Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Departamento de Matemática - Escuela de Ciencias Exactas y Naturales
COMPLEMENTOS DE MATEMÁTICA II
Licenciatura en Ciencias de la Computación - Año 2023
Docentes: Francisco Vittone - Mauro Lucci - Delfina Martin

Unidad 6: Categorías I.

---

1. Definiciones básicas y ejemplos

La teoría de categorías constituye un campo relativamente reciente de estudio. Su primer aparición data de los años 40 del siglo pasado en los trabajos de los matemáticos Samuel Eilenberg y Saunders Mac Lane relativos a investigaciones en topología algebraica. Esta teoría, sin embargo, constituye una especie de teoría general de las estructuras matemáticas y sus relaciones, y muy pronto resultó evidente que podía aplicarse a otras áreas de la matemática o de la informática. Por ejemplo, dos pruebas en áreas diferentes de la matemática pueden utilizar métodos "similares", y la teoría de categorías proporciona una forma de expresar de manera precisa estas similaridades. De esta forma, es posible dar una prueba en el contexto de las categorías y obtener estos resultados conocidos en áreas diferentes como casos particulares. Esta capacidad unificadora de la teoría hace que sea altamente abstracta. Intoduciremos en esta primera sección las definiciones básicas y veremos a través de ejemplos concretos cómo las estructuras que hemos estudiado se enmarcan en la teoría.

Antes de empezar debemos hacer una mención al uso que daremos de los conceptos de *conjunto* y *clase*. Hasta el momento hemos usado el concepto de conjunto simplemente como una colección de objetos (esta es la noción que propone Cantor en la teoría original de conjuntos). Esta definición intuitiva es suficiente para el desarrollo de casi la totalidad de las teorías matemáticas, pero como es bien sabido, a nivel más abstracto puede dar lugar a contradicciones y paradojas. Cabe mencionar la paradoja de Russel, que tiene múltiples enunciaciones equivalentes. Una de ellas es la siguiente: dado un conjunto X, existen dos posibilidades mutuamente excluyentes, $X \in X$ o $X \notin X$. Un conjunto X se dice *ordinario* si $X \notin X$, y *extraordinario* si $X \in X$. Es decir, un conjunto ordinario no se tiene a sí mismo como elemento, caso contrario es extraordinario. Claramente, todo conjunto es ordinario o extraordinario. Si ahora consideramos el conjunto Y de todos los conjuntos ordinarios, ¿se trata de un conjunto ordinario o extraordinario?. Si Y fuese ordinario, entonces por como lo hemos definido $Y \in Y$, pero a su vez, al ser ordinario tendríamos $Y \notin Y$. Esto da lugar a una contradicción, y por lo tanto una definición consistente de conjunto no debería ser tan ambigua como la que propuso Cantor. Para corregir estos problemas Ernst Zermelo y Adolf Fraenkel elaboraron una teoría axiomática de conjuntos que se basa en una serie de "estratificaciones" donde cada conjunto puede definirse sólo a partir de conceptos previamente definidos, con lo cual las nociones de conjunto ordinario o extraordinario no serían admisibles. A los efectos de permitir justamente colecciones de conjuntos o elementos que no necesariamente sean conjuntos pero que comparten una cierta propiedad se introduce el concepto de *clase*. A pesar de las dificultades de desarrollar formalmente esta teoría (que ocuparía un curso en sí mismo) las ideas intuitivas que tenemos de conjunto y clase bastarán para el desarrollo de esta unidad.

Una advertencia final: a los efectos de simplificar la notación en la exposición utilizaremos muchas veces para clases la misma simbología que usamos para conjuntos, aunque esto no sea del todo correcto. Por ejemplo, si $\mathcal{C}$ es una clase de objetos y A es un objeto de esa clase, escribiremos $A \in \mathcal{C}$ para indicar que A es un objeto de la clase $\mathcal{C}$, aunque $\mathcal{C}$ no es un conjunto, o bien pondremos $\mathcal{C} = \{\text{objetos que cumplen cierta propiedad}\}$ como si estuviésemos definiendo un conjunto, aunque en realidad no lo sea.

Quienes estén interesados en profundizar estos temas pueden consultar el libro de Roberto Ciglioni, *Teoría axiomática de conjuntos: una introducción (Fascículo 8, Cursos de Grado, Universidad de Buenos Aires)*, disponible online en el siguiente enlace: `https://cms.dm.uba.ar/depto/public/grado/fascgrado8.pdf`

Definición **1.** *Una categoría $\mathscr{C}$ comprende:*

- *una clase de **objetos** que denotamos $\operatorname{ob}\mathscr{C}$, cuyos elementos se denotan por A, B, C, etc.*
- *una clase de **morfismo** o **flechas** que denotamos $\operatorname{mor}\mathscr{C}$, cuyos elementos se denotan por f, g, h,etc.*
- *dos funciones de clase:*
  - $\operatorname{dom} : \operatorname{mor}\mathscr{C} \to \operatorname{ob}\mathscr{C}$, *denominada **dominio***
  - $\operatorname{codom} : \operatorname{mor}\mathscr{C} \to \operatorname{ob}\mathscr{C}$ *denominada **codominio**.*

  Si $f \in \operatorname{mor}\mathscr{C}$ es tal que $\operatorname{dom}(f) = A \in \operatorname{ob}\mathscr{C}$ y $\operatorname{codom}(f) = B \in \operatorname{ob}\mathscr{C}$, se denota $f : A \to B$. Denotamos también por $\operatorname{Hom}(A, B) := \{f \in \operatorname{mor}\mathscr{C} \ : \ f : A \to B\}$.
- *una función $\circ$ para cada $A, B, C \in \operatorname{ob}\mathscr{C}$, denominada **composición** tal que*

$$\circ : \operatorname{Hom}(A, B) \times \operatorname{Hom}(B, C) \to \operatorname{Hom}(A, C), \quad \circ(f, g) = g \circ f$$

  que verifica:

  - *para cada $A, B, C, D \in \operatorname{ob}\mathscr{C}$, $f \in \operatorname{Hom}(A, B)$, $g \in \operatorname{Hom}(B, C)$ y $h \in \operatorname{Hom}(C, D)$,*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g\circ f"] \arrow[rrr, bend left=40, "h\circ(g\circ f)"] \arrow[rrr, bend right=40, "(h\circ g)\circ f"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "h\circ g"'] & C \arrow[r, "h"] & D
\end{tikzcd}$$

    *Nos referiremos a esta propiedad como **asociatividad** de la composición.*

  - *Para cada $A \in \operatorname{ob}\mathscr{C}$ existe un morfismo $\operatorname{id}_A \in \operatorname{Hom}(A, A)$ denominado **morfismo identidad** tal que:*

- *para cada $B \in \operatorname{ob}\mathscr{C}$ y cada $f \in \operatorname{Hom}(A, B)$, $f \circ \operatorname{id}_A = f$;*
- *para cada $C \in \operatorname{ob}\mathscr{C}$ y cada $g \in \operatorname{Hom}(C, A)$, $\operatorname{id}_A \circ g = g$.*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "g"'] & A \arrow[loop above, "\mathrm{id}_A"] \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

Observación **1.** *La existencia de las funciones* dom *y* codom *permite probar que si $A, B, C, D \in \operatorname{ob}\mathscr{C}$ son objetos distintos, entonces $\operatorname{Hom}(A, B) \cap \operatorname{Hom}(C, D) = \emptyset$, pues en efecto, si f fuese un morfismo en $\operatorname{Hom}(A, B) \cap \operatorname{Hom}(C, D)$, tendríamos $\operatorname{dom} f = A = C$ y $\operatorname{codom} f = B = D$. En muchos textos esta condición aparece en la definición de una categoría.*

Ejemplo **1.** Consideremos la categoría $\mathscr{C} = \mathrm{Set}$ donde $\operatorname{ob}\mathrm{Set}$ es la clase de todos los conjuntos y $\operatorname{mor}\mathrm{Set}$ es la clase de todas las funciones entre conjuntos. Luego dados $A, B \in \operatorname{ob}\mathrm{Set}$, un elemento de $\operatorname{Hom}(A, B)$ es una función $f : A \to B$, $\operatorname{dom}(f) = A$ es el dominio de la función en el sentido usual y $\operatorname{codom}(f) = B$ es el codominio de f, también en el sentido usual. La composición es también la composición usual de funciones y el morfismo identidad $\operatorname{id}_A : A \to A$ es la función identidad tal que $\operatorname{id}_A(x) = x$ para cada $x \in A$. Un morfismo de particular interés, que normalmente suele ignorarse cuando trabajamos con funciones, es la denominada **función vacía**. En realidad, existe una (única) función vacía $\emptyset_A : \emptyset \to A$ para cada conjunto A, que no es más que la relación funcional trivial $\emptyset \subset \emptyset \times A$. Esto implica que $\operatorname{Hom}(\emptyset, A)$ consta de un único morfismo.

Por otra parte, para cada conjunto $\{x\}$ de un único elemento, $\operatorname{Hom}(A, \{x\})$ también consta de un único morfismo, dado que es posible definir una única función (la función constante $f(a) = x$ para cada $a \in A$) de A en $\{x\}$.

