Práctica 3 (*primera parte*): ESPACIOS VECTORIALES (EJERCICIOS RESUELTOS)

1. Analizar si los siguientes conjuntos con las operaciones definidas son espacios vectoriales, cuando no se explicitan las operaciones suma y producto por escalares es porque se consideran las habituales.

   $a)$ El conjunto de los números reales positivos $\mathbb{R}_+$.

   $b)$ El conjunto de los números reales positivos $\mathbb{R}^+$, con la suma $x+y$ definida como $x.y$ y el producto cx como x^c.

   $c)$ El conjunto de las funciones pares.

   $d)$ El conjunto de las funciones continuas con el producto cf definido como $(cf)(x) = f(cx)$.

   $e)$ El conjunto de las funciones reales biyectivas con la suma $f+g$ definida como $(f+g)(x) = f(g(x))$.

   $f)$ El conjunto de los polinomios a coeficientes reales de grado a lo sumo 3, incluído el polinomio nulo.

   $g)$ $\mathbb{R}^2$ con la suma de $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ definida como $x + y = (x_1 + y_1 + 1, x_2 + y_2 + 1)$.

   Decir en cada caso que no resulte e.v., cuál es la propiedad que se está violando.

   CONCEPTOS NECESARIOS

   Enunciamos los siguientes conceptos que se van a citar a lo largo del ejercicio, no es necesario que en sus resoluciones los mencionen, aca lo hacemos para dejar bien en claro qué justifica cada paso.

   Suponemos que existen $\mathbb{R}, +, *, >$ que verifican:

(1)	Asociativa de la suma:	Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$, $(a+b)+c = a+(b+c)$
(2)	Conmutativa de la suma:	Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a+b = b+a$
(3)	Elemento neutro de la suma:	$\exists\, 0 \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}$, $a+0 = 0+a = 0$
(4)	Asociativa del producto:	Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$, $(a*b)*c = a*(b*c)$
(5)	Conmutativa del producto:	Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a*b = b*a$
(6)	Elemento neutro del producto:	$\exists\, 1 \in \mathbb{R}$ con $1 \neq 0, \forall a \in \mathbb{R}$, $a*1 = 1*a = a$
(7)	Elemento inverso del producto:	Sea $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \exists\, a^{-1} \in \mathbb{R}$, $a*a^{-1} = a^{-1}*a = 1$
(8)	Distributiva del producto respecto a la suma:	Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$, $(a+b)*c = a*c + b*c$
(10)	Tricotomía de $>$:	Sean $a, b \in \mathbb{R}$, una y solo una es cierta $a > b, a = b, b > a$
(11)	Transitividad de $>$:	Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$, si $a > b$ y $b > c$ entonces $a > c$
(12)	Monotonía de $>$ con respecto a la suma:	Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$, si $a > b$ entonces $a+c > b+c$
(13)	Monotonía de $>$ con respecto al producto:	Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $c > 0$, si $a > b$ entonces $a*c > b*c$

   Relacionado a funciones:

(14)	Igualdad de funciones:	Sean $f, g : A \to B$, decimos que $f = g \iff f(x) = g(x),\ \forall x \in A$
(15)	Suma de funciones reales:	Sean $f, g, h : A \to B$, decimos que $h = f+g \iff h(x) = f(x)+g(x),\ \forall x \in A$
(16)	Producto de funciones reales:	Sean $f, g, h : A \to B$, decimos que $h = f*g \iff h(x) = f(x)*g(x),\ \forall x \in A$

   Antes de desarrolar los ítems, recordamos que:

   - Si queremos demostrar que algo es espacio vectorial hay que demostrar que se cumplen TODAS las propiedades
   - Si queremos demostrar que algo no es espacio vectorial basta con mostrar que no se cumple UNA propiedad (y además, para el caso de propiedades como la conmutatividad, con UN ejemplo de no cumplimiento nos alcanza).

   $b)$ El espacio que está formado por los números positivos siendo la suma del espacio el producto de los números y el producto por un escalar la exponención por el elemento del cuerpo ES un espacio vectorial:

   - Sean $x > 0, y > 0$. Tenemos que $xy > 0$ por (13), por lo cual la suma del espacio es cerrada.
   - Sean $x > 0, y > 0, z > 0$. Dado que son número reales,

   $$x(yz) \overset{(4)}{=} (xy)z$$

   y por lo tanto la suma del espacio es asociativa.

