Práctica 6: Lógica de predicados - Deducción natural

1. Probar la validez de los siguientes secuentes usando, entre otras, las reglas de introducción y eliminación de la igualdad. El símbolo $+$ es un símbolo de función de aridad 2, mientras que $<$ es un símbolo de predicado también de aridad 2.

a) $(y = 0) \wedge (y = x) \ \vdash \ 0 = x$

b) $t_1 = t_2 \ \vdash \ (t + t_2) = (t + t_1)$

c) $(x = 0) \vee ((x + x) > 0) \ \vdash \ (y = (x + x)) \to ((y > 0) \vee (y = (0 + x)))$

Solución:

Antes de resolver los ejercicios planteados, veamos 3 propiedades básicas de la igualdad que podremos dar por conocidas y usar en el resto de la práctica.

La igualdad es una *Relación de equivalencia*:

- $\vdash x = x$ (Reflexividad):

1.	$x = x$	$i_=$

- $x = y \vdash y = x$ (Simetría):

1.	$x = y$	Premisa
2.	$x = x$	$i_=$
3.	$y = x$	$e_=(1)(2)$ $[\phi \equiv z = x]$ (reemplazando z)

- $x = y, y = z \vdash x = z$ (Transitividad):

1.	$x = y$	Premisa
2.	$y = z$	Premisa
3.	$y = x$	Simetría (1)
4.	$x = z$	$e_=(3)(2)$ $[\phi \equiv w = z]$ (reemplazando w)

a) $(y = 0) \wedge (y = x) \ \vdash \ 0 = x$:

1.	$(y = 0) \wedge (y = x)$	Premisa
2.	$y = 0$	$e_{\wedge 1}(1)$
3.	$y = x$	$e_{\wedge 2}(1)$
4.	$0 = y$	Simetría (2)
5.	$0 = x$	Transitividad (4)(3)

b) $t_1 = t_2 \vdash (t + t_2) = (t + t_1)$:

1.	$t_1 = t_2$	Premisa
2.	$(t + t_1) = (t + t_1)$	$i_=$
3.	$(t + t_2) = (t + t_1)$	$e_=(1)(2)$ $[\phi \equiv (t + z) = (t + t_1)]$ (reemplazando z)

c) $(x = 0) \vee ((x + x) > 0) \vdash (y = (x + x)) \to ((y > 0) \vee (y = (0 + x)))$:

1.	$(x = 0) \vee ((x + x) > 0)$	Premisa
2.	$y = (x + x)$	Hipótesis
3.	$x = 0$	Hipótesis
4.	$y = (0 + x)$	$e_=(3)(2)[\phi \equiv y = z + x]$
5.	$((y > 0) \vee (y = (0 + x))$	$i_{\vee 2}(4)$
6.	$x + x > 0$	Hipótesis
7.	$(x + x) = y$	Simetría (2)
8.	$y > 0$	$e_=(7)(6)[\phi \equiv z > 0]$
9.	$((y > 0) \vee (y = (0 + x))$	$i_{\vee 1}(8)$
10.	$((y > 0) \vee (y = (0 + x))$	$e_\vee(1)(3-5)(6-9)$
11.	$(y = (x + x) \to ((y > 0) \vee (y = (0 + x)))$	$i_\to(2-10)$

---

2. Las pruebas de los secuentes que hay a continuación combinan las reglas para la igualdad y los cuantificadores. Escribimos $\phi \leftrightarrow \psi$ como abreviación de $(\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi)$. Encuentre pruebas para:

a) $P(b) \vdash \forall x(x = b \to P(x))$

b) $P(b), \forall x \forall y(P(x) \wedge P(y) \to x = y) \vdash \forall x(P(x) \leftrightarrow x = b)$

c) $\exists x \exists y(H(x, y) \vee H(y, x)), \neg \exists x H(x, x) \vdash \exists x \exists y \neg(x = y)$

d) $\forall x(P(x) \leftrightarrow x = b) \vdash P(b) \wedge \forall x \forall y(P(x) \wedge P(y) \to x = y)$

Solución:

a) $P(b) \vdash \forall x(x = b \to P(x))$:

1.	$P(b)$	Premisa
2.		x_0
3.	$x_0 = b$	Hipótesis
4.	$b = x_0$	Simetría (3)
5.	$P(x_0)$	$e_=(4)(1)[\phi \equiv P(x)]$
6.	$x_0 = b \to P(x_0)$	$i_\to(3-5)$
7.	$\forall x(x = b \to P(x))$	$i_\forall(2-6)$

b) $P(b), \forall x \forall y(P(x) \wedge P(y) \to x = y) \ \vdash \ \forall x(P(x) \leftrightarrow x = b)$:

1.	$P(b)$	Premisa
2.	$\forall x \forall y(P(x) \wedge P(y) \to x = y)$	Premisa
3.		x_0
4.	$P(x_0)$	Hipótesis
5.	$\forall y(P(x_0) \wedge P(y) \to x_0 = y)$	$e_\forall(2)$
6.	$P(x_0) \wedge P(b) \to x_0 = b$	$e_\forall(5)$
7.	$P(x_0) \wedge P(b)$	$i_\wedge(4)(1)$
8.	$x_0 = b$	$e_\to(7)(6)$
9.	$P(x_0) \to x_0 = b$	$i_\to(4-8)$
10.	$x_0 = b$	Hipótesis
11.	$b = x_0$	Simetría (10)
12.	$P(x_0)$	$e_=(11)(1)[\phi \equiv P(x)]$
13.	$x_0 = b \to P(x_0)$	$i_\to(10-12)$
14.	$P(x_0) \leftrightarrow x_0 = b$	$i_\leftrightarrow(9)(13)$
15.	$\forall x(P(x) \leftrightarrow x = b)$	$i_\forall(3-14)$

c) $\exists x \exists y(H(x,y) \vee H(y,x)), \neg\exists x H(x,x) \ \vdash \ \exists x \exists y \neg(x = y)$:

1.	$\exists x \exists y(H(x,y) \vee H(y,x))$	Premisa
2.	$\neg\exists x H(x,x)$	Premisa
3.	$\forall x \neg H(x,x)$	Lema aux., ver Ejerc. 3c
4.		x_0
5.	$\exists y(H(x_0,y) \vee H(y,x_0))$	Hipótesis
6.		y_0
7.	$H(x_0,y_0) \vee H(y_0,x_0)$	Hipótesis
8.	$\neg H(x_0,x_0)$	$e_\forall(3)$
9.	$x_0 = y_0$	Hipótesis
10.	$y_0 = x_0$	Simetría (9)
11.	$H(x_0,x_0) \vee H(x_0,x_0)$	$e_=(10)(7)$
12.	$H(x_0,x_0)$	$e_{\vee,1}(11)$
13.	$\bot$	$i_\bot(12)(8)$
14.	$\neg(x_0 = y_0)$	$i_\neg(9-13)$
15.	$\exists y \neg(x_0 = y)$	$i_\exists(14)$
16.		
17.	$\exists y \neg(x_0 = y)$	$e_\exists(5)(6-15)$
18.	$\exists x \exists y \neg(x = y)$	$i_\exists(17)$
19.		
20.	$\exists x \exists y \neg(x = y)$	$e_\exists(1)(4-18)$

d) $\forall x(P(x) \leftrightarrow x = b) \ \vdash \ P(b) \wedge \forall x \forall y(P(x) \wedge P(y) \rightarrow x = y)$:

1.	$\forall x(P(x) \leftrightarrow x = b)$	Premisa
2.	$P(b) \leftrightarrow b = b$	$e_{\forall}(1)$
3.	$b = b$	$i_{=}$
4.	$P(b)$	$e_{\leftrightarrow}(3)(2)$
5.	$\exists x P(x)$	$i_{\exists}(4)$
6.		x_0
7.	$P(x_0)$	Hipótesis
8.	$P(x_0)$	Trivial (7)
9.	$P(x_0)$	$e_{\exists}(5)(6-8)$
10.		y_0
11.	$P(y_0) \leftrightarrow y_0 = b$	$e_{\forall}(1)$
12.	$P(x_0) \wedge P(y_0)$	Hipótesis
13.	$P(y_0)$	$e_{\wedge 2}(13)$
14.	$y_0 = b$	$e_{\leftrightarrow}(13)(11)$
15.	$b = y_0$	Simetría (14)
16.	$P(x_0) \leftrightarrow x_0 = b$	$e_{\forall}(1)$
17.	$P(x_0) \leftrightarrow x_0 = y_0$	$e_{=}(15)(16)$
18.	$x_0 = y_0$	$e_{\leftrightarrow}(9)(17)$
19.	$P(x_0) \wedge P(y_0) \rightarrow x_0 = y_0$	$i_{\rightarrow}(12-18)$
20.	$\forall y(P(x_0) \wedge P(y) \rightarrow x_0 = y)$	$i_{\forall}(10-19)$
21.	$\forall x \forall y(P(x) \wedge P(y) \rightarrow x = y)$	$i_{\forall}(6-20)$
22.	$P(b) \wedge \forall x \forall y(P(x) \wedge P(y) \rightarrow x = y)$	$i_{\wedge}(4)(21)$

