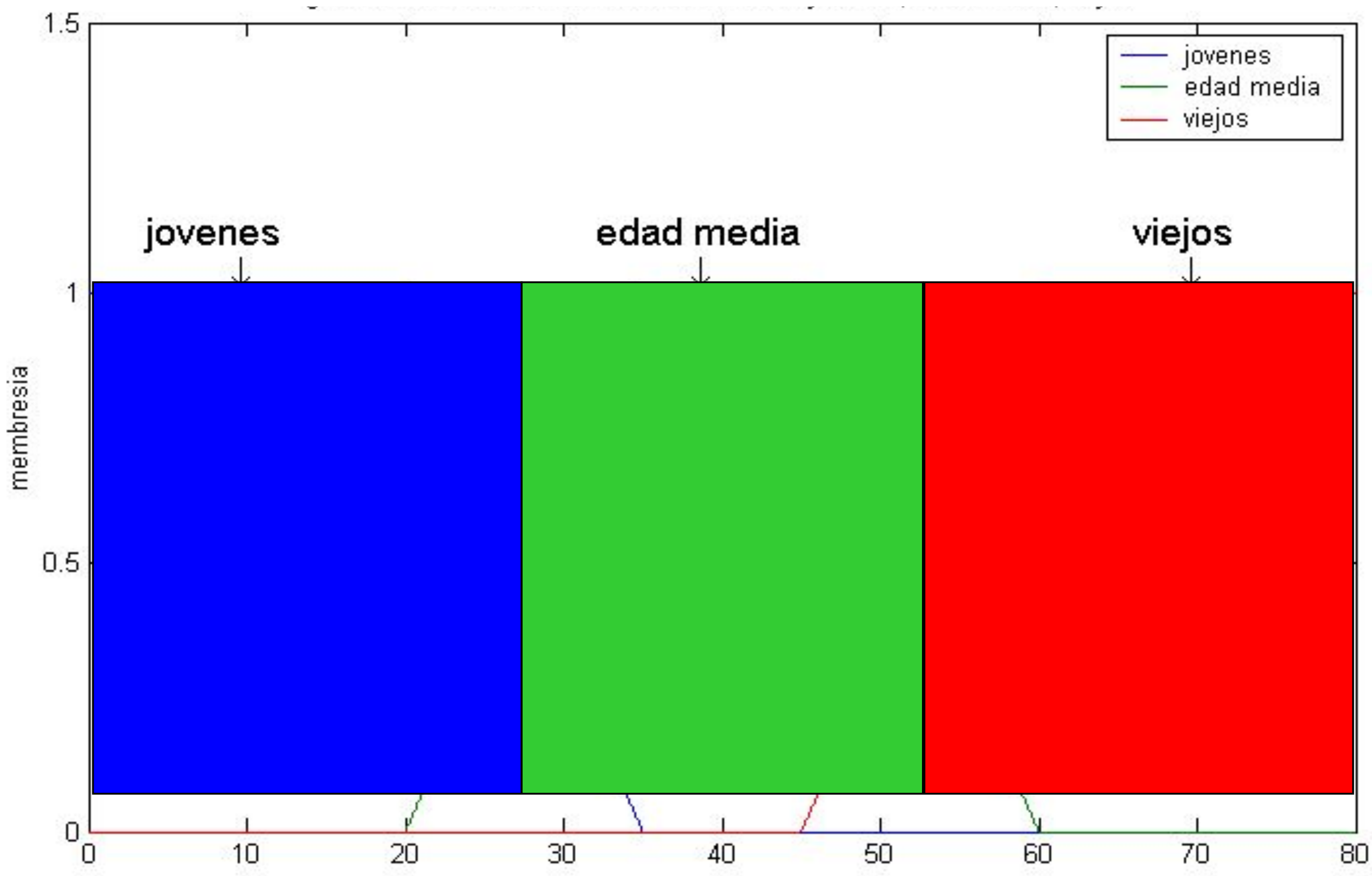


Ej. de conjuntos borrosos

- Conjunto de hombres jóvenes
- Conjunto de hombres de edad media
- Conjunto de hombres viejos

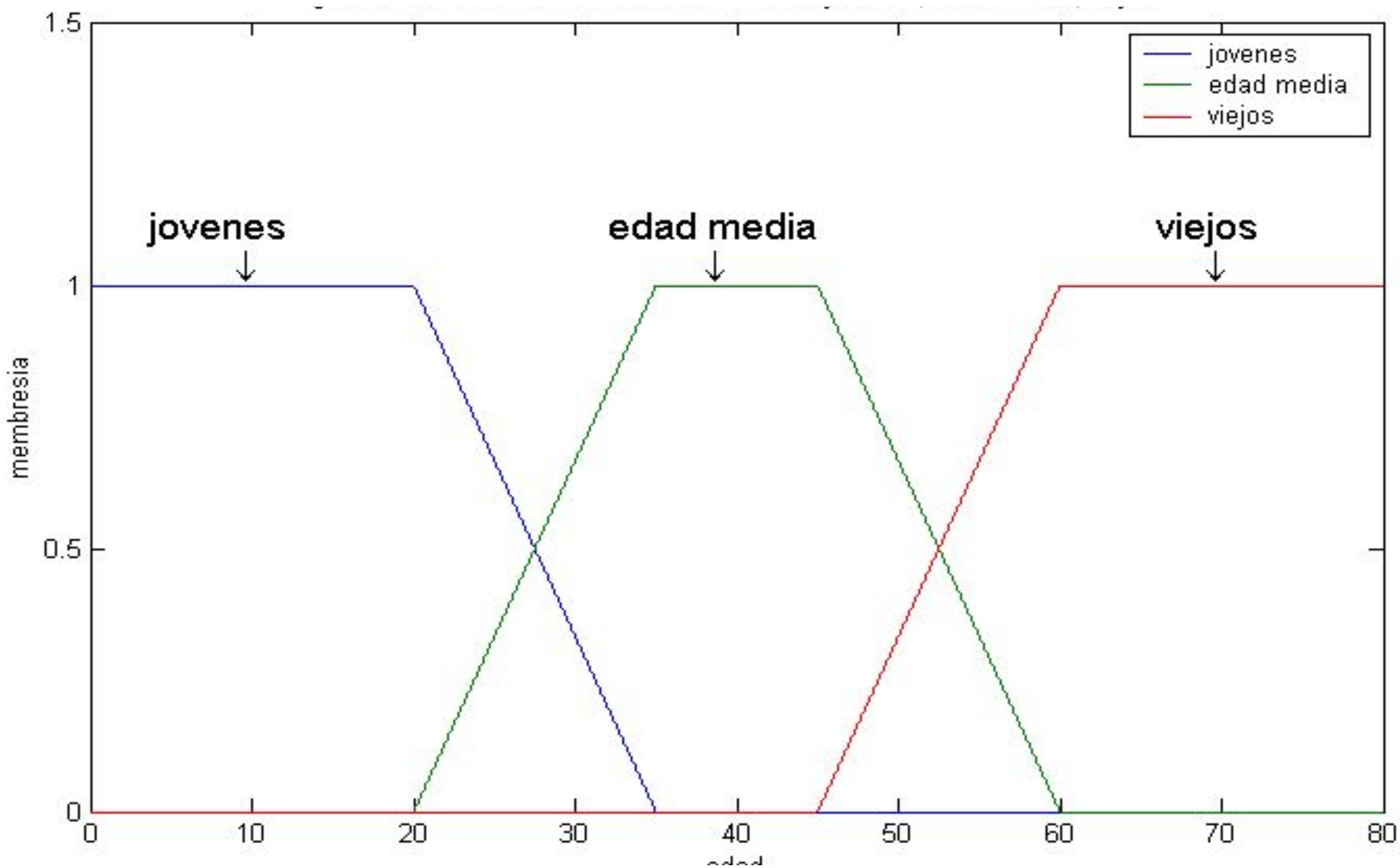
Cómo se definen los conjuntos?
Cuáles son los límites?
Son estrictos?

Ej. de conjuntos clásicos



Ej. de conjuntos borrosos

Definición de las funciones de pertenencia



Funciones de Pertenencia

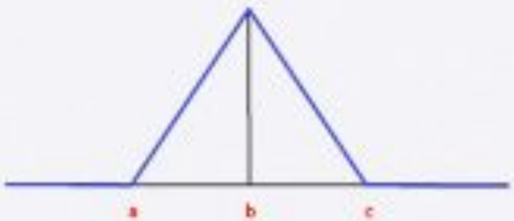
- La "membership function" mapea cada elemento del conjunto borroso a un **valor de pertenencia**

$f_A: X \text{ -> } [0,1];$

X es el espacio de entrada o universo del discurso

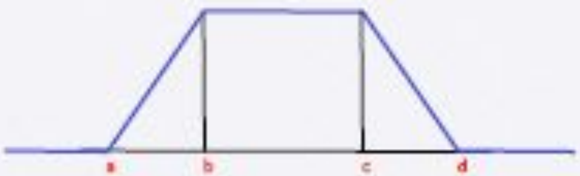
Tipos de fs de pertenencia

- Triangular



$$f(x;a,b,c)=\begin{cases}0 & x<a\\ \frac{x-a}{b-a} & a\le x<b\\ \frac{c-x}{c-b} & a\le x<b\\ 0 & x\ge c\end{cases}$$

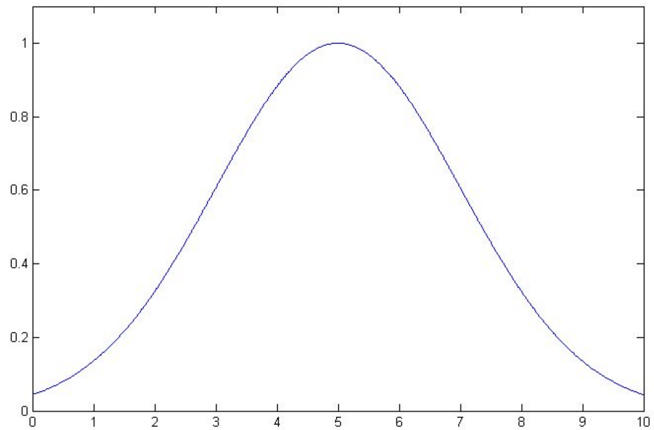
- Trapezoidal



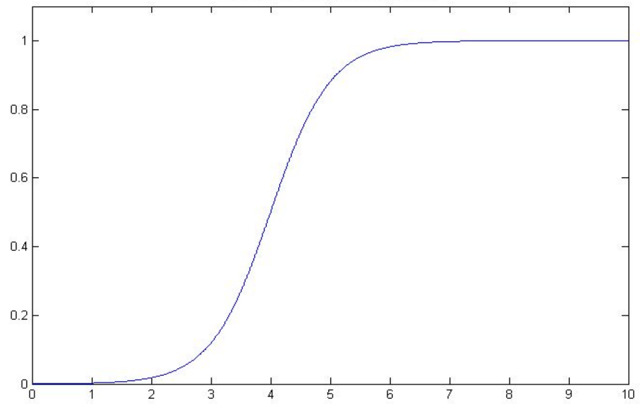
$$f(x;a,b,c,d)=\begin{cases}0 & x<a\\ \frac{x-a}{b-a} & a\le x<b\\ 1 & b\le x<c\\ \frac{d-x}{d-c} & c\le x<d\\ 0 & x\ge d\end{cases}$$