- Sean $x > 0, y > 0$. Dado que son número reales,

$$xy \overset{(5)}{=} yx,$$

  y por lo tanto la suma del espacio es conmutativa.
- Observamos que $1 \in \mathbb{R}$ es tal que $1x = x$ para todo $x > 0$. Luego, como $1 > 0$ (se demuestra con la tricotomía, un axioma de orden y el axioma que dice que $1 \neq 0$) la suma del espacio tiene elemento neutro.
- Sea $x > 0$. Observamos que como x es un número real distinto de 0 existe por (7) el número x^{-1} tal que $x * x^{-1} = 1$. Luego, suponiendo que x^{-1} es negativo (pensar por qué no puede ser 0!), resulta que $0 > x^{-1}$ y aplicando (13) con $x > 0$ llegamos a $0 > 1$ (ver que $0 * x = 0$!) que es una contradicción de suponer que x^{-1} es negativo. Luego, el opuesto de la suma está en el espacio.
- Sea $x > 0$ y $c \in \mathbb{R}$. Aceptamos sin demostrar que $x^c \in \mathbb{R}$ para todo $x \in \mathbb{R}$, en particular los positivos (no es importante demostrar estas cosas, puede llegar a ser más difícil que el propio ejercicio).
- Sea $x > 0$ y $1 \in \mathbb{R}$. Observamos que

$$1 \cdot x = x^1 = x,$$

  y por lo tanto el elemento neutro del cuerpo es el elemento neutro del producto por un escalar.
- Sea $x > 0$ y $a, b \in \mathbb{R}$. Observamos que

$$(a * b) \cdot x = x^{a*b} = x^{b*a} \overset{(5)}{=} (x^b)^a = (b \cdot x)^a = a \cdot (b \cdot x),$$

  y por lo tanto el producto del cuerpo y el producto por escalar son compatibles.
- Sea $x, y > 0$ y $a \in \mathbb{R}$. Observamos que

$$c \cdot (x * y) = (x * y)^c = x^c * y^c = c \cdot x * c \cdot y \overset{(5)}{=} (x^b)^a = (b \cdot x)^a = a \cdot (b \cdot x),$$

  y por lo tanto el producto por un escalar se distribuye con respecto a la suma del espacio.
- Sea $x > 0$ y $a, b \in \mathbb{R}$. Observamos que

$$(a + b) \cdot x = x^{a+b} = x^a * x^b \overset{(5)}{=} a \cdot x * b \cdot x,$$

  y por lo tanto el producto por un escalar se distribuye con respecto a la suma del cuerpo.

e) El espacio que está formado por las funciones reales biyectivas con las operación de suma redefinida como la composición de funciones y el producto por un escalar usual NO ES un espacio vectorial:

- Por ejemplo falla la *conmutatividad*, sean $f(x) = 2x$ y $g(x) = x + 1$ dos funciones reales biyectivas tenemos:

$$(f + g)(x) = f(g(x)) = 2(x + 1) = 2x + 2 \neq 2x + 1 = g(f(x)) = (g + f)(x).$$

2. Sea $(V, +, \cdot)$ un espacio vectorial. En particular, sabemos que existe $\mathbf{0} \in V$ tal que $\mathbf{0} + x = x$ para todo $x \in V$; y que para todo $x \in V$ existe un vector $\bar{x}$ tal que $x + \bar{x} = \mathbf{0}$.

a) *Unicidad del neutro*: si $\mathbf{0}' \in V$ es tal que $\mathbf{0}' + x = x$ para todo $x \in V$, entonces $\mathbf{0}' = \mathbf{0}$.

b) *Unicidad del opuesto*: dado $x \in V$, si $\bar{x}' \in V$ es tal que $x + \bar{x}' = \mathbf{0}$, entonces $\bar{x}' = \bar{x}$.

c) *Propiedad cancelativa*: si $z + x = z + y$ entonces $x = y$.

d) $\alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \ \ \forall \alpha \in \mathbb{K}$.

e) $0 \cdot v = \mathbf{0} \ \ \forall v \in V$.

f) $(-\alpha \cdot v) = \alpha \cdot (-v) = -(\alpha \cdot v)$, donde $-v$ es el opuesto de $v, \forall v \in V$.

g) Si $\alpha \cdot v = \mathbf{0}$ entonces $\alpha = 0$ o $v = \mathbf{0}$.

d) $\alpha \cdot \mathbf{0} = \alpha \cdot (\mathbf{0} + \mathbf{0}) = \alpha \cdot \mathbf{0} + \alpha \cdot \mathbf{0}$. Luego sumando a ambos lados de la igualdad $-\alpha \cdot \mathbf{0}$ resulta $0 = \alpha \cdot \mathbf{0}$.

e) Vamos a aplicar un razonamiento similar al del apartado anterior.
$0 \cdot v = (0 + 0) \cdot v = 0 \cdot v + 0 \cdot v \implies \mathbf{0} = 0 \cdot v$.