---

3. Pruebe los siguientes secuentes:

a) $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \ \vdash \ (\forall x \neg Q(x)) \rightarrow (\forall x \neg P(x))$

b) $\forall x(P(x) \rightarrow \neg Q(x)) \ \vdash \ \neg(\exists x(P(x) \wedge Q(x)))$

c) $\neg \exists x \phi \ \vdash \ \forall x \neg \phi$

d) $(\forall x \phi) \wedge (\forall x \psi) \dashv\vdash \ \forall x(\phi \wedge \psi)$

Solución:

a) $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \ \vdash \ (\forall x \neg Q(x)) \rightarrow (\forall x \neg P(x))$:

b) $\forall x(P(x) \rightarrow \neg Q(x)) \ \vdash \ \neg(\exists x(P(x) \wedge Q(x)))$:

c) $\neg \exists x \phi \ \vdash \ \forall x \neg \phi$:

1.	$\neg\exists x\phi$	premisa
2.		x_0
3.	$\phi[x_0/x]$	hipótesis
4.	$\exists x\phi$	$i_\exists(3)$
5.	$\bot$	$i_\bot(4)(1)$
6.	$\neg(\phi[x_0/x])$	$i_\neg(3-5)$
7.	$(\neg\phi)[x_0/x]$	trivial (6)
8.	$\forall x\neg\phi$	$i_\forall(2-7)$

d) $(\forall x\phi) \wedge (\forall x\psi) \dashv\vdash\ \forall x(\phi \wedge \psi)$:

---

4. Demostrar la validez de los siguientes secuentes, donde $ar(f) = 2$, $ar(F) = ar(G) = ar(P) = ar(Q) = 1$ y $ar(S) = 0$:

a) $\exists x(S \to Q(x))\ \vdash\ S \to \exists x Q(x)$

b) $\forall x P(x) \to S\ \vdash\ \exists x(P(x) \to S)$

c) $\forall x(P(x) \vee Q(x))\ \vdash\ \forall x P(x) \vee \exists x Q(x)$

d) $\forall x(\neg P(x) \wedge Q(x))\ \vdash\ \forall x(P(x) \to Q(x))$

e) $\exists x(\neg P(x) \vee Q(x))\ \vdash\ \exists x(\neg(P(x) \wedge \neg Q(x)))$

f) $\forall x(P(x) \wedge Q(x))\ \vdash\ \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$

g) $\exists x(P(x) \wedge Q(x))\ \vdash\ \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$

h) $\forall x\forall y(G(y) \to F(x))\ \vdash\ \exists y G(y) \to \forall x F(x)$

i) $\forall x\neg P(x)\ \vdash\ \neg\exists x P(x)$

j) $\forall x(f(x,c) = x), \forall x(f(c,x) = x)\ \vdash\ \forall y(\forall x(f(x,y) = x)) \to y = c)$

Solución:

a) $\exists x(S \to Q(x))\ \vdash\ S \to \exists x Q(x)$:

1.	$\exists x(S \to Q(x))$	Premisa
2.	S	Hipótesis
3.		x_0
4.	$S \to Q(x_0)$	Hipótesis
5.	$Q(x_0)$	$e_\to(2)(4)$
6.		
7.	$Q(x_0)$	$e_\exists(1)(3-5)$
8.	$\exists x Q(x)$	$i_\exists(7)$
9.	$S \to \exists x Q(x)$	$i_\to(2-8)$

b) $\forall x P(x) \rightarrow S \vdash \exists x(P(x) \rightarrow S)$:

De Huth & Ryan (notar que usa otra notación para las reglas):

1	$\forall x\, P(x) \rightarrow S$	prem
2	$\neg\exists x\, (P(x) \rightarrow S)$	assum
3	x_0	
4	$\neg P(x_0)$	assum
5	$P(x_0)$	assum
6	$\perp$	$\neg$e 5, 4
7	S	$\perp$e 6
8	$P(x_0) \rightarrow S$	$\rightarrow$i 5–7
9	$\exists x\, (P(x) \rightarrow S)$	$\exists x$ i 8
10	$\perp$	$\neg$e 9, 2
11	$\neg\neg P(x_0)$	$\neg$i 4–10
12	$P(x_0)$	$\neg\neg$e 11
13	$\forall x\, P(x)$	$\forall x$ i 3–12
14	S	$\rightarrow$e 1, 13
15	$P(t)$	assum
16	S	copy 14
17	$P(t) \rightarrow S$	$\rightarrow$i 15–16
18	$\exists x\, (P(x) \rightarrow S)$	$\exists x$ i 17
19	$\perp$	$\neg$e 18, 2
20	$\neg\neg\exists x\, (P(x) \rightarrow S)$	$\neg$i 2–19
21	$\exists x\, (P(x) \rightarrow S)$	$\neg\neg$e 20

