6. Sea V un espacio vectorial y $\{v_1, v_2, v_3\} \subset V$ un conjunto de vectores l.i.. Probar que:

   $a)$ $\{v_1 + v_2, v_1 + v_3, v_2 + v_3\}$ es un conjunto de vectores l.i..

   $b)$ $\{v_2 - v_3, v_1 - v_3, v_1 - v_2\}$ es un conjunto de vectores l.d..

$a)$ Recordamos:

> Sean $U = \{v_j : j = 1, ..., k\} \subset \mathbb{R}^n$, w una combinación lineal de los vectores de U con el coeficiente correspondiente a v_1 no nulo y $W = (U \setminus \{v_1\}) \cup \{w\}$. Entonces, los vectores de U son l.i. si y solo si los vectores de W son l.i.

Aplicamos reiteradamente la construcción sugerida por el lema (representamos al vector nuevo con w y marcamos en rojo la componente no nula del vector viejo):

$$\{v_1, v_2, v_3\} \leftrightarrow \{v_1, \underbrace{v_2 + v_1}_{w}, v_3\} \leftrightarrow \{v_1, v_2+v_1, \underbrace{v_3 + v_1}_{w}\} \leftrightarrow \{\underbrace{-2v_1 + (v_2 + v_1) + (v_3 + v_1)}_{w}, v_2+v_1, v_3+v_1\}.$$

En el último paso obtuvimos el conjunto del ejercicio (recordamos que en los conjuntos no importa el orden de los elementos).

Dado que, por hipótesis, el primer conjunto es l.i. aplicando el lema resulta que todos esos conjuntos son l.i. y, en particular, el del enunciado.

$b)$ Para ver que el conjunto es l.d. basta proponer una combinación lineal no nula que me dé el vector nulo.

¿Hay un método para deducir los coeficientes?

Primer método: tanteo... Ver que $(1, -1, 1)$ funciona.

Segundo método: si llamamos M a la matriz de columnas $\{v_2 - v_3, v_1 - v_3, v_1 - v_2\}$ resulta que buscamos un $x \neq 0$ tal que $Mx = 0$. Luego, basta ver si la matriz reducida de M tiene soluciones especiales.

No es difícil ver (o quizás si, USEN EL FORO!) que este segundo método también sirve para el apartado anterior, más aún, este método nos revela la verdadera esencia del ejercicio:

Describir el espacio nulo de M.

Lo anterior es algo que sabemos hacer, y es por ende el método infalible. Lo que no quiere decir que sea el mejor, por lo que si encuentran otra forma de demostrar algo con las herramientas de la materia, o es tan simple como exhibir un ejemplo, vayan por ese camino.

7. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & s \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ t \end{bmatrix}.$$

$a)$ Encontrar el conjunto solución de la ecuación $Ax = b$ para cualquier valor de s y t.

$b)$ ¿Para que valores de s son las columnas de A linealmente dependientes?

$c)$ Considere b y las tres primeras columnas de A. ¿Para qué valores de t son linealmente dependientes?

Leyendo las preguntas del ejercicio podemos intuir que la matriz A no está en una forma que nos sea "cómoda de trabajar", por lo tanto:

Aplicamos Gauss a la matriz aumentada $(A|b)$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & s & t \end{array}\right] \overset{(1)}{\rightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & s-2 & t-1 \end{array}\right] \overset{(2)}{\rightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & s-2 & t-1 \end{array}\right] \overset{(3)}{\rightarrow}$$

$$\overset{(3)}{\rightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & s+8 & t+2 \end{array}\right]$$

(1) Restar la primer fila a la segunda, tercera y cuarta fila (3 operaciones de eliminación).

(2) Permutación de las filas 2 y 3.

(3) Restar la segunda y tercer fila a la cuarta fila (2 operaciones de eliminación).

$a)$ Trabajando con ESTA matriz aumentada, que es equivalente como sistema a la primera, los casos resultan más claros:

- $s + 8 = 0,\ t + 2 \neq 0 \implies$ **no existe solución.**
- $s + 8 = 0,\ t + 2 = 0 \implies s = -8,\ t = -2 \implies x_4$ **es una variable libre**

  Como la matriz A está en su forma reducida (ver [1]), la solución particular correspondiente está en el lado derecho:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

  Como la matriz A está en su forma reducida (ver [2]), la cuarta columna nos dice que la solución especial correspondiente es:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

  Las soluciones (w, x, y, z) resultan entonces de la forma:

$$\begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

  para $x_4 \in \mathbb{R}$.