Ejemplos **2.** De manera similar a la categoría Set podemos construir categorías cuyos objetos sean las distintas estructuras que estudiamos hasta el momento. Las enunciamos en la siguiente tabla y haremos referencia frecuentemente a ellas. En todos los casos, los morfismos son funciones en el sentido usual, las funciones dominio y codominio son el dominio y codominio de la respectiva función, la función composición es la composición usual de funciones, y el morfismo identidad será la función identidad usual. Dejamos como ejercicio verificar que se cumple la Definición 1:

$\mathscr{C}$	$\operatorname{ob}\mathscr{C}$	$\operatorname{mor}\mathscr{C}$
Set	conjuntos	funciones
FinSet	conjuntos finitos	funciones
Poset	posets	morfismos de posets
Ret	retículos	morfismos de retículos
Sgrp	semigrupos	morfismos de semigrupos
Mon	monoides	morfismos de monoides
Grp	grupos	homomorfismos de grupos
Ab	grupos abelianos	homomorfismos de grupos abelianos
Vect	espacios vectoriales reales	transformaciones lineales

Claramente podríamos seguir definiendo categorías para cada estructura para la cual haya definido algún tipo de morfismos, como la categoría de las álgebras de Boole, de los grupos cíclicos, etc.

En la definición 1 hemos recurrido a algunos diagramas para ilustrar la composición entre flechas. Si bien como veremos en los ejemplos siguientes los morfismos o flechas en una categoría no necesariamente son funciones entre conjuntos es siempre útil la utilización de diagramas para representar objetos y flechas.

Definición **2.** *Un* ***diagrama*** *en una categoría $\mathscr{C}$ es un grafo dirigido etiquetado consistentemente, donde los vértices se etiquetan con objetos de $\mathscr{C}$, las aristas dirigidas con flechas de $\mathscr{C}$ de modo que si una arista está etiquedada con una flecha f cuyo dominio es A y codominio es B, el nodo inicial y final de esta arista se etiquetan con A y B respectivamente.*

Un diagrama en $\mathscr{C}$ se dice ***conmutativo*** *o se dice que* ***conmuta*** *si para cualquier par de vértices X e Y del diagrama, todos los caminos del diagrama entre X e Y son equivalentes, en el sentido que determinan una arista dirigida entre X e Y que representa una misma flecha en $\mathscr{C}$.*

Por ejemplo, el siguiente diagrama conmuta, si hay una flecha $h : X \to Y$ que es a la vez $g \circ f'$ y $f \circ g'$. Es decir, el diagrama es conmutativo si $g' \circ f = f' \circ g$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[d, "g'"] \\ W \arrow[r, "f'"] & Y \end{tikzcd}$$

La utilización de diagramas conmutativos para enunciar y demostrar propiedades puede ser muy útil tanto porque ayuda a comprender visualmente las propiedades de una categoría, como porque además permite concluir propiedades que analíticamente pueden ser engorrosas de describir. Probaremos a continuación una propiedad de diagramas conmutativos que será de gran utilidad más adelante:

Lema **1.** *Si en el siguiente diagrama ambos cuadrados interiores son conmutativos, entonces el rectángulo exterior es conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "b"'] & C \arrow[d, "c"] \\ A' \arrow[r, "g"] & B' \arrow[r, "g'"] & C' \end{tikzcd}$$

Demostración. Por hipótesis tenemos que $g \circ a = b \circ f$ y que $g' \circ b = c \circ f'$. Luego, por la asociatividad de la composición, resulta

$$\begin{aligned} (g' \circ g) \circ a &= g' \circ (g \circ a) = g' \circ (b \circ f) = (g' \circ b) \circ f \\ &= (c \circ f') \circ f = c \circ (f' \circ f). \end{aligned}$$

□

Ejemplo **3.** Por conveniencia, denotaremos por $\mathbf{0}$ a la categoría sin objetos ni morfismos. Claramente las propiedades de la función composición y la existencia de identidad se satisfacen por vacuidad, ya que no hay objetos ni morfismos a las cuales aplicarlas.

$\mathbf{1}$ es una categoría donde $\operatorname{ob}\mathbf{1}$ está formado por un único objeto A y $\operatorname{mor}\mathbf{1}$ por un único morfismo, que debe ser necesariamente id_A.

La categoría $\mathbf{2}$ se define de modo que $\operatorname{ob}\mathbf{2} = \{A, B\}$, $\operatorname{mor}\mathbf{2} = \{\mathrm{id}_A, \mathrm{id}_B, f : A \to B\}$, y análogamente la categoría $\mathbf{3}$ es tal que $\operatorname{ob}\mathbf{3} = \{A, B, C\}$, $\operatorname{mor}\mathbf{3} = \{\mathrm{id}_A, \mathrm{id}_B, \mathrm{id}_C, f : A \to B, g : B \to C, h : A \to C\}$. En todos los casos la composición es tal que id es el morfismo identidad, y en el caso de $\mathbf{3}$ además se verifica $h = g \circ f$. Estas categorías suelen representarse a trevés de los siguientes diagramas:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[loop above, "\mathrm{id}_A"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[loop above, "\mathrm{id}_A"] \arrow[r, "f"'] & B \arrow[loop above, "\mathrm{id}_B"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& B \arrow[loop above, "\mathrm{id}_B"] \arrow[dr, "g"] & \\
A \arrow[loop left, "\mathrm{id}_A"] \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "h"] & & C \arrow[loop right, "\mathrm{id}_C"]
\end{tikzcd}
$$

$$g \circ f = h$$

Observemos que para definir estas categorías no hemos precisado quienes son A, B o C ni los morfismos que intervienen. Esto por el momento es irrelevante dado que estas categorías están definidas en modo abstracto.

Ejemplos **4.** En los Ejemplos 2 consideramos categorías dadas por diferentes estructuras. Veremos ahora que una estructura algebraica considerada individualmente también puede definir una categoría:

1. Sea $(P, \preceq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Consideremos la categoría $\mathscr{C}_P$ de modo que $\operatorname{ob}\mathscr{C}_P = P$, $\operatorname{mor}\mathscr{C}_P = \{(p, p') : p \preceq p'\}$. Las funciones dominio y codominio están dadas por $\operatorname{dom}(p, p') = p$ y $\operatorname{codom}(p, p') = p'$. La composición está dada por $(p', p'') \circ (p, p') = (p, p'')$ que está bien definida por la transitividad de $\preceq$ y la identidad es $\mathrm{id}_p = (p, p) \in \operatorname{mor}\mathscr{C}_P$ pues $\preceq$ es reflexiva. La asociatividad de $\circ$ es trivial. Observemos que en este caso $\operatorname{Hom}(p, p')$ es vacío si $p \not\preceq p'$ y consta del único elemento (p, p') si $p \preceq p'$.

   Observemos que no hemos usado en ningún momento la antisimetría de $\preceq$. En efecto, cualquier conjunto preordenado da lugar a una categoría de este tipo.

2. Sea $(M, *)$ un monoide. Podemos definir una categoría $\mathscr{C}_M$ donde $\operatorname{ob}\mathscr{C}_M = \{x\}$, un único objeto abstracto, $\operatorname{mor}\mathscr{C}_M = M$. Es claro en este caso que las funciones dom y codom asignan el único elemento x a cualquier morfismo. La composición se define como $\circ = *$. Es fácil verificar que se cumplen las propiedades que definen una categoría, y en este caso el morfismo id_x es la identidad del monoide.

   Dejamos como ejercicio verificar que si $\mathscr{C}$ es una categoría con un único objeto, entonces $(\operatorname{mor}\mathscr{C}, \circ)$ es un monoide.

Ejemplo **5. Categoría discreta**. Dado un conjunto X cualquiera podemos definir una categoría $\mathscr{C}$ tal que $\operatorname{ob}\mathscr{C} = X$ y $\operatorname{mor}\mathscr{C} = \{\mathrm{id}_A : A \in X\}$. La composición se define de modo tal que $\mathrm{id}_A \circ \mathrm{id}_A = \mathrm{id}_A$, con lo cual es inmediato que se verifica la Definición 1. $\mathscr{C}$ se denomina categoría discreta, y puede representarse mediante el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[loop above, "\mathrm{id}_A"] & & B \arrow[loop above, "\mathrm{id}_B"] & \\
& C \arrow[loop above, "\mathrm{id}_C"] & & D \arrow[loop above, "\mathrm{id}_D"] \\
E \arrow[loop above, "\mathrm{id}_E"] & & \ddots &
\end{tikzcd}$$

Como sucede con las estructuras algebraicas, a partir de una categoría podemos construir nuevas categorías:

Ejemplo **6.** Sea $\mathscr{C}$ una categoría. Se denomina **categoría dual** o **categoría opuesta** a la categoría $\mathscr{C}^{op}$ tal que:

- $\mathrm{ob}\,\mathscr{C}^{op} = \mathrm{ob}\,\mathscr{C}$,
- $\mathrm{mor}\,\mathscr{C}^{op}$ es tal que $f \in \mathrm{Hom}^{op}(A, B)$ si $f \in \mathrm{Hom}(B, A)$.
- $\mathrm{dom}^{op} = \mathrm{codom}$ y $\mathrm{codom}^{op} = \mathrm{dom}$.
- $\circ^{op}$ es tal que si $f \in \mathrm{Hom}^{op}(A, B)$ y $g \in \mathrm{Hom}^{op}(B, C)$, entonces $g \circ^{op} f = f \circ g$.
- $\mathrm{id}_A^{op} = \mathrm{id}_A$.

