Capítulo 5 - Autovalores y Autovectores (1ra. parte) [1]

Facultad de Cs. Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario

[1] Siguiendo *Linear Algebra and its applications*, G. Strang.

OUTLINE

En este capítulo, el protagonismo lo tiene la ecuación matricial

$$Ax = \lambda x.$$

donde A es una matriz cuadrada $n \times n$. Observemos que la ecuación no es lineal, ya que $\lambda \in \mathbb{K}$ y $x \in \mathbb{R}^n$ son variables.

Esta ecuación aparece en un sinnúmero de problemas y su resolución no es sencilla en general. Más aún, veremos que con 5 variables el problema ya se torna complejo de resolver.

Intentemos interpretar soluciones de esta ecuación matricial. Pensemos a A como tranformación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$. Dado $x \in \mathbb{R}^n$, Ax es el vector imagen de x a través de A. Si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $Ax = \lambda x$ estamos diciendo que A *no cambió la dirección de* x.

Esto es, buscamos el conjunto de vectores cuya dirección no varía por efecto de A.

- En $\mathbb{R}^3$, si A es la matriz correspondiente a la trasformación *rotación de* 45° *alrededor del eje* z, ¿qué vectores serían solución de la ecuación $Ax = \lambda x$? ¿Con qué valores de λ?.
- Si A es la transformación que nos da el simétrico de cada punto respecto al origen, ¿cómo son las soluciones de $Ax = \lambda x$? Ejercicio: ¿quién es A?
- En $\mathbb{R}^2$, mismas preguntas que en el primer item, con $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$$Ax = \lambda x \Longleftrightarrow A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (2x_1 = \lambda x_1) \wedge (x_2 = \lambda x_2) \Longleftrightarrow (\lambda = 2 \wedge x_2 = 0) \vee (\lambda = 1 \wedge x_1 = 0).$$

Los vectores que participan de las soluciones son los de los ejes x e y. ¿Podríamos haberlo deducido geométricamente?

Propiedad: Sea $x \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que $Ax = \lambda x$. Entonces, para todo $\alpha \in \mathbb{R}, A(\alpha x) = \lambda(\alpha x)$.

Podemos restringirnos a buscar vectores solución $x \in \mathbb{R}^2$ con módulo (norma) 1, esto es, los puntos de la circunferencia centrada en el origen, de radio 1.

- (continuación) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y trabajamos con

$$\theta \in [0, 2\pi] : \ x = \begin{bmatrix} cos\,\theta \\ sen\,\theta \end{bmatrix} \longrightarrow Ax = \begin{bmatrix} 2\,cos\,\theta \\ sen\,\theta \end{bmatrix}$$

¿Qué curva definen las imágenes a través de A de los puntos de módulo 1? Una elipse con semiejes de longitud 2 (en x) y 1 (en y). Así, A lleva un punto de la circunferencia en un punto de la elipse con la misma ordenada. Podemos *ver* que los puntos de la circunferencia que *no cambian su dirección por efecto de* A están sobre los ejes coordenados.

Veamos un ejemplo donde esta ecuación surge, en el contexto de las ecuaciones diferenciales.

Una de las ecuaciones diferenciales más sencillas es $v'(x) = a\,v(x)$ con $a \in \mathbb{R}$.

Es fácil probar que todas las posibles soluciones a esta ecuación diferencial son de la forma

$$v(x) = c\,e^{ax},\ c \in \mathbb{R}.$$

Si queremos una solución en particular, basta fijar su valor en $x = 0$ ya que $v(0) = c$.

