Costos de Listas

☆ $W_{mapS}(F, empty) = c_1$

$$W_{maps}(f, (x:xs)) = W_f(x) + W_{maps}(f, xs) =$$

$$= \sum_{x \in xs} W_F(x) + c_1 \in O\left(\sum_{x \in xs} W_F(x)\right)$$

Como la implementación de S_{maps} no esta paralelizada

$$S_{maps} \in O\left(\sum_{x \in xs} S_F(x)\right)$$

☆ $W_{appendS}(0, n) = c_1$

$W_{appendS}(n, 0) = c_2$

$W_{appendS}(n, m) = W_{appendS}(n-1, m) + c_3 =$

$$= c_1 + n c_3 \underset{(i)}{\leqslant} n c_1 + n c_3 \underset{(ii)}{\leqslant} n c_4$$

(i) Tomando $n \geq 1$

(ii) Tomando $C_4 \geq C_1 + C_3$

Luego podemos concluir en que $W_{appendS} \in O(n)$

Como la implementación de appendS no esta paralelizada, $S_{appendS} \in O(n)$

☆ $W_{reduceS}(f, x, 0) = C_1$

$$W_{reduceS}(f, x, 1) = W_f(x, a_0) + C_2 \overset{(i)}{=} C_3$$

$$W_{reduceS}(f, x, n) = W_{ContractL}(f, n) + W_{reduceS}\left(f, x, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + C_4 =$$

$$\overset{(ii)}{=} C_4 + n C_5 + W_{reduceS}\left(f, x, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) \leq$$

$$\overset{(iii)}{\leq} n C_4 + n C_5 + W_{reduceS}\left(f, x, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) \leq$$

$$\overset{(iv)}{\leq} n C_6 + W_{reduceS}\left(f, x, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right)$$

(i) Ya que $W_F \in O(1)$

(ii) Ya que Probamos que $W_{contractL} \in O(n)$

(iii) Tomando $n \geq 1$

(iv) Tomando $C_6 \geq C_4 + C_5$

Tomando potencia de dos podemos obtener lo siguiente:

$$n\,C_6 + W'_{reduces}\left(f, x, \frac{n}{2}\right)$$

Tomando $f(n) = n\,C_6$, $b = 2$ y $a = 1$ podemos ver que $f(n)$ tiene mayor orden que $n^{\log_b a} = n^{\log_2 1}$, $1 \cdot f\left(\frac{n}{2}\right) \leq c \cdot f(n)$ $\exists\, c = \frac{1}{2}$ cumpliendo $af\left(\frac{n}{b}\right) \leq cf(n), c<1$. Por Teorema Maestro vale que $W'_{reduces} \in O(n)$. Luego como n es suave y $W'_{reduces}$ es eventualmente no decreciente podemos decir que $W_{reduces} \in O(n)$ también.

Como la implementación de reduce no está paralelizada y además $S_{contractL} \in O(n)$, $S_{reduces} \in O(n)$

☆ $W\,contractL(f,0) = c_1$

$W\,contractL(f,1) = c_2$

$W\,contractL(f,n) = W_f(a_0,a_1) + W\,contractL(f,n-2) + c_3$

$\overset{(i)}{=} \lceil \frac{n}{2} \rceil c_2 + \lceil \frac{n}{2} \rceil c_3 \overset{(ii)}{\leq} n c_2 + n c_3 \overset{(iii)}{\leq} n . c_4$

(i) Suponemos $W_f \in O(1)$

(ii) Tomando $n \geq 1$

(iii) Tomando $c_4 \geq c_2 + c_3$

Luego podemos ver que $W_{contractL} \in O(n)$

$S\,contractL(f,0) = c_1$

$S\,contractL(f,1) = c_2$

$S\,contractL(f,n) = \max(S_f(a_0,a_1), S\,contractL(f,n-2)) + c_3$

$\overset{(i)}{=} S\,contractL(f,n-2) + c_3 = \lceil \frac{n}{2} \rceil c_3 \overset{(ii)}{\leq} n . c_3$