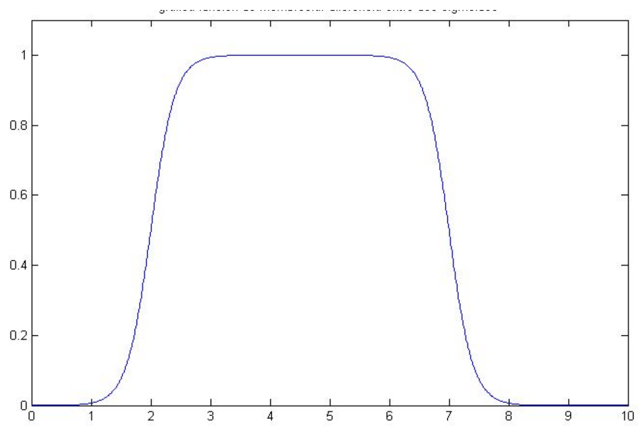
Tipos de fs de pertenencia

Gaussiana



Sigmoides





Fs de pertenencia: obtención

1. **Evaluación subjetiva:** individuos asignan un grado de pertenencia subjetivo a cada elemento
2. **Frecuencias o probabilidades:** estadísticas basadas en histogramas o el porcentaje de respuestas afirmativas y negativas sobre la pertenencia de un elemento al conjunto.
3. **Funciones *ad-hoc*:** en los sistemas borrosos de control se suele utilizar funciones de pertenencia sencillas (triangulares o trapezoidales).
    - Ajustes mediante experimentación

Propiedades en conjuntos borrosos

- **Normalidad:** *A* está normalizado si su supremo es 1:

$$Sup\ f_A(x) = 1, \text{ para todo } x \text{ in } X$$

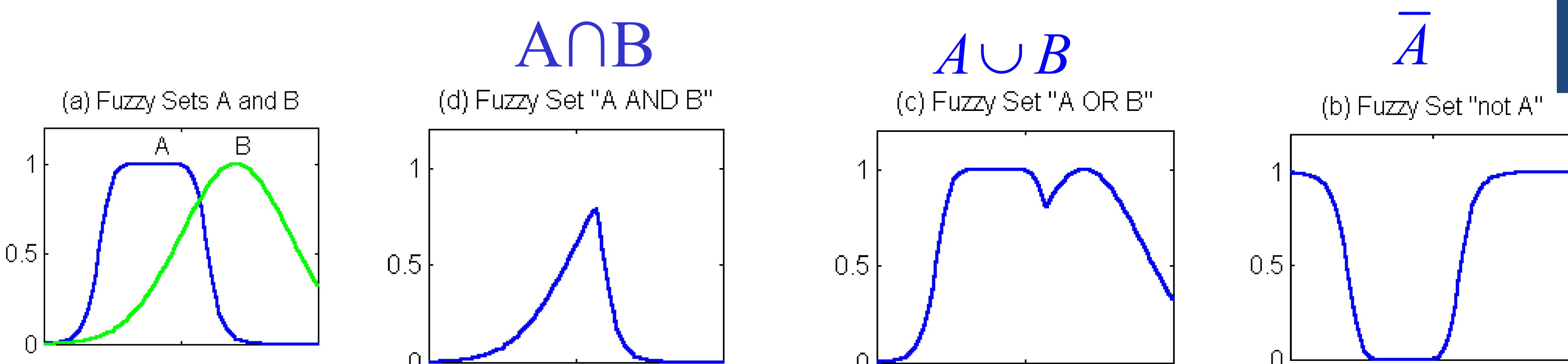
- **Igualdad,** $A = B \Leftrightarrow f_A(x) = f_B(x); \forall\ x \in X$

- **Inclusión,** $A \subseteq B \Leftrightarrow f_A(x) \leq f_B(x); \forall\ x \in X$

Operaciones con conjuntos borrosos

Operaciones básicas con conjuntos borrosos

- Unión, $f_{A \cup B}(x) = \max\{f_A(x), f_B(x)\}$
- Intersección, $f_{A \cap B}(x) = \min\{f_A(x), f_B(x)\}$
- Complemento, $f_{\bar{A}}(x) = 1 - f_A(x)$



Complementos, T-normas y T-conormas

- Las operaciones básicas no son únicas.
- En las lógicas multivaluadas se han estudiado y definido distintas formas de:
  - complementos (C),
  - intersecciones (T-normas) y
  - uniones (T-conormas)

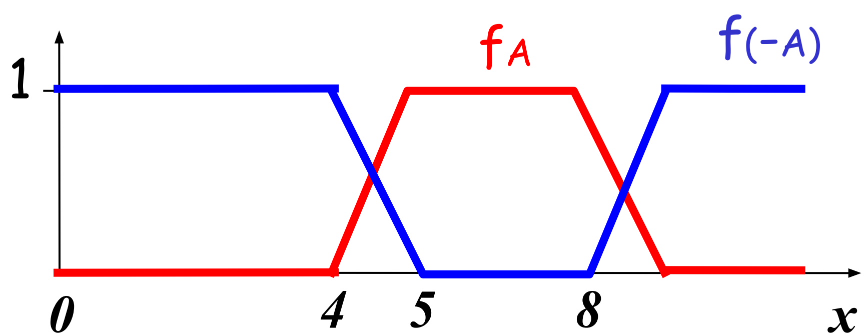
Operadores genéricos: Complemento

- Dado un conjunto borroso $A=\{x, f_A(x)\}$, el $N(A)$ se interpreta como el **grado** en que x no pertenece a A

$$\textbf{Comp} = N : [0,1] \rightarrow [0,1]$$

- **Frontera** $N(0)=1$ y $N(1)=0$
- **Monotonía** $N(a) \geq N(b)$ if $a \leq b$
- **Involución** $N[N(a)] = a$

$$f_{\bar{A}}(x)=1-f_A(x)$$



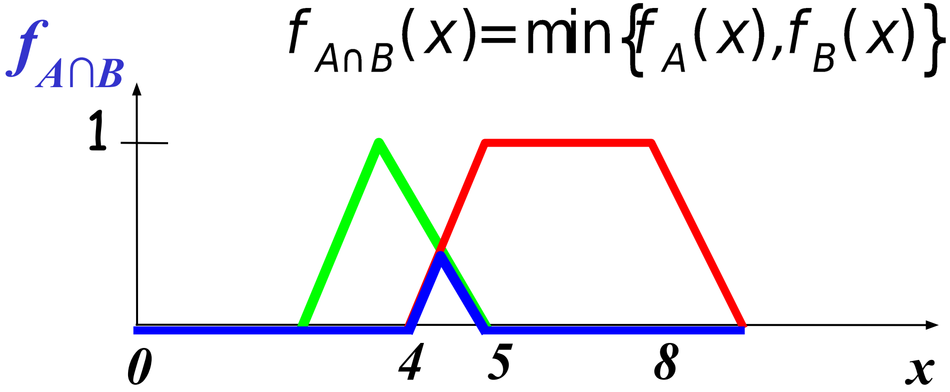
Operadores genéricos: T-normas

Intersection of fuzzy sets *A* and *B*:

$$f_{A\cap B}(x) = T(f_A(x), f_B(x))$$

- **Commutativity:** $T(a, b) = T(b, a)$
- **Associativity:** $T(a, T(b, c)) = T(T(a, b), c)$
- **Boundary:** $T(a, 0) = 0, \; T(a, 1) = a$
- **Monotonicity:** $T(a, b) \leq T(a, c)$ if $b \leq c$

$$f_{A\cap B}(x) = \min\{f_A(x), f_B(x)\}$$



Ej. T-normas

- **Intersección estándar:** $\mathrm{Min}(a,b) = \min(a,b)$
- **Producto algebraico:** $\mathrm{Prod}(a,b) = a \cdot b$
- **Diferencia acotada:** $W(a,b) = \max(0, a+b-1)$
  Lukasiewicz
- **Intersección drástica:**

$$Z(a,b) \begin{cases} a, \text{ si } b=1; \\ b, \text{ si } a=1; \\ 0 \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

$$Z \leq W \leq Prod \leq Min$$

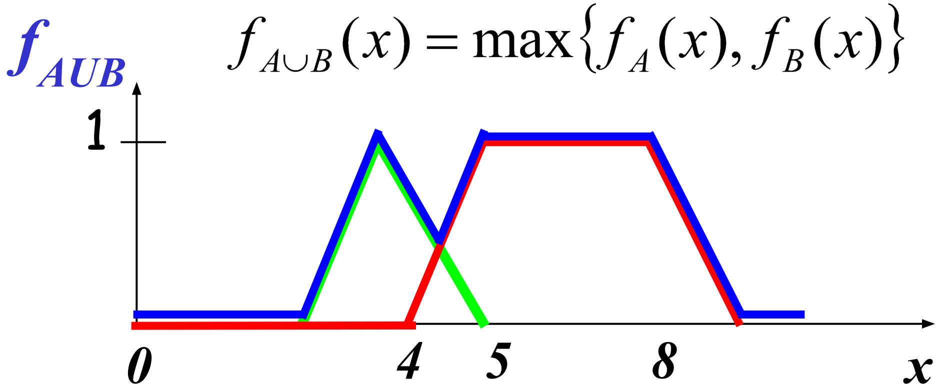
Operadores genéricos: T-conormas

Union of fuzzy sets *A* and *B*

$f_{AUB}(x) = S(f_A(x), f_B(x))$; ***T*-conorm or S-norm**

- **Commutativity:** $S(a, b) = S(b, a)$
- **Associativity:** $S(a, S(b, c)) = S(S(a, b), c)$
- **Boundary:** $S(a, 1) = 1, S(a, 0) = a$
- **Monotonicity:** $S(a, b) \leq S(a, c)$ if $b \leq c$

$$f_{A\cup B}(x) = \max\{f_A(x), f_B(x)\}$$



Ej. T-conormas

- **Unión estándar:** $\mathrm{Max}(a;\, b) = \max(a;\, b)$
- **Suma algebraica:** $\mathrm{Prod}^*(a;\, b) = a + b - a.b$
- **Suma acotada:** $W^*(a;\, b) = \min(1; a + b)$
  dual de Lukasiewicz
- **Unión drástica:**

$$Z^*(a,b) = \begin{cases} a, \text{ si } b=0; \\ b, \text{ si } a=0; \\ 1 \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

$$\mathrm{Max} \leq \mathrm{Prod}^* \leq W^* \leq Z^*$$

Prop. de operaciones borrosas

Involución	$\overline{\overline{A}} = A$	
Commutativa	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Asociativa	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Distributiva	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$(A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
Idempotencia	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
Absorción	$A \cup (A \cap B) = A$	$(A \cap (A \cup B) = A$
Leyes de De Morgan	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Prop. de operaciones borrosas

- Prop. en gral inválidas por abandonar el concepto estricto de pertenencia: un elemento puede pertenecer a un conjunto y a su complemento.
  - Ley de la contradicción
    $$A \cap \overline{A} = \emptyset$$
  - Ley de exclusión media
    $$A \cup \overline{A} = U$$

Prop. de operaciones borrosas

- Todo lo realizado en conjuntos borrosos se puede trasladar a la lógica borrosa
  - Intersección And (conjunción)
  - Unión Or (disyunción)
  - Complemento negación (not)

Ejemplo- Supongamos que:

- Una persona desea ir a tomar una cerveza que sea **barata**,
- en un local **tradicional**,
- y que el local quede **cerca** de su casa

