4. Encontrar la forma reducida y los vectores que generan los espacios nulos para cada una de las matrices:

   $a)$ $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$.

   $b)$ $B = \begin{bmatrix} A & A \end{bmatrix}$.

   $c)$ $C = \begin{bmatrix} A & A \\ A & 0 \end{bmatrix}$.

$a)$ Para encontrar la forma reducida de A realizamos los siguientes pasos:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{P_{13}\times} U = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{12}(-2)\times} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{D\times} R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donde $D = D(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1)$, matriz diagonal 3×3 con $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ y 1 en su diagonal.

En el sistema $Ax = 0$, las variables pivots son x_1 y x_3 mientras que x_2 es la única variable libre. Los vectores generadores de $N(A)$ son las soluciones especiales del sistema $Ax = 0$, que corresponden a fijar cada una de las variable libres en el valor uno y las otras en el valor cero. En este caso, sólo x_2 es libre, por lo tanto la solución especial es la solución del sistema $x_1 + 2x_2 = 0$, $x_3 = 0$ y $x_2 = 1$. Por lo tanto, el vector generador de $N(A)$ es $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Recordar que podríamos haber encontrado esta solución especial directamente a partir de la columna de R correspondiente a la variable libre, donde encontramos los valores de las variables pivots con signo contrario.

$b)$ No es dificil ver que si aplicamos a B las mismas transformaciones que a A logramos su forma reducida. En efecto, si $T = D \times E_{12}(-2) \times P_{13}$, sabemos que $TA = R$. Por lo tanto, $TB = [R\ R]$.
A partir de su forma reducida determinamos las variables libre y pivots del sistema $By = 0$.
En este caso, y_1 e y_3 siguen siendo las variables pivots pero ahora tenemos cuatro variables libres: y_2, y_4, y_5 e y_6. Por lo tanto tendremos 4 soluciones especiales (cada una de ellas será un generador de $N(B)$) de la forma:

$$\begin{bmatrix} ? \\ 1 \\ ? \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ? \\ 0 \\ ? \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ? \\ 0 \\ ? \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} ? \\ 0 \\ ? \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Para determinar las entradas faltantes, miramos las columnas de $[R\ R]$ correspondientes a cada variable libre donde las encontraremos con su signo cambiado. Así, los vectores generadores de $N(B)$ son:

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

c) Para reducir C deberemos trabajar con las operaciones elementales. Verificar que su forma reducida es

$$\widetilde{R} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

En este caso, las variables pivots del sistema $Az = 0$ son z_1, z_3, z_4 y z_6. Trabajando en forma similar a las anteriores encontramos que las soluciones especiales que generan a $N(C)$ son:

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

5. Dadas las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 4 \\ 2 & 5 & 7 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix},$$

se pide:

a) Reducir $[A\ b]$ a $[U\ c]$ para obtener un sistema triangular $Ux = c$.

b) Encontrar condiciones sobre b_1, b_2 y b_3 para que el sistema tenga solución.

c) Describir el espacio columna de A. ¿Cuál es el plano de $\mathbb{R}^3$ que representa el espacio columna $C(A)$?

d) Describir el espacio nulo de A. ¿Cuál es la matriz de soluciones especiales?

e) Encontrar una solución particular de $Ax = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ y la solución completa $x = x_P + x_N$.

a) Vamos a reducir $[A\ b]$ a $[U\ c]$.

$$[\,A \mid b\,] = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 4 & | & b_1 \\ 2 & 5 & 7 & 6 & | & b_2 \\ 2 & 3 & 5 & 2 & | & b_3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 4 & | & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & | & b_2 - b_1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & | & b_3 - b_1 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 4 & | & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & | & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & b_3 + b_2 - 2b_1 \end{bmatrix} = [\,U \mid c\,].$$

Así obtenemos el siguiente sistema triangular,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 4x_4 & = & b_1 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 & = & b_2 - b_1 \\ 0 & = & b_3 + b_2 - 2b_1 \end{array} \right. .$$

b) Para que el sistema tenga solución se tiene que satisfacer la condición,

$$b_3 + b_2 - 2b_1 = 0.$$

c) El espacio columna de A, $C(A)$, es el espacio generado por las columnas pivotes, entonces

$$C(A) = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle.$$

Además, el espacio columna contiene a todos los vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que $b_3 + b_2 - 2b_1 = 0$. Por lo tanto, la ecuación del plano que representa el espacio columna es:

$$-2x + y + z = 0.$$

d) Como el espacio nulo de A coincide con el espacio nulo de R, $N(A) = N(R)$, vamos a llevar a U a la forma escalonada reducida.

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R\,.$$

Podemos observar que x_1 y x_2 son variables pivots y x_3 y x_4 son variables libres.
Para resolver $Rx = 0$, asignamos los valores $x_3 = t$ y $x_4 = s$ entonces tenemos que encontrar las soluciones del sistema

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 + t - 2s & = & 0 \\ x_2 + t + 2s & = & 0 \end{array} \right. , \quad t, s \in \mathbb{R},$$

que es equivalente a

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & -t + 2s \\ x_2 & = & -t - 2s \end{array} \right. , \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Entonces, las soluciones del sistema $Rx = 0$ son de la forma

$$x = \begin{bmatrix} -t + 2s \\ -t - 2s \\ t \\ s \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Así tenenemos que, $\quad N(R) = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle.$

Por lo tanto,

$$N(A) = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle.$$

Podíamos describir directamente el espacio nulo de A a partir de que sabemos que x_1 y x_2 son variables pivots y x_3 y x_4 variables libres. Pues, tenemos una solución especial por cada variable libre, fijamos esa variable libre en 1 y las restantes en 0 y así, los valores de las variables pivots en las soluciones especiales son los valores opuestos de las entradas de las filas pivots en las columnas de las variables libres.