  [1] OJO, Gauss no necesariamente lleva una matriz a su forma reducida! Esto no es más que un hecho particular del ejercicio. Dejando esa aclaración aparte, como tenemos la forma reducida NO es necesario poner $x_4 = 0$ y realizar sustitución hacia atrás (porque el resultado de hacer esto es el lado derecho y ya lo estamos viendo explícitamente).

  [2] De nuevo, aprendimos una manera más directa de encontrar las soluciones especiales, la cual no requiere poner $x_4 = 1$ y realizar sustitución hacia atrás.

Paréntesis respecto a [1] y [2]: sugerimos fuertemente usar estos métodos cuando sea posible, principalmente porque reducen las posibilidades de error a:

- Aplicar mal el método (observar otro vector por descuido o haber entendido mal el método).
- Errores de cuentas al hacer las operaciones de eliminación en Gauss.

Si hiciesemos una sustitución hacia atrás habría una tercer fuente posible de errores (lo que causa que sea más difícil encontrarlos). Destacamos además que cada método es fácil de verificar por medio de UNA cuenta.

Para el método [1] tenemos la solución particular OBSERVADA del sistema $Ax = b$. Si queremos corroborar que hicimos Gauss bien y que observamos bien, entonces reemplazamos x en el sistema y calculamos. Usamos el ejercicio como ejemplo:

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & s=-8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2=t \end{bmatrix} \text{(me dio } b!\text{)}$$

Resulta muy difícil que Gauss esté mal, que hayamos observado mal, y que por arte de magia todo siga dando bien! Luego, si esta cuenta me dio igual a b puedo suponer que hice todo bien.

Una idea similar se aplica al método [2], en este caso reemplazar a x por la solución especial debería verificar que $Ax = \mathbf{0}$. De nuevo, usamos el ejercicio como ejemplo:

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & s=-8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Fin del paréntesis.

- $s + 8 \neq 0 \implies$ **el sistema tiene solución única**
  Suponemos al vector de incógnitas (x_1, x_2, x_3, x_4), despejamos haciendo sustitución hacia atrás:

$$(s+8) \cdot x_4 = t + 2 \implies x_4 = \frac{t+2}{s+8} \tag{1}$$

$$x_3 - 2x_4 = -1 \overset{(1)}{\implies} x_3 = -1 + 2 \cdot \frac{t+2}{s+8} = \frac{-s-8+2t+4}{s+8} \tag{2}$$

$$x_2 - 2x_4 = 0 \overset{(1)}{\implies} x_2 = 2 \cdot \frac{t+2}{s+8} = \frac{2t+4}{s+8} \tag{3}$$

$$x_1 + 2x_4 = 1 \overset{(1)}{\implies} x_1 = 1 - 2 \cdot \frac{t+2}{s+8} = \frac{s+8-2t-4}{s+8} \tag{4}$$

Como nos queda algo horrible aplicamos el viejo truco de definir como parámetro la parte fea.
Sea $\alpha := \dfrac{t+2}{s+8}$, la solución nos queda:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2\alpha \\ 2\alpha \\ -1+2\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Y queda todo tan lindo que ahora es fácil VER que llegamos a una expresión idéntica a la del caso anterior (solo que, a diferencia del x_4, acá el α es un parámetro fijo)...

¿Por qué aparece la misma expresión?

$b)$ Por lo hecho en el apartado anterior, es claro que las columnas de A son linealmente dependientes si y solo si $s = -8$.

(si fueran l.i. en el primer caso existiría solución, si fueran l.i. en el segundo caso existiría solución única, si no fueran l.i. en el tercer caso entonces habría cero o infinitas soluciones).

$c)$ La pregunta del apartado se puede reformular como:

¿Cuándo el subespacio generado por las tres primeras columnas de A contiene a b?

