Práctica 6: Lógica de predicados - Deducción natural

1. Probar la validez de los siguientes secuentes usando, entre otras, las reglas de introducción y eliminación de la igualdad. El símbolo $+$ es un símbolo de función de aridad 2, mientras que $<$ es un símbolo de predicado también de aridad 2.

a) $(y = 0) \wedge (y = x) \vdash 0 = x$

b) $t_1 = t_2 \vdash (t + t_2) = (t + t_1)$

c) $(x = 0) \vee ((x + x) > 0) \vdash (y = (x + x)) \to ((y > 0) \vee (y = (0 + x)))$

2. Las pruebas de los secuentes que hay a continuación combinan las reglas para la igualdad y los cuantificadores. Escribimos $\phi \leftrightarrow \psi$ como abreviación de $(\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi)$. Encuentre pruebas para:

a) $P(b) \vdash \forall x(x = b \to P(x))$

b) $P(b), \forall x \forall y(P(x) \wedge P(y) \to x = y) \vdash \forall x(P(x) \leftrightarrow x = b)$

c) $\exists x \exists y(H(x, y) \vee H(y, x)), \neg \exists x H(x, x) \vdash \exists x \exists y \neg(x = y)$

d) $\forall x(P(x) \leftrightarrow x = b) \vdash P(b) \wedge \forall x \forall y(P(x) \wedge P(y) \to x = y)$

3. Pruebe los siguientes secuentes:

a) $\forall x(P(x) \to Q(x)) \vdash (\forall x \neg Q(x)) \to (\forall x \neg P(x))$

b) $\forall x(P(x) \to \neg Q(x)) \vdash \neg(\exists x(P(x) \wedge Q(x)))$

c) $\neg \exists x \phi \vdash \forall x \neg \phi$

d) $(\forall x \phi) \wedge (\forall x \psi) \dashv\vdash \forall x(\phi \wedge \psi)$

4. Demostrar la validez de los siguientes secuentes, donde $ar(f) = 2$, $ar(F) = ar(G) = ar(P) = ar(Q) = 1$ y $ar(S) = 0$:

a) $\exists x(S \to Q(x)) \vdash S \to \exists x Q(x)$

b) $\forall x P(x) \to S \vdash \exists x(P(x) \to S)$

c) $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \vdash \forall x P(x) \vee \exists x Q(x)$

d) $\forall x(\neg P(x) \wedge Q(x)) \vdash \forall x(P(x) \to Q(x))$

e) $\exists x(\neg P(x) \vee Q(x)) \vdash \exists x(\neg(P(x) \wedge \neg Q(x)))$

f) $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \vdash \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$

g) $\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \vdash \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$

h) $\forall x \forall y(G(y) \to F(x)) \vdash \exists y G(y) \to \forall x F(x)$

i) $\forall x \neg P(x) \vdash \neg \exists x P(x)$

j) $\forall x(f(x,c) = x), \forall x(f(c,x) = x) \vdash \forall y(\forall x(f(x,y) = x)) \to y = c)$

5. Sean ϕ y ψ fórmulas de la lógica de predicados. Demostrar las siguientes equivalencias deductivas, asumiendo que $x \notin FV(\psi)$:

a) $\forall x\phi \vee \psi \dashv\vdash \forall x(\phi \vee \psi)$

b) $\exists x(\phi \to \psi) \dashv\vdash \forall x\phi \to \psi$

c) $\forall x(\phi \to \psi) \dashv\vdash \exists x\phi \to \psi$

6. Pruebe la validez de los siguientes secuentes:

a) $\forall x \forall y P(x,y) \vdash \forall u \forall v P(u,v)$

b) $\exists x \exists y F(x,y) \vdash \exists u \exists v F(u,v)$

7. En la práctica 5 se pedía dar un conjunto de fórmulas Γ que caracterice la estructura de grupo.

a) Demuestre que $\Gamma \vdash e = e^{-1}$

b) Exprese, mediante una fórmula ϕ, la siguiente propiedad:

"Existe un único elemento neutro para la operación binaria"

c) Demuestre que $\Gamma \vdash \phi$

8. En el ejercicio 6 de la práctica 5 se pedía caracterizar a los grafos simples bipartitos mediante un conjunto Γ de fórmulas de la lógica de predicados. Utilizando dicha formalización, demuestre:

a) $\Gamma \vdash \forall x \forall y \forall z\, (U(x) \wedge R(x,y) \wedge R(y,z) \to U(z))$

b) $\Gamma \vdash \forall x \forall y \forall z\, (R(x,y) \wedge R(x,z) \wedge W(y) \to W(z))$