Práctica 6

1. Considerar los siguientes diagramas. En ambos casos, probar que si los dos triángulos conmutan, también conmuta el cuadrado.

a)
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "a"] \arrow[d, "d"'] \arrow[dr, "c"] & Y \arrow[d, "b"] \\ Z \arrow[r, "e"'] & W \end{tikzcd}$$

b)
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "a"] \arrow[d, "d"'] & Y \arrow[d, "b"] \arrow[dl, "c"'] \\ Z \arrow[r, "e"'] & W \end{tikzcd}$$

Definición **2.** *Un* ***diagrama*** *en una categoría $\mathscr{C}$ es un grafo dirigido etiquetado consistentemente, donde los vértices se etiquetan con objetos de $\mathscr{C}$, las aristas dirigidas con flechas de $\mathscr{C}$ de modo que si una arista está etiquedada con una flecha f cuyo dominio es A y codominio es B, el nodo inicial y final de esta arista se etiquetan con A y B respectivamente.*

Un diagrama en $\mathscr{C}$ se dice ***conmutativo*** *o se dice que* ***conmuta*** *si para cualquier par de vértices X e Y del diagrama, todos los caminos del diagrama entre X e Y son equivalentes, en el sentido que determinan una arista dirigida entre X e Y que representa una misma flecha en $\mathscr{C}$.*

a) X, Y, W conmuta $\Rightarrow c = a \circ b$
X, Z, W " $\Rightarrow c = d \circ e$ $\Rightarrow a \circ b = d \circ e$ //

$\therefore D$ conmuta

b) X, Y, Z conmuta $\Rightarrow d = a \circ c$
Z, Y, W " $\Rightarrow b = c \circ e$

qpq $a \circ b = d \circ e$
$a \circ (c \circ e) = (a \circ c) \circ e$
$a \circ c \circ e = a \circ c \circ e$

$\therefore D$ conmuta

2. Probar que si $\mathscr{C}$ es una categoría con un único objeto, entonces $\mathscr{C} = \mathscr{C}_M$ para algún monoide $(M, *)$.

Sea $\mathscr{C}$ tq $\operatorname{ob} \mathscr{C} = \{x\}$ pa x
$\operatorname{mor} \mathscr{C} = \{ id_x, \ldots \}$

$\mathscr{C}_M :$ $\quad \text{ob}\, \mathscr{C}_1 = \{x\}$

$\text{mor}\, \mathscr{C}_M = M$

$\text{dom} : M \to \{x\}$

$\text{codom} : M \to \{x\}$

$\circ = *$

vale asoc. sobre $\circ$

$e = \text{id}_x$

$(M, *)$ $\quad$ $\text{mor}\, \mathscr{C}_M$

You already know that a monoid M is a set with a unit e and a binary operation. More precisely, if $a, b, c \in M$ then

$$a \circ b \in M$$

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$$

$$e \circ a = a \circ e = a$$

Now, take any category C with one object, c. Since C is a category, we need to say what the arrows are. That is, what the morphisms $c \to c$ are. There must be a unit $1_c : c \to c$, the arrows must be composeable and the composition must be associative. More precisely, if f, g and h are arrows, then

$$f \circ g \in Morph(C)$$

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

$$1_c \circ f = f \circ 1_c = f \quad \circledast$$

Notice we are *not* talking about sets here. Just objects and arrows, in the abstract.

But now if we just observe that the operations on M are *exactly* the same as the operations on $Morph(C)$, we may regard the category C as the monoid M. This correspondence is reversible: given category $C = \{c\}$ we obtain a monoid M whose elements are the arrows of C.

Thus the two descriptions are equivalent.

All this works because the binary operations are the same for both structures.

- *Para cada* $A \in \text{ob}\,\mathscr{C}$ *existe un morfismo* $\text{id}_A \in \text{Hom}(A, A)$ *denominado* ***morfismo identidad*** *tal que:*
  - *para cada* $B \in \text{ob}\,\mathscr{C}$ *y cada* $f \in \text{Hom}(A, B)$, $f \circ \text{id}_A = f$;
  - *para cada* $C \in \text{ob}\,\mathscr{C}$ *y cada* $g \in \text{Hom}(C, A)$, $\text{id}_A \circ g = g$.

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "g"'] & A \arrow[loop above, "\text{id}_A"] \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

$\to \exists!$ id_x que cumple $\circledast$. Si existieran más elems en $\text{ob}\,\mathscr{C}$ habrían más id_a

3. Sea Rel tal que ob Rel es la clase de conjuntos, mor Rel son las relaciones binarias entre conjuntos y la composición de morfismos es la composición de relaciones. Definir funciones domonio y codominio e identidades adecuadas y probar que Rel es efectivamente una categoría, denominada *categoría de relaciones*.

sea $R \in \mathrm{Hom}_{Rel}(A,B)$

$\mathrm{dom}(R) = A$
$\mathrm{codom}(R) = B$

queremos $Id_A \in \mathrm{Hom}(A,A)$ $\forall A \in$ ob Rel tq

- $\forall B \in$ ob Rel $\wedge$ $f \in \mathrm{Hom}(A,B) : f \circ Id_A = f$ (*)
- $\forall B \in$ ob Rel $\wedge$ $f \in \mathrm{Hom}(B,A) : Id_A \circ f = f$

Sabemos que $\exists$ Id relación tq $A\, Id\, A$ $\forall A$ conjunto
Observamos que Id cumple (*)

Finalmente la comp. de relac. es asoc.

$\therefore$ Rel es categoría

4. Sea PSet tal que ob PSet son pares (X, x_0) donde X es un conjunto y $x_0 \in X$. El par (X, x_0) se denomina un *conjunto punteado*. Una función entre los conjuntos punteados (X, x_0) e (Y, y_0) es una función $f : X \to Y$ tal que $f(x_0) = y_0$. Probar que si mor PSet son funciones entre conjuntos punteados, con la composición usual de funciones y las identidades usuales, PSet es una categoría.

5. Sean $\mathscr{C}$ una categoría y A un objeto de $\mathscr{C}$. Definimos $\mathscr{C}|A$ como la categoría cuyos objetos son las flechas f de $\mathscr{C}$ tales que $\mathrm{codom}(f) = A$. Una flecha g en $\mathscr{C}|A$ de $f\colon X \to A$ en $h\colon Y \to A$ es una flecha $g\colon X \to Y$ de $\mathscr{C}$ tal que $f = h \circ g$.

a) Expresar las flechas de $\mathscr{C}|A$ en términos de diagramas conmutativos.

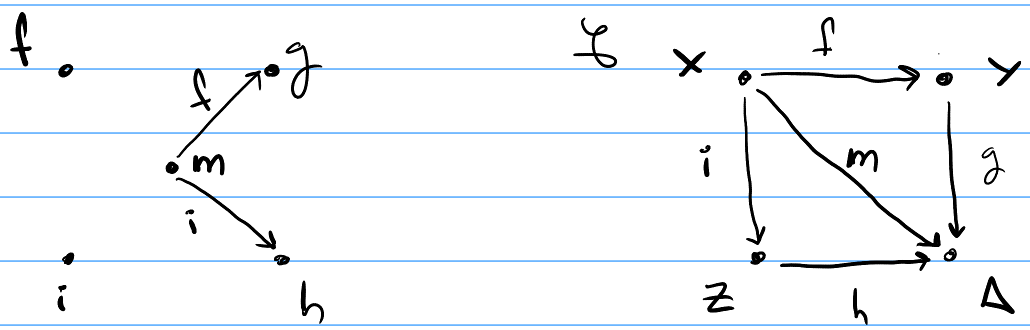
b) Verificar que $\mathscr{C}|A$ es una categoría.

c) Si $\mathscr{C}_P$ es la categoría definida por un conjunto ordenado P y $x \in P$, determinar $\mathscr{C}_P|x$.

$ob\,\mathscr{C}|A = f \,/\, f \in Hom_{\mathscr{C}}(B, A) \ \forall B \in ob\,\mathscr{C}$

$hom\,\mathscr{C}|A = g \,/\, f = h \circ g \quad tq \quad f: X \to A,\ h: Y \to A,\ g: X \to Y$

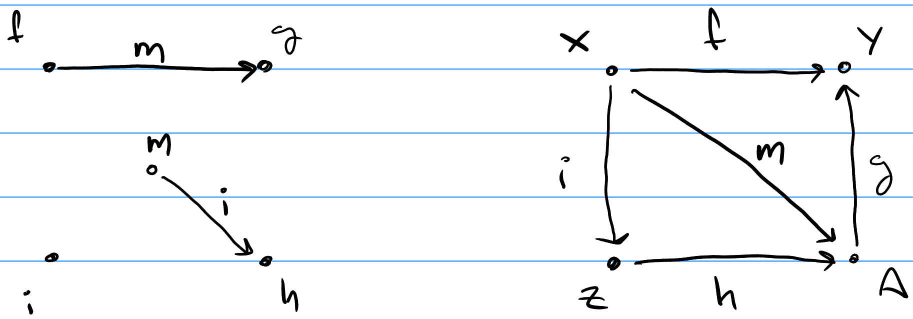
a) $\mathscr{C}|A$



$f: X \to Y \quad g: Y \to A$

$m: X \to A$

$m = g \circ f$



$f: X \to Y \quad g: A \to Y$

$m: X \to A$

$f = g \circ m$

b) Sea $o_{\mathscr{C}|A} = o$

qvq

6. Sean $\mathscr{C}$ una categoría y f, g flechas de $\mathscr{C}$. Probar que

a) Si f y g son monomorfismos, entonces $g \circ f$ también lo es.

b) Si $g \circ f$ es un monomorfismo, f también lo es.

c) Si f y g son epimorfismos, entonces $g \circ f$ también lo es.

d) Si $g \circ f$ es un epimorfismo, g también lo es.

e) Si f^{-1} es la inversa de f y g^{-1} es la inversa de g, entonces $f^{-1} \circ g^{-1}$ es la inversa de $g \circ f$.

a) qpq f, g monom. $\Rightarrow g \circ f$ monom.

f, g monom $\Rightarrow$ $f \circ h = f \circ h' \Rightarrow h = h' \quad \forall h, h'$
$g \circ h = g \circ h' \Rightarrow h = h' \quad \forall h, h'$

Sup h, h' eq

$(g \circ f) \circ h = (g \circ f) \circ h'$
$g \circ (f \circ h) = g \circ (f \circ h') \longrightarrow f$ monom. $\Rightarrow h = h'$
$g \circ f \circ h = g \circ f \circ h$

b) $g \circ f$ monom. $\Rightarrow f$ monom.

$g \circ f$ monom. $\Rightarrow (g \circ f) \circ h = (g \circ f) \circ h' \Rightarrow h = h'$

$(g \circ f) \circ h = (g \circ f) \circ h' \Rightarrow g \circ (f \circ h) = g \circ (f \circ h') \Rightarrow f \circ h = f \circ h'$
$\Rightarrow h = h'$

$\therefore f$ monom.

c, d) análogos a a, b

a con gráfico)

f monom $\Rightarrow$ $H \underset{h'}{\overset{h}{\rightrightarrows}} A \xrightarrow{f} B$ conmuta $\forall H, h, h'$

g monom $\Rightarrow$ $J \underset{j'}{\overset{j}{\rightrightarrows}} B \xrightarrow{g} C$ conmuta " qvq $H \underset{h'}{\overset{h}{\rightrightarrows}} A \xrightarrow{g \circ f} C$ conmuta

equiv. $H \underset{h'}{\overset{h}{\rightrightarrows}} A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ conmuta

ó sea $\quad g \circ f \circ h = g \circ f \circ h'$

$$g \circ (f \circ h) = g \circ (f \circ h') \quad \langle g \text{ monom.} \rangle$$

$$f \circ h = f \circ h' \quad \langle f \text{ monom.} \rangle$$

$$h = h'$$

$\therefore \; g \circ f \circ h = g \circ f \circ h' \Rightarrow h = h'$

e) f^{-1} inv. de f
g^{-1} inv. de g $\Rightarrow f^{-1} \circ g^{-1}$ inv. de $g \circ f$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[rr, bend left=50, "g \circ f"] & B \arrow[l, shift left, "f^{-1}"] \arrow[r, shift left, "g"] & C \arrow[l, shift left, "g^{-1}"] \arrow[ll, bend left=50, "f^{-1} \circ g^{-1}"]
\end{tikzcd}$$

7. Probar que en Grp los morfismos mónicos son monomorfismos de grupos, los morfismos épicos son epimorfismos de grupos y los isomorfismos son isomorfismos de grupos.

f monom. grupos $\Rightarrow f$ monom. $\Rightarrow f$ iny.

$\cancel{f(xy) = f(x)f(y)}$ ~~semig~~

$\cancel{f(e) = e}$ monoide

$\cancel{f(x^{-1}) = f(x)^{-1}}$ grupo

qpq f morf. mónico en Grp $\Rightarrow f$ monom. de grupos

f morf. mónico en Grp $\Rightarrow$ • $f \in Hom(A,B)$

• $h \circ f = h' \circ f \Rightarrow h = h'$

$\forall\, h, h' \in Hom(H,A)$

qpq f inyectiva

f: Grupo $\to$ Grupo

$x \neq y$

Sup. q. f no es iny. $\Rightarrow \exists\, x, y \in (X, \cdot)$ / $\underbrace{f(x) = f(y)}$

$\exists A, B, C \in$ ob Grp tq $f \in Hom(A,C)$

$\underbrace{(\mathbb{Z},+) \xrightarrow{f} (\mathbb{N},+)}$

CONSULTAR

9. Sea $\mathscr{C}$ una categoría y $\mathscr{C}^{op}$ su categoría dual.

a) Probar que $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$ es un monomorfismo si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^{op}}(B, A)$ es un epimorfismo.

b) Probar que $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$ es un epimorfismo si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^{op}}(B, A)$ es un monomorfismo.

c) Probar que A es un objeto inicial (resp. terminal) en $\mathscr{C}$ si y sólo si A es un objeto terminal (resp. inicial) en $\mathscr{C}^{op}$.

a) qpq $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$ monom. $\Rightarrow f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^{op}}(B,A)$ epim.

$f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$ monom. $\Rightarrow f \circ h = f \circ h' \Rightarrow h = h' \quad \forall h, h' \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(H,A)$ (1)

- $\circ_{op}$ es tq $g \circ f = f \circ_{op} g$
- $ob\,\mathscr{C} = ob\,\mathscr{C}^{op}$
- $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B) \Rightarrow f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^{op}}(B,A)$

En (1):

$$\left.\begin{array}{l} f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^{op}}(B,A) \\ h, h' \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^{op}}(A,H) \\ f \circ h = h \circ_{op} f \\ f \circ h' = h' \circ_{op} f \end{array}\right\} \overset{(1)}{\Rightarrow} h \circ_{op} f = h' \circ_{op} f \Rightarrow h = h' \ \forall \ldots$$

$\therefore f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^{op}}(B,A)$ epim.

b) análogo

c) qpq A inicial en $\mathscr{C} \Leftrightarrow A$ terminal en $\mathscr{C}^{op}$

A inicial en $\mathscr{C} \Rightarrow \exists! f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,X) \ \forall X \in ob\,\mathscr{C}$

$f \in mor\,\mathscr{C} \Rightarrow f \in mor\,\mathscr{C}^{op}$

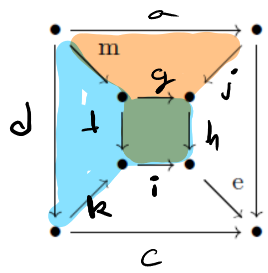
$\nexists g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^{op}}(X,A) \ \forall X \in ob\,\mathscr{C}^{op}$ con $g \neq f$ ya que sino $g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,X)$ y f es único.

$\therefore \exists!\, f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(X, A) \ \forall X \in ob\, \mathcal{C}^{op}$

$\therefore A$ terminal en $\mathcal{C}^{op}$

10. Considerar que en el siguiente diagrama los 4 trapecios conmutan

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[d] & \bullet \arrow[l] \arrow[d] \\ \bullet \arrow[d] & \bullet \arrow[l] \arrow[d] \\ \bullet & \bullet \arrow[l] \end{tikzcd}$$



Probar que

a) Si el cuadrado interno conmuta, también lo hace el cuadrado externo.

b) Si e es epi y m es mono, entonces si el cuadrado externo conmuta, también lo hace el cuadrado interno.

a) cuadrado interno conmuta:

$$h \circ g = i \circ f$$

qvq $b \circ a = c \circ d$

Por Lema ?, los trapecios conmutan y el cuadrado interno conmuta $\Rightarrow$ los rectángulos formados por un trapecio y el centro conmutan

$b = e \circ h \circ j$

$c = e \circ i \circ k$

$$\left.\begin{aligned} i \circ k \circ d &= h \circ g \circ m \\ h \circ j \circ a &= h \circ g \circ m \end{aligned}\right\} \Rightarrow i \circ k \circ d = h \circ j \circ a \ (1)$$

$b \circ a = c \circ d$

$e \circ (h \circ j \circ a) = e \circ (i \circ k \circ d)$

por (1) vale

b) e epi $\Rightarrow$

m mono $\Rightarrow$

$b \circ a = c \circ d$

11. Determinar, si existen, los objetos iniciales, terminales y nulos en las siguientes categorías:

a) $\mathrm{Set} \times \mathrm{Set}$. b) $\mathrm{Set}^{\to}$. c) PSet. d) Grp. e) Ab. f) Rel.

a) $(\emptyset, \emptyset)$ inicial

$(\{*\}, \{*\})$ terminal

$(\{*\}, \emptyset) \longrightarrow$ CONSULTAR

12. Dar una categoría sin objetos iniciales. Dar una sin objetos finales. Dar una donde los objetos finales e iniciales coincidan.

$\text{ob}\,\mathscr{C} = A, B, C$

$\text{mor}\,\mathscr{C} = f, g$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & B \\ & C \end{tikzcd}$$

no tiene terminal

Consultar si está bien

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] & A \\ C \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

no tiene inicial

$$\begin{tikzcd} A \arrow[loop left, "Id_A"] \end{tikzcd}$$

term. e inic. coinciden

13. Sean A y B objetos en una categoría $\mathscr{C}$. Un A, B-*pairing* se define como una terna (P, p_1, p_2) donde P es un objeto de $\mathscr{C}$ y $p_1 : P \to A$ y $p_2 : P \to B$ son morfismos de $\mathscr{C}$. Un morfismo de A, B-pairings

$$f : (P, p_1, p_2) \to (Q, q_1, q_2)$$

es cualquier morfismo f de $\mathscr{C}$ tal que $q_1 \circ f = p_1$ y $q_2 \circ f = p_2$, es decir, el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2" near end] & Q \arrow[d, "q_2"] \arrow[dl, "q_1"' near end] \\ A & B \end{tikzcd}$$

a) Probar que los A, B-pairings y sus morfismos forman una categoría $\text{Pair}(A, B)$.

b) Siendo 0 un objeto inicial de $\mathscr{C}$, mostrar que

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[dl, "!_A"'] \arrow[dr, "!_B"] & \\ A & & B \end{tikzcd}$$

es un objeto inicial de $\text{Pair}(A, B)$.

a) $\text{ob}\,\text{Pair}(A,B) = (P, p_1, p_2) \,/\, P \in \text{ob}\,\mathscr{C},\ \underbrace{p_1 : P \to A,\ p_2 : P \to B}_{\in\ \text{mor}\,\mathscr{C}}$

$\text{mor}\,\text{Pair}(A,B) = f : (P, p_1, p_2) \to (Q, q_1, q_2) \,/\, q_1 \circ f = p_1 \wedge q_2 \circ f = p_2$

$0_{\text{Pair}} = 0$

qvq 1. $\circ_{pair}$ asociativa

2. $\forall X \in ob\, Pair(A,B)\ \exists\ Id_X : X \to X$ tq $Id_X \circ f = f$
$f \circ Id_X = f$

1. para $f,g,h \in mor\, Pair$

$f : (P, p_1, p_2) \to (G, g_1, g_2) \quad g_1 \circ f = p_1 \wedge g_2 \circ f = p_2$
$g : (G, g_1, g_2) \to (H, h_1, h_2) \quad h_1 \circ g = g_1 \wedge h_2 \circ g = g_2$
$h : (H, h_1, h_2) \to (J, j_1, j_2) \quad j_1 \circ h = h_1 \wedge j_2 \circ h = h_2$

qvq $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "p_1"'] & G \arrow[r, "g"] \arrow[d, "g_1"] & H \arrow[r, "h"] \arrow[dl, "h_1"] & J \arrow[dll, "j_1"] \\
& A & B &
\end{tikzcd}$$