6. Para cada uno de los siguientes conjuntos determinar si es un subespacio de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ o explique por qué no lo es

   a) $\{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) : f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}\}$.
   b) $\{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) : f(0) = 0\}$.
   c) $\{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) : f(2) = 0\}$.
   d) El conjunto de funciones constantes.
   e) $\{\alpha + \beta \operatorname{sen} x : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

   Recordemos que si $(V, +, \cdot)$ es un espacio vectorial y $U \subseteq V$, U define un subespacio de V si, para todo $u_1, u_2 \in U$ y todo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, resulta $\alpha u_1 + \beta u_2 \in U$.

   En nuestro caso, $V = \mathcal{C}(\mathbb{R})$, el espacio de funciones continuas en $\mathbb{R}$, que ya sabemos es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Veamos el item c). En este caso, $U = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) : f(2) = 0\}$.

   Sean $f_1, f_2 \in U$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. ¿Podemos asegurar que $\alpha f_1 + \beta f_2 \in U$?. Sabemos que que $\alpha f_1 + \beta f_2$ es una función continua en $\mathbb{R}$ (por propiedades de las funciones continuas o porque ya sabemos que $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ es un espacio vectorial con la suma y producto por escalares de funciones habituales). Entonces, sólo debemos ver si $(\alpha f_1 + \beta f_2)(2) = 0$. Tenemos entonces

   $$(\alpha f_1 + \beta f_2)(2) = \alpha f_1(2) + \beta f_2(2) = \alpha 0 + \beta 0 = 0 + 0 = 0$$

   Por lo tanto U define un subespacio vectorial de las funciones continuas en $\mathbb{R}$.

   Veamos el item e), donde $U = \{\alpha + \beta \operatorname{sen} x : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$, esto es, U es el conjunto de funciones que se obtienen a partir de la función seno, multiplicándola por un número real y sumándole un número real. Como hemos visto, debemos probar que $\gamma f_1 + \nu f_2 \in U$ para todo $f_1, f_2 \in U$ y todo $\gamma, \nu \in \mathbb{R}$.

   Sean $f_1, f_2 \in U$. Entonces, $f_1 = \alpha_1 + \beta_1 \operatorname{sen} x$ y $f_2 = \alpha_2 + \beta_2 \operatorname{sen} x$ para algunos $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$. Sean $\gamma, \nu \in \mathbb{R}$. Veamos si $\gamma f_1 + \nu f_2 \in U$. Tenemos:

   $$\begin{aligned}(\gamma f_1 + \nu f_2)(x) = \gamma f_1(x) + \nu f_2(x) = \gamma(\alpha_1 + \beta_1 \operatorname{sen} x) + \nu(\alpha_2 + \beta_2 \operatorname{sen} x) = \\ (\gamma\alpha_1 + \gamma\beta_1 \operatorname{sen} x) + (\nu\alpha_2 + \nu\beta_2 \operatorname{sen} x) = (\gamma\alpha_1 + \nu\alpha_2) + (\gamma\beta_1 + \nu\beta_2) \operatorname{sen} x.\end{aligned}$$

   Por lo tanto, tomando $\alpha = \gamma\alpha_1 + \nu\alpha_2$ y $\beta = \gamma\beta_1 + \nu\beta_2$ tenemos que $(\gamma f_1 + \nu f_2)(x) = \alpha + \beta \operatorname{sen} x$ y por lo tanto $\gamma f_1 + \nu f_2 \in U$. Por lo tanto U define un subespacio vectorial de las funciones continuas en $\mathbb{R}$.

9. Sea V un espacio vectorial y W_1 y W_2 dos subespacios de V. Demostrar que $W_1 \cup W_2$ es un subespacio de V si y sólo si $W_1 \subseteq W_2$ o $W_2 \subseteq W_1$.

   Sabemos que, para $i = 1, 2$, W_i es un subespacio vectorial de V y por lo tanto, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y todo $w_i^1, w_i^2 \in W_i$, tenemos que $\alpha w_i^1 + \beta w_i^2 \in W_i$.