Es fácil verificar (y lo dejamos como ejercicio) que $\mathscr{C}^{op}$ es efectivamente una categoría, probaremos sólo a modo de ejemplo la asociatividad de $\circ^{op}$: Sean $f \in \mathrm{Hom}^{op}(A, B)$, $g \in \mathrm{Hom}^{op}(B, C)$ y $h \in \mathrm{Hom}^{op}(C, D)$. Entonces $f \in \mathrm{Hom}(B, A)$, $g \in \mathrm{Hom}(C, B)$ y $h \in \mathrm{Hom}(D, C)$. Luego:

$$\begin{aligned}
(h \circ^{op} g) \circ^{op} f &= (g \circ h) \circ^{op} f = f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h \\
&= h \circ^{op} (f \circ g) = h \circ^{op} (g \circ^{op} f).
\end{aligned}$$

Observación **2.** *En la categoría dual de una categoría $\mathscr{C}$ muchas veces dejan de tener sentido las nociones de morfismo y composición que tienen en la categoría $\mathscr{C}$. Por ejemplo, en los Ejemplos 2 vimos una serie de categorías donde los morfismos eran efectivamente funciones entre conjuntos y la composición era la composición usual de funciones. En el caso de las categorías duales de estas categorías los morfismos ya no son necesariamente funciones entre el conjunto A y el conjunto B (sí lo serán entre B y A), y no debemos confundir un morfismo en $\mathrm{Hom}^{op}(A, B)$ con la función inversa de $f \in \mathrm{Hom}(B, A)$. En este caso es más pertinente la denominación de **flechas** en vez de morfismos, y podemos pensar que la categoría dual de $\mathscr{C}$ simplemente se obtiene invirtiendo las flechas de $\mathscr{C}$ y acomodando las demás definiciones para que todo* *tenga sentido. Sintéticamente estas propiedades pueden resumirse en el siguiente diagrama:*

$$\begin{array}{cc}
\textit{En } \mathscr{C} & \textit{En } \mathscr{C}^{op} \\
\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "f"'] \arrow[dd, bend left, "g\circ f"] \\
B \arrow[d, "g"'] \\
C
\end{tikzcd}
&
\begin{tikzcd}
A \\
B \arrow[u, "f"] \\
C \arrow[u, "g"] \arrow[uu, bend right, "f\circ^{op} g := g\circ f"']
\end{tikzcd}
\end{array}$$

Ejemplo **7.** Consideremos la categoría $\mathscr{C}_P$ asociada a un poset P. ¿Cuál es su categoría opuesta? Tendremos que $\mathrm{ob}\,\mathscr{C}_P^{op} = \mathrm{ob}\,\mathscr{C}_P = P$. Por otra parte, si $x, y \in P$, un morfismo $f \in \mathrm{Hom}^{op}(x, y)$ es un morfismo en $\mathrm{Hom}(y, x)$, el cual existe si y sólo si $y \preceq x$. Esto es, un morfismo $f \in \mathrm{Hom}^{op}(x, y)$ es un par $f = (y, x)$ tal que $y \preceq x$. Aún no tenemos definido un concepto de *categorías isomorfas*, pero resulta bastante claro que poniendo $f^* = (x, y)$ si $f = (y, x) \in \mathrm{Hom}^{op}(x, y)$, entonces podremos definir una categoría $\mathscr{C}^*$, cuyos objetos sean los elementos de P y sus morfismos sean los elementos f^*, que es esencialmente la misma que $\mathscr{C}^{op}$. Pero $\mathscr{C}^*$ no es mas que $\mathscr{C}_{P*}$, donde P^* es el poset con el orden inverso al de P, dado que $f^* = (x, y)$ es un morfismo en $\mathscr{C}^*$ si y sólo si $x \succeq y$.

Ejemplo **8.** Sean $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ dos categorías. Se denomina **categoría producto** a una categoría $\mathscr{C}$, que se denota $\mathscr{C} = \mathscr{C}_1 \times \mathscr{C}_2$, tal que

- $\mathrm{ob}\,\mathscr{C} = \{(A, B) \,:\, A \in \mathrm{ob}\,\mathscr{C}_1, B \in \mathrm{ob}\,\mathscr{C}_2\}$.
- $\mathrm{mor}\,\mathscr{C} = \{(f, g), :\, f \in \mathrm{mor}\,\mathscr{C}_1, g \in \mathrm{mor}\,\mathscr{C}_2\}$ y las funciones dominio y codominio están dadas por $\mathrm{dom}(f, f') = (\mathrm{dom}\, f, \mathrm{dom}\, f')$ y $\mathrm{codom}(f, f') = (\mathrm{codom}\, f, \mathrm{codom}\, f')$. De esta manera, si $(A, B), (A', B') \in \mathrm{ob}\,\mathscr{C}$,

  $$\mathrm{Hom}((A, B), (A', B')) = \{(f, g) : (A, B) \to (A', B') \,:\, f \in \mathrm{Hom}(A, A'), g \in \mathrm{Hom}(B, B')\}.$$

- la composición es componente a componente, esto es $(f', g') \circ (f, g) = (f' \circ f, g' \circ g)$. Es fácil ver a partir de la asociatividad de la composición en $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ que la composición en $\mathscr{C}$ es asociativa.
- $\mathrm{id}_{(A,B)} = (\mathrm{id}_A, \mathrm{id}_B)$. En efecto, si $(f, g) \in \mathrm{Hom}((A, B), (A', B'))$, se verifica

  $$(f, g) \circ \mathrm{id}_{(A,B)} = (f, g) \circ (\mathrm{id}_A, \mathrm{id}_B) = (f \circ \mathrm{id}_A, g \circ \mathrm{id}_B) = (f, g)$$

  La otra composición es análoga.

Ejemplo **9.** Sea $\mathscr{C}$ una categoría, se denomina **categoría de flechas** de $\mathscr{C}$ a la categoría $\mathscr{C}^{\to}$ tal que:

- $\mathrm{ob}\,\mathscr{C}^{\to} = \mathrm{mor}\,\mathscr{C}$.

- $\operatorname{mor}\mathscr{C}^{\to}$ es tal que si $f, f' \in \operatorname{ob}\mathscr{C}^{\to}$ con $f \in \operatorname{Hom}(A,B)$, $f' \in \operatorname{Hom}(A',B')$, un morfismo en $\mathscr{C}^{\to}$ es un cuadrado conmutativo
$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ {\scriptstyle a}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle b} \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' \end{array} \tag{1}$$
donde $a \in \operatorname{Hom}(A,A')$, $b \in \operatorname{Hom}(B,B')$ y en $\mathscr{C}$ se verifica $b \circ f = f' \circ a$. Para simplificar las definiciones, suele identificarse un morfismo en $\mathscr{C}^{\to}$ con el par (a,b) de morfismos en $\mathscr{C}$. Debemos observar sin embargo que el cuadrado 1 puede resultar conmutativo para los mismos morfismos (a,b) pero para distintos morfismos f y f'. Por ejemplo, si definimos los morfismos de $\mathscr{C}^{\to}$ sólo como pares de morfismos en $\mathscr{C}$ que hacen que 1 sea conmutativo, el par $(\mathrm{id}_A, \mathrm{id}_A)$ sería un morfismo en $\mathscr{C}^{\to}$ que pertenece a $\operatorname{Hom}(f,f)$ cualquiera sea $f \in \operatorname{Hom}(A,A)$, lo que haría que las funciones dom y codom no estén bien definidas en $\mathscr{C}^{\to}$. Para solucionar este problema es que los morfismos en $\mathscr{C}^{\to}$ se consideran como todo el cuadrado conmutativo, y se denotan (a,b) cuando se sobreentiende que $(a,b) \in \operatorname{Hom}(f,f')$.

- la composición en $\mathscr{C}^{\to}$ está dada de la siguiente manera: si $(a,b) \in \operatorname{Hom}(f,f')$ y $(a',b') \in \operatorname{Hom}(f',f'')$ entonces $(a',b') \circ (a,b) = (a' \circ a, b' \circ b)$.
$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ {\scriptstyle a}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle b} \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' \\ {\scriptstyle a'}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle b'} \\ A'' & \xrightarrow{f''} & B'' \end{array}$$
Del Lema 1 resulta que la composición está bien definida, esto es, $(b' \circ b) \circ f = f'' \circ (a' \circ a)$ pues los cuadrados interiores son conmutativos, y por lo tanto $(a' \circ a, b' \circ b) \in \operatorname{Hom}(f,f'')$. Dejamos como ejercicio probar que la composición así definida es asociativa.

- Si $f : A \to B \in \operatorname{ob}\mathscr{C}^{\to}$, entonces $\mathrm{id}_f = (\mathrm{id}_A, \mathrm{id}_B)$.