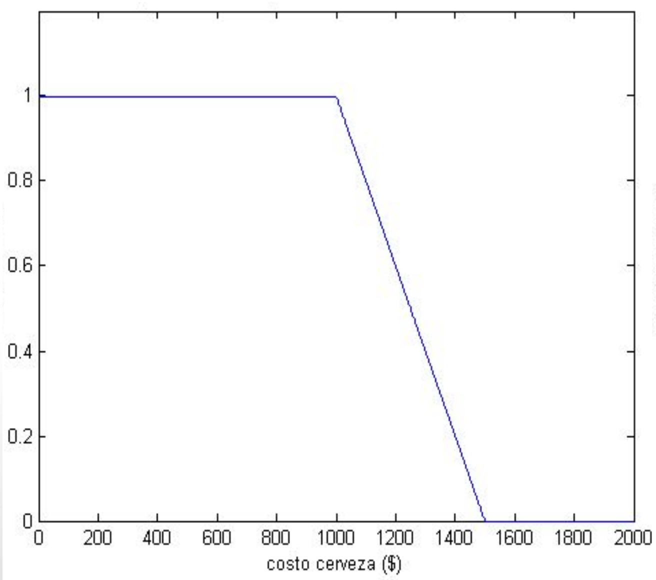
El dispone de 4 lugares conocidos

Podemos distinguir tres conjuntos difusos

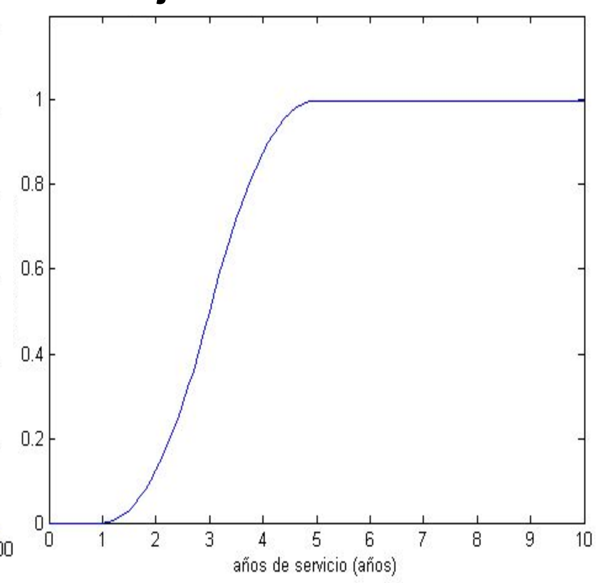
1) Cerveza barata
2) Local tradicional
3) Cercanía a su hogar

- Una **cerveza barata** es una que cueste alrededor de $1000 o menos
- Un **local tradicional** es un local que al menos tenga 5 años funcionando.
- Que **quede cerca** de su casa es que no quede a más de 10 cuadras

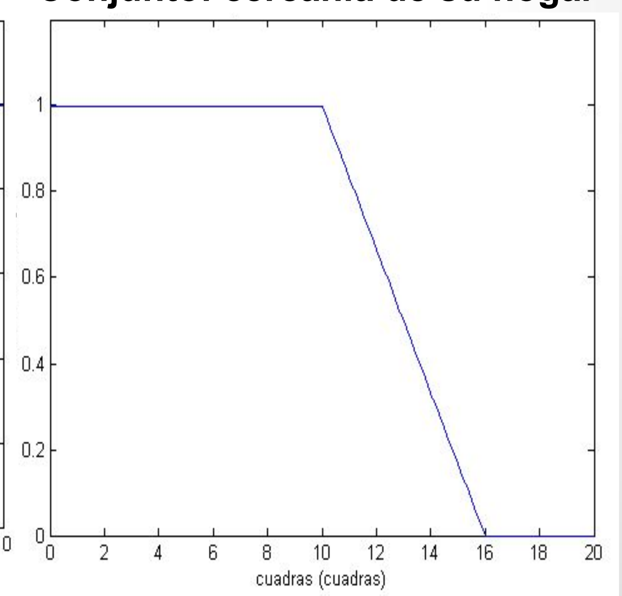
Conjunto: cerveza barata



Conjunto: local tradicional



Conjunto: cercanía de su hogar



Características de los locales

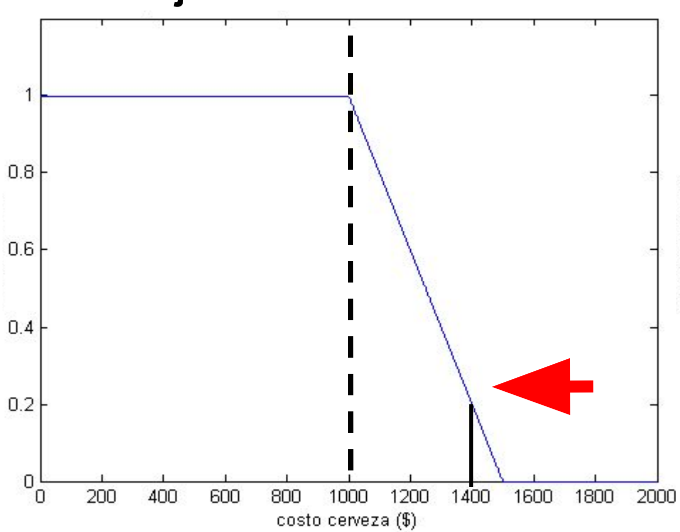
	Precio Cerveza ($)	Años de servicio (años)	Cuadras
Local 1	1400	3	3
Local 2	800	7	12
Local 3	1000	4	9
Local 4	1250	5	10

	Precio Cerveza ($)	**Años de servicio**	**Cuadras**	**Solución clásica**
Local 1	0	0	1	
Local 2				
Local 3				
Local 4				

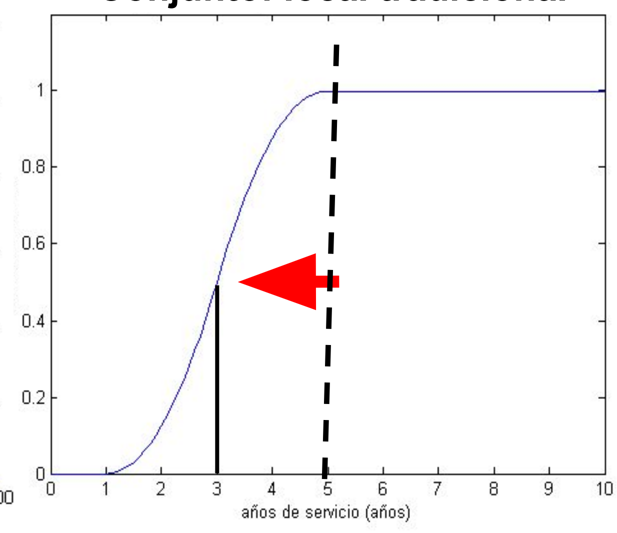
	Precio Cerveza ($)	**Años de servicio**	**Cuadras**	**Solución difusa**
Local 1	0,2	0,5	1	
Local 2				
Local 3				
Local 4				

T-norm

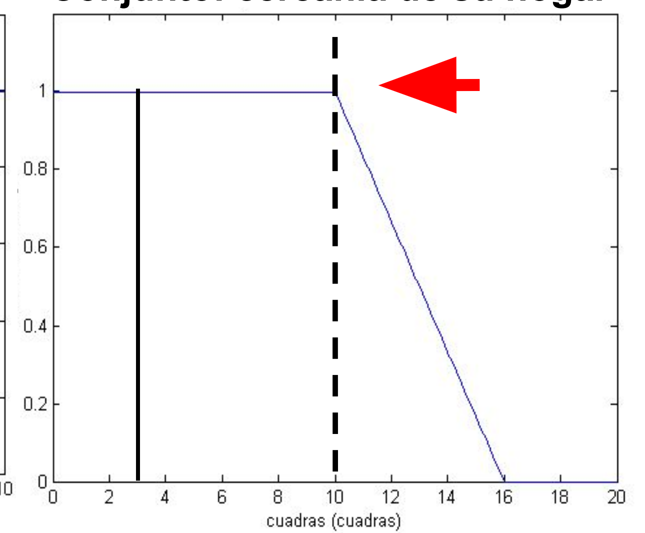
Conjunto: cerveza barata



Conjunto: local tradicional



Conjunto: cercanía de su hogar



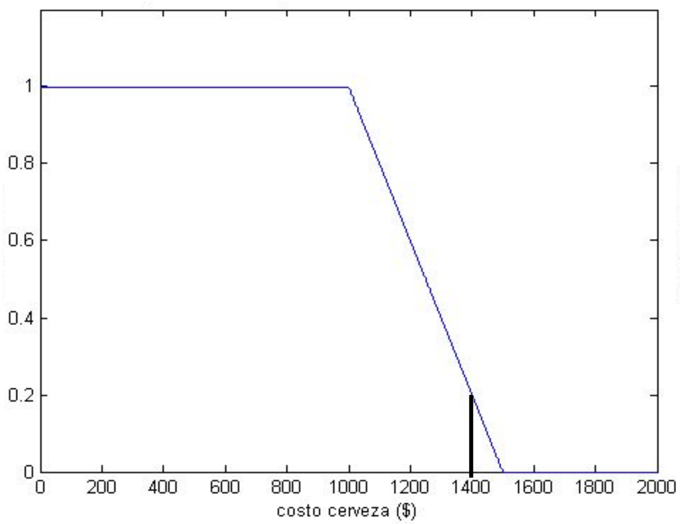
Características de los locales

	Precio Cerveza ($)	Años de servicio (años)	Cuadras
Local 1	1400	3	3
Local 2	800	7	12
Local 3	1000	4	9
Local 4	1250	5	10

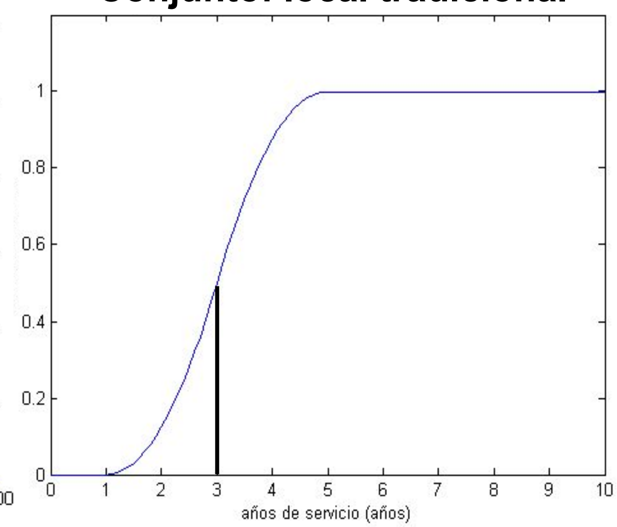
	Precio Cerveza ($)	**Años de servicio**	**Cuadras**	**Solución clásica**
Local 1	0	0	1	
Local 2	1	1	0	
Local 3	1	0	1	
Local 4	0	1	1	

	Precio Cerveza ($)	**Años de servicio**	**Cuadras**	**Solución difusa**
Local 1	0,2	0,5	1	
Local 2	1	1	0,6667	
Local 3	1	0,875	1	
Local 4	0,5	1	1	

