Álgebra Lineal - LCC - LM - PM 2020

Práctica: CAPÍTULO 3 (tercera parte)

Cuando no se especifica lo contrario, el producto interno en $\mathbb{R}^n$ es $x^T y$ y el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ se considera con suma y producto por escalares habituales.

1. *a*) Sean $v^1 = (2,1), v^2 = (-1,1) \in \mathbb{R}^2$. Aplicar el proceso de Gram-Schmidt y encontrar una base ortogonal $\{w^1, w^2\}$ en $\mathbb{R}^2$. Dibujar los vectores v^1, v^2, w^1 y w^2.

   b) Sean $v^1 = (1,0,0), v^2 = (1,1,1), v^3 = (1,1,2) \in \mathbb{R}^3$. Aplicar el proceso de Gram-Schmidt y encontrar una base ortogonal $\{w^1, w^2, w^3\}$ en $\mathbb{R}^3$. Dibujar los vectores v^1, v^2, v^3, w^1, w^2 y w^3.

2. *a*) Encontrar un conjunto ortonormal q^1, q^2, q^3 para el cual q^1 y q^2 generan el espacio columna de:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

   b) ¿Cuál es el espacio fundamental de A que contiene a q^3?

3. Sea W el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por $v^1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $v^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

   a) Si $y = (3,1,5,1)^T$, escribirlo como la suma de un vector en W y uno en $W^{\perp}$.

   b) Si $y = (3,-1,1,13)^T$, encontrar el punto más cercano a y en W.

4. Sea V el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores $v^1 = (1,-1,0,0)^T$ y $v^2 = (0,1,-1,0)^T$.

   a) Hallar una base ortonormal para V.

   b) Hallar una base para $V^{\perp}$.

   c) Extender la base hallada en a) a una base ortonormal de $\mathbb{R}^4$.

5. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

   a) Probar que $Ax = b$ es un sistema inconsistente.

   b) Encontrar las ecuaciones normales asociadas al sistema.

   c) Encontrar $\hat{x}$, la solución que minimiza el error $\|b - Ax\|$.

   d) Calcular el error.

   e) Encontrar $\tilde{b}$, la paroyección de b sobre el espacio columna de A.

6. Sea A una matriz de tamaño $n \times k$ con columnas l.i.. Probar que $A^T A$ es inversible.

7. Sea A una matriz de tamaño $n \times k$ con columnas l.i. y P la matriz de proyección sobre $C(A)$. Probar que P es simétrica e idempotente (i.e $P^2 = P$ y $P^T = P$). Recíprocamente, probar que toda matriz simétrica e idempotente es una matriz de proyección.

   Ayuda: Para probar la recíproca, probar que Pb es la proyección de b sobre $C(P)$.

8. Sean $u^1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)^T$, $u^2 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)^T$ y $U = [u^1 u^2]$.

   a) Calcular $U^T U$ y UU^T.

   b) Sean $y = (4,8,1)^T$ y $W = C(U)$. Calcular $proy_{s/W}\ y$ y $(UU^T)y$.

9. *a*) Hallar una base ortogonal para el subespacio S de $\mathbb{R}^4$ generado por todas las soluciones de:

$$x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0.$$

   b) Calcular una base para $S^\perp$.

   c) Encontrar $u \in S$ y $v \in S^\perp$ tales que $u + v = w = (1, 1, 1, 1)^T$.

10. Sean

$$u^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad u^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

   a) Hallar la matriz de proyección sobre el espacio $W = \langle \{u^1, u^2\} \rangle$.

   b) Calcular la proyección de b sobre $W^\perp$.

   c) Hallar la matriz de proyección sobre el espacio $W^\perp$.

11. Hallar la matriz de proyección sobre el plano $2x + y - z = 0$ de $\mathbb{R}^3$.

12. Determinar los valores $a, b, \ldots, f$ de manera que las siguientes matrices sean ortogonales.

   a)

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & a \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & b \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & c \end{bmatrix}.$$

   b)

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & d \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}.$$

13. *a*) Encontrar c, x_1, x_2, x_3 y x_4 de modo que la matriz

$$Q = c \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & x_1 \\ -1 & 1 & -1 & x_2 \\ -1 & -1 & -1 & x_3 \\ -1 & -1 & 1 & x_4 \end{bmatrix}$$

   sea ortogonal.

   b) Obtener la proyección del vector $b = (1, 1, 1, 1)^T$ sobre el espacio generado por la primer columna de Q. Luego proyectar b sobre el espacio generado por las dos primeras columnas de Q.

14. Sea A una matriz de columnas l.i. y tamaño $k \times n$. Sea Q la matriz que se obtiene ortonormalizando las columnas de A.

   a) Probar que $R = Q^T A$ es triangular superior inversible.

   b) Probar que $A = QR$.

15. *a*) ¿Qué múltiplo de $a^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ debe restarse a $a^2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ para que el resultado sea ortogonal a a^1?

   b) Encontrar una factorización QR de $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

16. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Encontrar una factorización QR de A.

17. Sea Q una matriz ortogonal $n \times n$. Probar que:

a) $Q^T = Q^{-1}$.

b) Para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $\|Qx\| = \|x\|$.

18. Sean $V = \mathcal{C}([-1,1])$ con el producto interno $\langle f, g\rangle = \int\limits_{-1}^{1} f(x)\,g(x)\ dx$, $B = \{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ donde $p_j : [-1,1] \to \mathbb{R} / p_j(x) = x^j$, $j = 0,1,2,3$ y $W = \langle B\rangle$.

a) Aplicar el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt y obtener una base ortogonal B' de W.

b) Sea $f \in V$ tal que $f(x) = sen(x)$ para todo $x \in [-1,1]$. Obtener $proy_{s/W}\ f$.

Ayuda: Evitar el cálculo de las integrales usando las siguientes identidades:

$$\int\limits_{-1}^{1} sen(x)\,dx \quad = 0$$

$$\int\limits_{-1}^{1} x\ sen(x)\,dx \ = 2\ sen(1) - 2\ cos(1)\ \left(\simeq \frac{3}{5}\right)$$

$$\int\limits_{-1}^{1} x^2\ sen(x)\,dx = 0$$

$$\int\limits_{-1}^{1} x^3\ sen(x)\,dx = 10\ cos(1) - 6\ sen(1)\ \left(\simeq \frac{1}{3}\right)$$

c) ¿Cuál es la recta más próxima a la parábola $y = x^2$?

Ayuda: Considerar $Z = \langle\{p_0, p_1\}\rangle$ el conjunto de rectas y $f \in V$ tal que $f(x) = x^2$.