(i) Ya que suponemos que $S_f \in O(1)$

(ii) Tomando $n \geq 1$

Luego $S\,contractL \in O(n)$

☆ $W_{tabulates}(f, (x:xs)) = W_f(x) + W_{tabulate}(f, xs) =$

$$= \sum_{x \in xs} W_f(x) \in O\left(\sum_{x \in xs} W_f(x)\right)$$

$S_{tabulates} \in O\left(\sum_{x \in xs} S_f(x)\right)$ ya que la implementación de tabulates no está paralelizada en Listas

☆ $W_{expandL}(f, 0, m) = c_1$

$W_{expandL}(f, 1, m) = c_2$

$W_{expandL}(f, n, m) = W_{lengths}(n) + W_{tabulates}(f', n) + c_3 =$

$$\overset{(i)}{=} c_3 + nc_2 + \sum_{i=0}^{n-1} W_{f'}(i) \overset{(ii)}{=} c_3 + nc_2 + nc_4$$

$$\overset{(iii)}{\leq} nc_3 + nc_2 + nc_4 \overset{(iv)}{\leq} nc_5$$

(i) ya que $W_{Lengths} \in O(n)$

(ii) ya que $W_{f'} \begin{cases} W_{nths}(m), i \text{ par} \\ W_f(a_{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor}, a_{i-1}) + W_{nths}(n) + W_{nths}(m), i \text{ impar} \end{cases}$

con $W_{f'} \in O(1)$ ya que $W_f, W_{nths} \in O(1)$

(iii) tomando $n \geq 1$

(iv) tomando $C_5 \geqslant C_3 + C_2 + C_4$

Luego podemos ver que $W expandL \in O(n)$

Como la implementacion de expand no esta paralelizada y

$W_{lengths} = S_{lengths}$ y $W_{tabulates} = S_{tabulates}$

Entonces $S expandS \in O(n)$

☆ $W scanS(f, x, 0) = c_1$

$W scanS(f, x, 1) = W_f(x, a_0) + C_2 \overset{(i)}{=} C_3$

$W scanS(f, x, n) = W contractL(f, n) + W scanS(F, x, \lceil \frac{n}{2} \rceil) +$
$W expandL(F, n, \lceil \frac{n}{2} \rceil) + C_4 \overset{(i)}{=}$

$\overset{(i)}{=} n\, C_5 + W scanS(f, 1, \lceil \frac{n}{2} \rceil) + C_4 \leqslant$

$\overset{(ii)}{\leqslant} n\, C_4 + n\, C_5 + W scanS(F, 1, \lceil \frac{n}{2} \rceil) \leqslant$

$\overset{(iii)}{\leqslant} n\, C_6 + W scanS(f, x, \lceil \frac{n}{2} \rceil)$

(i) ya que $W contractL, W expandL \in O(n)$

(ii) tomando $n \geq 1$

(iii) tomando $c_6 \geq c_4 + c_5$

Tomando solo potencias de 2 obtenemos:

$$n c_6 + W'scans\left(f, x, \frac{n}{2}\right)$$

A partir del Teorema Maestro tomando $f(n) = nc_6$, $a=2$, $b=1$ tenemos que $f(n)$ es de mayor orden que $n^{\log_2 1}$, $1 \cdot f\left(\frac{n}{2}\right) \leq c \cdot f(n)$ $\exists\, c = \frac{1}{2}$ cumpliendo $af\left(\frac{n}{b}\right) \leq cf(n), c<1$. Por tercer caso del Teorema Maestro podemos concluir que $W'scans \in O(n)$. Luego sabemos que n es suave y $Wscans$ es eventualmente no decreciente, por lo que concluimos que $Wscans \in O(n)$ también

$Sscans \in O(n)$ ya que no paraleliza y además sabemos que $S_{expandL}, S_{contractL} \in O(n)$

Costo de Arreglos

$$W_{reduceS}(f, x, 0) = W_{lengths}(0) + c_1 \overset{(i)}{=} c_2$$

$$W_{reduceS}(f, x, 1) = W_{lengths}(1) + W_f(x, a_0) + W_{nths}(1) + c_3$$

$$\overset{(ii)}{=} c_4$$

$$W_{reduceS}(f, x, n) = W_{lengths}(n) + W_{contractS} + W_{reduceS}\left(f, x, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + c_5 =$$

$$\overset{(i)}{=} c_5 + c_6 + n\,c_7 + W_{reduceS}\left(f, x, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) =$$

$$\overset{(iii)}{\leqslant} n\,c_5 + n\,c_6 + n\,c_7 + W_{reduceS}\left(f, x, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right)$$

$$\overset{(iv)}{\leqslant} n\,c_8 + W_{reduceS}\left(f, x, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right)$$