Finalizamos esta primera sección introduciendo el concepto de *subcategoría*

Definición **3.** *Sea $\mathscr{C}$ una categoría. Una* ***subcategoría*** *$\mathscr{C}'$ de $\mathscr{C}$ es una categoría $\mathscr{C}'$ tal que:*

- *Todos los objetos de $\mathscr{C}'$ son objetos de $\mathscr{C}$ (abusando de la notación, $\operatorname{ob}\mathscr{C}' \subseteq \operatorname{ob}\mathscr{C}$).*

- *Todos los morfismos de $\mathscr{C}'$ son morfismos de $\mathscr{C}$ (o sea, $\operatorname{mor}\mathscr{C}' \subseteq \operatorname{mor}\mathscr{C}$).*

- *las funciones dominio, codominio así como la composición de morfismos y los morfismos identidad en $\mathscr{C}'$ son los mismos que en $\mathscr{C}$.*

Ejemplo **10.** La categoría FinSet es una subcategoría de la categoría Set. La categoría Ret es una subcategoría de la categoría Poset que a su vez es una subcategoría de Set.

La categoría Grp de grupos es una subcategoría de Mon y esta a su vez es una subcategoría de Sgrp. Todas son subcategorías de Set.

Ejemplo **11.** Un grupo abeliano $(G,+)$ se dice *divisible* si para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $g \in G$, existe $y \in G$ tal que $ny = g$. Por ejemplo $(\mathbb{Q},+)$ y $(\mathbb{R},+)$ son grupos divisibles, pero $(\mathbb{R}^*,\cdot)$ no lo es, pues en este caso la condición de divisibilidad establece que para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $g \in \mathbb{R}$ debería existir $y \in \mathbb{R}$ tal que $y^n = g$, lo cual es falso por ejemplo si $g < 0$ y n es par. En contraposición, el grupo multiplicativo de los complejos $(\mathbb{C}^*,\cdot)$ sí es un grupo divisible. Es fácil ver que el cociente de un grupo divisible por un subgrupo normal sigue siendo divisible (lo dejamos como ejercicio). Los grupos divisibles forman una categoría DivGrp (donde los morfismos son homomorfismos de grupos usuales) que es una subcategoría de Ab y de Grp.

2. Monomorfismos, epimorfismos e isomorfismos

En la categoría Set los morfismos son funciones entre conjuntos, y por lo tanto tiene sentido hablar de funciones inyectivas, sobreyectivas o biyectivas. Sin embargo, si $f : A \to B$ es un morfismo en $\mathrm{mor}\,\mathrm{Set}$, estas nociones están definidas en base a los elementos de A y B: por ejemplo f es inyectiva si $f(x) \neq f(y)$ cada vez que $x \neq y$ en A. En una categoría abstracta, los morfismos pueden no ser funciones, y los objetos podrían no ser conjuntos. Por lo tanto debemos dar una definición más general de estos conceptos pero que no haga referencia a elementos ajenos a los objetos A, B y al morfismo f. Siempre que en matemática generalizamos una noción que ya fue definida en otro contexto, debemos probar que la generalización es buena, es decir, que cuando la aplicamos al contexto donde estaba definida con anterioridad ambas definiciones coinciden.

Definición **4.** *Sea $\mathscr{C}$ una categoría y $f : A \to B$ un morfismo de $\mathscr{C}$. Decimos que f es un* ***monomorfismo*** *(o que f es* ***mónico****) si para cualquier par de morfismos $g : C \to A$, $h : C \to A$ en $\mathrm{mor}\,\mathscr{C}$ se verifica que*

$$f \circ g = f \circ h \implies g = h.$$

Es decir, f es mónico si para cada $g, h \in \mathrm{Hom}(C,A)$ se tiene

$$C \underset{h}{\overset{g}{\rightrightarrows}} A \xrightarrow{\quad f \quad} B \quad \textit{conmutativo} \implies g = h$$

Claramente, si un morfismo es mónico en una categoría $\mathscr{C}$ lo será en cualquier subcategoría $\mathscr{C}'$ de $\mathscr{C}$ que lo contenga como morfismo, dado que la composición en $\mathscr{C}'$ es la misma que en $\mathscr{C}$. Es decir:

Lema **2.** *Sea $\mathscr{C}$ una categoría y $\mathscr{C}'$ una subcategoría de $\mathscr{C}$. Si $f \in \mathrm{mor}\,\mathscr{C}$ es mónico y $f \in \mathrm{mor}\,\mathscr{C}'$, entonces f es un monomorfismo en $\mathscr{C}'$.*

Lema **3.** *En Set un morfismo es mónico si y sólo si es una función inyectiva.*

Demostración. Supongamos primero que $f : A \to B$ es un morfismo mónico en Set. Sean $a, a' \in A$ tales que $f(a) = f(a') = b$. Sea $C = \{b\}$ y sean $g : C \to A$, $h : C \to A$ dadas por $g(b) = a$, $g(b) = a'$ respectivamente. Entonces

$$f \circ g(b) = f(a) = b, \quad f \circ h(b) = f(a') = b$$

con lo cual $f \circ g = f \circ h$. Siendo f mónico, deberá ser $g = h$, de donde $g(b) = h(b)$, o sea $a = a'$. Concluimos que f es una función inyectiva.

Supongamos ahora que $f : A \to B$ es una función inyectiva. Sea C un conjunto cualquiera y $g, h : C \to A$ funciones cualesquiera tales que $f \circ g = f \circ h$. Entonces para cada $c \in C$,

$$f(g(c)) = f(h(c)) \overset{f \text{ inyectiva}}{\Longrightarrow} g(c) = h(c).$$

Concluimos entonces que $g = h$ y f es un monomorfismo en Set. $\square$

Con una demostración completamente análoga a la del lema anterior puede probarse:

Lema **4.** *En toda categoría donde los objetos sean conjuntos, los morfismos sean funciones entre conjuntos y la composición sea la composición usual de funciones (por ejemplo, en todas las categorías de los Ejemplos 2), toda función inyectiva es un monomorfismo.*

Ejemplo **12.** La recíproca del Lema 4 es falsa. De hecho, es falsa la recíproca del Lema 2: un morfismo f en una subcategoría $\mathscr{C}'$ de una categoría $\mathscr{C}$ puede ser mónico en $\mathscr{C}'$ sin ser mónico en $\mathscr{C}$. La razón es que en $\mathscr{C}'$ hay "menos" morfismos que en $\mathscr{C}$ con los cuales componer a f para verificar la condición de monomorfismo.

Consideremos por ejemplo la categoría DivGrp de grupos divisibles (ver Ejemplo 11). Entonces $(\mathbb{Q}, +)$ y $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, +)$ son objetos de DivGrp y la proyección al cociente $\pi : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es un morfismo en DivGrp. π es claramente una función no inyectiva, dado que $\ker \pi = \mathbb{Z}$ no es trivial. Veremos que sin embargo π es un morfismo mónico en DivGrp.

Para esto consideremos un grupo divisible $(G, +)$ cualquiera y sea $g : G \to \mathbb{Q}$ un homomorfismo de grupos. Denotemos por 0 al homomorfismo trivial (es decir, aquel que mapea todos los elementos del dominio en la identidad del codominio). Probaremos primero que

$$\pi \circ g = 0 \implies g = 0. \tag{2}$$

En efecto, supongamos que $\pi \circ g = 0$. Esto quiere decir que para cada $x \in G$, $\pi(g(x)) = \overline{0}$, o sea, $g(x) \in \mathbb{Z}$. Fijemos ahora $x \in G$. Supongamos que $g(x) \geq 0$ y pongamos $n = g(x) + 1 \in \mathbb{N}$. Como G es un grupo divisible, existirá $y \in G$ tal que $ny = x$. Aplicando g a ambos lados tendremos que $ng(y) = g(x)$, o sea

$$0 \leq g(y) = \frac{g(x)}{1 + g(x)} < 1$$

y como $g(y) \in \mathbb{Z}$ deberá ser $g(y) = 0$. Luego $g(x) = ng(y) = 0$. Si fuese $g(x) \leq 0$, entonces $g(-x) \geq 0$, pero $g(x) = -g(-x)$ con lo cual $g(x) = 0$.

Sean ahora $g : G \to \mathbb{Q}$ y $h : G \to \mathbb{Q}$ dos morfismos tales que $\pi \circ g = \pi \circ h$. Entonces $\pi \circ (g - h) = 0$ con lo cual $g - h = 0$, o sea $g(x) = h(x)$ para todo $x \in G$. Concluimos que $g = h$ y por lo tanto π es mónico.

Observemos finalmente que π no es un morfismo mónico en la categoría Grp de la cual DivGrp es una subcategoría. Sea $G = (\mathbb{Z}, +) \in \operatorname{ob} \mathrm{Grp}$. Como $\mathbb{Z}$ no es un grupo divisible, $\mathbb{Z}$ no es un objeto de DivGrp. Tomemos $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, $g(x) = x$ y $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, $h(x) = 2x$. Entonces $g, h \in \operatorname{mor} \mathrm{Grp}$ son tales que $\pi \circ g = \pi \circ h$, pero sin embargo $g \neq h$.

Ejemplo **13.** Consideremos las categorías de los Ejemplos 4.

1. Si P es un poset, en la categoría $\mathscr{C}_P$ todo morfismo es un monomorfismo. En efecto, dado un morfismo $(p,p') \in \operatorname{mor}\mathscr{C}_P$ y $p'' \in \operatorname{ob}\mathscr{C}$ cualquiera, si existe un morfismo en $f \in \operatorname{Hom}(p'',p)$ es porque $p'' \preceq p$. En este caso $f = (p'',p)$ es el único morfismo tal que $\operatorname{dom} f = p''$ y $\operatorname{codom} f = p$ con lo cual la definición de monomorfismo se cumple trivialmente.