Si M es la matriz cuyas columnas son las tres primeras columnas de A, esto último se puede reformular como:

¿Cuándo el espacio columna de M contiene a b?

O sea...

¿Cuándo el sistema de $Mx = b$ tiene solución?

Hecha esta última pregunta, es claro que necesitamos el resultado de aplicar Gauss a la matriz $(M|b)$, pero esto ya lo tenemos! En efecto, el resultado se obtiene descartando la última columna de la matriz triangular superior asociada a A (recordar cómo funciona el algoritmo de Gauss):

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & t+2 \end{array}\right]$$

Y resulta evidente que el sistema original ($Mx = b$) es compatible (admite solución) si y solo si $t = -2$.

12. Encontrar las dimensiones de:

   a) El espacio de todos los vectores de $\mathbb{R}^4$ cuyas componentes suman cero.

   b) El espacio nulo de la matriz $I \in M_{4\times 4}$.

   c) El espacio de las matrices simétricas 3×3. Hallar una base.

En cada uno de los casos lo primero que vamos a hacer es describir los espacios como espacios generados por un conjunto de vectores. Una vez hecho esto, vamos a encontrar un conjunto linealmente independiente maximal entre los vectores que describen el espacio, lo que nos permitirá definir, en cada caso, una base del espacio vectorial. Por último, considerando que el cardinal de una base de un espacio vectorial, coincide con la dimensión del mismo, obtenemos el dato que nos pide el ejercicio.

a) Sea S el espacio de todos los vectores de $\mathbb{R}^4$ cuyas componentes suman cero. Entonces,

$$S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + w = 0\} = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x = -y - z - w\} =$$
$$= \{(-y - z - w, y, z, w) \in \mathbb{R}^4\} = \{y(-1, 1, 0, 0) + z(-1, 0, 1, 0) + w(-1, 0, 0, 1) : y, z, w \in \mathbb{R}\} =$$
$$= \langle\{(-1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)\}\rangle\,.$$

Definimos $\beta = \{(-1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)\}$. ¿Cuál es el conjunto maximal de vectores linealmente independientes contenidos en β?

Para responder esta pregunta vamos a escalonar la matriz que tiene como columnas a los vectores de β.

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, los vectores de β son linealmente independientes y β es una base de S. Así podemos concluir que la dimensión de S es 3.

b) Denotamos por $N(I)$ al espacio nulo de la matriz $I \in M_{4\times 4}$. Luego,

$$N(I) = \{X = (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : IX^T = \mathbf{0}\} \underbrace{=}_{(*)} \{\mathbf{0}\}.$$

$$(*)\;\; I \cdot X^T = \mathbf{0} \;\Leftrightarrow\; \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \;\Leftrightarrow\; x = y = z = w = 0.$$

Como $\{\mathbf{0}\}$ no es un conjunto linealmente independiente tenemos que la base de $N(I)$ es el conjunto $\emptyset$ y así, la dimensión de $N(I)$ es 0.

c) Consideramos S el espacio de las matrices simétricas 3×3. Así,

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix} : a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R} \right\}.$$

¿Cómo escribimos a S como el espacio generado por un conjunto de vectores en $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$?

El conjunto de vectores que generan a S, ¿es un conjunto de vectores linealmente independiente?

¿Cuál es la dimensión de S?

13. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y W un subespacio de V tal que $\dim(V) = \dim(W)$. Probar que $V = W$.

Para probar que $V = W$ vamos a probar la doble contención.

$\supseteq$) Esta contención vale por definición ya que que W es un subespacio vectorial de V.

$\subseteq$) Sabemos que W es un espacio vectorial de dimensión finita, digamos n. Entonces existe $\beta_W = \{w_1, \ldots, w_n\}$ base de W (β_W conjuntos de vectores linealmente independientes que generan W).