Un *sistema lineal de ecuaciones diferenciales* de dos funciones incógnitas u, v tiene la forma

$$\begin{aligned} u'(x) &= a\ u(x) + b\ v(x) \\ v'(x) &= c\ u(x) + d\ v(x) \end{aligned}$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, utilizando notación de *vectores de funciones*

$$w(x) = \begin{bmatrix} u(x) \\ v(x) \end{bmatrix}, \;\; w'(x) = \begin{bmatrix} u'(x) \\ v'(x) \end{bmatrix},$$

el sistema de ecuaciones diferenciales lineales toma la forma

$$w'(x) = A\, w(x).$$

La similitud con la ecuación de una incógnita $v'(x) = a\, v(x)$ nos lleva a proponer *soluciones exponenciales*:

$$\begin{array}{c} u(x) = \alpha\, e^{\lambda x} \\ v(x) = \beta\, e^{\lambda x} \end{array}.$$

Queremos determinar $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ para que u y v así construidas sean solución del sistema.

Sustituyendo en el sistema tenemos:

$$\begin{array}{rcl} \alpha\,\lambda\,e^{\lambda x} & = & a\,\alpha\,e^{\lambda x}+b\,\beta\,e^{\lambda x} \\ \beta\,\lambda\,e^{\lambda x} & = & c\,\alpha\,e^{\lambda x}+d\,\beta\,e^{\lambda x} \end{array}$$

o, equivalentemente,

$$\begin{array}{rcl} \alpha\,\lambda & = & a\,\alpha+b\,\beta \\ \beta\,\lambda & = & c\,\alpha+d\,\beta \end{array}$$

lo cual puede ser expresado como

$$\lambda\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}=A\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}.$$

Esto puede generalizarse a un sistema lineal de ecuaciones diferenciales con n funciones incógnitas y las soluciones exponenciales de este sistema se construirán resolviendo un sistema del tipo $Ax=\lambda x$.

Más adelante veremos otras aplicaciones donde la ecuación $Ax=\lambda x$ juega un rol protagónico.

La ecuación $Ax = \lambda x$, con A una matriz $n \times n$, puede ser pensada como un caso particular de la ecuación $Tv = \lambda v$ para T un operador lineal cualquiera de un espacio vectorial en si mismo.

Tenemos así la siguiente definición general.
Definición:
Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y T una transformación lineal de V en si mismo. Entonces, $\lambda \in \mathbb{K}$ es un *autovalor* (o *valor propio*) *de* T si existe $v \in V$, $v \neq 0$ tal que $Tv = \lambda v$.
Si $\lambda \in \mathbb{K}$ es un autovalor de T, todo vector $v \neq 0 \in V$ tal que $Tv = \lambda v$ se denomina *autovector* (o *vector propio*) *de* T *asociado a* λ. El conjunto de todos los autovectores asociados a λ, conjuntamente con el vector nulo, se denomina *autoespacio de* T *asociado a* λ.

Cuando trabajamos con transformaciones lineales definidas por una matriz cuadrada A, hablamos de autovectores, autovalores y autoespacios *de la matriz*.

Lema: Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, T una transformación lineal de V en si mismo y $\lambda \in \mathbb{K}$ un autovalor de T. Entonces, el autoespacio $V(T,\lambda)$ de T asociado a λ es un subespacio vectorial de V.

Prueba 1:
Verificar $v, w \in V(T,\lambda) \Longrightarrow \alpha v + \beta w \in V(T,\lambda)\ \forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Ejercicio. $\square$

Prueba 2:
Observar que $V(T,\lambda) = \{v \in V : Tv = \lambda v\}$ (en el autoespacio incluimos al vector nulo).
Además, si I es la tranformación identidad de V en V tenemos que, para todo $v \in V(T,\lambda)$, $Tv = \lambda Iv$. Equivalentemente, $(T - \lambda I)v = 0$.

Por lo tanto, $V(T,\lambda) = N(T - \lambda I)$, con $N(T - \lambda I)$ el espacio nulo de la transformación lineal $T - \lambda I$. Como el espacio nulo de una transformación lineal es un subespacio vectorial del dominio, $V(T,\lambda)$ es un subespacio vectorial de V. $\square$

Utilizando lo realizado en la prueba anterior, surge una definición alternativa de autovalor de una transformación lineal.