2. Sea ahora $(M,*)$ un monoide. Un morfismo en la categoría $\mathscr{C}_M$ es un elemento de M. Si $f \in M$ es invertible, entonces es un monomorfismo de $\mathscr{C}_M$. En efecto, $\operatorname{ob}\mathscr{C}_M$ consta de un único elemento que simbolizamos x. Por lo tanto si $g,h \in \operatorname{Hom}(x,x) = M$, $g \circ f = h \circ f$ si y sólo si $g * f = h * f$. Siendo f invertible, resulta $g = f$. En particular si $(G,\cdot)$ es un grupo, todo morfismo en $\mathscr{C}_G$ es un monomorfismo.

   Observemos que la recíproca es falsa. Si consideramos como monoide $(\mathbb{Z},\cdot)$, ningún elemento es invertible (salvo 1 y -1) y sin embargo vale la ley de cancelación, con lo cual todos los morfismos son monomorfismos, a excepción de 0.

Definición **5.** *Sea $\mathscr{C}$ una categoría y $f : A \to B$ un morfismo de $\mathscr{C}$. Decimos que f es un* ***epimorfismo*** *o un morfismo* ***épico*** *si para cualquier $C \in \operatorname{ob}\mathscr{C}$ y cualquier par de morfismos $g,h \in \operatorname{Hom}(B,C)$, se verifica*

$$g \circ f = h \circ f \implies g = h.$$

Es decir, f es épico si para cada $g,h \in \operatorname{Hom}(B,C)$ se tiene

$$A \xrightarrow{\ f\ } B \underset{h}{\overset{g}{\rightrightarrows}} C \quad \textit{conmutativo} \implies g = h$$

Nuevamente, tenemos que los epimorfismos de $\mathscr{C}$ son epimorfismos en cualquier subcategoría que los contenga como morfismos. Dejamos los detalles de la prueba como ejercicio:

Lema **5.** *Sea $\mathscr{C}$ una categoría y $\mathscr{C}'$ una subcategoría de $\mathscr{C}$. Si $f \in \operatorname{mor}\mathscr{C}$ es épico y $f \in \operatorname{mor}\mathscr{C}'$, entonces f es un epimorfismo en $\mathscr{C}'$.*

Lema **6.** *En* Set *un morfismo es épico si y sólo si es una función sobreyectiva.*

Demostración. Supongamos primero que $f : A \to B$ es un morfismo épico en Set. Sea $b \in B$ cualquiera. Debemos probar que existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Supongamos que esto no ocurre. Entonces B tiene al menos dos elementos distintos, digamos $b_1 \neq b_2$. Sea $g : B \to B$ tal que $g(x) = x$ si $x \neq b$ y $g(b) = b_1$, y sea $h : B \to B$ tal que $h(x) = x$ si $x \neq b$ y $h(b) = b_2$. Claramente $g \neq h$ pero sin embargo $g \circ f = h \circ f$ (puesto que $f(a) \neq b$ para cada $a \in A$), lo que contradice la hipótesis. Luego f es sobreyectiva.

Supongamos ahora que f es una función sobreyectiva. Sea C un conjunto cualquiera y sean $g,h : B \to C$ funciones tales que $g \circ f = h \circ f$. Sea $b \in B$. Como f es sobre, existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Luego

$$g(b) = g(f(a)) = h(f(a)) = h(b).$$

Como $b \in B$ es un elemento genérico, concluimos que $g = h$ y entonces f es un epimorfismo. □

Lema **7.** *En toda categoría donde los objetos sean conjuntos, los morfismos sean funciones entre conjuntos y la composición sea la composición usual de funciones (por ejemplo, en todas las categorías de los Ejemplos 2), toda función sobreyectiva es un epimorfismo.*

Ejemplo **14.** Veamos nuevamente que existen categorías donde los morfismos son funciones pero existen epimorfismos que no son funciones sobreyectivas. Consideremos la categoría Mon de monoides y sea $i : (\mathbb{N}_0, +) \to (\mathbb{Z}, +)$ la inclusión. Claramente i es un morfismo de monoides que no es sobreyectivo (sí es inyectivo, y por lo tanto es un morfismo mónico en Mon). Veamos que sin embargo i es un morfismo épico en Mon. Consideremos un monoide arbitrario $(M, *)$ y sean $g, h : \mathbb{Z} \to M$ morfismos de monoides tales que $i \circ g = i \circ h$. Sea $z \in \mathbb{Z}$. Si $z \geq 0$ entonces $z = i(z)$ y por lo tanto $g(z) = g(i(z)) = h(i(z)) = h(z)$.

Debemos ver entonces que para cada $z < 0$, $g(z) = h(z)$. Sea e el elemento neutro de M. Como g y h son morfismos de monoides, $g(0) = h(0) = e$. Sea $z \in \mathbb{Z}$ con $z < 0$. Entonces:

$$\begin{aligned} g(z) &= g(z) * e = g(z) * h(0) = g(z) * h(-z + z) \\ &= g(z) * (h(-z) * h(z)) = (g(z) * h(-z)) * h(z) \\ &= (g(z) * g(-z)) * h(z) = g(z - z) * h(z) = g(0) * h(z) \\ &= e * h(z) = h(z) \end{aligned}$$

como queríamos ver.

Definición **6.** *Sea $\mathscr{C}$ una categoría y $f \in \mathrm{mor}\,\mathscr{C}$ un morfismo. Si $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$, decimos que f es un* ***isomorfismo*** *si existe un morfismo $f' \in \mathrm{Hom}(B, A)$ tal que $f' \circ f = \mathrm{id}_A$ y $f \circ f' = \mathrm{id}_B$. Si existe un isomorfismo $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$ decimos que A y B son objetos* ***isomorfos****.*

Observemos que la composición de morfismos no es una operación definida en un conjunto (no es posible componer cualquier par de morfismos) y por lo tanto no podemos aplicar el resultado de la Unidad 4 que nos garantiza que si una operación es asociativa, si existe el inverso de un elemento, éste es único. Sin embargo, con una prueba análoga es posible ver que si f es un isomorfismo, el morfismo f' de la Definición 6 es único (dejamos los detalles como ejercicio) y se denomina **inverso** del isomorfismo f. Lo denotamos f^{-1}. Veremos en los ejercicios que los isomorfismos y sus inversos se comportan de la manera usual respecto de la composición de morfismos. En particular, dejamos como ejercicio probar el siguiente resultado:

Lema **8.** *Sea $\mathscr{C}$ una categoría. Entonces:*

1. *Para cada $A \in \mathrm{ob}\,\mathscr{C}$, id_A es un isomorfismo.*
2. *Si $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$ es un isomorfismo, entonces $f^{-1} \in \mathrm{Hom}(B, A)$ es un isomorfismo.*
3. *Si $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$ y $g \in \mathrm{Hom}(B, C)$ son isomorfismos, entonces $g \circ f \in \mathrm{Hom}(A, C)$ es un isomorfismo.*
4. *La relación $\sim$ en $\mathrm{ob}\,\mathscr{C}$ dada por $A \sim B$ si existe un isomorfismo $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$ es una relación de equivalencia.*

Observemos que la definición de isomorfismo difiere sustancialmente de las definiciones que hemos hecho de monomorfismo y epimorfismo. En primer lugar, es inmediato de la definición que en Set un morfismo es un isomorfismo si y sólo si es una función biyectiva.

Por otra parte, si $\mathscr{C}$ es una categoría donde los objetos son conjuntos, los morfismos son funciones entre conjuntos, la composición y las identidades son las usuales, entonces **todo isomorfismo es una función biyectiva**. En este sentido, tenemos la implicación inversa de las que teníamos para las definiciones de monomorfismo y epimorfismo. Esto es, si en $\mathscr{C}$ los morfismos son funciones, entonces:

$$f \text{ inyectiva} \implies f \text{ monomorfismo.}$$
$$f \text{ sobreyectiva} \implies f \text{ epimorfismo.}$$
$$f \text{ isomorfismo} \implies f \text{ biyectiva.}$$

Ya vimos que en Set valen todas las recíprocas, pero hay categorías donde las recíprocas de las dos primeras implicaciones son falsas. Esto implica automáticamente que en una categoría un morfismo puede ser simultáneamente un monomorfiso y un epimorfismo (como en los ejemplos 12 y 14) sin ser un isomorfismo. Por otra parte, es fácil ver que todo isomorfismo es un monomorfismo y un epimorfismo (dejamos la prueba como ejericio).

Finalmente, también existen categorías donde un morfismo puede ser biyectivo sin ser un isomorfismo, con lo cual la recíproca de la última implicación también es falsa. Dejamos como ejercicio exhibir un contraejemplo.