Supongamos que $V \not\subseteq W$, luego existe $v \in V \setminus W$. Como $W = \langle \beta_W \rangle$ y $W \subseteq V$ entonces resulta $\overline{\beta} = \{v, w_1, \ldots, w_n\}$ un conjunto de vectores linealmente independientes en V ya que, si consideramos la combinación lineal

$$\alpha v + \gamma_1 w_1 + \ldots + \gamma_n w_n = 0,$$

podemos observar que $\alpha = 0$, pues si $\alpha \neq 0$ entonces $v = -\frac{\gamma_1}{\alpha} w_1 \ldots - \frac{\gamma_n}{\alpha} w_n$ y resulta $v \in \langle \beta_W \rangle = W$. Entonces $\gamma_1 w_1 + \ldots + \gamma_n w_n = 0$, y como β_W es una base de W, en particular es un conjunto de vectores linealmente independientes y así $\gamma_1 = \ldots = \gamma_n = 0$.

Luego, $\overline{\beta}$ es un conjunto de $n+1$ vectores linealmente independientes de V. Por lo tanto, la dimensión de V es mayor o igual a $n+1$, lo que contradice el hecho de que $\dim(V) = \dim(W)$.

Así resulta $V \subseteq W$.

16. Describir los cuatro espacios fundamentales asociados a las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Recordemos que dada una matriz A y U su matriz escalonada, podemos hacer uso de U para obtener ciertos datos que nos piden los ejercicios.

A partir de la matriz U, podemos identificar las columnas y filas pivots de A. Una vez identificadas las columnas pivots en U, si volvemos a la matriz A, las columnas pivots de A son linealmente independientes y generan el espacio columna $C(A)$. De manera similar podemos pensar que una vez identificadas las filas pivots de U, si volvemos a A encontramos filas linealmente independientes que generan el espacio fila de A denotado por $C(A^T)$. Es importante observar que, para obtener los vectores l.i. que generan el espacio fila $C(A^T)$ trabajamos con la matriz A y no con A^T, entonces en este caso no es necesario volver a la matriz A para describir el espacio buscado, basta con escribir a $C(A^T)$ como el espacio generado por las filas pivots de U, ya que las operaciones elementales hacen que las filas de la matriz escalonada U obtenida a partir de la matriz A, sean combinaciones lineales de las filas de A.

Con respecto al espacio nulo, recordemos que $N(A) = N(U)$ y como resulta más sencillo obtener los vectores que generan este espacio a partir de la matriz U, trabajamos con U.

Por último, para calcular $N(A^T)$ debemos resolver el sistema $A^T y = 0$, o bien $y^T A = 0$.

Vamos a describir ahora los cuatro espacios fundamentales asociados a la matriz B del ejercicio 16.: $C(B)$, $N(B)$, $C(B^T)$ y $N(B^T)$.

Comenzamos escalonando la matriz $B \in M_{2\times 4}(\mathbb{R})$.

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U.$$

Claramente el rango de B es $r = 1$.

Sabemos que el espacio columna de B es el espacio generado por $r = 1$ columna linealmente independiente de B y el conjunto formado por dicha columna es un conjunto generador maximal de $C(B)$, luego

$$C(B) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Por otro lado, tenemos $r = 1$ vector fila linealmente independiente que es el conjunto generador maximal de $C(B^T)$, entonces

$$C(B^T) = \langle \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \rangle.$$

Vamos a calcular ahora $N(B)$. Sabemos que $N(B) = N(U)$ es un subespacio vectorial de dimensión $n - r = 4 - 1 = 3$ y que es el espacio generado por las soluciones especiales del sistema $Bx = 0$ o bien $Ux = 0$, que son linealmente independientes. Entonces, como tenemos una única columna pivot, la columna 2, las variables libres están asociadas a las columnas 1, 3 y 4. Luego,

Soluciones especiales:

- $x_1 = 1, x_3 = x_4 = 0$
  $$\overline{X}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$
- $x_3 = 1, x_1 = x_4 = 0$
  $$\overline{X}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$
- $x_4 = 1, x_1 = x_3 = 0$
  $$\overline{X}^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$N(B) = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle.$$

Por último, vamos a calcular el espacio nulo a izquierda de B, $N(B^T)$. Sabemos que la dimensión de este espacio es $m - r = 2 - 1 = 1$ y que es el espacio generado por las soluciones del sistema $B^T y = 0$ o bien, $y^T B = 0$ con $y \in \mathbb{R}^2$. Así,

$$N(B^T) = \left\langle \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Vamos a considerar otra matriz, la llamamos D, que no está en el ejercicio 16. y vamos a calcular los cuatro espacios fundamentales de D.