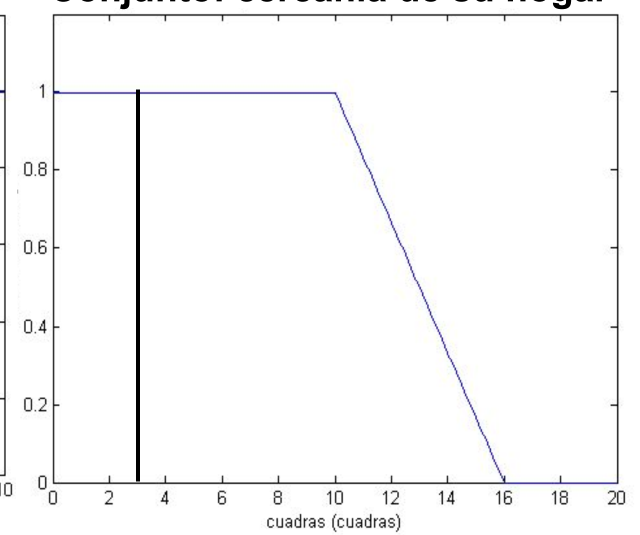
Conjunto: cerveza barata



Conjunto: local tradicional



Conjunto: cercanía de su hogar



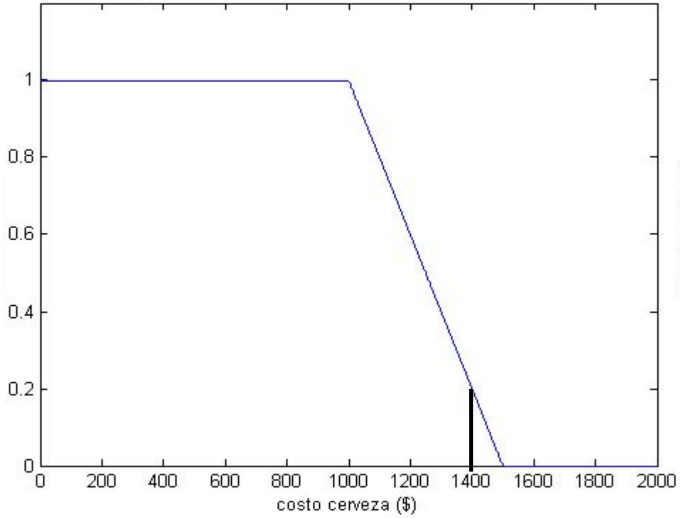
	Precio Cerveza ($)	Años de servicio (años)	Cuadras
Local 1	1400	3	3
Local 2	800	7	12
Local 3	1000	4	9
Local 4	1250	5	10

	Precio Cerveza ($)	**Años de servicio**	**Cuadras**	**Solución clásica**
Local 1	0	0	1	0
Local 2	1	1	0	0
Local 3	1	0	1	0
Local 4	0	1	1	0

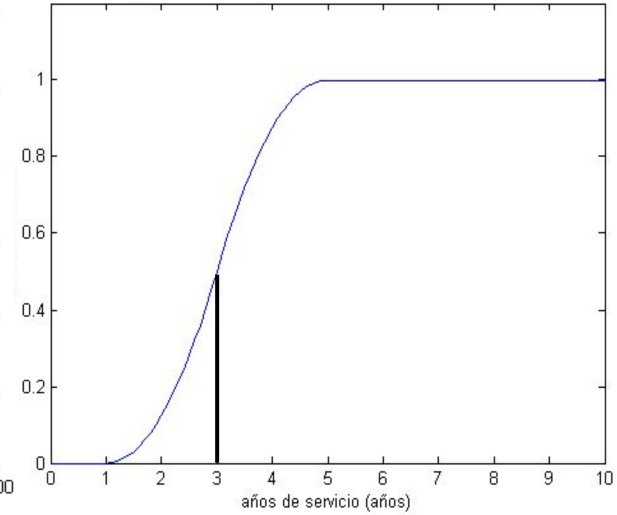
	Precio Cerveza ($)	**Años de servicio**	**Cuadras**	**Solución difusa**
Local 1	0,2	0,5	1	0,2
Local 2	1	1	0,6667	0,6667
Local 3	1	0,875	1	**0,875**
Local 4	0,5	1	1	0,5

T-norm

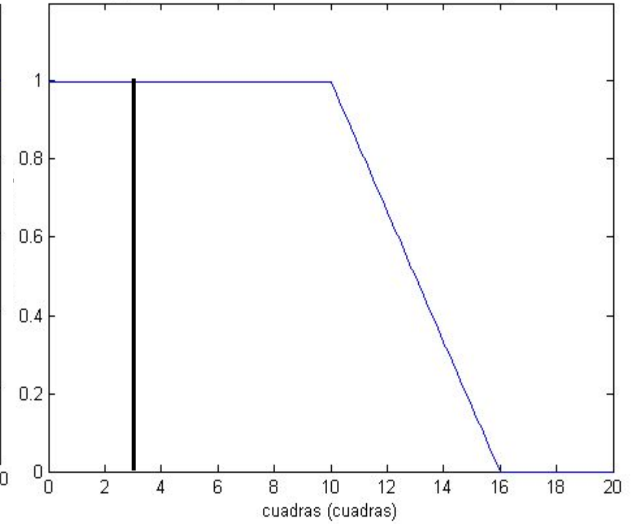
Conjunto: cerveza barata



Conjunto: local tradicional



Conjunto: cercanía de su hogar



Ejemplo

- Mediante la solución clásica el individuo no encuentra un local

- Mediante la solución difusa deducimos que el individuo posiblemente iría al Local 3 (solución aproximada).

Razonamiento borroso

Razonamiento

La lógica borrosa trata con proposiciones borrosas que asignan un valor a una variable lingüística, p. ej."**estatura**", **el valor "estatura es alta**", mediante un conjunto difuso *A*

definido sobre el universo de discurso X de la variable lingüística: [0, 2.5mts].

Análogamente, para la **variable lingüística "peso" el valor "peso elevado"**, se define en el universo de discurso Y de dicha variable lingüística:

[0, 200kg].

Variable lingüística

- Una variable linguística es caracterizada por:

$$(x, T(x), X, G, M)$$

- Donde

x: Variable base (nombre de la variable) Estatura

T(x): Conjunto de términos linguísticos de x que refieren a la variable base {Baja, Media, Alta}

X: Conjunto universo [0, 2.5m]

G: Es una regla sintáctica (gramática) para generar términos linguísticos

M: Es una regla semántica que asigna a cada término un significado f_{Baja}, f_{Media}, f_{Alta}

Ej. De variable lingüística

- La **velocidad** puede ser interpretada como una variable lingüística
- T(velocidad) podría ser

T(velocidad)={muy lento, lento, moderado, rápido, muy rápido, ...}

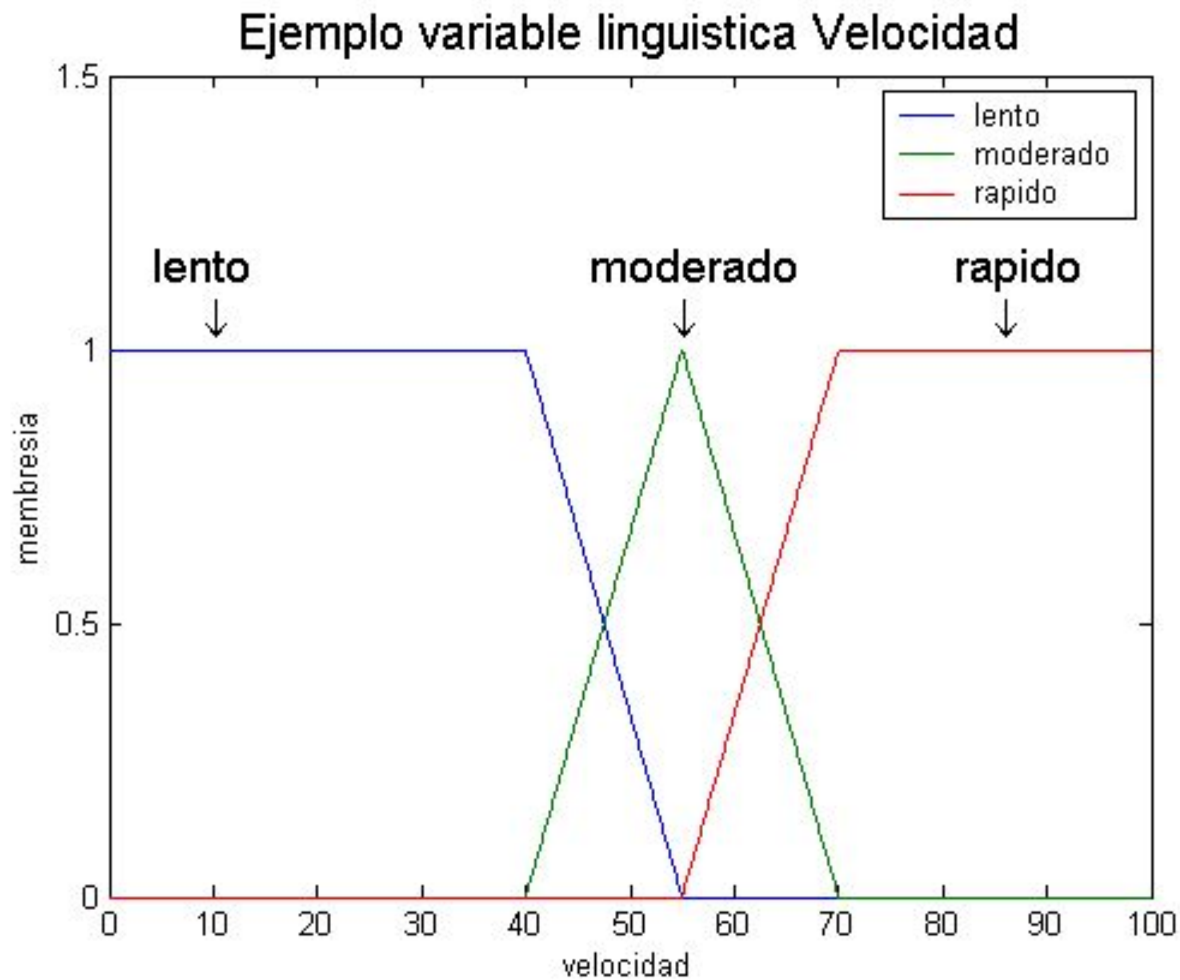
- Cada término es caracterizado por un conjunto difuso definido sobre un conjunto universal X=[0,100] Km/h
- Podemos interpretar las etiquetas

Lento como “una velocidad menor a 40 Km/h”

Moderado como “una velocidad cercana a 55 Km/h”

Rápido como “una velocidad mayor a 70 Km/h”