Definición(alternativa de autovalor):
Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y T una transformación lineal de V en si mismo. Entonces, $\lambda \in \mathbb{K}$ es un autovalor de T si la transformación lineal $T - \lambda I$ no es un isomorfismo.(Justificar)

Cuando trabajamos con transformaciones lineales definidas por una matriz A, sabemos que la transformación es un isomorfismo si y sólo si A es inversible. Por lo tanto, λ es un autovalor de A si y solo si

$$det(A - \lambda I) = 0 \qquad (\textit{Ecuación característica de } A).$$

Veamos a qué tipo de problema nos lleva esta nueva caracterización de los autovalores de una matriz, a través de su ecuación característica.

Si $A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, entonces $A - \lambda I = \begin{bmatrix} 4-\lambda & -5 \\ 2 & -3-\lambda \end{bmatrix}$ y la ecuación característica es

$$det(A - \lambda I) = (4-\lambda)(-3-\lambda) + 10 = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0.$$

Los autovalores son las raíces del $p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2$. En este caso tenemos una fórmula fácil para obtener las raíces $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 2$.

En general, los autovalores de una matriz A resultan ser las raíces del *polinomio característico* que se obtienen con el desarrollo del $det(A - \lambda I)$. Además, el autoespacio asociado a un autovalor λ está formado por los vectores $v \in \mathbb{R}^n$ tales que $(A - \lambda I)v = 0$. Por lo tanto, el autoespacio no es otra cosa que $N(A - \lambda I)$.

En el ejemplo, para $\lambda_1 = -1$, buscamos

$$N(A+I) = N\left(\begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\right).$$

Este espacio resulta ser el generado por (el autovector) $x^1 = (1,1)^T$.

Trabajando similarmente con el autovalor $\lambda_2 = 2$, resulta que $N(A-2I)$ es el espacio generado por (el autovector) $x^2 = (5,2)^T$.

Como el polinomio característico de una matriz $n \times n$ tendrá grado n y, por lo tanto, para $n \geq 5$, ya no tenemos fórmulas cerradas que nos permitan encontrar sus raíces (Galois).

Veremos algunos casos particulares donde el cálculo no es tan complejo.

Ejemplos:

- Matriz diagonal:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} \end{bmatrix}, \quad A - \lambda I = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 0 & \frac{2}{5}-\lambda \end{bmatrix},$$

$$det(A - \lambda I) = (3-\lambda)(\frac{2}{5} - \lambda).$$

En general, A es una matriz diagonal $n \times n$, $A - \lambda I$ también los es, con entradas en su diagonal $A_i^i - \lambda, i = 1, \ldots, n$. Por lo tanto, el polinomio característico de A *ya viene factorizado*:

$$det(A - \lambda I) = \prod_{i=1}^{n} (A_i^i - \lambda).$$

Los autovalores de una matriz diagonal A coinciden con los elementos de la diagonal de A, esto es, $\lambda_i = A_i^i$, $i = 1, \ldots, n$.

¿Quiénes son los autovectores?

Ejemplos:

- Matriz diagonal (continuación):

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \quad \lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = \frac{2}{5}.$$

Buscamos

$$x^1 \in N(A - 3I) = N(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{13}{5} \end{bmatrix})$$

y

$$x^2 \in N(A - \frac{2}{5}I) = N(\begin{bmatrix} \frac{13}{5} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}).$$

Podemos elegir $x^1 = (1,0)$ y $x^2 = (0,1)$.

Ejercicio: Probar que, si A es matriz diagonal $n \times n$, para todo $i = 1, \ldots, n$, $x^i = e_i$ es un autovector asociado a $\lambda_i = A_i^i$.