Dada

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

siguiendo con el proceso sugerido para obtener los datos pedidos, escalonamos D.

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = U.$$

Entonces, de acuerdo a las observaciones realizadas en este ejercicio podemos concluir que :

- $C(D) = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle,$
- $C(D^T) = \langle \{(1,2), (0,-1)\} \rangle,$
- $N(D) = N(D^T) = \{\mathbf{0}\}.$

Observemos que si trabajamos con:

$$D^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$$

cuando escalonamos obtenemos:

$$D^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = U'.$$

Luego resulta,

- $C(D^T) = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle$,
- $N(D^T) = \{\mathbf{0}\}$.

23. Sea $A = \{(1,-3,2),(2,4,1),(3,1,3),(1,1,1)\} \subset \mathbb{R}^3$, obtener:

    $a)$ Una base de $\mathbb{R}^3$ contenida en A.

    $b)$ Las componentes de los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ en la base obtenida en el apartado anterior.

    $a)$ Sabemos que la dimensión de $\mathbb{R}^3$ es 3, así que si buscamos una base de $\mathbb{R}^3$ contenida en A, basta con encontrar 3 vectores linealmente independientes en A. Para ello, escalonamos la matriz cuya columnas son los vectores del conjunto A:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 10 & 10 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 10 & 10 & 4 \\ 0 & -3 & -3 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 10 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

    Por lo tanto las columnas 1, 2 y 4 son vectores linealmente independientes.
    Entonces, si denotamos por $v_1 = (1,-3,2)$, $v_2 = (2,4,1)$ y $v_3 = (1,1,1)$, el conjunto $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$ de cardinal 3 resulta una base de $\mathbb{R}^3$ contenida en A.

    $b)$ La base canónica de $\mathbb{R}^3$ es $\beta = \{e_1, e_2, e_3\}$ donde $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ y $e_3 = (0,0,1)$. Debemos escribir las componentes de dichos vectores en la base $\beta' = \{(1,-3,2),(2,4,1),(1,1,1)\}$ obtenida en el apartado anterior. Esto es, encontrar los escalares α_i^j tales que

$$e_j = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i^j v_i \text{ para cada } j \in \{1,2,3\}.$$

    - Buscamos α_1^1, α_2^1 y α_3^1 tales que $e_1 = \alpha_1^1 v_1 + \alpha_2^1 v_2 + \alpha_3^1 v_3$. Esto es equivalente a resolver el sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1^1 \\ \alpha_2^1 \\ \alpha_3^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

    Para hallar la solución, aplicamos las mismas operaciones elementales aplicadas a la matriz en el apartado $a)$, al vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Así resulta,

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -\frac{11}{10} \end{bmatrix}.$$

    Luego, debemos resolver el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} \alpha_1^1 & + & 2\alpha_2^1 & + & \alpha_3^1 & = & 1 \\ & & 10\alpha_2^1 & + & 4\alpha_3^1 & = & 3 \\ & & & & \frac{1}{5}\alpha_3^1 & = & -\frac{11}{10} \end{array} \right.$$

.

Utilizando el método de sustitución hacia atrás obtenemos $(\alpha_1^1, \alpha_2^1, \alpha_3^1) = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{11}{2}\right)$.

Podemos denotar, $\quad [e_1]_{\beta'} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \\ \frac{5}{2} \\ \\ -\frac{11}{10} \end{bmatrix}$.

- Ahora buscamos α_1^2, α_2^2 y α_3^2 tales que $e_2 = \alpha_1^2 v_1 + \alpha_2^2 v_2 + \alpha_3^2 v_3$.

  $[e_2]_{\beta'} = \begin{bmatrix} ? \\ ? \\ ? \end{bmatrix}$.

- Por último, buscamos α_1^3, α_2^3 y α_3^3 tales que $e_3 = \alpha_1^3 v_1 + \alpha_2^3 v_2 + \alpha_3^3 v_3$.

  $[e_3]_{\beta'} = \begin{bmatrix} ? \\ ? \\ ? \end{bmatrix}$.