Ej. De variable lingüística

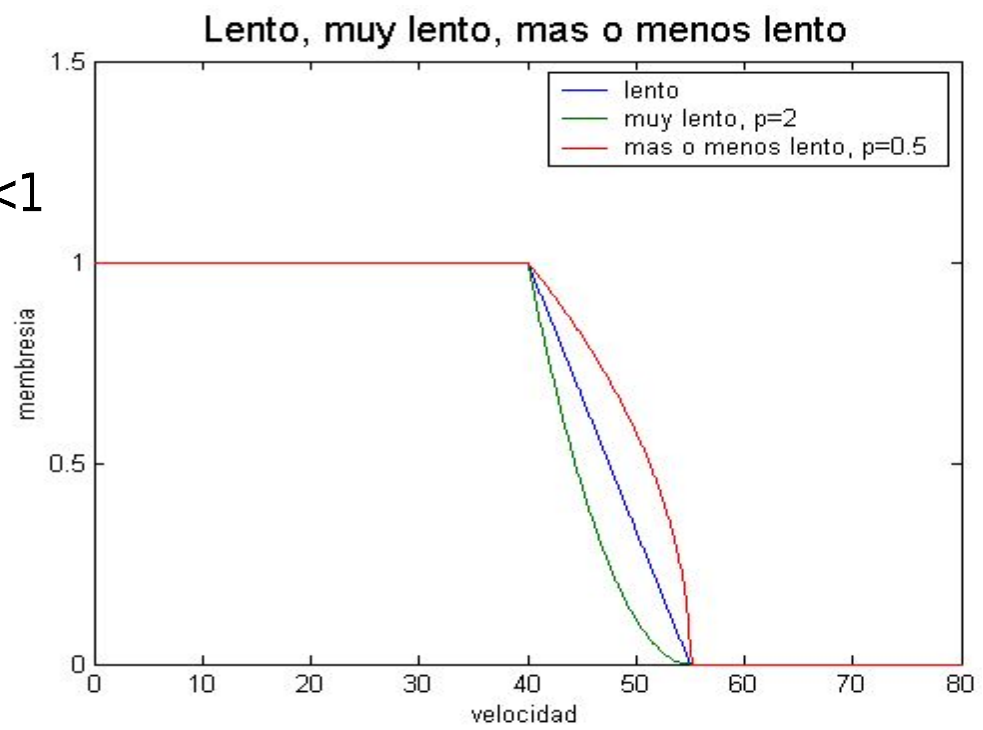


Ej. De variable lingüística

Podemos encontrar el número difuso “muy lento” o “mas o menos lento” a partir de “lento”

$$(muyLento)(x) = (Lento)^p(x) \qquad p > 1$$

$$(mas\ o\ menosLento)(x) = (Lento)^p(x) \qquad 0 < p < 1$$



Implicaciones

- Definir una implicación es asignar una **función de pertenencia** a una agrupación antecedente-consecuente del tipo $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}$
- Nos permite **razonar** con afirmaciones tales como:

SI "la velocidad es *normal*" ENTONCES "la fuerza de frenado debe ser *moderada*"

Conocimiento: representación en reglas borrosas

Términos lingüísticos

Si A *es* BAJA *y* B *es* ALTA ***Entonces*** C(A,B) *es* MEDIO

Premisa

Variables de entrada

Operador lógico borroso (Normas)

Variable de salida

Conclusión

Implicaciones

- Modus Ponens Clásico

Premisa	Si P entonces Q
Hecho	P
Consecuencia	Q

- Modus Ponens Generalizado (GMP)

Premisa	Si P entonces Q
Hecho	P*

Implicaciones

Opciones para definir:

- Teórica: Darle el mismo significado de **lógica clásica**.

$P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$ $\quad m_{p\rightarrow q}(u,v) = \max(1-m_p(u), m_q(v))$

$P \rightarrow Q \equiv \neg(P \wedge (\neg Q))$ $\quad m_{p\rightarrow q}(u,v) = 1 - \min[m_p(u), 1-m_q(v)]$

- Práctica: Darle un significado **causa-efecto.**

Implicación de Mamdani

$P \rightarrow Q \equiv P \wedge Q$ $\quad m_{p\rightarrow q}(u,v) = \min(m_p(u), m_q(v))$

Implicaciones

- Los operadores de Mamdani y de Larsen no son compatibles con la lógica clásica. ¿Por qué se usan?
  - Supongamos un modelo causal donde las consecuencias sólo se dan por la aparición de las causas especificadas en la KB Luego no se presenta una relación de implicación en la que el antecedente es falso y el consecuente verdadero. En esta situación, es falso que no se produzca la causa pero si la consecuencia (a diferencia de la implicación clásica).

  - Por tanto, los operadores de **Mamdani (Min) y Larsen (Prod)** son útiles para **hacer un modelo de implicación como relación de causa-efecto.** Son ampliamente utilizados en ingeniería.

Razonamiento aproximado

- Con lo visto podemos determinar las distribuciones de posibilidad de la regla según el hecho:
  - Regla: $\mu_{(P\rightarrow Q)}(x,y)$

    Hecho: $\mu_{P*}(x)$

- Pero todavía no podemos definir la conclusión, $\mu_{Q*}(x)$, ya que para ello necesitamos componer Regla y Hecho.

Teoría del Razonamiento aproximado

- Razonamiento con información imprecisa o incierta
- Nuevamente: Modus Ponens clásico dice

Premisa	Si P entonces Q
Hecho	P

Interpretación:

Si **P** es verdadero y **P→Q** es verdadero, entonces **Q** es verdadero

- La inferencia difusa de la implicación está basada en la regla composicional de inferencia

Regla composicional de inferencia

Premisa:	Si ***u*** está en **P** **entonces** ***v*** está en **Q**
Hecho:	*u* está P*
Consecuencia:	*v* está Q*

Donde Q* está determinado por la composición

$$Q^* = P^* \circ \underbrace{(P \rightarrow Q)}_{\text{matriz asociativa M}}$$

Composición

- Disponiendo de la matriz $M_{[nxq]}$ obtenida a partir de P□Q, el proceso de inferencia difusa permite a partir de la información P* (subconjunto de P), inducir un subconjunto Q* de Q.
- Siendo $P=(p_1, \ldots, p_n)$ y $Q=(q_1,\ldots,q_q)$

$$M = \mu_{PxQ} = \left| \begin{array}{cccc} p_1 \rightarrow q_1 & p_1 \rightarrow q_2 & \cdots & p_1 \rightarrow q_q \\ p_2 \rightarrow q_1 & \cdots & p_2 \rightarrow q_j & \\ & & & \\ p_i \rightarrow q_1 & & & \\ p_n \rightarrow q_1 & p_1 \rightarrow q_2 & \cdots & p_1 \rightarrow q_q \end{array} \right| \quad \text{si usamos } \rightarrow=\min, \; \mathbf{m_{ij}=min(p_i,q_j)}$$

Regla composicional

- En casos prácticos se utiliza la composición max-T-norma

$$Q^* = P^* \circ (P \rightarrow Q)$$

Sean dos conjuntos P y Q definidos en U y V resp.

$$\text{Max } \{T\,[P*(u),(P\rightarrow Q)(u,v)\,]\}_{v\in V}$$

T: si existe un solo camino de conexión entre Pi* y (P→Q)ij, tomamos "el menor" de los grados de pertenencia asociados de cada tramo.

max: si existe más de un camino de conexión, tomamos "el mayor"

Ej. de implicaciones (INTELIGENCIA ARTIFICIAL, M. ALFONSO et al)

REGLA: Si d_{dest} es *lejana* entonces *v* debe ser *rápida*

$$\begin{array}{lcccccccc} & & 250 & 300 & 350 & 400 & 450 & & \\ f_{lejana} = & [& 0{,}25 & 0{,}5 & 0{,}75 & 1 & 1 &] & (P) \end{array}$$

$$\begin{array}{lcccccc} & & 40 & 50 & 60 & 70 & & \\ f_{rapida} = & [& 0 & 0{,}2 & 0{,}6 & 1 &] & (Q) \end{array}$$

Ej. Mandani (max-min),
INTELIGENCIA ARTIFICIAL, M. ALFONSO et al

REGLA: **Si d_{dest} es *lejana* entonces *v* debe ser *rápida***

$$f_{lejana} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 250 & 300 & 350 & 400 & 450 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} 0{,}25 & 0{,}5 & 0{,}75 & 1 & 1 \end{array} \right] \end{array}$$

$$f_{rapida} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 40 & 50 & 60 & 70 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0{,}2 & 0{,}6 & 1 \end{array} \right] \end{array}$$

$$f_{lejana\rightarrow rapida} = \begin{array}{ccc} & Q & \\ & \begin{array}{cccc} 40 & 50 & 60 & 70 \end{array} & \\ P & \begin{pmatrix} 0 & 0{,}2 & 0{,}25 & 0.25 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}75 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}6 & 1 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}6 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 250 \\ 300 \\ 350 \\ 400 \\ 450 \end{array} \end{array} = \mathbf{M}$$

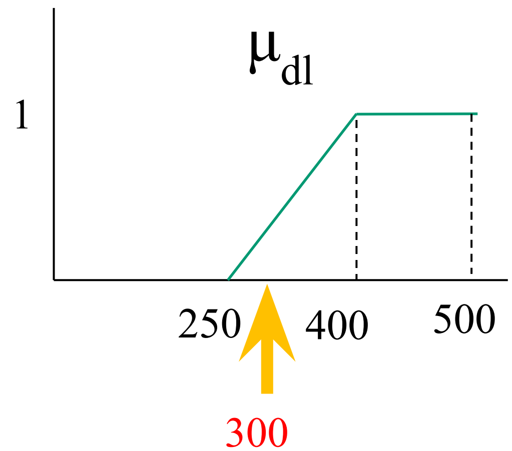
Para **hechos** borrosos (vector de ajuste - entrada)

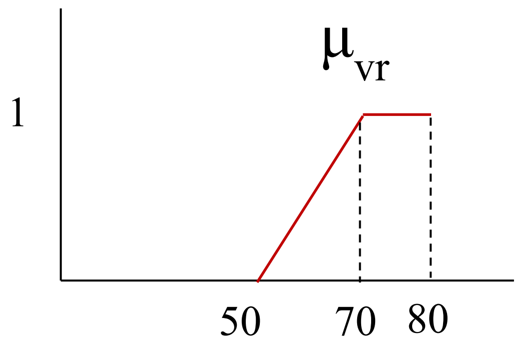
$$d_{dest} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 250 & 300 & 350 & 400 & 450 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} \mathbf{0{,}75} & \mathbf{1} & \mathbf{0{,}75} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right] \end{array}$$

$$d_{dest} = [\ \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0{,}75} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0}\ ]$$

Ej. Inferencia - Mandani

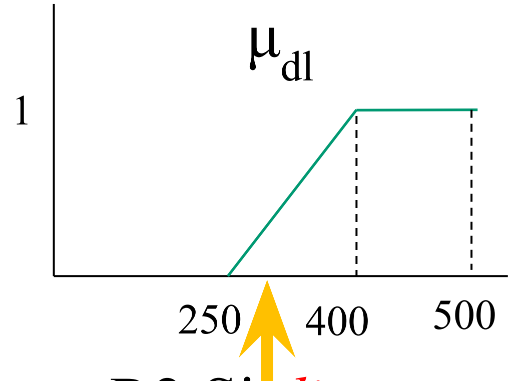
R1:Si *dist* es *lejana* entonces *v* debe ser *rápida*