(i) ya que $W_{lengthS} \in O(1)$, $W_{contract} \in O(n)$

(ii) ya que $W_{lengths}$, W_F, W_{nths} $\in O(1)$

(iii) Tomando $n \geqslant 1$

(iv) Tomando $c_8 \geqslant c_5 + c_6 + c_7$

Si tomamos potencias de 2 podemos obtener:

$$n\,c_8 + W'_{reduceS}\left(f, x, \frac{n}{2}\right)$$

Sea $F(n) = n\,c_8$, $a = 2$ y $b = 1$ podemos determinar que $F(n)$ tiene mayor orden que $n^{\log_b a} = n^{\log_2 1}$

1. $f\left(\frac{n}{2}\right) \leq c \cdot f(n)$ $\exists\, c = \frac{1}{2}$ tal que $af\left(\frac{n}{b}\right) \leq cf(n), c<1$

por el Teorema maestro podemos determinar que $W'_{reduces} \in O(n)$. Como n es suave y $W'_{reduces}$ es eventualmente no decreciente podemos decir que $W_{reduces} \in O(n)$ tambien

$$S_{reduces}(f, x, 0) = S_{Lengths}(0) + c_1 \overset{(i)}{=} c_2$$

$$S_{reduces}(f, x, 1) = S_{Lengths}(1) + S_f(x, a_0) + S_{nths}(1) + c_3 \overset{(ii)}{=} c_4$$

$$S_{reduces}(f, x, n) = S_{lengths}(n) + S_{contracts}(f, x, n) + S_{reduces}\left(f, x, \left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil\right) =$$

$$\overset{(iii)}{=} c_5 + c_6 + c_7 + S_{reduces}\left(f, x, \left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil\right) \leq$$

$$\overset{(iv)}{\leq} c_8 + S_{reduces}\left(f, x, \left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil\right)$$

(i) Ya que $S_{lengths} \in O(1)$

(ii) Ya que $S_{Lengths}, S_f, S_{nths} \in O(1)$

(iii) Vimos que $S_{contracts} \in O(1)$

(iv) Tomando $C_8 \geq C_5 + C_6 + C_7$

Si Tomamos potencias de 2 podemos obtener lo siguiente: $C_8 + S_{reduces}\left(f, x, \frac{n}{2}\right)$ tomando $f(n) = C_8$, $a = 2$, $b = 1$ podemos ver que $f(n)$ y $n^{\log_b a} = n^{\log_2 1} = 1$ tienen el mismo orden, por el Teorema Maestro $S_{reduces} \in (\log(n))$

Luego como $\log(n)$ es suave y $S_{reduces}$ es eventualmente no decreciente podremos afirmar que $S_{reduces} \in O(\log(n))$ tambien

☆ $$W_{appends}(n, m) = W_{lengths}(n) + W_{lengths}(m) + W_{tabulates}(f, n+m) =$$

$$\overset{(i)}{=} C_1 + C_2 + \sum_{i=0}^{n+m-1} W_{f'}(i) \overset{(ii)}{=} C_3 + C_4(n+m) \overset{(iii)}{\leq} C_3(n+m) + C_4(n+m) \leq$$

$$\overset{(iv)}{\leq} C_5(n+m)$$

(i) ya que $W_{lengths} \in O(1)$

(ii) $$W_{f'}(i) = \begin{cases} W_{nths}(n), & i < n \\ W_{nths}(m), & i \geq n \end{cases}$$

Donde $W_{f'} \in O(1)$ ya que $W_{nths} \in O(1)$

(iii) tomando $k = n+m \geq 1$

(iv) tomando $c_5 \geq c_3 + c_4$

Luego $W_{appends} \in O(n+m)$

$$S_{appends}(n,m) = S_{lengths}(n) + S_{lengths}(m) + S_{tabulates}(f, n+m) =$$
$$\stackrel{(i)}{=} c_1 + c_2 + \max_{i=0}^{(n+m)-1} S_{f'}(i) \stackrel{(ii)}{=} c_3 + c_4 \stackrel{(iii)}{\leq} c_5$$

(i) ya que $S_{lengths} \in O(1)$

(ii) ya que por la definición de f', $S_{f'} \in O(1)$

(iii) Tomando $c_5 \geq c_3 + c_4$

Luego $S_{appends} \in O(1)$

☆ $$W_{maps}(f, (x:xs)) = W_{length}((x:xs)) + W_{tabulates}(f', (x:xs)) =$$
$$= c_1 + \sum_{i=0}^{|(x:xs)|-1} W_{f'}(i)$$

donde $f' = \backslash i \to f\ (nths\ v\ i)$, $W_{f'} \in O(W_f)$ ya que $W_{nths} \in O(1)$. Luego $W_{maps} \in O\left(\sum_{x \in xs} W_f(x)\right)$

$$S_{maps}(f, (x:xs)) = S_{lengths}((x:xs)) + S_{tabulates}(f', (x:xs)) =$$

$$= C_1 + \max_{i=0}^{|(x:xs)|-1} \left(S_{f'}(i)\right)$$

Donde $f' = \backslash i \to f\ (nths \sim i)$, $S_{f'} \in O(S_f)$ ya que $nths \in O(1)$

Luego $S_{maps} \in O\left(\max_{x \in xs}\left(S_f(x)\right)\right)$ ya que $S_{f'} \in O(S_f)$

☆ $W_{contractA}(f, n) = W_{lengths}(n) + W_{tabulates}(f', n) + C_1 =$

$$\overset{(i)}{=} C_1 + C_2 + \sum_{i=0}^{\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1} W_{f'}(i) \overset{(ii)}{=} C_3 + \left(\lceil \tfrac{n}{2} \rceil - 1\right) C_4 = C_3 - C_4 + \lceil \tfrac{n}{2} \rceil C_4 \leq$$

$$\overset{(iii)}{\leq} \lceil \tfrac{n}{2} \rceil C_4 \overset{(iv)}{\leqslant} n\, C_4$$

(i) ya que $W_{lengths} \in O(1)$

(ii) $$W f'(i) = \begin{cases} W_f(a_{2i}, a_{2i+1}) + 2\, W_{nths}(n) & , i < \frac{n}{2} \\ W_{nths}(n) & , i \geqslant \frac{n}{2} \end{cases}$$

Donde $W_{f'} \in O(1)$ ya que W_f y $W_{nths} \in O(1)$

(iii) Tomando $c_4 \geq c_3$

(iv) Tomando $n \geq 1$

Luego $W_{contract A} \in O(n)$

$S_{contract A}(f,n) = S_{lengths}(n) + S_{tabulates}(f',n) + c_1 =$

$\overset{(i)}{=} c_1 + c_2 + \max_{i=0}^{n} (S_{f'}(i)) \overset{(ii)}{=} c_1 + c_2 + c_3 \overset{(iii)}{\leq} c_4$

(i) ya que $S_{lengths} \in O(1)$

(ii) Vimos que $W_{f'} \in O(1) \Rightarrow S_{f'} \in O(1)$

(iii) Tomando $c_4 \geq c_1 + c_2 + c_3$

Luego $S_{contract A} \in O(1)$

☆ $W_{expand A}(f,n,m) = W_{lengths}(n) + W_{tabulates}(f',n) + c_1 =$

$\overset{(i)}{=} c_1 + c_2 + \sum_{i=0}^{n} W_{f'}(i) \overset{(ii)}{=} c_3 + n\, c_4 = c_3 + n c_4 \overset{iii}{\leq} n c_3 + n c_4 \overset{iv}{\leq} n c_5$