Ejemplos:

- Matriz proyección sobre una recta:
  Recordemos que si $a \in \mathbb{R}^n$, $P = \frac{1}{a^T a}\, aa^T$ es la matriz proyección sobre *la recta* $< a >$.
  Veamos el caso $a = (1, -1)^T$. Tenemos que $< a >$ es la recta en $\mathbb{R}^2$ que pasa por el origen con pendiente -1. ¿Quiénes serían los vectores que no cambian su dirección al proyectarse sobre $< a >$? Veamos:

$$P = \frac{1}{2}\left[\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \lambda_1 = 0, x^1 = (1,1)^T \text{ y } \lambda_2 = 1, x^2 = (1,-1)^T.$$

  Así, el autovalor nulo se corresponde con el vector que se proyecta sobre el origen de coordenadas y el autovalor 1, con el vector que se proyecta en sí mismo.

  Observación: ¿Qué significa que $\lambda = 0$ sea autovalor de una matriz A? A tiene un autovalor nulo si y solo si A es no inversible. En el ejemplo, P es una matriz 2×2 de rango 1, no inversible.

Ejemplos:

- Matriz proyección sobre una recta (continuación):
  Supongamos $a \in \mathbb{R}^n$, $P = \frac{1}{a^T a}\, aa^T$, la matriz proyección sobre *la recta* $< a >$.
  También en este caso, los autovalores serán $\lambda = 1$ (con autovector a que se proyecta sobre si mismo) y $\lambda = 0$ (con autovector en $N(P)$ que se proyecta sobre el vector nulo).

  Los autovalores son las raíces del polinomio característico de grado n y las raíces pueden tener multiplicidad mayor a 1. En este caso, $\lambda = 0$ tiene multiplicidad $n-1$ y coincide con la dimensión del espacio nulo de la matriz. Por lo tanto tenemos $n-1$ autovectores l.i. del autovalor $\lambda = 0$, que se proyectan sobre el vector nulo.

  Ejercicio: Encontrar el polinomio característico y 4 autovectores l.i. de la matriz proyección de $\mathbb{R}^4$ sobre $a = (1,1,0,-1)^T$.

Ejemplos:

- Matriz rotación en 90° en $\mathbb{R}^2$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad K(x_1,x_2)^T = (-x_2,x_1)^T, \quad det(K-\lambda I) = \lambda^2+1.$$

No hay autovalor en $\mathbb{R} \longrightarrow$ *Todo vector no nulo de $\mathbb{R}^2$ cambia de dirección bajo el efecto de una rotación*. Sin embargo, en las aplicaciones vamos a necesitar los autovalores $\lambda_1 = i$ y $\lambda_2 = -i$ y los autovectores complejos. Tenemos:

$$(K-\lambda I)x^1 = \begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-i)u - v \\ u - iv \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, x^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}.$$

Similarmente, $x^2 = (1,i)^T$.

Aclaración: Cuando decimos que una matriz $n \times n$ tiene n autovalores, estamos pensando a $\mathbb{R}^n$ como un subespacio del espacio vectorial $\mathbb{C}^n$ sobre $\mathbb{C}$.

Ejemplos:(continuación)

- Matrices Triangulares.

  Ejercicio: Los autovalores de una matriz triangular son los elementos de su diagonal.

Las matrices diagonales y triangulares son aquellas para las cuales es fácil encontrar sus autovalores. Lo mismo sucede cuando resolvemos un sistema lineal. Sin embargo, encontrar los autovalores de una matriz es un problema mucho más difícil que resolver un sistema lineal asociado a esa matriz.
Sería importante tener una forma de *transformar* una matriz a matriz diagonal *sin modificar sus autovalores*.
¡El método de eliminación de Gauss no sirve en este caso!.
Veremos más adelante qué matrices podemos *diagonalizar* y cuáles no.
Antes, presentamos algunas propiedades *bonitas* de los autovalores.

Recordemos: La *traza* de una matriz cuadrada es la suma de los elementos de su diagonal.

Teorema: Sea A una matriz $n \times n$ y $\lambda_i, i = 1, \ldots, n$ sus n autovalores. Entonces,

- $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{i=1}^{n} A_i^i = tr(A)$.
- $\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = det(A)$.