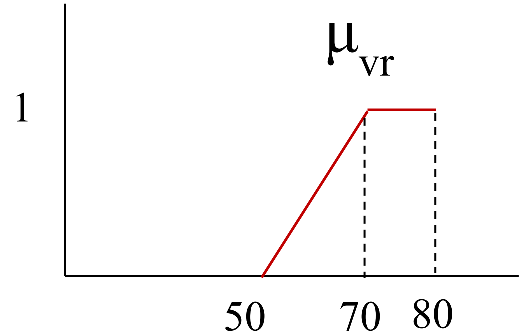




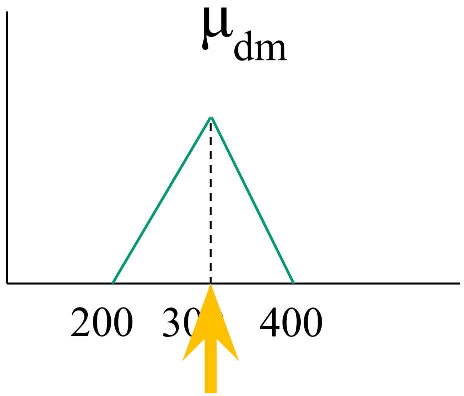
Ej. Inferencia - Mandani

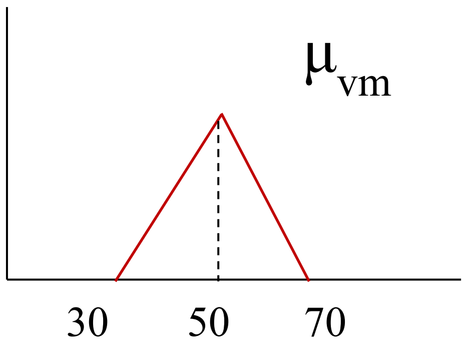
R1:Si *dist* es *lejana* entonces *v* debe ser *rápida*





R2:Si *dist* es *media* entonces *v* debe ser *media*





Inferencia borrosa: Mamdani

1. Entrada: valores crisp; una regla
2. Entrada: valores crisp, varias reglas
3. Entrada: una lectura borrosa

1. Inferencia borrosa: max-min

- **REGLA: IF A THEN B**

Cuando A* tiene un solo valor de pertenencia distinto de 0, p. ej., x_k se puede utilizar solo $\mu_A(x_k)$ directamente con la representación de Q, $\mu_Q(y)$ para inducir B* como

$$B^* = \mu_A(x_k) \wedge \mu_B(y)$$

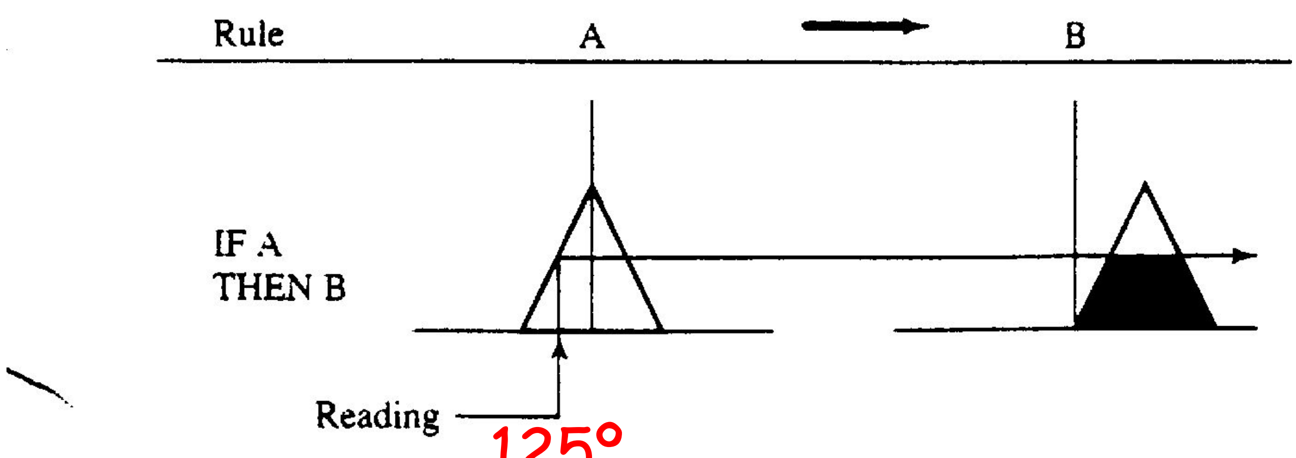


FIGURE 13.4 Max-min inference.

IF Temperature is normal THEN Velocity is medium

IF A THEN B

Normal temperature = (0/100, .5/125, 1/150, .5/175, 0/200)

Medium velocity = (0/10, .6/20, 1/30, .6/40, 0/50)

B

$M = m_{ij} = \min(a_i, b_j)$

A

$$
= \begin{vmatrix}
\min(0., 0.) & \min(0., .6) & \min(0., 1.) & \min(0., .6) & \min(0., 0.) \\
\min(.5, 0.) & \min(.5, .6) & \min(.5, 1.) & \min(.5, .6) & \min(.5, 0.) \\
\min(1., 0.) & \min(1., .6) & \min(1., 1.) & \min(1., .6) & \min(1., 0.) \\
\min(.5, 0.) & \min(.5, .6) & \min(.5, 1.) & \min(.5, .6) & \min(.5, 0.) \\
\min(0., 0.) & \min(0., .6) & \min(0., 1.) & \min(0., .6) & \min(0., 0.)
\end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix}
0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\
0. & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0. \\
0. & 0.6 & 1. & 0.6 & 0. \\
0. & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0. \\
0. & 0. & 0. & 0. & 0.
\end{vmatrix}
$$

$A' = (0/100, .5/125, 0/150, 0/175, 0/200)$

A ' representa una entrada de t=125 º

El subconjunto A' (lectura única) induce un conjunto difuso B' utilizando la composición max-min:

$$b'_j = \max_{1 \le i \le n}\{\min(a'_i, m_{ij})\}$$

$$b_1 = \max[\min(0., 0.), \min(.5, 0.), \min(0., 0.), \min(0., 0.), \min(0., 0.)]$$

$$b_2 = \max[\min(0., 0.), \min(.5, .5), \min(0., .6), \min(0., .5), \min(0., 0.)]$$

$$b_3 = \max[\min(0., 0.), \min(.5, .5), \min(0., 1.), \min(0., .5), \min(0., 0.)]$$

$$b_4 = \max[\min(0., 0.), \min(.5, .5), \min(0., .6), \min(0., .5), \min(0., 0.)]$$

$$b_5 = \max[\min(0., 0.), \min(.5, 0.), \min(0., 0.), \min(0., 0.), \min(0., 0.)]$$

$$B' = (0/10, .5/20, .5/30, .5/40, 0/50)$$

Inferencia max-min - Ejemplo

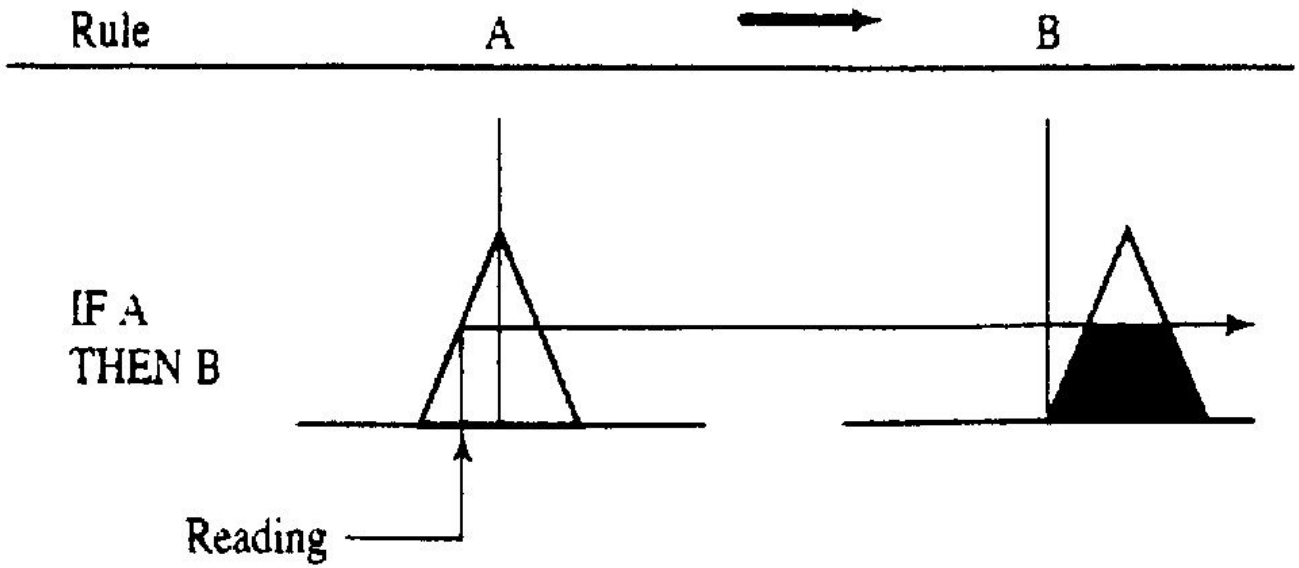
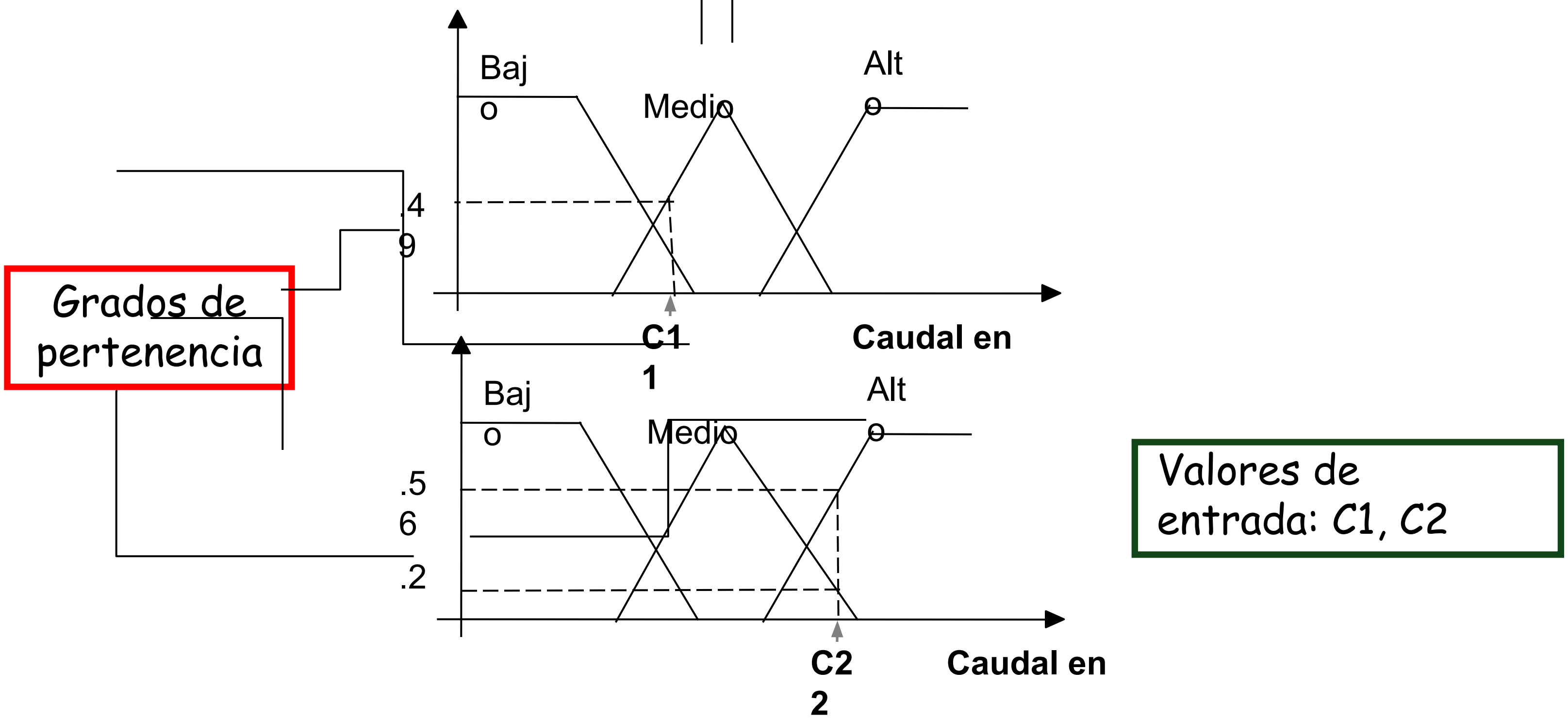


FIGURE 13.4 Max-min inference.

