



Práctica 3: Completitud de la Lógica Proposicional

1. Completar la demostración de soundness con las reglas que faltaron hacer en clase.
2. Completar el caso de la disyunción y la negación en el Lema 7.
3. Demostrar que los Γ_n definidos en el Lema 4 son consistentes, para cualquier n .
4. Decidir cuáles de los siguientes conjuntos son consistentes:
 - a) $\{\neg p_1 \wedge p_2 \rightarrow p_0, p_1 \rightarrow (\neg p_1 \rightarrow p_2), p_0 \leftrightarrow \neg p_2\}$
 - b) $\{p_0 \rightarrow p_1, p_1 \rightarrow p_2, p_2 \rightarrow p_3, p_3 \rightarrow \neg p_0\}$
 - c) $\{p_0 \rightarrow p_1, p_0 \wedge p_2 \rightarrow p_1 \wedge p_3, p_0 \wedge p_2 \wedge p_4 \rightarrow p_1 \wedge p_3 \wedge p_5, \dots\}$
5. Demostrar que las siguientes proposiciones son equivalentes:
 - a) $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ es inconsistente
 - b) $\vdash \neg(\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \dots \wedge \phi_n)$
 - c) $\vdash \phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \dots \wedge \phi_{n-1} \rightarrow \neg \phi_n$
6. Decimos que ϕ es independiente de Γ si $\Gamma \not\vdash \phi$ y $\Gamma \not\vdash \neg \phi$.
Demostrar que $p_1 \rightarrow p_2$ es independiente de $\{p_1 \leftrightarrow p_0 \wedge \neg p_2, p_2 \rightarrow p_0\}$.
7. Demostrar que un conjunto consistente Γ es maximalmente consistente si $\forall \phi$ se cumple que $\phi \in \Gamma$ o $\neg \phi \in \Gamma$.
8. Usando la definición inductiva de \vdash , demostrar que si $\Gamma \vdash \phi$ entonces existe $\Delta \subseteq \Gamma$ finito tal que $\Delta \vdash \phi$.
9. Sean Γ un conjunto consistente de fórmulas y $\phi \notin \Gamma$. Mostrar que $\Gamma \cup \{\phi\} \not\vdash \perp$ o bien $\Gamma \cup \{\phi \rightarrow \perp\} \not\vdash \perp$.
10. Sean Γ y Δ conjuntos de fórmulas tales que Γ es consistente y Δ es inconsistente. Demostrar o refutar las siguientes afirmaciones:
 - a) $\Gamma \cup \Delta$ es inconsistente
 - b) $\Gamma \cap \Delta$ es consistente

11. Sean Γ un conjunto consistente de fórmulas y ϕ una fórmula satisfactible.

a) ¿Es consistente el conjunto $\Gamma \cup \{\phi\}$?

b) Si ϕ es una tautología, ¿es consistente el conjunto $\Gamma \cup \{\phi\}$?

En ambos casos, demuestre o dé un contraejemplo.