Prueba: Más adelante.

Dada una matriz A, $n \times n$, con $\lambda_i, i = 1, \ldots, n$, sus autovalores, notamos con Λ a la matriz diagonal $n \times n$ con λ_i el elemento de la diagonal de la fila i.

$$n = 3, \;\; \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}.$$

Lema: Sea A una matriz $n \times n$ y $x^i, i = 1, \ldots, n$, autovectores l.i. de A. Sea S la matriz $n \times n$ cuya columna i-ésima es x^i, $i = 1, \ldots, n$. Entonces,

$$S^{-1} A S = \Lambda.$$

Los autovectores diagonalizan la matriz. A veces...

Prueba:
Para todo $i = 1, \ldots, n$, la columna i-ésima de AS es $Ax^i = \lambda_i x^i = \lambda_i x^i$. Por lo tanto, $AS = S\Lambda$.
La lineal independencia de los autovectores me aseguran que existe S^{-1}. Así, $S^{-1}AS = \lambda$. $\square$

Si una matriz $n \times n$ tiene n autovectores l.i. es diagonalizable. ¿Cuándo una matriz $n \times n$ tiene n autovectores l.i.?

Lema: (*a autovalores distintos le corresponden autovectores l.i.*)
Sea A una matriz $n \times n$, $\lambda_i, i = 1, \ldots, r$ autovalores distintos de A y para $i = 1, \ldots, r$, x^i un autovector asociado a λ_i. Entonces $\{x^1, \ldots, x^r\}$ son vectores l.i..

Prueba: Como son autovectores, sabemos que $x^i \neq 0$, $i = 1, \ldots, r$.
La prueba es por inducción en r. El caso $r = 1$ es trivial.
Suponemos que la tesis es válida para $r = k$ y debemos probar su validez para $r = k + 1$.

Prueba: (continuación)
Como $\lambda_i, i = 1, \ldots, k$ son autovalores diferentes, por hipótesis de inducción sabemos que $x^i, i = 1, \ldots, k$, son l.i..
Supongamos que $\{x^i, i = 1, \ldots, k+1\}$ no son l.i.. Entonces, existen $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, k$, tales que

$$x^{k+1} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x^i. \tag{1}$$

Premultiplicando (1) por A obtenemos

$$A x^{k+1} = \lambda_{k+1} x^{k+1} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i A x^i = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \lambda_i x^i. \tag{2}$$

Por otro lado, premultiplicando (1) por λ_{k+1} obtenemos

$$\lambda_{k+1} x^{k+1} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \lambda_{k+1} x^i. \tag{3}$$

Prueba: (continuación)
Igualando (2) y (3), resulta

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \lambda_i x^i = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \lambda_{k+1} x^i. \tag{4}$$

o, equivalentemente

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i (\lambda_i - \lambda_{k+1}) x^i = 0. \tag{5}$$

Como los vectores $\{x^i : i = 1, \ldots, k\}$ son l.i. tenemos que, para todo $i = 1, \ldots, k$

$$\alpha_i (\lambda_i - \lambda_{k+1}) = 0.$$

Como $x^{k+1} \neq 0$, existe $j \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $\alpha_j \neq 0$ (ver 1). Entonces, $\lambda_j - \lambda_{k+1} = 0$ y $\lambda_j = \lambda_{k+1}$, una contradicción.
Por lo tanto, los vectores $x^i, i = 1, \ldots, k+1$, son l.i.. $\square$

Definición: Decimos que A, matriz $n \times n$, es *diagonalizable* si existe una matriz inversible S tal que $S^{-1}AS$ es una matriz diagonal.

Por lo tanto hemos probado:

Teorema: Sea A una matriz $n \times n$. Si los n autovalores de A son diferentes, A es diagonalizable.

Observación: La matriz *diagonalizante* S no es única.

