Nombre y Apellido: Sebastián

Examen Final – Regular

Ej. 1. Identificar todas las álgebras de Boole de cardinalidad a lo sumo 5, justificando adecuadamente.

Ej. 2. Sean G y H grupos, $\varphi : G \to H$ isomorfismo de grupos y $K \triangleleft H$. Demostrar que:

a) $\varphi^{-1}(K) = \{g \in G : \varphi(g) \in K\}$ es un subgrupo normal de G.

b)
$$\frac{G}{\varphi^{-1}(K)} \simeq \frac{H}{K}$$

Ej. 3. Sean $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, y $\mathcal{C}$ categorías y funtores $S : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ y $T : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$. Mostrar que se puede construir una categoría $(S \downarrow T)$ donde:

- Los objetos son triplas (A, B, h) con A un objeto de $\mathcal{A}$, B un objeto de $\mathcal{B}$ y $h : S(A) \to T(B)$ un morfismo de $\mathcal{C}$.
- Los morfismos de (A, B, h) en (A', B', h') son todos los pares (f, g) donde $f : A \to A'$ es un morfismo de $\mathcal{A}$ y $g : B \to B'$ es un morfismo de $\mathcal{B}$, tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} S(A) \arrow[r, "S(f)"] \arrow[d, "h"] & S(A') \arrow[d, "h'"] \\ T(B) \arrow[r, "T(g)"] & T(B') \end{tikzcd}$$

Ej. 4. Considerar las categorías **Set** y **Ord**, esta última es la categoría cuyos objetos son los conjuntos preordenados y los morfismos son las funciones crecientes.

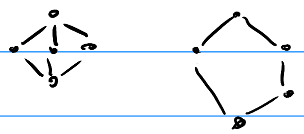
a) Construir funtores $F : \mathbf{Set} \to \mathbf{Ord}$ tal que $F(X) = (X, =)$ (donde $=$ es la relación de igualdad en X) y $G : \mathbf{Set} \to \mathbf{Ord}$ tal que $G(X) = (X, \leq_t)$ (donde $\leq_t$ es la relación total en X, es decir, $x \leq_t y$ para todos $x, y \in X$).

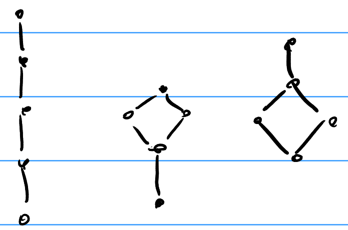
b) Demostrar que $F \dashv U \dashv G$, donde $U : \mathbf{Ord} \to \mathbf{Set}$ es el funtor olvido.

Ej. 1:

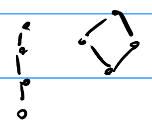
- acotado → tiene 0 y 1
- complem. → $\forall a \, \exists b$ tq $a \wedge b = 0$ $a \vee b = 1$
- distrib. → $\nexists$ subret. isom. a M_3, N_5

Alg. de Bool



5) 

3) 

4) 

2) 

Ej. 1. ...

Ej. 2. Sean G y H grupos, $\varphi : G \to H$ isomorfismo de grupos y $K \lhd H$. Demostrar que:

a) $\varphi^{-1}(K) = \{g \in G : \varphi(g) \in K\}$ es un subgrupo normal de G.

b)

$$\frac{G}{\varphi^{-1}(K)} \simeq \frac{H}{K}$$

a) $\varphi : G \to H$ isom. gr. $\Rightarrow \varphi$ iny. y sobr.

$K \lhd H \Rightarrow hK = Kh \ \forall h \in H$

qvq $\varphi^{-1}(K) = \{g \in G : \varphi(g) \in K\} \lhd G \Rightarrow g\varphi^{-1}(K) = \varphi^{-1}(K)g \ \forall g$

$g\varphi^{-1}(K)$

$\varphi(g\varphi^{-1}(K)) \longrightarrow \varphi(g\overbrace{\varphi^{-1}(K)}^{\{k',\dots\}}) \longrightarrow \{\varphi(gk')\dots\}$

$\varphi(g)\varphi(\varphi^{-1}(K))$ $\qquad = \{\varphi(g)\varphi(k')\dots\}$

φ isom. $\Rightarrow \varphi$ homom.