2. Inferencia borrosa

Regla 1: *Si* caudal en 1 *es* medio *y* caudal en 2 *es* medio *entonces* nivel en 3 *es* medio

Regla 2: *Si* caudal en 1 *es* medio *y* caudal en 2 *es* alto *entonces* nivel en 3 *es* alto



2. Inferencia borrosa

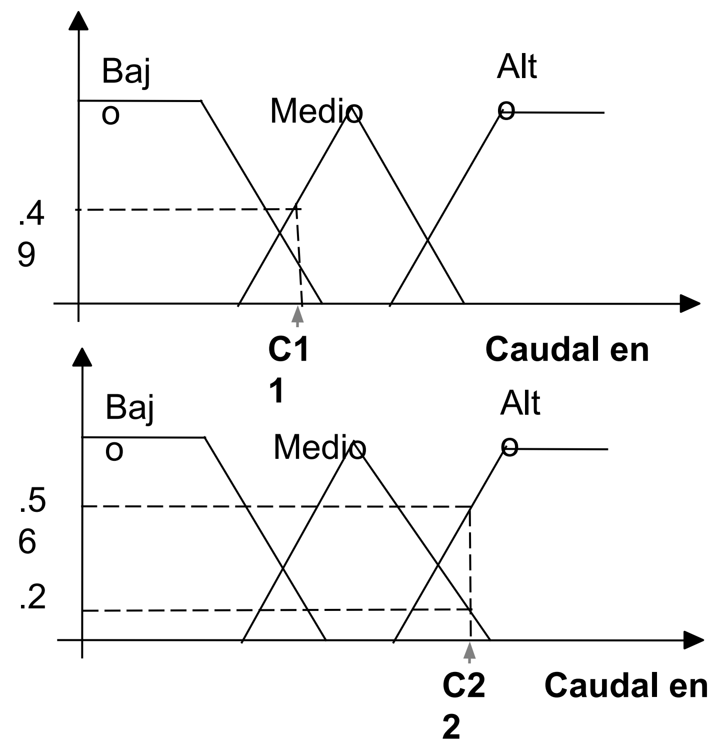
Regla 1: *Si* caudal en 1 *es* medio *y* caudal en 2 *es* medio *entonces* nivel en 3 *es* medio

Regla 2: *Si* caudal en 1 *es* medio *y* caudal en 2 *es* alto *entonces* nivel en 3 *es* alto

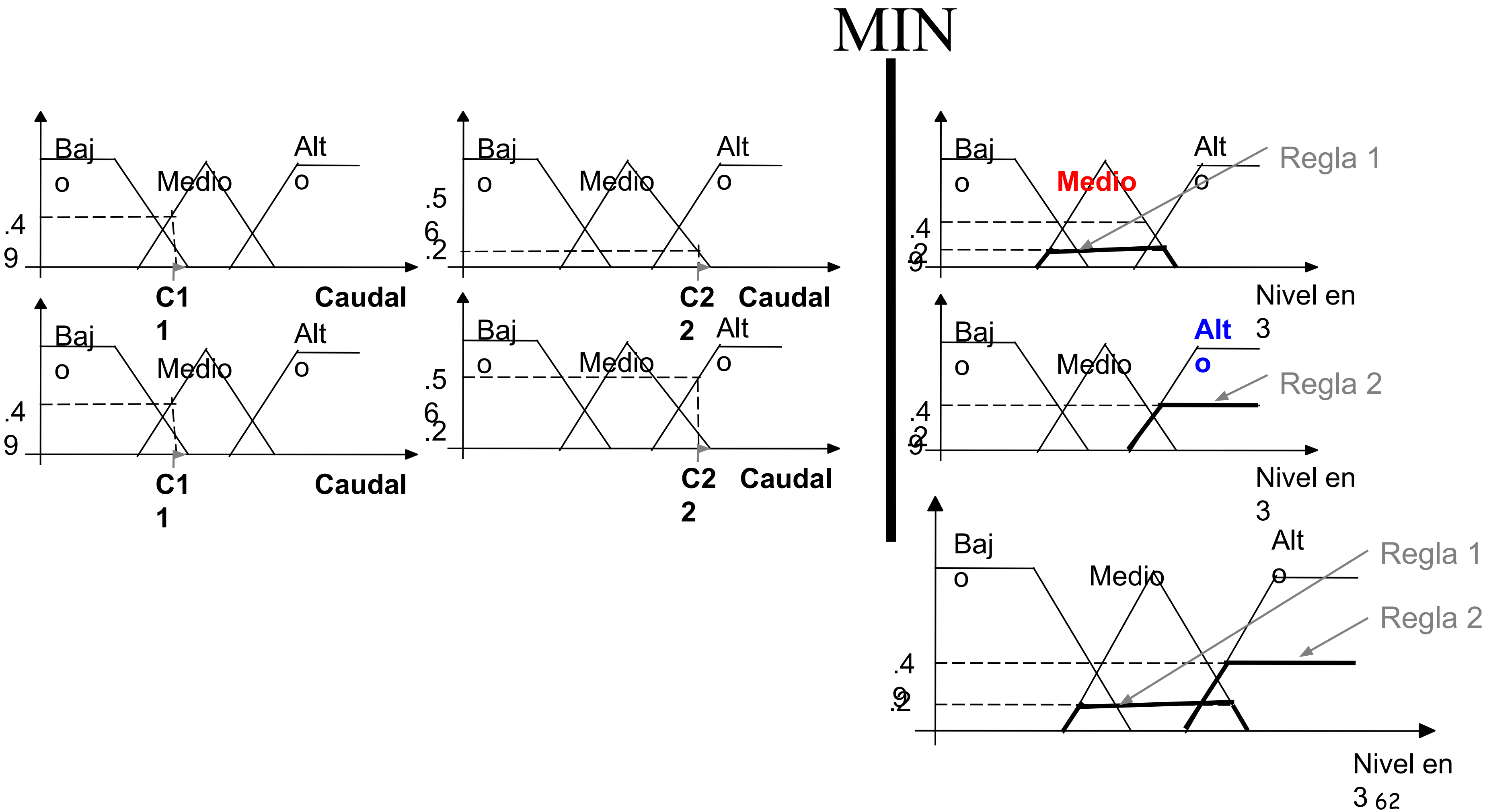
Fuzzyficador → <u>*Norma T*</u>: MIN

Regla	Ant. 1	Ant. 2	$(A\_1 \wedge A\_2)$
Regla 1	0.49	0.2	0.2
Regla 2	0.49	0.56	0.49

Grado de veracidad de la regla

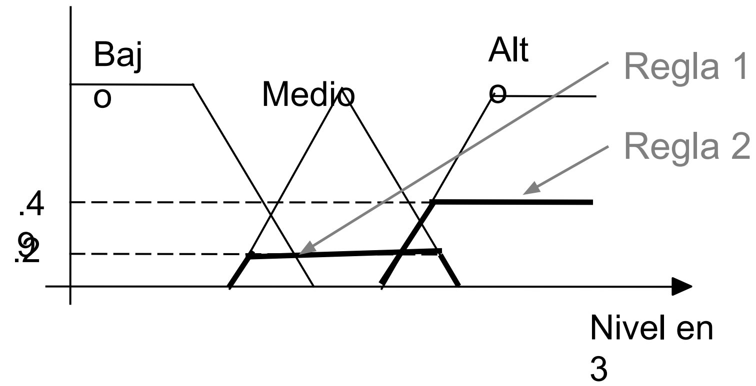


Regla 1: *Si* caudal en 1 *es* medio *y* caudal en 2 *es* medio *entonces* nivel en 3 *es* medio
Regla 2: *Si* caudal en 1 *es* medio *y* caudal en 2 *es* alto *entonces* nivel en 3 *es* alto



2. Inferencia borrosa

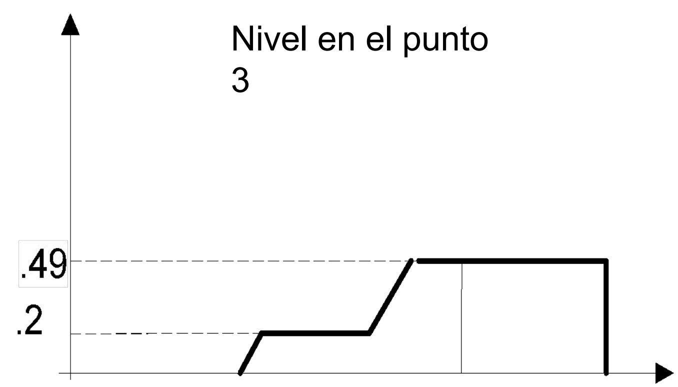
Regla	Grado de veracidad de la regla
Regla 1	0.2
Regla 2	0.49



Defuzificación

<u>*Centro de área o Centroide*</u>

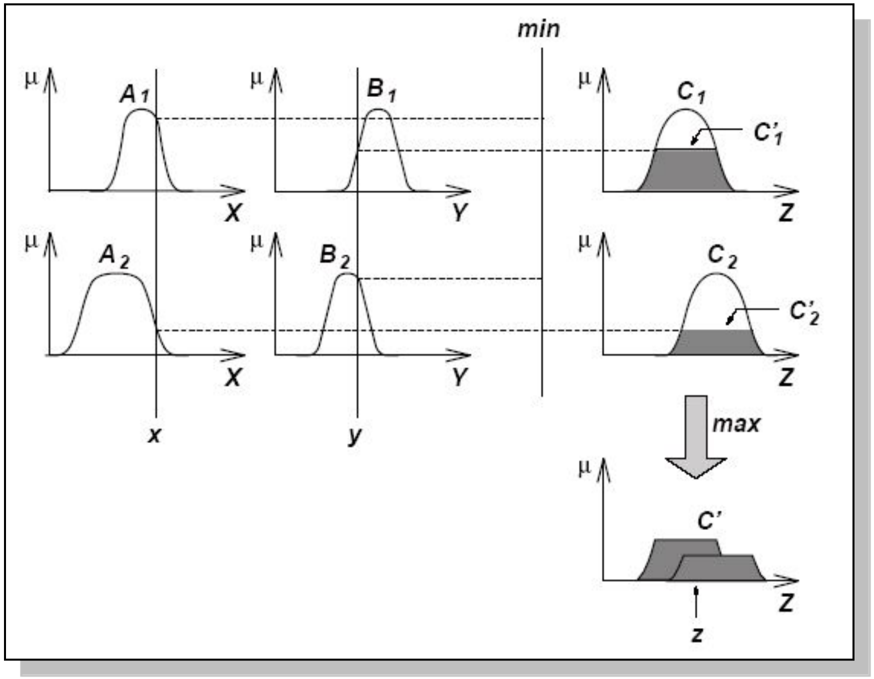
$$C3 = u = \frac{\sum_{i=1}^{I} u_i \, \mu_U(u_i)}{\sum_{i=1}^{I} \mu_U(u_i)}$$