3. Objetos iniciales, terminales, productos y coproductos

A partir de esta sección comenzaremos con lo que en teoría de categorías se denominan *propiedades y construcciones universales*. Como ya hemos visto, en la teoría de categorías es posible construir analogías y generalizar propiedades conocidas de los conjuntos y funciones entre conjuntos a otras colecciones de objetos y morfismos abstractos. Los elementos centrales de las categorías no son los objetos, sino las relaciones que entre estos se establecen a través de los morfismos. Es por ello que las nociones que hemos dado de monomorfismos, epimorfismos e isomorfismos fueron introducidas a partir de relaciones de estos morfismos con otros morfismos, sin importar cuales sean los objetos involucrados. Una construcción universal, en términos generales que especificaremos más adelante, se basa en relaciones entre objetos y morfismos, normalmente a través de diagramas, que establecen la existencia de nuevos objetos en cualquier categoría que las verifique.

Para comenzar, introducimos las nociones de objetos *iniciales* y *terminales*.

Definición **7.** *Sea $\mathscr{C}$ una categoría. Un objeto $0 \in \mathrm{ob}\mathscr{C}$ se dice un* ***objeto inicial*** *si para cada objeto A de $\mathscr{C}$ existe un único morfismo $f : 0 \to A$. Un objeto $1 \in \mathrm{ob}\mathscr{C}$ se dice un* ***objeto terminal*** *si para cada objeto A de $\mathscr{C}$ existe un único morfismo $g : A \to 1$. Un objeto en $\mathscr{C}$ se dice un* ***objeto nulo*** *u* ***objeto cero*** *si es inicial y terminal.*

Ejemplo **15.** En Set existe un único objeto inicial, el conjunto vacío, y cada conjunto de un único elemento es un objeto terminal (ver Ejemplo 1).

Ejemplo **16.** Consideremos la categoría Boole de álgebras de Boole: los objetos son álgebras de Boole y los morfismos son morfismos de álgebras de Boole (recordemos que un álgebra de Boole es un retículo acotado, complementado y distributivo). Consideremos el álgebra de Boole de dos elementos $B = \{0, 1\}$ con el orden usual. Entonces B es un elemento inicial en Boole. En efecto, dado cualquier álgebra de Boole $(B', \vee, \wedge, 0', 1')$, $f : B \to B'$ tal que $f(0) = 0'$, $f(1) = 1'$ es el único morfismo de álgebras de Boole posible entre B y B'.

Ejemplo **17.** Consideremos un poset P y la categoría $\mathscr{C}_P$ asociada. $\mathscr{C}_P$ tendrá un objeto inicial si existe un elemento $x \in P$ tal que $x \preceq y$ para cada $y \in P$, esto es, si P tiene un mínimo. Análogamente, $\mathscr{C}_P$ tendrá un objeto terminal si P tiene un máximo. En ambos casos, si existen, objeto inicial y terminal son únicos.

Ejemplo **18.** Consideremos la categoría Vect de espacios vectoriales reales. Entonces $\{0\}$ es un objeto nulo. En efecto, existe un único morfismo de $\{0\}$ en cualquier espacio vectorial V: la transformación lineal que envia 0 en el 0 de V. Por otra parte, la transformación lineal nula que manda todo V en 0 es el únimo morfismo de V a $\{0\}$. Por lo tanto $\{0\}$ es un objeto inicial y terminal de Vect.

Observación **3.** *Veremos en los ejercicios que si bien una categoría puede tener más de un objeto inicial o terminal estos son todos isomorfos entre sí.*

A continuación intentaremos definir el producto $A \times B$ de dos objetos en una categoría. Comencemos observando que en Set el producto $A \times B$ de dos conjuntos (objetos de Set) tiene un sentido propio: es un nuevo conjunto, formado por los pares ordenados (a, b) donde a es un elemento de A y b es un elemento de B. Ahora bien, en una categoría arbitraria $\mathscr{C}$, esta definición ya carece de sentido, dado que sus objetos pueden no ser conjuntos, y por lo tanto no tener elementos. Necesitamos entonces caracterizar de alguna manera el producto cartesiano de conjuntos (obviamente recurriendo a los morfismos) que nos permita generalizar este concepto a otras categorías.

Observemos que existen dos funciones naturales que vinculan $A \times B$ con A y B, las proyecciones $\pi_A : A \times B \to A$ y $\pi_B : A \times B \to B$, definidas respectivamente como

$$\pi_A(a, b) = a, \quad \pi_B(a, b) = b.$$

Por otra parte, si C es un conjunto cualquiera y $f : C \to A$, $g : C \to B$ son funciones cualesquiera, está bien definida una función

$$\langle f, g\rangle : C \to A \times B, \quad \langle f, g\rangle(c) = (f(c), g(c))$$

que hace que el siguiente diagrama sea conmutativo:

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed, "\langle f,g\rangle"] \arrow[dr, "g"] & \\ A & A \times B \arrow[l, "\pi_A"] \arrow[r, "\pi_B"'] & B \end{tikzcd} \tag{3}$$

esto es,

$$\pi_A \circ \langle f, g\rangle = f, \quad \pi_B \circ \langle f, g\rangle = g.$$

Es claro además que la función $\langle f, g\rangle$ es única con esta propiedad.

Veamos que en Set el producto $A \times B$ está completamente caracterizado por la conmutatividad del diagrama (3) para cualesquiera C, f y g. Esto es, si existe otro conjunto D junto con funciones $\tilde{\pi}_A : D \to A$ y $\tilde{\pi}_B : D \to B$ tal que para cualquier conjunto C y cualquier par de funciones $f : C \to A$, $g : C \to B$ existe una única función

$\tilde{F} : C \to D$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed, "\tilde{F}"] \arrow[dr, "g"] & \\ A & D \arrow[l, "\tilde{\pi}_A"] \arrow[r, "\tilde{\pi}_B"'] & B \end{tikzcd} \tag{4}$$

entonces D y $A \times B$ son objetos isomorfos en Set. Para ello basta ver que existe una biyección entre D y $A \times B$.

Pongamos D en el lugar de C en el diagrama (3) con las funciones $f = \tilde{\pi}_A$ y $g = \tilde{\pi}_B$ y consideremos la función $F = \langle \tilde{\pi}_A, \tilde{\pi}_B \rangle : D \to A \times B$, o sea,

$$\pi_A \circ F = \tilde{\pi}_A, \quad \pi_B \circ F = \tilde{\pi}_B. \tag{5}$$

Pongamos ahora $A \times B$ en el lugar de C en el diagrama (4) con las funciones $f = \pi_A$ y $g : \pi_B$ y consideremos la función $\tilde{F} : A \times B \to D$ correspondiente, o sea,

$$\tilde{\pi}_A \circ \tilde{F} = \pi_A, \quad \tilde{\pi}_B \circ \tilde{F} = \pi_B. \tag{6}$$

Tendremos entonces que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} & A \times B \arrow[dl, "\pi_A"'] \arrow[d, dashed, "\tilde{F}"] \arrow[dr, "\pi_B"] & \\ A & D \arrow[l, "\tilde{\pi}_A"] \arrow[r, "\tilde{\pi}_B"'] \arrow[d, dashed, "F"] & B \\ & A \times B \arrow[ul, "\pi_A"] \arrow[ur, "\pi_B"'] & \end{tikzcd}$$

Esto implica que si ponemos $C = A \times B$ en 3, con $f = \pi_A$, $g = \pi_B$, como el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} & A \times B \arrow[dl, "\pi_A"'] \arrow[d, dashed, "F \circ \tilde{F}"] \arrow[dr, "\pi_B"] & \\ A & A \times B \arrow[l, "\pi_A"] \arrow[r, "\pi_B"'] & B \end{tikzcd}$$

por unicidad deberá ser $F \circ \tilde{F} = \langle \pi_A, \pi_B \rangle = \mathrm{id}_{A \times B}$. Conlcuimos que F y $\tilde{F}$ son funiones biyectivas (inversa una de la otra), y por lo tanto isomorfismos en Set.

Una vez que hemos caracterizado el producto de conjuntos a través de morfismos y de una propiedad universal, podemos extender este concepto a cualquier categoría:

Definición **8.** *Sea $\mathscr{C}$ una categoría y A, B objetos de $\mathscr{C}$. El* ***producto*** *de A y B en $\mathscr{C}$ es una terna $(A \times B, \pi_A, \pi_B)$ tales que:*

- $\pi_A \in \mathrm{Hom}(A \times B, A)$ *y* $\pi_B \in \mathrm{Hom}(A \times B, B)$.

y se satisface la siguiente propiedad universal:

- *para todo objeto C y para todo par de morfismos $f : C \to A$, $g : C \to B$, existe un único morfismo $\langle f, g\rangle : C \to A \times B$ tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed, "\exists!\,\langle f,g\rangle"] \arrow[dr, "g"] & \\ A & A \times B \arrow[l, "\pi_A"] \arrow[r, "\pi_B"'] & B \end{tikzcd} \tag{7}$$

Si en $\mathscr{C}$ existe el producto $(A \times B, \pi_A, \pi_B)$ para cualquier par de objetos A y B, decimos que $\mathscr{C}$ es ***una categoría con productos****.*

Con el mismo argumento que en Set, puebe probarse el siguiente resultado:

Lema **9.** *Sea $\mathscr{C}$ una categoría y sean A y B dos objetos de $\mathscr{C}$. Si existe el producto $(A \times B, \pi_A, \pi_B)$, éste es único salvo isomorfismos.*

Ejercicio **1.** *Probar el Lema 9.*

Ejemplo **19.** Como hemos visto antes de dar la definición 8, el producto en Set entre dos objetos A y B es $(A \times B, \pi_A, \pi_B)$, donde $A \times B$ es el producto cartesiano usual y π_A, π_B son las proyecciones canónicas a cada factor. Veamos ahora otra forma (isomorfa) de presentar al producto de dos conjuntos en Set. Sea

$$\mathcal{F} = \{h : \{1, 2\} \to A \cup B \, : \, h(1) \in A, h(2) \in B\}.$$

Definamos las proyecciones $\tilde{\pi}_A : \mathcal{F} \to A$, $\tilde{\pi}_B : \mathcal{F} \to B$ por

$$\tilde{\pi}_A(h) = h(1), \quad \tilde{\pi}_B(h) = h(2).$$

Si C es un conjunto y $f : C \to A$, $g : C \to B$ son dos funciones cualesquiera, pongamos

$$\langle f, g\rangle : C \to \mathcal{F}, \quad \langle f, g\rangle(c) = h : \{1, 2\} \to A \cup B \,/\, h(1) = f(c),\, h(2) = g(c)$$

de donde resulta claro que $\langle f, g\rangle$ es la única función de C en $\mathcal{F}$ tal que $\tilde{\pi}_A \circ \langle f, g\rangle = f$, $\tilde{\pi}_B \circ \langle f, g\rangle = g$. Luego $\mathcal{F}$ es isomorfo a $A \times B$, y es un producto de A y B.