Tenemos el siguiente resultado:

Lema: Sea A una matriz $n \times n$. Entonces, existen S inversible y D matriz diagonal tal que $S^{-1}AS = D$ si y sólo si A tiene n autovectores l.i..

Prueba: Sean S y D tal que $S^{-1}AS = D$. Entonces, $AS = SD$. Para todo $i = 1, \ldots, n$, sea x^i la columna i-ésima de S. Entonces, la columna i-ésima de AS es Ax^i. Por otro lado, como D es diagonal, la columna i-esima de SD es $D_i^i x^i$.

Prueba(continuación)
Como $AS = DS$, resulta que, para todo $i = 1,\dots,n$, $Ax^i = D^i_i x^i$ y por lo tanto D^i_i es un autovalor de A y x^i es una autovector de A. Como S es inversible, sus columnas son n autovectores de A l.i. y por lo tanto A tiene n autovalores l.i..

Supongamos ahora que A tiene n autovectores l.i. x^i, asociados a los autovalores λ_i, $i = 1,\dots,n$. Contruimos S la matriz cuya columna i-ésima es el vector x^i, para $i = 1,\dots,n$. Claramente S es inversible. Además, es fácil de verificar que $AS = \Lambda S$. Por lo tanto, $S^{-1}AS = \Lambda$ y Λ es una matriz diagonal. $\square$

Llamamos *matriz diagonalizante de* A a toda matriz inversible S tal que $S^{-1}AS$ resulte matriz diagonal. Decimos que S *diagonaliza a* A.

Hemos probado que si S diagonaliza a A, las columnas de A son autovectores l.i. de A. Si S diagonaliza a dos matrices A y B entonces A y B tienen los mismos autovectores.

Ejercicio: Si S diagonaliza a dos matrices A y B y $A \neq B$ entonces A y B no tienen los mismos n autovalores.

Más observaciones:

- No todas las matrices son diagonalizables.

  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ tiene como autovalores $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Por lo tanto, una matriz diagonalizante S de A debería ser una matriz inversible tal que $AS = S\Lambda = A0 = 0$. En caso de existir, $A = 0S^{-1} = 0$, una contradicción.

- No todas las matrices con autovalores con multiplicidad son no diagonalizables (o defectuosas).

  El ejemplo más claro es I_n, la matriz identidad $n \times n$. I_n es claramente diagonalizable ya que ella ya es matriz diagonal. En este caso, $\lambda = 1$ es el único autovalor, de multiplicidad n.

  Es fácil ver que cualquier vector de $\mathbb{R}^n$ es un autovector de I_n. Por lo tanto I_n tiene n autovectores l.i. a pesar de no tener n autovalores diferentes.

Más observaciones (continuación):

- En el ejemplo de la matriz rotación en $\mathbb{R}^2$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_{1,2} = \pm i, \quad x^1 = (1, -i)^T, \quad x^2 = (1, i)^T.$$

  Los autovalores son diferentes, ¿los autovectores son l.i.?

  Ejercicio: Verificar que los autovectores (como vectores del espacio vectorial $\mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{C}$) son l.i..

  Entonces,

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix}, \; \Lambda = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}.$$

  Ejercicio: Verificar que $S^{-1} K S = \Lambda$.

Autovalores de potencias y producto de matrices

Veamos otras situaciones donde el cálculo de autovalores es fácil.

Teorema: Sea A una matriz $n \times n$, $\{\lambda_i : i = 1, \ldots, n\}$ los autovalores de A y x^i, $i = 1, \ldots, n$, los autovectores asociados. Entonces, para todo $k \in \mathbb{N}$, $\{\lambda_i^k, i = 1, \ldots, n\}$ es el conjunto de autovalores de A^k. Además, x^i un autovector correspondiente a λ_i^k, para todo $i = 1, \ldots, n$.

Prueba: La prueba es por inducción en k. La tesis obviamente vale para $k = 1$. Asumimos que $A^t x^i = \lambda_i^t x^i$ para todo $i = 1, \ldots, n$ y queremos probar que $A^{t+1} x^i = \lambda_i^{t+1} x^i$.