   Claramente, si $W_1 \subseteq W_2$ o $W_2 \subseteq W_1$ resulta $W_1 \cup W_2 = W_2$ o $W_1 \cup W_2 = W_1$, respectivamente. En ambos casos $W_1 \cup W_2$ es un subespacio vectorial de V.

   Debemos probar ahora que si $W_1 \cup W_2$ es un subespacio vectorial de V, entonces $W_1 \subseteq W_2$ o $W_2 \subseteq W_1$. Para ello, probaremos la contrarecíproca, esto es, si W_1 no es un subconjunto de W_2 y W_2 no es un subconjunto de W_1, $W_1 \cup W_2$ no es un subespacio vectorial de V.

   Si W_1 no es un subconjunto de W_2 y W_2 no es un subconjunto de W_1, existen $w_1 \in \{x \in W_1 : x \notin W_2\}$ y $w_2 \in \{x \in W_2 : x \notin W_1\}$. Claramente $w_1, w_2 \in W_1 \cup W_2$. Veremos que $w_1 + w_2 \notin W_1 \cup W_2$ y por lo tanto $W_1 \cup W_2$ no define un espacio vectorial.

   Supongamos que $w_1 + w_2 \in W_1 \cup W_2$, entonces $w_1 + w_2 \in W_1$ o $w_1 + w_2 \in W_2$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $w_1 + w_2 \in W_1$. Como W_1 es un espacio vectorial $-w_1 \in W_1$ y por lo tanto $(-w_1) + (w_1 + w_2) \in W_1$. Pero $(-w_1) + (w_1 + w_2) = w_2 \notin W_1$ y llegamos a una contradicción. Esta contradicción provino de suponer que $w_1 + w_2 \in W_1 \cup W_2$. Entonces $w_1 + w_2 \notin W_1 \cup W_2$ y por lo tanto que $W_1 \cup W_2$ no es un subespacio vectorial de V.

11. Explicitar el espacio columna y el espacio nulo de las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vamos a obtener $N(E)$ y $C(E)$. Los restantes se resuelven en forma similar.
Tenemos que E es una matriz 3×2. Entonces $N(E)$ es un subespacio de $\mathbb{R}^2$ y $C(E)$ un subespacio de $\mathbb{R}^3$. Empecemos con $C(E)$. Sabemos que $C(E)$ es el espacio generado por los vectores columna de E, esto es, el conjunto de combinaciones lineales de los vectores columna de E. E tiene dos columnas, una de ellas es el vector nulo. Por lo tanto, $C(E)$ es el conjunto de combinaciones lineales de su primer columna. Formalmente:

$$C(E) = \{\alpha(1,2,0) + \beta(0,0,0) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \{\alpha(1,2,0) : \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Geométricamente, $C(E)$ es la recta en $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origen con vector dirección $(1,2,0)$.

Veamos quién es $N(E) = \{x \in \mathbb{R}^2 : Ex = 0\}$. Es fácil verificar que si $x = (x_1, x_2)$, $Ex = \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Por lo tanto, $x = (x_1, x_2) \in N(E)$ si y solo si $x_1 = 0$.
Tenemos entonces, $N(E) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 0\}$. Geométricamente, es el eje *vertical* del plano coordenado.

14. Probar el siguiente enunciado: Sean $U_1, U_2 \subset V$ subespacios. Luego $V = U_1 \oplus U_2$ si y solo si se verifican las siguientes condiciones:
$i)$ $V = U_1 + U_2$.
$ii)$ $U_1 \cap U_2 = \{0\}$.
Encontrar un contraejemplo para demostrar que este resultado no puede extenderse a m subespacios, es decir, NO ES VÁLIDA la siguiente afirmación: Sea V un espacio vectorial y $U_1, U_2, \ldots, U_m$ subespacios vectoriales de V con $m \geq 3$. Luego $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \ldots \oplus U_m$ si y solo si se verifican las siguientes condiciones:
$i)$ $V = U_1 + U_2 + \ldots + U_m$.
$ii)$ $U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap U_m = \{0\}$.