$\varphi(g)K$

hK

Kh

$\vdots$

$\varphi^{-1}(K)g$

$\varphi(\varphi^{-1}(K)) = \varphi(\{g \in G : \varphi(g) \in K\})$

$= K$

φ iny. y sobr.

b) $\dfrac{G}{\varphi^{-1}(K)} \simeq \dfrac{H}{K}$

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & H/K \\
G/\ker(f) \arrow[ur, "\bar{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

$\varphi^{-1}(K)$

$f : G \to H$ epi $\Rightarrow G/\ker(f) \simeq H/K$

$H/K = \{hK : h \in H\} = \{Kh : h \in H\}$

propongo $f(g) = \varphi(g)K$

$\ker(f) = \{g \in G : f(g) = e_{H/K}\} = \{g \in G : \varphi(g)K = K\} \longrightarrow kK = K$ $\quad \forall k \in K$

$= \{g \in G : \varphi(g) \in K\}$

$= \varphi^{-1}(K)$

φ isom. $\Rightarrow$ φ sobre $\Rightarrow \forall h \in H \; \exists g \in G \,/\, \varphi(g) = h$

$\therefore \exists \, g \in G \,/\, f(g) = \varphi(g)K = hK \;\; \forall h$

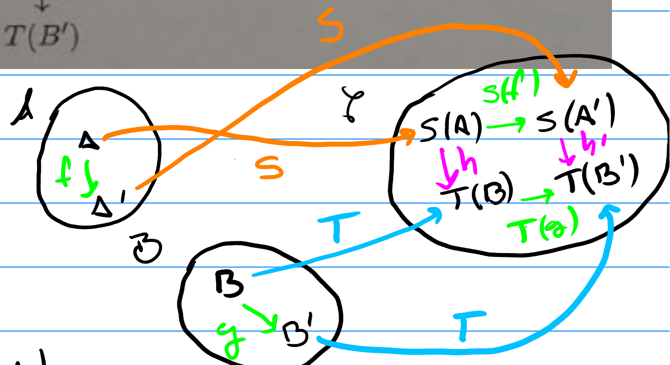
$\therefore f$ epi

Finalmente $\frac{G}{\varphi^{-1}(K)} \cong H/K$ por 1^{er} T. Isom.

Ej. 3. Sean $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, y $\mathcal{C}$ categorías y funtores $S : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ y $T : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$. Mostrar que se puede construir una categoría $(S \downarrow T)$ donde:

- Los objetos son triplas (A, B, h) con A un objeto de $\mathcal{A}$, B un objeto de $\mathcal{B}$ y $h : S(A) \to T(B)$ un morfismo de $\mathcal{C}$.
- Los morfismos de (A, B, h) en (A', B', h') son todos los pares (f, g) donde $f : A \to A'$ es un morfismo de $\mathcal{A}$ y $g : B \to B'$ es un morfismo de $\mathcal{B}$, tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} S(A) \arrow[r, "S(f)"] \arrow[d, "h"] & S(A') \arrow[d, "h'"] \\ T(B) \arrow[r, "T(g)"] & T(B') \end{tikzcd}$$



$\mathcal{C}$:

- ob $\mathcal{C}$
- mor $\mathcal{C}$ $\longrightarrow$ dom, codom
  $\hookrightarrow \forall A \in \text{ob}\,\mathcal{C} \; \exists \, id_A \in Hom(A,A)$
  $\hookrightarrow f \circ id_A = id_A \circ f = f$
- $\circ_{\mathcal{C}} \longrightarrow A, B, C, D \in \text{ob}\,\mathcal{C}$ y $f \in Hom(A,B)$, $g \in Hom(B,C)$, $h \in Hom(C,D)$
  $\Rightarrow (f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

$(S \downarrow T) = \mathcal{D}$

- ob $\mathcal{D} = (A,B,h)$ tq $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$ y $h : S(A) \to T(B)$
- mor $\mathcal{D} = (f,g)$ tq $f : A \to A'$, $g : B \to B'$ y $h' \circ S(f) = h \circ T(g)$
- $(f,g) \circ_{\mathcal{D}} (h,j) = (f \circ_{\mathcal{A}} h, \, g \circ_{\mathcal{B}} j)$

- asoc. de $\circ_{\mathcal{D}}$ sale fácil
- $id_{(A,B,h)} = (id_A, id_B)$ sale fácil

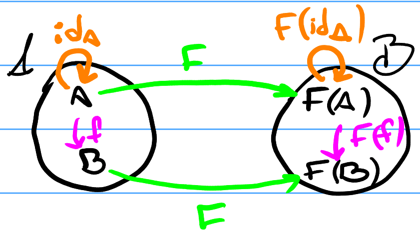
Ej. 4. Considerar las categorías **Set** y **Ord**, esta última es la categoría cuyos objetos son los conjuntos preordenados y los morfismos son las funciones crecientes.

a) Construir funtores $F : \mathbf{Set} \to \mathbf{Ord}$ tal que $F(X) = (X, =)$ (donde $=$ es la relación de igualdad en X) y $G : \mathbf{Set} \to \mathbf{Ord}$ tal que $G(X) = (X, \leq_t)$ (donde $\leq_t$ es la relación total en X, es decir, $x \leq_t y$ para todos $x, y \in X$).