Para cada $i = 1, \ldots, n$, tenemos

$$A^{t+1}x^i = A(A^t x^i) = A(\lambda_i^t x^i) = \lambda_i^t (Ax^i) = \lambda_i^t (\lambda_i x^i) = \lambda_i^{t+1} x^i.$$

$\square$

Corolario: Si S diagonaliza a A entonces S diagonaliza a A^k, para todo $k \in \mathbb{N}$.
Prueba: Ejercicio.

Si A es inversible, la regla también vale para A^{-1} ($k = -1$). Recordar que si A es inversible, no tiene autovalor nulo.

Teorema: Sea A una matriz $n \times n$ inversible, $\{\lambda_i : i = 1, \ldots, n\}$ el conjunto de sus autovalores y , para todo $i = 1, \ldots, n$, sea x^i un autovector correspondiente a λ_i. Entonces, $\{\lambda_i^{-1} : i = 1, \ldots, n\}$ es el conjunto de los autovalores de A^{-1} y, para todo $i = 1, \ldots, n$, x^i un autovector correspondiente a λ_i^{-1}.

Prueba: Sólo basta observar que, si $Ax = \lambda x$, entonces

$$x = A^{-1}\lambda x = \lambda(A^{-1}x).$$

Así, $A^{-1}x = \lambda^{-1}x$.

Nuevamente tenemos el corolario respecto a la diagonalización de A^{-1}.

Corolario: Si S diagonaliza a A y A es inversible, entonces S diagonaliza a A^{-1}.

Ejemplo: K rotación 90°.

$$K = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \qquad \lambda_{1,2} = \pm i$$

K^2: rotación $180^\circ \longrightarrow K^2 = -I$, $\lambda_{1,2}^2 = \mp 1$.
Los autovectores de K (complejos) son autovectores de K^2. Pero en este caso, e^1, e^2 también son autovectores. En realidad, todos los vectores de $\mathbb{R}^2$ son autovectores.

K^{-1}: rotación -90°. $\lambda_{1,2}^{-1} = \pm \frac{1}{i} = \mp i$.

¿Vale en general *los autovalores de un producto de matrices son producto de sus autovalores*? En general NO.

Sean A, B dos matrices $n \times n$ y (λ_B, x) autovalor de B y autovector correspondiente. Tenemos:

$$(AB)x = A(Bx) = A(\lambda_B x) = \lambda_B(Ax).$$

Si x es también un autovector de A con autovalor λ_A, tenemos:

$$(AB)x = \lambda_B(Ax) = \lambda_B(\lambda_A x) = (\lambda_B \lambda_A)x,$$

resultando $\lambda_B \lambda_A$ autovalor de AB y x autovalor asociado.

Que ambas matrices compartan el autovector es necesario para esta propiedad.

¿Cuando dos matrices comparten sus autovectores?

Observación: Si $A = B$, A y B comparten sus autovectores y $AB = BA = A^2$. Veremos que la propiedad de que las matrices conmuten en el producto es determinante para que compartan sus autovectores.

Teorema: Sean A, B dos matrices $n \times n$, y S, matriz que diagonaliza a A.Si S diagonaliza a B entonces $AB = BA$. Más aún, si A tiene n autovalores diferentes y $AB = BA$, S diagonaliza a B.