- Primero vamos a probar que, dados $U_1, U_2 \subset V$ subespacios, $V = U_1 \oplus U_2$ si y solo si se verifican las siguientes condiciones:
  $i)$ $V = U_1 + U_2$.
  $ii)$ $U_1 \cap U_2 = \{0\}$.
  $\Leftarrow)$ Sea $v \in V$, por $i)$ sabemos que existen $u_1 \in U_1$ y $u_2 \in U_2$ tales que $v = u_1 + u_2$.
  ¿u_1, u_2 son únicos?
  Supongamos que existen $\overline{u}_1, \overline{u}_2$ tales que $v = \overline{u}_1 + \overline{u}_2$. Entonces,

  $$v = u_1 + u_2 = \overline{u}_1 + \overline{u}_2 \Rightarrow u_1 + u_2 = \overline{u}_1 + \overline{u}_2 \Rightarrow \underbrace{u_1 - \overline{u}_1}_{\in U_1,\ pues\ U_1\ subev.} = \underbrace{\overline{u}_2 - u_2}_{\in U_2,\ pues\ U_2\ subev.} \Rightarrow$$
  $$u_1 - \overline{u}_1,\ \overline{u}_2 - u_2 \in U_1 \cap U_2 \underbrace{\Rightarrow}_{ii)} u_1 - \overline{u}_1 = 0 \wedge \overline{u}_2 - u_2 = 0 \Rightarrow u_1 = \overline{u}_1 \wedge \overline{u}_2 = u_2.$$

  Por lo tanto, $v \in V$ se escribe de manera única como $v = u_1 + u_2$ con $u_1 \in U_1$ y $u_2 \in U_2$. Así resulta $V = U_1 \oplus U_2$.
  $\Rightarrow)$ Sabemos que $V = U_1 \oplus U_2$. Por definición de suma directa vale $i)$ $V = U_1 + U_2$.
  ¿$U_1 \cap U_2 = \{0\}$?
  Consideramos $v \in U_1 \cap U_2$, luego v puede descomponerse como:
  * $v = v + 0$ con $v \in U_1$ y $0 \in U_2$ (esto lo podemos hacer ya que $v \in U_1 \cap U_2 \subseteq U_1$ y U_2 es suespacio vectorial entonces $0 \in U_2$), o bien
  * $v = 0 + v$ con $0 \in U_1$ y $v \in U_2$ (esto lo podemos hacer ya que U_1 es suespacio vectorial entonces $0 \in U_1$ y $v \in U_1 \cap U_2 \subseteq U_2$).

Ahora bien, como $V = U_1 \oplus U_2$, por unicidad de la descomposción $v + 0 = 0 + v$, entonces $v = 0$ y se verifica $ii)$.

- Veamos ahora que el resultado no puede extenderse a m subespacios con $m \geq 3$.
  Consideramos $U_1 = \langle\{(1,0,0),(0,1,0)\}\rangle$, $U_2 = \langle\{(1,1,0)\}\rangle$ y $U_3 = \langle\{(0,0,1)\}\rangle$.
  U_1, U_2, U_3 son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$ (U_1 es el plano xy y U_2, U_3 son rectas en $\mathbb{R}^3$ que pasan por el origen).
  Tenemos que:
  * $\mathbb{R}^3 = U_1 + U_2 + U_3$,
  * $U_1 \cap U_2 \cap U_3 = \{(0,0,0)\}$.

  Sin embargo, la suma NO es directa ya que existe más de una forma de escribir por ejemplo el vector $(2,2,0)$:
  - $(2,2,0) = \underbrace{2 \cdot (1,0,0) + 2 \cdot (0,1,0)}_{\in U_1} + \underbrace{0 \cdot (1,1,0)}_{\in U_2} + \underbrace{0 \cdot (0,0,1)}_{\in U_3}$,
  - $(2,2,0) = \underbrace{0 \cdot (1,0,0) + 0 \cdot (0,1,0)}_{\in U_1} + \underbrace{2 \cdot (1,1,0)}_{\in U_2} + \underbrace{0 \cdot (0,0,1)}_{\in U_3}$.

15. Sea $\mathbb{R}[x]$ el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$, y sea U el subespacio de $\mathbb{R}[x]$ dado por

$$U = \{ax^2 + bx^5 : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Encontrar un subespacio W de $\mathbb{R}[x]$ tal que $\mathbb{R}[x] = U \oplus W$.

Aplicando el resultado obtenido en el ejercicio 14., debemos encontrar W subespacio vectorial de $\mathbb{R}[x]$ que verifique:
$i)$ $\mathbb{R}[x] = U + W$,
$ii)$ $U \cap W = \{0\}$.
Observemos que $U = \left\langle \{x^2, x^5\} \right\rangle$. Luego, pensando en cómo escribir un polinomio cualquiera a coeficientes reales y teniendo en cuenta las potencias que faltan a partir de U, consideramos

$$W = \left\langle \{x^i : i \in \mathbb{Z}_+ - \{2,5\}\} \right\rangle.$$

Veamos que $\mathbb{R}[x] = U \oplus W$.