(i) ya que $W_{lengths} \in O(1)$

(ii) ya que $W_{f'} = \begin{cases} W_{nths}(m), & i \text{ par} \\ W_f(a_{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor}, a_{i-1}) + W_{nths}(n) + W_{nths}(m), & i \text{ impar} \end{cases}$

con $W_{f'} \in O(1)$ ya que $W_f, W_{nths} \in O(1)$

(iii) Tomando $n \geq 1$

(iv) Tomando $c_5 \geq c_3 + c_4$

Luego $W\text{expand}_A \in O(n)$

$$S\text{expand}_A(f,n,m) = S\text{lengths}(n) + S\text{tabulates}(f',n) + C_1 =$$

$$\overset{(i)}{=} C_1 + C_2 + \max_{i=0}^{n-1}\left(S_{f'}(i)\right) \overset{(ii)}{=} C_3 + C_4 \overset{(iii)}{\leq} C_5$$

(i) ya que $S\text{lengths} \in O(1)$

(ii) ya que $W_{f'} \in O(1) \Rightarrow S_{f'} \in O(1)$

(iii) Tomando $C_5 \geq C_3 + C_4$

Luego $S\text{expand}_A \in O(1)$

☆ $W\text{scans}(f,x,0) = C_1$

$$W\text{scans}(f,x,1) = W\text{singletons}(x) + W_f(x, a_0) + W_{nths}(1) + C_2 \overset{(i)}{=} C_3$$

$$W\text{scans}(f,x,n) = W\text{contract}_A(f,n) + W\text{scans}\left(f,x,\left\lceil \frac{n}{2}\right\rceil\right) + W\text{expand}_A\left(f,n,\left\lceil \frac{n}{2}\right\rceil\right) + C_4 =$$

$$\overset{(ii)}{=} C_4 + nC_5 + W_{scans}\left(f,x,\left\lceil \frac{n}{2}\right\rceil\right) \overset{iii}{\leq} nC_4 + nC_5 + W_{scans}\left(f,x,\left\lceil \frac{n}{2}\right\rceil\right) \leq$$

$$\overset{(iv)}{\leq} nC_6 + W_{scans}\left(f,x,\left\lceil \frac{n}{2}\right\rceil\right)$$

(i) Ya que $W\text{singletons}$, W_F y $W_{nths} \in O(1)$

(ii) Sabemos que W_{contract_A}, $W\text{expand}_A \in O(n)$

(iii) tomando $n \geq 1$

(iv) tomando $C_6 \geq C_4 + C_5$

Luego Tomando potencias de 2 obtenemos lo siguiente:

$$n C_6 + W'scans\left(f, x, \frac{n}{2}\right)$$

Tomando $F(n) = n C_6$, $b = 2$ y $a = 1$ podemos ver que $f(n)$ es de mayor orden que $n^{\log_b a} = n^{\log_2 1}$,

1. $f\left(\frac{n}{2}\right) \leq c \cdot f(n)$ $\exists\, c = \frac{1}{2}$ / $af\left(\frac{n}{b}\right) \leq cf(n), c<1$. Por el Teorema Maestro vale que $W'scans \in O(n)$.

Como n es suave y $W'scans$ es eventualmente no decreciente vale que $Wscans \in O(n)$.

$$Sscans(f, x, 0) = C_1$$

$$Sscans(f, x, 1) = Singletons(x) + S_F(x, a_0) + S_{nths}(1) + C_2 \overset{(i)}{=} C_3$$

$$Sscans(f, x, n) = Scontract_A(f, n) + Sscans\left(f, x, \left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil\right) + Sexpand_A\left(f, n, \left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil\right) + C_4 =$$

$$\overset{(ii)}{=} C_4 + C_5 + Sscans\left(f, x, \left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil\right) \overset{(iii)}{\leq} C_6 + Sscans\left(f, x, \left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil\right)$$

(i) ya que $Ssingletons, S_F, S_{nths} \in O(1)$

(ii) ya que sabemos que $Scontract_A, Sexpand_A \in O(1)$

(iii) tomando $C_6 \geq C_4 + C_5$

Luego Tomando Solo potencias de 2 obtenemos:

$C_6 + S'scans(F, x, \frac{n}{2})$

Tomando $F(n) = C_6$, $b = 2$ y $a = 1$ podemos ver que $f(n)$ y $n^{\log_b a} = n^{\log_2 a}$ tienen el mismo orden $(O(1))$ por el Teorema Maestro vale que $S'Scans \in O(\log(n))$

Luego como $Log(n)$ es suave y $S'Scans$ es eventualmente no decreciente vale que

$SScans \in O(\log(n))$