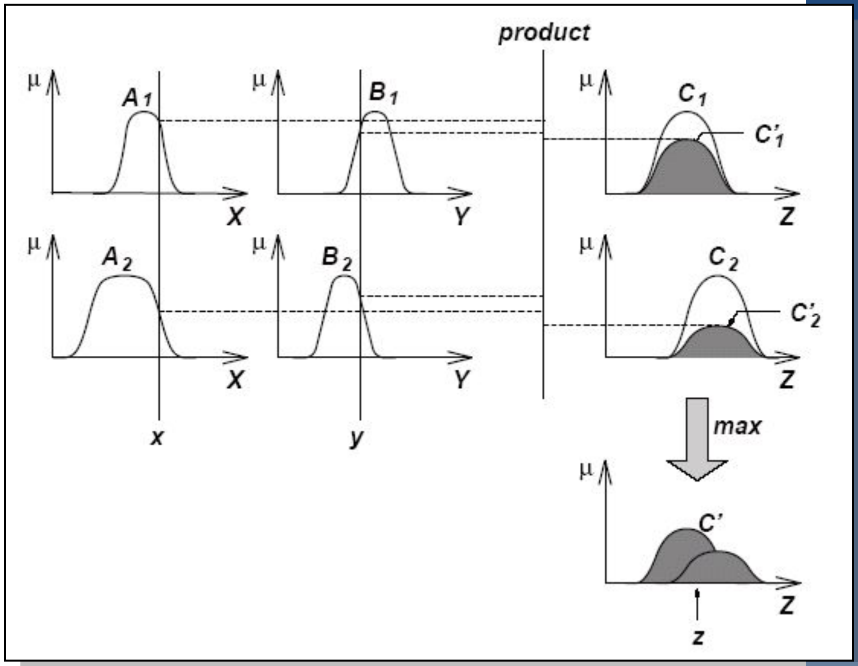


C3 Caudal en el punto 3

2. Inferencia borrosa: max-T

Resumiendo…





3. Inferencia borrosa: max-T

En el caso que la entrada a la regla sea una lectura difusa, nosotros podemos considerar el max de la intersección de A y A*, es decir: max(min (a_i, a^*_i)) para inducir el B*

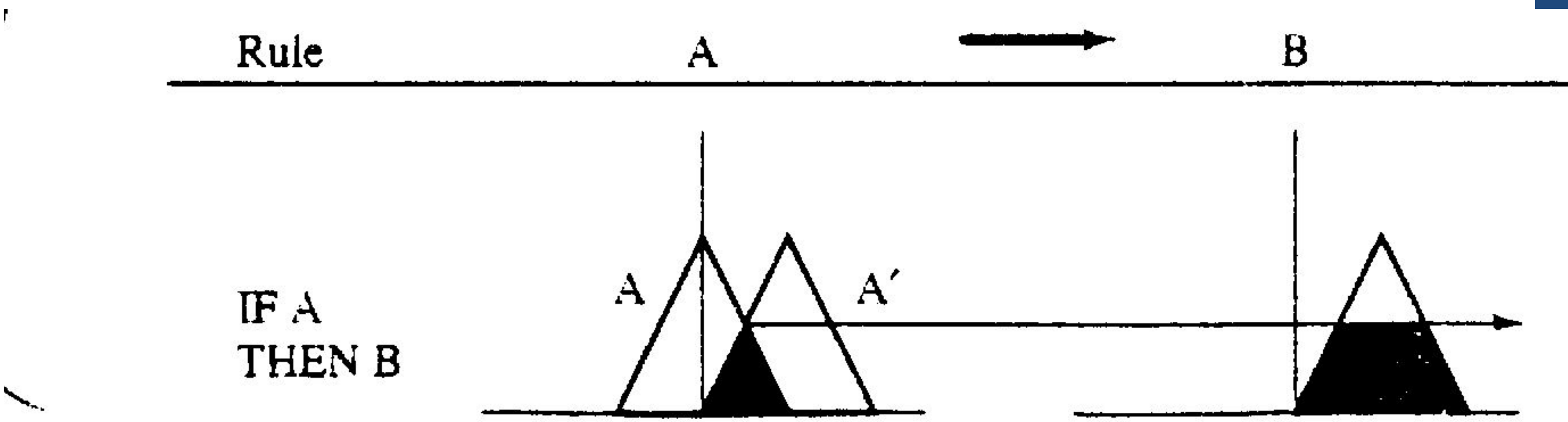
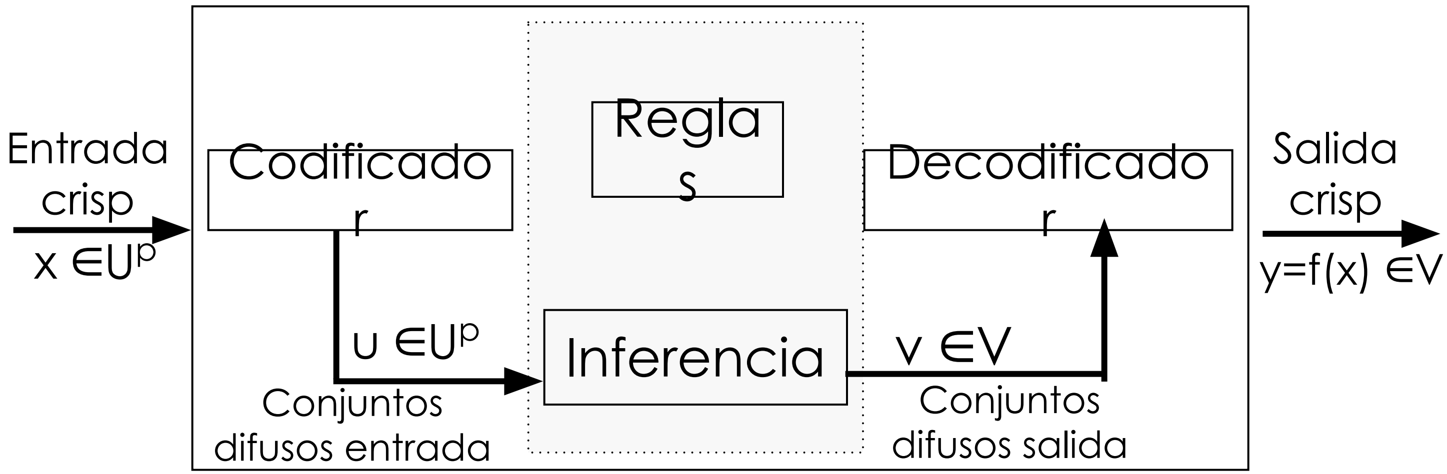


FIGURE 13.5 Max-min inference for fuzzy input.

Arquitectura Sistemas Borrosos

- La salida de un proceso de inferencia es un conjunto difuso, en muchos procesos se requieren valores crisp



Métodos de Defuzificación

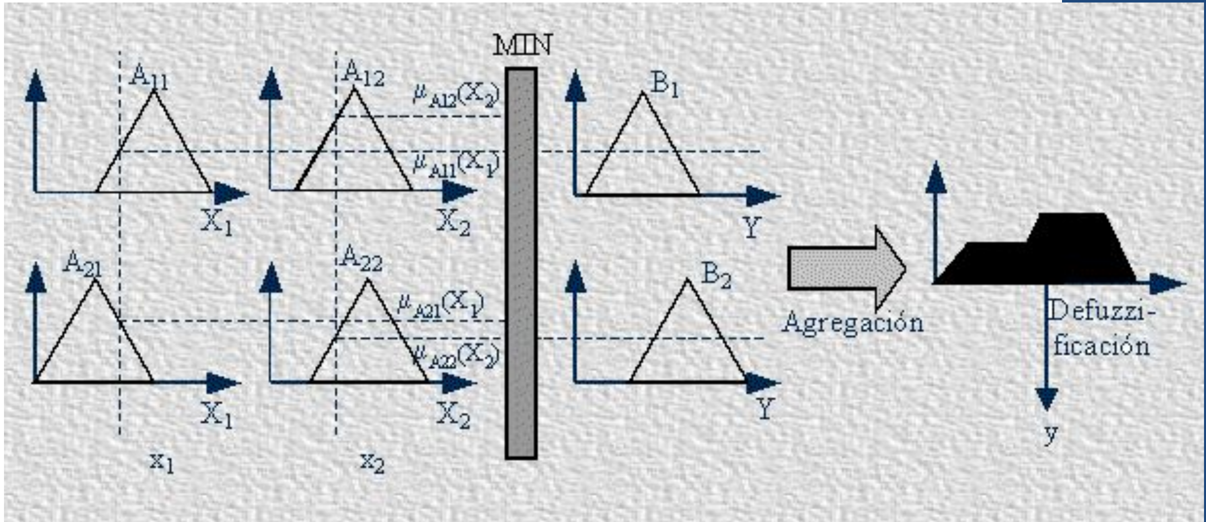
- Para dar un valor numérico que mejor represente el resultado, por ejemplo:

Centro de Gravedad

$$y_{centroide} = \frac{\sum_{x \in X} x \ \mu_A(x)}{\sum_{x \in X} \mu_A(x)}$$

•Valor máximo

•Promedio de max.



Sistema Difuso Mamdani, Procesamiento Detallado

Resumen de tareas: Modelando un Fuzzy System

- Definir las variables de entradas y salidas
- Definir el universo de discurso
- Determinar el número de funciones de pertenencia y distribuirlas
- Definir las funciones de pertenencia
- Definir el método de inferencia (max-min, max-prod, etc.)
- Definir el método de defuzzyficación
- Examinar la conducta del modelo y la superficie de salida: Redefinir reglas, Redefinir conj difusos, etc.

En resumen: Cuándo usar lógica borrosa

- En procesos **complejos**, si no existe un modelo de solución sencillo
- Cuando haya que introducir la experiencia de un operador "**experto**" que se base en conceptos imprecisos obtenidos de su experiencia
- Cuando ciertas partes del sistema a controlar son **desconocidas** y **no** pueden medirse de forma **fiable**
- En general cuando se desea representar y operar con conceptos que tengan **imprecisión**

En resumen: Desventajas

- Estabilidad: No hay garantía teórica que un sistema difuso no tenga un comportamiento caótico y no siga siendo estable, aunque tal posibilidad parece ser baja debido a los resultados obtenidos hasta ahora
- La determinación de las funciones de pertenencia y las reglas no siempre son sencillas
- La verificación de los modelos y sistemas borrosos expertos requiere de gran cantidad de pruebas

Referencias

- Inteligencia Artificial: modelos, técnicas y áreas de aplicación, Escolano Ruiz et al., Paraninfo 2003.
- Zadeh, L.A. (1965) Fuzzy sets. Information and Control, Vol. 8, pp. 338-353.
- Slides P. Bulacio, "Lógica Difusa o P. Bulacio, Slides "Lógica Difusa o Borrosa", Introducción a la Inteligencia Artificial (LCC)
- Fuzzy Logic Toolbox User Guide (For Use with MATLAB®)