Prueba: Si S diagonaliza a A y a B tenemos $A = S\Lambda_1 S^{-1}$ y $B = S\Lambda_2 S^{-1}$. Entonces,

$$AB = (S\Lambda_1 S^{-1})(S\Lambda_2 S^{-1}) = S(\Lambda_1\Lambda_2)S^{-1}.$$

Como Λ_1 y Λ_2 son matrices diagonales, $\Lambda_1\Lambda_2 = \Lambda_2\Lambda_1$. Por lo tanto:

$$AB = S(\Lambda_1\Lambda_2)S^{-1} = S(\Lambda_2\Lambda_1)S^{-1} = BA.$$

Supongamos ahora que $AB = BA$ y A tiene todos sus autovalores diferentes. Entonces, dado λ autovalor de A, el autoespacio de λ tiene dimensión 1. (Justificar)

Prueba: (continuación)
Sea λ, x tales que $Ax = \lambda x$. Tenemos:

$$A(Bx) = (AB)x = (BA)x = B(\lambda x) = \lambda(Bx).$$

Por lo tanto Bx es también autovector de A asociado a λ. Como el autoespacio correspondiente λ tiene dimensión 1, Bx es un múltiplo de x. Esto es, existe λ_B tal que $Bx = \lambda_B x$ y x es un autovector de B. □

Observación: La conmutatividad de las matrices en el producto es condición suficiente (y necesaria) para que compartan sus autovectores. La condición de que una de ellas tenga todos sus autovalores diferentes NO ES NECESARIA. La prueba es un poco más compleja y no la vemos, pero aceptamos la validez del siguiente teorema:

Teorema: Sean A, B dos matrices $n \times n$, y S, matriz que diagonaliza a A. Entonces, S diagonaliza a B si y solo si $AB = BA$.

Muchos problemas de aplicación se resuelven a través de la soluciones de un sistema *de ecuaciones en diferencias* de la forma

$$u_{k+1} = A\,u_k,\ \ k \in \mathbb{N},\ \ u_0 \in \mathbb{R}^n$$

donde A es una matriz $n \times n$. La solución es una sucesión infinita $\{u_k : k \in \mathbb{N}\}$. Sin embargo, muchas veces estamos interesados sólo en conocer uno de los términos de la sucesión. Por ejemplo, el correspondiente a $k = 10^{30}$. ¡No queremos aplicar la recursión 10^{30} veces!
Es fácil ver que $u_k = A^k u_0$. ¡Pero tampoco vamos a calcular $A^{10^{30}}$!.
Si A es diagonalizable los cálculos se simplifican. Sea S matriz diagonalizante de A y $x^i, i = 1, \dots n$ los autovectores columnas de S. Entonces:

$$u_k = A^k u_0 = (S\Lambda^k S^{-1})u_0 = (S\Lambda^k)\underbrace{(S^{-1}u_0)}_{c}.$$

Resolvemos $Sc = u_0$ (Gauss, ¡fácil!) Entonces,

$$u_k = (S\Lambda^k)c = \sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i^k x^i.$$

Resumiendo, dado un sistema en diferencias

$$u_{k+1} = Au_k, \ \ k \in \mathbb{N}, \ \ u_0 \in \mathbb{R}^n,$$

con A diagonalizable por S y autovalores $\lambda_i, i = 1, \ldots, n$, resolvemos el sistema $Sc = u_0$ y obtenemos

$$u_k = \sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i^k x^i$$

con x^i la columna i-ésima de S.

Ejemplos:

- **Números de Fibonacci**:
  Conocemos la sucesión de Fibonacci $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$, que se construye con la ecuación

$$F_{k+2} = F_{k+1} + F_k, k \geq 2, \ \ F_0 = 0, \ \ F_1 = 1.$$

Ejemplos:

- **Números de Fibonacci** (continuación):

$$F_{k+2} = F_{k+1} + F_k, k \geq 2, \;\; F_0 = 0, \;\; F_1 = 1.$$

Para $k \geq 2$, la ley $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$, es equivalente al siguiente sistema:

$$\begin{array}{c} F_{k+2} = F_{k+1} + F_k \\ F_{k+1} = F_{k+1} \end{array} .$$

Si llamamos $u_k = (F_{k+1}, F_k)$ y el sistema anterior puede ser reescrito como

$$u_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u_k = Au_k.$$

Ejercicio: Probar que, para todo $k \geq 2$,
$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \right]$.
¡Y son números enteros!