$i)$ $\mathbb{R}[x] = U + W$ ya que:
$\supseteq)$ $\mathbb{R}[x] \supseteq U + W$ por definición.
$\subseteq)$ Sea $p \in \mathbb{R}[x]$, luego

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n, \text{ con } a_i \in \mathbb{R},\ i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Aplicando las propiedades conmutativa y asociativa y teniendo en cuenta que U y W son subespacios, podemos escribir:

$$p(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n = \underbrace{a_2x^2 + a_5x^5}_{\in U} + \underbrace{a_0 + a_1x + a_3x^3 + a_4x^4 + a_6x^6 + \ldots + a_nx^n}_{\in W}.$$

Por lo tanto $p \in U + W$. Así resulta $\mathbb{R}[x] \subseteq U + W$.

$ii)$ $U \cap W = \{0\}$ pues:
$\supseteq)$ $U \cap W \supseteq \{0\}$ ya que U y W son subespacios ($0 \in U$ y $0 \in W$).
$\subseteq)$ Sea $p \in U \cap W$, luego
* $p(x) = ax^2 + bx^5$ con $a, b \in \mathbb{R}$ ya que $p \in U$,
* $p(x) = c_0 + c_1x + c_3x^3 + c_4x^4 + c_6x^6 + \ldots + c_nx^n$ con $c_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{0,1,3,4,6,\ldots,n\}$ ya que $p \in W$.

Entonces,

$$ax^2 + bx^5 = c_0 + c_1x + c_3x^3 + c_4x^4 + c_6x^6 + \ldots + c_nx^n \Rightarrow$$

$$0+0x+ax^2+0x^3+0x^4+bx^5+0x^6+\ldots 0x^n = c_0+c_1x+0x^2+c_3x^3+c_4x^4+0x^5+c_6x^6+\ldots+c_nx^n$$

Igualando término a término tenemos que:
$0 = c_0,\ \ 0 = c_1,\ \ a = 0,\ \ 0 = c_3,\ \ 0 = c_4,\ \ b = 0,\ \ 0 = c_6,\ \ \ldots,\ \ 0 = c_n.$
Por lo tanto $p(x) = 0$, donde 0 representa el polinomio nulo. Así tenemos $U \cap W \subseteq \{0\}$.

Queda probado que $\mathbb{R}[x] = U \oplus W$.

17. Recordar que, dado V un espacio vectorial y $S \subset V$, $\langle S \rangle$ denota el subespacio de V generado por S. Demostrar las siguientes proposiciones:

    $c)$ Si $S \subseteq T$ y T es un subespacio de V, entonces $\langle S \rangle \subseteq T$. Observar que a partir de esta propiedad sabemos que $\langle S \rangle$ es el menor subespacio de V que contiene a S.

Veamos que $\langle S \rangle \subseteq T$.

Consideramos $x \in \langle S \rangle$, ¿$x \in T$?

Dado $x \in \langle S \rangle$, como $\langle S \rangle$ denota el subespacio de V generado por S tenemos que:

$$\exists\ I \subseteq \mathbb{N} \,/\, x = \sum_{i \in I} \alpha_i x_i,\ \ \alpha_i \in \mathbb{R}(o\ \mathbb{C}),\ s_i \in S \underbrace{\Rightarrow}_{S \subseteq T}$$

$$\exists\ I \subseteq \mathbb{N} \,/\, x = \sum_{i \in I} \alpha_i x_i,\ \ \alpha_i \in \mathbb{R}(o\ \mathbb{C}),\ s_i \in T \quad \underbrace{\Rightarrow}_{T\ subev.\ de\ V}$$

$$x \in T$$

Por lo tanto $\langle S \rangle \subseteq T$.

Observación: $\langle S \rangle$ es el menor subespacio de V que contiene a S:

Por un lado sabemos que $\langle S \rangle$ denota el subespacio de V generado por S, luego $S \subseteq \langle S \rangle$. Además, por lo que probamos en el apartado $c)$, si T es otro subespacio vectorial de V que contiene a S resulta que $\langle S \rangle \subseteq T$. Luego podemos concluir que $\langle S \rangle$ es el menor subespacio de V que contiene a S.