c) $\forall x(P(x) \lor Q(x)) \vdash \forall x P(x) \lor \exists x Q(x)$:

d) $\forall x(\neg P(x) \land Q(x)) \vdash \forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$:

e) $\exists x(\neg P(x) \lor Q(x)) \vdash \exists x(\neg(P(x) \land \neg Q(x)))$:

1.	$\exists x(\neg P(x) \vee Q(x))$	Premisa
2.		x_0
3.	$\neg P(x_0) \vee Q(x_0)$	Hipótesis
4.	$P(x_0) \wedge \neg Q(x_0)$	Hipótesis
5.	$P(x_0)$	$e_{\wedge 1}(4)$
6.	$\neg Q(x_0)$	$e_{\wedge 2}(4)$
7.	$\neg P(x_0)$	Hipótesis
8.	$\perp$	$i_{\perp}(5)(7)$
9.	$Q(x_0)$	Hipótesis
10.	$\perp$	$i_{\perp}(9)(6)$
11.	$\perp$	$e_{\vee}(3)(7-8)(9-10)$
12.	$\neg(P(x_0) \wedge \neg Q(x_0))$	$i_{\neg}(4-11)$
13.		
14.	$\exists x(\neg(P(x) \wedge \neg Q(x)))$	$e_{\exists}(1)(2-12)$

f) $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \ \vdash \ \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$:

De Huth & Ryan (notar que usa otra notación para las reglas):

1	$\forall x\,(P(x) \wedge Q(x))$	prem
2	x_0	
3	$P(x_0) \wedge Q(x_0)$	$\forall x$ e 1
4	$P(x_0)$	$\wedge$e$_1$ 3
5	$\forall x\,P(x)$	$\forall x$ i 2–4
6	x_0	
7	$P(x_0) \wedge Q(x_0)$	$\forall x$ e 1
8	$Q(x_0)$	$\wedge$e$_2$ 7
9	$\forall x\,Q(x)$	$\forall x$ i 6–8
10	$\forall x\,P(x) \wedge \forall x\,Q(x)$	$\wedge$i 5, 9

g) $\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \ \vdash \ \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$:

De Huth & Ryan (notar que usa otra notación para las reglas):

1		$\exists x\,(P(x) \wedge Q(x))$	prem
2	x_0		
3		$P(x_0) \wedge Q(x_0)$	assum
4		$P(x_0)$	$\wedge e_1$ 3
5		$\exists x\, P(x)$	$\exists x$ i 4
6		$Q(x_0)$	$\wedge e_2$ 3
7		$\exists x\, Q(x)$	$\exists x$ i 6
8		$\exists x\, P(x) \wedge \exists x\, Q(x)$	$\wedge$i 5, 7
9		$\exists x\, P(x) \wedge \exists x\, Q(x)$	$\exists x$ e 1, 2–8

h) $\forall x \forall y (G(y) \rightarrow F(x)) \ \vdash \ \exists y G(y) \rightarrow \forall x F(x)$:

i) $\forall x \neg P(x) \ \vdash \ \neg \exists x P(x)$:

1.	$\forall x \neg P(x)$	premisa
2.	$\exists x P(x)$	hipótesis
3.	x_0	
4.	$P(x)[x_0/x]$	hipótesis
5.	$(\neg P(x))[x_0/x]$	$e_\forall(1)$
6.	$\neg P(x)[x_0/x]$	trivial(5)
7.	$\bot$	$i_\bot(4)(6)$
8.	$\bot$	$e_\exists(2)(3-8)$
9.	$\neg \exists x P(x)$	$i_\neg(2-9)$

j) $\forall x (f(x, c) = x), \forall x (f(c, x) = x) \ \vdash \ \forall y (\forall x (f(x, y) = x)) \rightarrow y = c)$:

---

5. Sean ϕ y ψ fórmulas de la lógica de predicados. Demostrar las siguientes equivalencias deductivas, asumiendo que $x \notin FV(\psi)$:

a) $\forall x \phi \vee \psi \dashv\vdash \ \forall x (\phi \vee \psi)$

b) $\exists x (\phi \rightarrow \psi) \dashv\vdash \ \forall x \phi \rightarrow \psi$

c) $\forall x (\phi \rightarrow \psi) \dashv\vdash \ \exists x \phi \rightarrow \psi$