Para terminar de resolver este apartado, falta describir la matriz de soluciones especiales que es:

$$N = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

e) Vamos a encontrar una solución particular de $Ax = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ y la solución completa $x = x_P + x_N$.

Primero observemos que $b = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \in C(A)$, ya que $5 + 3 - 2 \cdot 4 = 0$.

Recordemos que $Ux = c$ es el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 4x_4 & = & b_1 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 & = & b_2 - b_1 \\ 0 & = & b_3 + b_2 - 2b_1 \end{array} \right. .$$

Ya vimos que la última ecuación se satisface para $b = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$, entonces nos queda por resolver:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 4x_4 & = & b_1 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 & = & b_2 - b_1 \end{array} \right. ,$$

donde x_1 y x_2 son variables pivots y x_3 y x_4 variables libres.
Estamos buscando una solución particular para el sistema, entonces le asignamos el valor 0 a las variables libres (para que las cuentas resulten más sencillas) y tenemos,

$$x_3 = x_4 = 0,$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x_1 + 4x_2 & = & b_1 \\ x_2 & = & b_2 - b_1 \end{array} \right. .$$

Resolvemos con $b = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$, utilizando sustitución hacia atrás y obtenemos:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_2 & = & -1 \\ x_1 & = & 4 \end{array} \right. .$$

Luego la solución particular del sistema considerando las variables libres iguales a 0 es $x_P = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Por último, debemos calcular las soluciones del sistema $Ax = b$ que son de la forma $x = x_P + x_N$, donde x_P es la solución particular encontrada y x_N cualquier vector en $N(A)$. Por lo tanto,

$$x = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

7. La ecuación $x - 3y - z = 0$ determina un plano en $\mathbb{R}^3$.

   a) ¿Cuál es la matriz A asociada a esta ecuación?

   b) ¿Cuáles son las variables libres?

   c) ¿Una de las soluciones especiales es $(3, 1, 0)$, cuál es la otra?

d) El plano $x - 3y - z = 12$, paralelo al plano dado, contiene al punto particular $(12, 0, 0)$. Escribir la componente que falta para describir la forma que tienen los puntos en este plano:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} \ \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \ \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a) Primero que nada, traemos el problema a la materia: cada punto del plano $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 3y - z = 12\}$ es una solución del sistema

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 12$$

y recíprocamente, cada solución del sistema es un punto del plano. Luego, es lo mismo trabajar con una u otra descripción, pero nosotros trabajamos con la que sabemos! La matriz asociada resulta:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Dada la forma escalonada de una matriz, las variables libres son las variables correspondientes a las columnas que no son columnas pivots. Como A ya está en su forma escalonada resulta que las variables libres son y y z.

c) Sin hacer cuentas, ¿a qué variable libre corresponde la solución especial $(3, 1, 0)$?

Observando que el vector tiene una única componente en 1 está claro que la solución especial $(3, 1, 0)$ corresponde a la variable libre y.

¿Si hubiese más de una componente en 1 habría que hacer cuentas?

Si disponemos de la matriz en su forma escalonada la respuesta es no. El motivo es que con la matriz en su forma escalonada sabemos cuáles son las variables libres y por lo tanto podemos realizar un proceso de descarte sobre las que se evalúan en 0.

Retomando la pregunta del enunciado... Sabiendo que falta la solución especial asociada a la variable libre z, es fácil VER que esta es $(1, 0, 1)$.

d) Con el propósito de justificar el "VER" del apartado anterior y explicar las ideas de la unidad, vamos a resolver el ejercicio como si tuviesemos que completar:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ \\ \ \\ \ \end{bmatrix} + ? \begin{bmatrix} \ \\ \ \\ \ \end{bmatrix} + ? \begin{bmatrix} \ \\ \ \\ \ \end{bmatrix}$$

- Para conocer las soluciones de un sistema necesitamos de una solución particular y el espacio nulo de la matriz de coeficientes. El enunciado nos regala la solución particular $(12, 0, 0)$:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + ? \begin{bmatrix} \ \\ \ \\ \ \end{bmatrix} + ? \begin{bmatrix} \ \\ \ \\ \ \end{bmatrix}$$

- Como tenemos a la matriz de coeficientes en su forma escalonada podemos llenar los ?, más aún, la solución especial tiene valor 1 en su variable libre correspondiente y 0 en las demás:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} \ \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \ \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Si se dispone de la forma escalonada reducida de la matriz de coeficientes (como en nuestro caso! no lo mencioné antes porque no hacía falta), entonces completar lo que falta es tan fácil como VER una matriz. Para saber el valor de un pivot en una solución especial basta **tomar el opuesto del valor que se encuentra en la fila de dicho pivot (FILA PIVOT), y en la columna de la variable libre asociada a la solución especial ("COLUMNA LIBRE")**. En nuestro caso, el único pivot es la variable x que corresponde a la fila 1, la columna correspondiente a la variable libre y nos dice que completemos su solución especial con un $-(-3)$ y la columna correspondiente a la variable libre z nos dice que completemos su solución especial con un $-(-1)$:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Es importante reflexionar lo resaltado en negrita: como toda COLUMNA PIVOT tiene ceros salvo en la posición del pivot y toda "FILA LIBRE" es una fila de ceros o no existe, resulta que

TODA COMPONENTE NO NULA DE UNA MATRIZ ESCALONADA REDUCIDA DICE ALGO

Los primeros 1's de las primeras filas nos dicen cuáles son los pivots (el espacio columna de la matriz de coeficientes se genera por las columnas <u>originales</u> respectivas) y las demás componentes no nulas nos describen completamente a las soluciones especiales (es decir, al espacio nulo de la matriz de coeficientes).