b) Demostrar que $F \dashv U \dashv G$, donde $U : \mathbf{Ord} \to \mathbf{Set}$ es el funtor olvido.

a) $F : \mathrm{Set} \to \mathrm{Ord}$ tq $F(X) = (X, =)$

$G : \mathrm{Set} \to \mathrm{Ord}$ tq $G(X) = (X, \leq_t)$



1. $F(X) = (X, =)$

Sea $f : X \to Y \Rightarrow F(f) : (X, =) \to (Y, =)$

propongo $F(f) = f$

Luego $F(id_X) = id_{(X,=)} = id_{F(X)}$

Sean $f : B \to C$, $g : A \to B$

$F(f \circ g) = f \circ g = F(f) \circ F(G)$

2. $G(X) = (X, \leq_t)$

Sea $g : X \to Y \Rightarrow G(g) : (X, \leq_t) \to (Y, \leq_t)$

$\Rightarrow G(g)$ debe preservar órden

propongo $G(g) = g$ sii $x \leq_{tX} y \Rightarrow g(x) \leq_{tY} g(y)$

Luego $G(id_X) = id_{(X, \leq_t)} = id_{G(X)}$

$$\begin{tikzcd} (A,\leq) \arrow[rr, "f \circ g"] \arrow[dr, "f"'] & & (B,\leq) \\ & (C,\leq) \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Sean $f : B \to C$, $g : A \to B$

$G(g) = g$ sii $x \leq_{tA} y \Rightarrow g(x) \leq_{tB} g(y)$ $*_1$

$G(f) = f$ sii $x \leq_{tB} y \Rightarrow f(x) \leq_{tC} f(y)$ $*_2$

i. Sup. $G(g) = g$ y $G(f) = f$ (f y g preservan órden)

$G(f) \circ G(g) = f \circ g$ sii $*_1$ y $*_2$ lo cual es trivial

$= G(f \circ g)$ sii $x \leq_{tA} y \Rightarrow (f \circ g)(x) \leq_{tC} (f \circ g)(y)$

$x \leq_{tA} y \Rightarrow f(g(x)) \leq_{tC} f(g(y))$

lo cual vale si valen $*_1$ y $*_2$

$\therefore G(f) \circ G(g) = G(f \circ g)$

ii. Sup. $G(g) \neq g \Rightarrow \nexists f \circ g \Rightarrow$ la prop. vale por omisión

b) qpq $F \dashv U$ (adjunción izquierda)

$F : \text{Set} \to \text{Ord}$

$U : \text{Ord} \to \text{Set}$

q hallar $\eta : \text{Id}_{\text{Set}} \to U \circ F$ tq

I.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "f"'] & U(F(A)) \arrow[d, "U(F(f))"] \\ B \arrow[r, "\eta_B"'] & U(F(B)) \end{tikzcd}$$

tq $\exists! f^\# : F(x) \to Y$ tq conmuta

$= \eta(x) \in \text{Hom}(\text{Id}_{\text{Set}}(x), (U \circ F)(x))$ Set

II.

set

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[dr, "f"'] & U(F(X)) \arrow[d, dashed, "U(f^\#)"] \\ & U(Y) \end{tikzcd}$$

$\in \text{Hom}(X, U(Y))$

Ord

$\exists! f^\# : F(x) \to Y$ tq $f = U(f^\#) \circ \eta_X$

propongo $\eta(X) = id_X$

1. qpq $\eta_B \circ f = U(F(f)) \circ \eta_A$

$$\begin{aligned} id_B \circ f &= U(f) \circ id_A \\ f &= f \circ id_A \\ f &= f \end{aligned}$$

II. qpq $f = U(f^{\#}) \circ \eta_X$

$$\begin{aligned} &= f^{\#} \circ id_X \\ f &= f^{\#} \end{aligned}$$

vale para $f^{\#} = f$ y f cualq.

Luego es única ya que f es único

$\therefore F \dashv U$

qpq $U \dashv G$

$U : Ord \to Set$

$G : Set \to Ord$

$U \dashv G$ sii $\exists\, \eta : Id_{Ord} \to G \circ U$ tq

1. conmuta

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "f"'] & G(U(A)) \arrow[d, "G(U(f))"] \\ B \arrow[r, "\eta_B"] & G(U(B)) \end{tikzcd}$$

II. $\exists!\, f^{\#} : U(X) \to Y$ tq conmuta

$= \eta(X) \in Hom_{Ord}(Id_{Ord}(X), G \circ U(X))$

$$\begin{tikzcd} Ord \leftarrow X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[dr, "f"'] & G(U(X)) \arrow[d, dashed, "G(f^{\#})"] \\ & G(Y) \end{tikzcd}$$

$\hookrightarrow Ord$

prolonga