Solución:

a) $\forall x \phi \vee \psi \dashv\vdash \ \forall x (\phi \vee \psi)$:

b) $\exists x(\phi \to \psi) \dashv\vdash \forall x\phi \to \psi$:

1.	$\exists x(\phi \to \psi)$	Premisa
2.	$\forall x\phi$	Hipótesis
3.		x_0
4.	$(\phi \to \psi)[x_0/x]$	Hipótesis
5.	$\phi[x_0/x] \to \psi[x_0/x]$	Trivial (4)
6.	$\phi[x_0/x] \to \psi$	Trivial (5) $(x \notin FV(\psi))$
7.	$\phi[x_0/x]$	$e_\forall(2)$
8.	ψ	$e_\to(7)(6)$
9.		
10.	ψ	$e_\exists(1)(3-8)$
11.	$\forall x\phi \to \psi$	$i_\to(2-10)$

1.	$\forall x\phi \to \psi$	Premisa
2.	$\forall x\phi \vee \neg(\forall x\phi)$	TND
3.	$\forall x\phi$	Hipótesis
4.	$\phi[t/x]$	Hipótesis
5.	ψ	$e_\to(3)(1)$
6.	$\phi[t/x] \to \psi$	$i_\to(4-5)$
7.	$\phi[t/x] \to \psi[t/x]$	Trivial (6)$(x \notin FV(\psi))$
8.	$(\phi \to \psi)[t/x]$	Trivial (7)
9.	$\exists x(\phi \to \psi)$	$i_\exists(8)$
10.	$\neg\forall x\phi$	Hipótesis
11.	$\exists x\neg\phi$	Lema aux.
12.		x_0
13.	$(\neg\phi)[x_0/x]$	Hipótesis
14.	$\neg\phi[x_0/x]$	Trivial (13)
15.	$\phi[x_0/x]$	Hipótesis
16.	$\bot$	$i_\bot(15)(14)$
17.	ψ	$e_\bot(16)$
18.	$\phi[x_0/x] \to \psi$	$i_\to(15-17)$
19.	$\phi[x_0/x] \to \psi[x_0/x]$	Trivial (18) $(x \notin FV(\psi))$
20.	$(\phi \to \psi)[x_0/x]$	Trivial (19)
21.	$\exists x(\phi \to \psi)$	$i_\exists(20)$
22.		
23.	$\exists x(\phi \to \psi)$	$e_\exists(11)(12-21)$
24.	$\exists x(\phi \to \psi)$	$e_\vee(2)(3-9)(10-23)$

c) $\forall x(\phi \to \psi) \dashv\vdash \exists x\phi \to \psi$:

---

6. Pruebe la validez de los siguientes secuentes:

a) $\forall x \forall y P(x,y) \vdash \forall u \forall v P(u,v)$

b) $\exists x \exists y F(x,y) \vdash \exists u \exists v F(u,v)$

Solución:

a) $\forall x \forall y P(x,y) \vdash \forall u \forall v P(u,v)$:

1.	$\forall x \forall y P(x,y)$	Premisa
2.		x_0
3.		y_0
4.	$\forall y P(x_0,y)$	$e_\forall$ (1)
5.	$P(x_0,y_0)$	$e_\forall$ (4)
6.	$\forall v P(x_0,v)$	$i_\forall(3-5)$
7.	$\forall u \forall v P(u,v)$	$i_\forall(2-6)$

b) $\exists x \exists y F(x,y) \vdash \exists u \exists v F(u,v)$:

---

7. En la Práctica 5 se pedía dar un conjunto de fórmulas Γ que caracterice la estructura de grupo.

a) Demuestre que $\Gamma \vdash e = e^{-1}$

b) Exprese, mediante una fórmula ϕ, la siguiente propiedad:

"Existe un único elemento neutro para la operación binaria"

c) Demuestre que $\Gamma \vdash \phi$

Solución:

---

8. En el ejercicio 6 de la Práctica 5 se pedía caracterizar a los grafos simples bipartitos mediante un conjunto Γ de fórmulas de la lógica de predicados. Utilizando dicha formalización, demuestre:

a) $\Gamma \vdash \forall x \forall y \forall z\, (U(x) \wedge R(x,y) \wedge R(y,z) \to U(z))$

b) $\Gamma \vdash \forall x \forall y \forall z\, (R(x,y) \wedge R(x,z) \wedge W(y) \to W(z))$

Solución:
