Práctica: CAPÍTULO 5 (TERCERA PARTE) - AUTOVECTORES Y AUTOVALORES

1. En cada caso, encontrar una matriz unitaria U y una matriz triangular T tal que $U^{-1}AU = T$.

   a)
   $$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

   b)
   $$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Sea U_k una matriz unitaria de tamaño $k \times k$. Sea U de tamaño $(k+1) \times (k+1)$ tal que
   $$U = \begin{bmatrix} 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & & U_k \end{bmatrix}.$$
   Probar que U es unitaria.

3. Demostrar que el producto de matrices unitarias es una matriz unitaria.

4. Sea N una matriz normal. Demostrar:

   a) Para todo vector $x \in \mathbb{C}^n$, $\|Nx\| = \left\|N^H x\right\|$.

   b) La i-ésima fila de N tiene la misma norma que la i-ésima columna de N (pensando tanto a las filas como a las columnas como vectores de $\mathbb{C}^n$).

5. Probar que:

   a) Las matrices hermitianas son normales.

   b) Las matrices unitarias son normales.

6. Probar que $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ es diagonalizable y no es normal.

   Observación: No todas las matrices diagonalizables son normales.

7. Sea T una matriz triangular. Entonces T es normal si y solo si T es diagonal.

8. Sea A una matriz de tamaño $n \times n$ y U una matriz unitaria tal que $U^{-1}AU = \Lambda$. Probar que A es normal.

9. Probar que:

   a) Todo bloque de Jordan tiene un único autovalor con multiplicidad geométrica 1.

   b) Existen matrices no diagonalizables ni semejantes que tienen el mismo polinomio característico.
   Ayuda: Como las matrices semejantes tienen el mismo polinomio característico, la búsqueda se puede simplificar a matrices de Jordan no diagonales.

10. Sean las matrices:
    $$J = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \quad K = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

    a) Justificar por qué $\lambda = 0$ es autovalor de multiplicidad algebraica 4 de ambas matrices.

    b) Sin hacer los cálculos, responder:

    ¿Cuántos autovectores l.i. tiene asociado, en cada caso, el autovalor? Justificar.

    Ayuda: Relacionar la pregunta con la cantidad de bloques de Jordan.

c) Describir el autoespacio asociado a $\lambda = 0$ en cada caso.

d) Probar que J no es semejante a K.
Ayuda: Suponer que existe S tal que $S^{-1}JS = K$ y comparando JS con SK concluir que S no puede ser invertible.

EJERCICIOS ADICIONALES

1. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $\mathcal{B} = \{v^1, \dots, v^n\}$ una base ordenada de V. Sea A la matriz que representa a T respecto a $\mathcal{B}$. Entonces, $\lambda \in \mathbb{K}$ es un autovalor de T si y solo si λ es un autovalor de A.

2. Supongamos que cada número de *Gibonacci* G_{k+2} es el promedio de los dos números previos, G_{k+1} y G_k. Entonces, $G_{k+2} = \dfrac{1}{2}\left(G_{k+1} + G_k\right)$ y $G_{k+1} = G_{k+1}$ es:

$$\begin{bmatrix} G_{k+2} \\ \\ G_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{k+2} \\ \\ G_{k+1} \end{bmatrix}$$

   a) Encontrar los autovalores de A y sus autovectores asociados.

   b) Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} A^n$, donde $A^n = S\Lambda^n S^{-1}$.

   c) Si $G_0 = 0$ y $G_1 = 1$, demostrar que los números de Gibonacci tienden a $\dfrac{2}{3}$.

3. Supongamos que hay una epidemia en la cual, cada mes la mitad de los sanos enferman y la cuarta parte de los enfermos fallecen. Encontrar el estado estacionario para el proceso de Markov:

$$\begin{bmatrix} d_{k+1} \\ s_{k+1} \\ w_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_k \\ s_k \\ w_k \end{bmatrix}.$$

   Observación: Encontrar el estado estacionario para el proceso de Markov es equivalente a resolver el sistema de ecuaciones en diferencias dado, utilizando $u_k = A^k u_0 = S\Lambda^k S^{-1} u_0$ y calculando $\lim\limits_{k\to\infty} u_k$.