Ejemplo **20.** En Sgrp, Mon y Grp, los productos entre dos objetos siempre existen y son el semigrupo, monoide o grupo producto respectivamente. En efecto, es fácil ver que las proyecciones de $A \times B$ en A y B son morfismos de semigrupos, monoides o grupos respectivamete, y que $(A \times B, \pi_A, \pi_B)$ satisface la propiedad universal del producto. En realidad todas las categorías del Ejemplo 2 son categorías con productos.

Ejemplo **21.** Consideremos un poset P y sea $\mathscr{C}_P$ la categoría asociada. Sean $x, y \in P$ dos objetos de $\mathscr{C}_P$. Supongamos que existe el producto $(x \times y, \pi_x, \pi_y)$. Recordemos que un morfismo en $\mathscr{C}_P$ no es más que un par de elementos (a, b) tal que $a \preceq b$. Por lo tanto, para que exista un morfismo $\pi_x : x \times y \to x$, deberá ser $x \times y \preceq x$, en cuyo caso $\pi_x = (x \times y, x)$. De manera análoga, debemos tener $x \times y \preceq y$ y $\pi_y = (x \times y, y)$. Por lo tanto $x \times y$ debe ser una cota inferior en P del conjunto $\{x, y\}$.

En este caso, la propiedad universal del producto puede interpretarse a través de un diagrama de Hasse en P. En efecto, supongamos que $z \in P$ es un objeto de $\mathscr{C}_P$ cualquiera para el cual existen dos morfismos $f : z \to x$ y $g : z \to y$. Esto simplemente quiere decir que $z \preceq x$, $z \preceq y$ y $f = (z, x)$, $g = (z, y)$. Como estamos suponiendo que el producto existe, deberá existir un único morfismo $\langle f, g\rangle : z \to x \times y$, pero este morfismo no puede ser otro que $(z, x \times y)$, o sea, $z \preceq x \times y$:

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[dr, dash, "\pi_x"] \arrow[ddr, dash, "f"'] & & y \arrow[dl, dash, "\pi_y"'] \arrow[ddl, dash, "g"] \\
& x \times y \arrow[d, dash, dashed] & \\
& z &
\end{tikzcd}$$

Observemos que para las funciones que tenemos,

$$\pi_x \circ \langle f, g\rangle = (x \times y, x) \circ (z, x \times y) = (z, x) = f,$$

$$\pi_y \circ \langle f, g\rangle = (x \times y, y) \circ (z, x \times y) = (z, y) = g.$$

Es decir, que de existir, el producto $x \times y$ debe ser una cota inferior de $\{x, y\}$ (para que existan los morfismos π_x y π_y), y tal que para cualquier otra cota inferior z de $\{x, y\}$ (que son los objetos para los cuales existen morfismos a x y a y), $z \preceq x \times y$. O sea, existe el producto de x e y en $\mathscr{C}_P$ si y sólo si $\{x, y\}$ tiene ínfimo. En este caso, $x \times y = \inf\{x, y\}$.

Si ahora consideramos el poset dual P^*, es decir $(P, \succeq)$, con un razonamiento análogo al anterior veremos que $\mathscr{C}_{P^*}$ (ver el Ejemplo 7) admite el producto $x \times y$ si y sólo si existe $\sup\{x, y\}$.

Por lo tanto tendremos que un poset P es un retículo si y sólo si $\mathscr{C}_P$ y $\mathscr{C}_{P^*}$ son categorías con productos. En ese caso, las operaciones join y meet están dadas por $x \wedge y = x \times y$ y $x \vee y = x \times^* y$, donde $\times^*$ indica el producto en $\mathscr{C}_{P^*}$.

Sea $\mathscr{C}$ una categoría y A, B, C, D objetos de $\mathscr{C}$ para los cuales existen los productos $(A \times B, \pi_A, \pi_B)$ y $(C \times D, \pi_C, \pi_D)$. Sean $f : A \to C$ y $g : B \to D$ son dos morfismos de $\mathscr{C}$. Podemos considerar entonces el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "f"'] & A \times B \arrow[l, "\pi_A"'] \arrow[r, "\pi_B"] \arrow[dl, "f\circ\pi_A"'] \arrow[dr, "g\circ\pi_B"] & B \arrow[d, "g"] \\
C & C \times D \arrow[l, "\pi_C"] \arrow[r, "\pi_D"'] & D
\end{tikzcd}$$

Aplicando la definición del producto $C \times D$, existe un único morfismo $f \times g = \langle f \circ \pi_A, g \circ \pi_B\rangle$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
& A \times B \arrow[dl, "f\circ\pi_A"'] \arrow[d, dashed, "f\times g"] \arrow[dr, "g\circ\pi_B"] & \\
C & C \times D \arrow[l, "\pi_C"] \arrow[r, "\pi_D"'] & D
\end{tikzcd}$$

Definición **9.** *Sea $\mathscr{C}$ una categoría y A, B, C, D objetos de $\mathscr{C}$ para los cuales existen los productos $(A \times B, \pi_A, \pi_B)$ y $(C \times D, \pi_C, \pi_D)$. Sean $f : A \to C$ y $g : B \to D$ son dos morfismos de $\mathscr{C}$. El morfismo $f \times g = \langle f \circ \pi_A, g \circ \pi_B \rangle : A \times B \to C \times D$, se denomina el **morfismo producto** de f y g.*

Ejemplo **22.** En Set, si $f : A \to C$ y $g : B \to C$ son dos funciones, entonces $f \times g(a, b) = (f(a), g(b))$ como se comprueba fácilmente de la definición. Lo mismo ocurre para aquellas categorías donde los productos son los productos cartesianos usuales.

Ejemplo **23.** Consideremos un retículo L y sea $\mathscr{C}_L$ la categoría asociada. Sean $x, y, z, w \in L = \mathrm{ob}\,\mathscr{C}_L$. Entonces existen los productos $x \times y = x \wedge y$ y $z \times w = z \wedge w$. Si existen morfismos $f : x \to z$ y $g : y \to w$ es porque $x \preceq z$ y $y \preceq w$. Luego $x \wedge y \preceq z \wedge w$ y por lo tanto existe el morfismo (único) $f \times g : x \times y \to z \times w$. Esto es, $f \times g = (x \wedge y, z \wedge w)$.

El Ejemplo 21 resulta ilustrativo para la intoducción del siguiente concepto universal, el de *coproductos*. Como hemos mencionado en el Ejemplo 7, la categoría $\mathscr{C}_{P*}$ está íntimamente relacionada con $\mathscr{C}_P^{op}$, y el producto en $\mathscr{C}_{P^*}$ es útil para caracterizar ciertas propiedades de P que no se obtienen con el producto en $\mathscr{C}_P$. Como los objetos de $\mathscr{C}_P$ y $\mathscr{C}_{P^*}$ son los mismos y los morfismos son las flechas revertidas, podemos formular cualquier propiedad en una de ellas en términos de propiedades en la otra.