Cada Δ conmuta

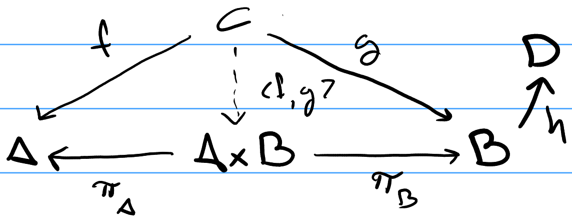
b)

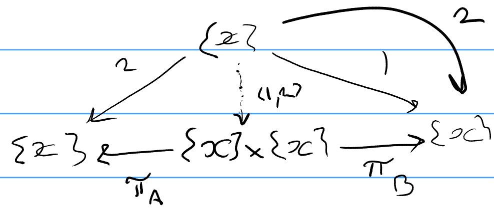
$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[dl, "!_A"'] \arrow[dr, "!_B"] & \\
A & & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "!_A"'] \arrow[dr, "!_B"] & X \arrow[dl, "x_1"'] \arrow[d, "x_2"] \\
A & B
\end{tikzcd}$$

qvq $x_1 \circ f = !A$
$x_2 \circ f = !B$

$f \in mor\, \mathcal{C}$ y 0 inicial en $\mathcal{C} \Rightarrow f$ única en $Pair(A,B)$

14. Dar una categoría donde algún par de objetos carecen de producto.





15. Mostrar las siguientes identidades:

a) $\langle \pi_1, \pi_2 \rangle = id$

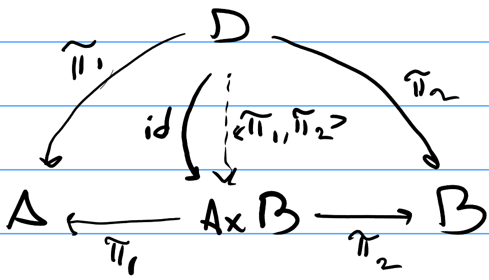
b) $\langle f \circ h, g \circ h \rangle = \langle f, g \rangle \circ h$

c) $(f \times h) \circ \langle g, k \rangle = \langle f \circ g, h \circ k \rangle$

d) $(f \times h) \circ (g \times k) = (f \circ g) \times (h \circ k)$

e) $\langle [f, g], [h, k] \rangle = [\langle f, h \rangle, \langle g, k \rangle]$

a) $\langle \pi_1, \pi_2 \rangle = id$



qvq $\pi_2 = \pi_2 \circ id$

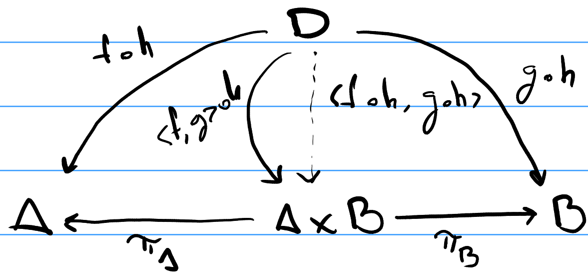
$\pi_1 = \pi_1 \circ id$

lo cual es trivial por id

luego, $\exists! \langle f, g \rangle$ para $f = \pi_1$, $g = \pi_2$

$\therefore \langle \pi_1, \pi_2 \rangle = id$

b) $\langle f \circ h, g \circ h \rangle = \langle f, g \rangle \circ h$

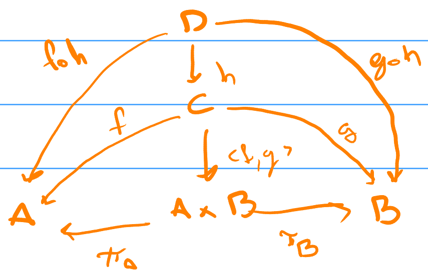


qvq $f \circ h = \pi_A \circ (\langle f, g \rangle \circ h)$

$= (\pi_A \circ \langle f, g \rangle) \circ h$

$= f \circ h$

análogo



c) $(f \times h) \circ \langle g, k \rangle = \langle f \circ g, h \circ k \rangle$

