1) Determinar la cardinalidad del conjunto

$A = \{(k^3, n+2) \mid k, n \in \mathbb{N}_0\}$

Sabemos que la cardinalidad de $\mathbb{N}_0 = \aleph_0$ (aleph cero)

Sea $F: \mathbb{N}_0^2 \to A$ t.q. $F((a,b)) = (a^3, b+2)$

Veamos que F es biyectiva:

* Inyectividad: $x_1 = (a_1, b_1)$, $x_2 = (a_2, b_2) \in \mathbb{N}_0^2$

$F(x_1) = F(x_2) \Rightarrow F((a_1, b_1)) = F((a_2, b_2)) \Rightarrow$

$\Rightarrow (a_1^3, b_1+2) = (a_2^3, b_2+2) \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1^3 = a_2^3 \wedge b_1+2 = b_2+2 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2$

Luego $x_1 = x_2$, $\therefore$ F es inyectiva.

* Sobreyectividad: Dado $y_0 \in A$, ¿$\exists x_0 \in \mathbb{N}_0^2$ t.q. $F(x_0) = y_0$?

Sea $y_0 = (x^3, z+2)$

Luego, tomando $x_0 = (x, z)$, vemos que $F(x_0) =$

$= F((x,z)) = (x^3, z+2) = y_0$

Por lo tanto, F es sobreyectiva.

Luego, como F es inyectiva y sobreyectiva, F es biyectiva,

y como $F: \mathbb{N}_0^2 \to A$, $A \sim \mathbb{N}_0^2$

Luego, sabemos que $\mathbb{N}_0^n \sim \mathbb{N}_0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, i.e.

$\mathbb{N}_0^2 \sim \mathbb{N}$, por transitividad de la relación $\sim$, podemos

afirmar que $A \sim \mathbb{N}_0$, luego la cardinalidad de A es

la misma que la cardinalidad de $\mathbb{N}_0$, i.e es aleph cero.

2) $A \sim B$ entonces $P(A) \sim P(B)$

Como $A \sim B$, $\exists f: A \to B$ biyectiva

Sea $h: P(A) \to P(B)$ t.q.

$$h(x) = \begin{cases} \emptyset & x = \emptyset \\ \{f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n)\} & x = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \text{ con } a_i \in A \ \forall i = 1, \dots, n \end{cases}$$

Veamos que h es biyectiva:

* Inyectividad: $x_1, x_2 \in P(A)$

(i) $x_1 = \emptyset$, $x_2 = \emptyset$ trivial

(ii) $x_1 = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ $a_i \in A \ \forall i = 1, \dots, n$

$x_2 = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ $b_i \in A \ \forall i = 1, \dots, n$

$h(x_1) = h(x_2) \Rightarrow \{f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n)\} = \{f(b_1), f(b_2), \dots, f(b_n)\} \underset{(*)}{\Rightarrow} \{a_1, a_2, \dots, a_n\} = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$

(*) esto vale ya que f es inyectiva por hipótesis.

Los casos mixtos no hace falta considerarlos.

Luego, por (i) y (ii), h es inyectiva.

* Sobreyectividad: Dado $y_0 \in P(B)$, ¿$\exists x_0 \in P(A)$ t.q. $h(x_0) = y_0$?

(i) Sea $y_0 = \emptyset \longrightarrow x_0 = \emptyset$ ya que $h(x_0) = y_0$

(ii) Sea $y_0 = \{f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n)\}$

Tomando $x_0 = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ veamos que

$h(x_0) = h(\{a_1, a_2, \dots, a_n\}) = \{f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n)\} = y_0$

Luego, podemos ver que en ambos casos se cumple la definición de sobreyectividad, $\therefore$ h es sobreyectiva.

Concluimos en que como h es inyectiva y sobreyectiva, h es biyectiva, $\therefore$ como $h: P(A) \to P(B)$ y es biyectiva, $P(A) \sim P(B)$.

3)

a) PIP (Γ): Sea P una propiedad t.q:

(i) $P(b)$ vale

(ii) Si vale $P(\alpha)$, entonces vale $P(abb\alpha)$

(iii) Si vale $P(\alpha)$, entonces vale $P(bba\alpha)$

Luego, vale $P(\alpha)$ $\forall \alpha \in \Gamma$.

b) Sea $P(\alpha)$ la propiedad que dice:

$cant_a(\alpha) < cant_b(\alpha)$. Queremos ver que $P(\alpha)$ vale $\forall \alpha \in \Gamma$.

(i) $P(b)$ vale ya que $cant_a(b) = 0 < 1 = cant_b(b)$

(ii) Supongamos que vale $P(\alpha) \rightarrow cant_a(\alpha) = m < n = cant_b(\alpha)$

Luego, tenemos la cadena $abb\alpha$:

$cant_a(abb\alpha) = m+1$

$cant_b(abb\alpha) = n+2$

Como $m<n$ por H.I., claramente $m+1 < n+2$, $\therefore$

vale que $cant_a(abb\alpha) = m+1 < n+2 = cant_b(abb\alpha)$

(iii) Supongamos que vale $P(\alpha) \rightarrow cant_a(\alpha) = m < n = cant_b(\alpha)$

Luego, tenemos la cadena $bba\alpha$:

$cant_a(bba\alpha) = m+1$

$cant_b(bba\alpha) = n+2$

Como $m<n$ por H.I., claramente $m+1 < n+2$, $\therefore$

vale que $cant_a(bba\alpha) = m+1 < n+2 = cant_b(bba\alpha)$

Luego, por (i) vemos que vale $P(b)$, por (ii) y (iii), suponiendo que vale $P(\alpha)$ llegamos a que $P(abb\alpha)$ y $P(bba\alpha)$ valen, $\therefore$ por PIP (Γ) vale $P(\alpha)$ $\forall \alpha \in \Gamma$.

c) ¿ $bbabba \in \Gamma$?

Partiendo del caso base $b \in \Gamma$ tenemos dos posibilidades:

(i) $abbb \in \Gamma$

(ii) $bbab \in \Gamma$

Luego, como solo agregamos caracteres a izquierda, no hay forma de obtener una secuencia de formación para $bbabba$, ya que no podemos obtener la primer secuencia $abba$ porque a no forma parte del caso base, solo podemos obtener (i) y (ii) y a partir de ahí seguir formando cadenas, $\therefore$ $bbabba \notin \Gamma$