$(f \times h) \Rightarrow f : C \to A \;,\; h : C \to B$

Sea $C = A \times B$

$f \times h = \langle f \circ \pi_A , h \circ \pi_B \rangle$

$$
\begin{tikzcd}
 & & D \arrow[ddll, bend right, "g"'] \arrow[ddrr, bend left, "k"] \arrow[d, dashed, "\langle g,k\rangle"] \arrow[dd, bend right=40, "\langle f\circ g, h\circ k\rangle"'] & & \\
 & & C \arrow[dll, bend right, "f\circ\pi_A"'] \arrow[drr, bend left, "h\circ\pi_B"] \arrow[d, dashed, "(f\times h) = \langle f\circ\pi_A, h\circ\pi_B\rangle"] & & \\
A & & A \times B \arrow[ll, bend left, "\pi_A"] \arrow[rr, bend right, "\pi_B"'] & & B
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{aligned}
k &= (h \circ \pi_B) \circ \langle g, k \rangle \\
  &= h \circ (\pi_B \circ \langle g, k \rangle) \\
  &= h \circ k
\end{aligned}
$$

d) $(f \times h) \circ (g \times k) = (f \circ g) \times (h \circ k)$

$g \circ \pi_A = \pi_C \circ (g \times k)$

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "g"] & A \times B \arrow[l, "\pi_A"'] \arrow[r, "\pi_B"] \arrow[d, "(g\times k) = \langle g\circ\pi_A, k\circ\pi_B\rangle"] & B \arrow[d, "k"] \\
C \arrow[d, "f"] & C \times D \arrow[l, "\pi_C"'] \arrow[r, "\pi_D"] \arrow[d, "(f\times h) = \langle f\circ\pi_C, h\circ\pi_d\rangle"] & D \arrow[d, "h"] \\
E & E \times F \arrow[l, "\pi_E"] \arrow[r, "\pi_F"'] & F
\end{tikzcd}
$$

$$\begin{tikzcd}
 & A \times B \arrow[dl] \arrow[d, dashed] \arrow[dr] & \\
C & C \times D \arrow[l] \arrow[r] \arrow[dl] \arrow[d, dashed] \arrow[dr] & D \\
E & E \times F \arrow[l] \arrow[r] & F
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
\text{puedo llegar a} \\
{} \arrow[r, bend left] & {} \arrow[l, bend left]
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
 & A \times B \arrow[dl, no head] \arrow[d, dashed] \arrow[dr] & \\
E & E \times F \arrow[l] \arrow[r] & F
\end{tikzcd}$$

16. Probar los siguientes isomorfismos:

a) $A \times B \cong B \times A$

b) $A \times 1 \cong A$

c) $A \times (B \times C) \cong (A \times B) \times C$

a) $ob\,\mathcal{C} = A, B, A \times B, B \times A$

b) $A \times 1 \cong A$

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, bend right, "id_A"'] \arrow[d, "\langle id_A, h \rangle"] \arrow[dr, bend left, "h"] & \\
A & A \times 1 \arrow[l, "\pi_A"'] \arrow[r, "\pi_1"] & 1
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, bend right, "id_A"'] \arrow[d, "\langle id_A, h \rangle"] \arrow[dr, bend left, "h"] & \\
A & A \arrow[l, "id_A"'] \arrow[r, "h"] & 1
\end{tikzcd}$$

Verificar que algo es categoría

1. establecer $ob\mathcal{C}$, $mor\mathcal{C}$
2. determinar dom y codom
3. establecer $\circ$
4. ver que $\circ$ verifique
   a. $h\circ(g\circ f) = (h\circ g)\circ f \quad \forall h,g,f \in mor\mathcal{C}$ (que tipen)
   b. $\forall X \in ob\mathcal{C}\ \exists\, id_X \in Hom(X,X)$ tq
      - $\forall B \in ob\mathcal{C},\ f \in Hom(X,B),\ f\circ id_X = f$
      - $\forall B \in ob\mathcal{C},\ f \in Hom(B,X),\ id_X \circ f = f$

Verificar diagrama conmutativo

$\mathcal{D}$ conmuta sii todo camino X, Y es equiv. $\forall X, Y$ obj.

Por ejemplo, el siguiente diagrama conmuta, si hay una flecha $h : X \to Y$ que es a la vez $g \circ f'$ y $f \circ g'$. Es decir, el diagrama es conmutativo si $g' \circ f = f' \circ g$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[d, "g'"] \\ W \arrow[r, "f'"] & Y \end{tikzcd}$$

Lema 1. *Si en el siguiente diagrama ambos cuadrados interiores son conmutativos, entonces el rectángulo exterior es conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "b"'] & C \arrow[d, "c"] \\ A' \arrow[r, "g"] & B' \arrow[r, "g'"] & C' \end{tikzcd}$$

Probar monomorfismos, epimorfismos e isomorfismos

Definición 4. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría y $f : A \to B$ un morfismo de $\mathscr{C}$. Decimos que f es un* ***monomorfismo*** *(o que f es* ***mónico****) si para cualquier par de morfismos $g : C \to A$, $h : C \to A$ en $\operatorname{mor}\mathscr{C}$ se verifica que*

$$f \circ g = f \circ h \implies g = h.$$

Es decir, f es mónico si para cada $g, h \in \operatorname{Hom}(C, A)$ se tiene

$$C \underset{h}{\overset{g}{\rightrightarrows}} A \xrightarrow{f} B \quad \text{conmutativo} \implies g = h$$

Claramente, si un morfismo es mónico en una categoría $\mathscr{C}$ lo será en cualquier subcategoría $\mathscr{C}'$ de $\mathscr{C}$ que lo contenga como morfismo, dado que la composición en $\mathscr{C}'$ es la misma que en $\mathscr{C}$. Es decir:

Lema 2. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría y $\mathscr{C}'$ una subcategoría de $\mathscr{C}$. Si $f \in \operatorname{mor}\mathscr{C}$ es mónico y $f \in \operatorname{mor}\mathscr{C}'$, entonces f es un monomorfismo en $\mathscr{C}'$.*

épico

epimorfismo

épico

Lema 3. *En* Set *un morfismo es mónico si y sólo si es una función inyectiva.*

Lema 4. *En toda categoría donde los objetos sean conjuntos, los morfismos sean funciones entre conjuntos y la composición sea la composición usual de funciones (por ejemplo, en todas las categorías de los Ejemplos 2), toda función inyectiva es un monomorfismo.*

sobreyectiva epimorfismo

Definición 5. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría y $f : A \to B$ un morfismo de $\mathscr{C}$. Decimos que f es un* ***epimorfismo*** *o un morfismo* ***épico*** *si para cualquier $C \in \operatorname{ob}\mathscr{C}$ y cualquier par de morfismos $g, h \in \operatorname{Hom}(B, C)$, se verifica*

$$g \circ f = h \circ f \implies g = h.$$

Es decir, f es épico si para cada $g, h \in \operatorname{Hom}(B, C)$ se tiene

$$A \xrightarrow{f} B \underset{h}{\overset{g}{\rightrightarrows}} C \quad \text{conmutativo} \implies g = h$$

Definición 6. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría y $f \in \operatorname{mor}\mathscr{C}$ un morfismo. Si $f \in \operatorname{Hom}(A, B)$, decimos que f es un* ***isomorfismo*** *si existe un morfismo $f' \in \operatorname{Hom}(B, A)$ tal que $f' \circ f = \mathrm{id}_A$ y $f \circ f' = \mathrm{id}_B$. Si existe un isomorfismo $f \in \operatorname{Hom}(A, B)$ decimos que A y B son objetos* ***isomorfos****.*

Lema 8. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría. Entonces:*

1. *Para cada $A \in \operatorname{ob}\mathscr{C}$, id_A es un isomorfismo.*
2. *Si $f \in \operatorname{Hom}(A, B)$ es un isomorfismo, entonces $f^{-1} \in \operatorname{Hom}(B, A)$ es un isomorfismo.*
3. *Si $f \in \operatorname{Hom}(A, B)$ y $g \in \operatorname{Hom}(B, C)$ son isomorfismos, entonces $g \circ f \in \operatorname{Hom}(A, C)$ es un isomorfismo.*
4. *La relación $\sim$ en $\operatorname{ob}\mathscr{C}$ dada por $A \sim B$ si existe un isomorfismo $f \in \operatorname{Hom}(A, B)$ es una relación de equivalencia.*