Lo mismo ocurre para cualquier categoría $\mathscr{C}$ y su opuesta $\mathscr{C}^{op}$. Podemos por lo tanto considerar el producto en $\mathscr{C}^{op}$ y expresarlo en términos de objetos y flechas en $\mathscr{C}$. Esto da lugar al concepto de *coproducto*:

Definición **10.** *Sea $\mathscr{C}$ una categoría y A, B objetos de $\mathscr{C}$. El **coproducto** de A y B en $\mathscr{C}$ es una terna $(A + B, i_A, i_B)$ tales que:*

- *$i_A \in \mathrm{Hom}(A, A + B)$ y $i_B \in \mathrm{Hom}(B, A + B)$.*

y se satisface la siguiente propiedad universal:

- *para todo objeto C y para todo par de morfismos $f : A \to C$, $g : B \to C$, existe un único morfismo $[f, g] : A + B \to C$ tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i_A"] \arrow[dr, "f"'] & A+B \arrow[d, dashed, "\exists!\,{[f,g]}"] & B \arrow[l, "i_B"'] \arrow[dl, "g"] \\ & C & \end{tikzcd} \tag{8}$$

*Si en $\mathscr{C}$ existe el coproducto $(A + B, i_A, i_B)$ para cualquier par de objetos A y B, decimos que $\mathscr{C}$ es **una categoría con coproductos**.*

Ejemplo **24.** Supongamos que en $\mathscr{C}$ existe el coproducto $(A + B, i_A, i_B)$ de dos objetos A y B. Denotemos $A \times^{op} B = A + B$, $\pi_A^{op} = i_A$ y $\pi_B^{op} = i_B$. Observemos que $A \times^{op} B$ es un objeto en $\mathscr{C}^{op}$, y

$$\pi_A \in \mathrm{Hom}^{op}(A \times^{op} B, A), \quad \pi_B \in \mathrm{Hom}^{op}(A \times^{op} B, B).$$

Veremos que $(A \times^{op} B, \pi_A^{op}, \pi_B^{op})$ es efectivamente un producto de A y B en $\mathscr{C}^{op}$. Para ello, consideremos un objeto C cualquiera de $\mathscr{C}^{op}$ y sean $f \in \mathrm{Hom}^{op}(A, C)$, $g \in \mathrm{Hom}^{op}(B, C)$. Entonces C es también un objeto de $\mathscr{C}$ y $f \in \mathrm{Hom}(C, A)$, $g \in \mathrm{Hom}(C, B)$.

Ahora bien, en $\mathscr{C}$ existe un único morfismo $[f, g] : A + B \to C$ tal que $[f, g] \circ i_A = f$, $[f, g] \circ i_B = g$. Luego $[f, g] \in \mathrm{Hom}^{op}(C, A \times^{op} B)$ verifica

$$\pi_A^{op} \circ^{op} [f, g] = [f, g] \circ \pi_A^{op} = [f, g] \circ i_A = f, \quad \pi_B^{op} \circ^{op} [f, g] = g.$$

Por otra parte, si existiese otro morfismo $F \in \mathrm{Hom}^{op}(C, A \times^{op} B)$ tal que $\pi_A^{op} \circ^{op} F = f$ y $\pi_B^{op} \circ^{op} F = g$, entonces tendríamos que $F \in \mathrm{Hom}(A + B, C)$ verifica $F \circ i_A = f$ y $F \circ i_B = g$, con lo cual $F = [f, g]$.

Concluimos entonces que $[f, g]$ es el único morfismo en $\mathrm{Hom}^{op}(C, A \times^{op} B)$ que hace conmutativo el diagrama (7), y por lo tanto $\langle f, g\rangle^{op} = [f, g]$.

Ejemplo **25.** Como vimos en el Ejemplo 21, si P es un poset, un coproducto en $\mathscr{C}_P$ es un producto en $\mathscr{C}_{P^*}$, que a su vez existe para los objetos x e y si $\{x, y\}$ tiene supremo. Por lo tanto $\mathscr{C}_P$ es una categoría con productos y coproductos si y sólo si P es un retículo.

Ejemplo **26. Coproducto en** Set Veamos ahora que Set es una categoría con coproductos. Sean A y B dos conjuntos y sea

$$A \sqcup B = (A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\})$$

su **unión disjunta** (es decir, 0 y 1 son parámetros que distinguen los elementos de A de los de B, y en caso que tuviésemos $A \cap B \neq \emptyset$ permite considerar estos elementos comunes como elementos distintos en la unión). Podemos entonces considerar las inclusiones

$$i_A : A \to A \sqcup B,\ i_A(a) = (a, 0), \quad i_B : B \to A \sqcup B,\ i_B(b) = (b, 1).$$

Para ver que $(A \sqcup B, i_A, i_B)$ es un coproducto en Set, consideremos un conjunto C cualquiera y sean $f : A \to C$, $g : B \to C$ dos funciones cualesquiera. Definamos $[f, g] : A \sqcup B \to C$ por

$$[f, g](x, j) = \begin{cases} f(x) & \text{si } j = 0 \\ g(x) & \text{si } j = 1. \end{cases}$$

Es evidente entonces que $[f, g] \circ i_A = f$ y $[f, g] \circ i_B = g$.

Por otra parte, si $F : A \sqcup B \to C$ es una función tal que $F \circ i_A = f$ y $F \circ i_B = g$, entonces

$$F(x, 0) = F \circ i_A(x) = f(x) = [f, g](x, 0)$$

y análogamente $F(x, 1) = [f, g](x, 1)$. Por lo tanto $[f, g]$ es la única función que hace conmutativo el diagrama (8) como queríamos ver.

Observemos que en este último ejemplo, en vez de 0 y 1 podríamos haber elegido cualquier otro par de índices, lo que muestra que el coproducto no necesariamente es único. Más aún si A y B son conjuntos disjuntos, $A \sqcup B$ es isomorfo a $A \cup B$. Dejamos como ejercicio probar el siguiente resultado:

Lema **10.** *Sea $\mathscr{C}$ una categoría y A, B objetos en $\mathscr{C}$. Si existe el coproducto $(A+B, i_A, i_B)$, éste es único salvo isomorfismos.*

Ejemplo **27. Coproducto en** Ab**.** Sean $(A,+)$, $(B,+)$ dos grupos abelianos (en estos grupos, es usual utilizar la notación aditiva, aunque la operación podría ser un producto). En este caso, el grupo producto $A \times B$ suele denotarse como $A+B$ y se denomina **suma directa** de A y B. Podemos considerar los morfismos $i_A : A \to A+B$ e $i_B : B \to A+B$ dados por

$$i_A(a) = (a, 0_B), \quad i_B(b) = (0_A, b)$$

donde 0_A y 0_B son los neutros de A y B respectivamente (que en el caso de notación aditiva suelen denotarse por 0). Veamos que $(A+B, i_A, i_B)$ es un coproducto de A y B.

Consideremos entonces un grupo abeliano C cualquiera y sean $f : A \to C$, $g : A \to C$ dos homomorfismos. Pongamos $[f,g] : A+B \to C$ por

$$[f,g](a,b) = f(a) + g(b).$$

Entonces

$$[f,g] \circ i_A(a) = [f,g](a, 0_B) = f(a) + g(0_B) = f(a) + 0_C = f(a)$$

y análogamente $[f,g] \circ i_B = g$.

Si ahora $F : A+B \to C$ es un homomorfismo tal que $F \circ i_A = f$, $F \circ i_B = g$, entonces

$$F(a,b) = F((a,0_B) + (0_A,b)) = F(a,0_B) + F(0_A,b) = F(i_A(a)) + F(i_B(b)) = f(a) + g(b) = [f,g](a,b)$$

lo que conlcuye la prueba.

Ejemplo **28. Coproducto en** Grp. Sean ahora $(A,\cdot)$ y $(B,\cdot)$ dos grupos cualesquiera. Intentemos repetir la construcción que hicimos para Ab. En este caso, deberíamos considerar el grupo producto $A \times B$ con las inclusiones $i_A : A \to A \times B$, $i_A(a) = (a, e_B)$ y $i_B : B \to A \times B$, $i_B(b) = (e_A, b)$. Sin importar que A y B no sean abelianos, i_A y i_B son homomorfismos bien definidos. Sin embargo, si ahora consideramos un grupo C cualquiera y dos homomorfismos $f : A \to C$, $g : B \to B$, la función $[f,g](a,b) = f(a)g(b)$ ya no es un homomorfismos si los grupos no son abelianos, como es fácil comprobar.

Por lo tanto $(A \times B, i_A, i_B)$ no será, en general, un coproducto en Grp. Para poder definir un coproducto en esta categoría debemos introducir el concepto de **producto libre** de grupos.

Consideremos la unión disjunta $A \sqcup B$. Denotaremos por a al elemento $(a,0)$ y por B al elemento $(b,1)$ de $A \sqcup B$, identificando a A con el subconjunto $i_A(A)$ y a B con el subconjunto $i_B(B)$ de $A \sqcup B$. Una **palabra** en $A \sqcup B$ es una sucesión finita

$$c_1 c_2 c_3 \ldots c_n$$

de elementos de $A \sqcup B$. Por conveniencia, denotaremos por $\emptyset$ la **palabra vacía**, que es una palabra que no tiene letras. Denotamos por $P(A \sqcup B)$ el conjunto de palabras en $A \sqcup B$ junto con la palabra vacía.

Una palabra en $P(A \sqcup B)$ se denomina una **palabra reducida** si es la palabra vacía o es de la forma $c_1 c_2 \ldots c_l$ tal que dos letras contiguas no pertenecen al mismo conjunto. Esto es, si $c_i \in A$ entonces $c_{i+1} \in B$, y si $c_i \in B$ entonces $c_{i+1} \in A$.

Una **reducción** en $P(A \sqcup B)$ es una función $r : P(A \sqcup B) \to A \sqcup B$ tal que si $c_1c_2c_3 \dots c_n$ es una palabra en $A \sqcup B$, entonces $r(c_1c_2 \dots c_n)$ es una palabra reducida que se obtiene iterando las siguientes propiedades:

1. si c_i y c_{i+1} pertenecen a un mismo conjunto A o B, las reemplazamos en la palabra original por $c_i' = c_i{\cdot}c_{i+1}$.

2. si en alguna iteración, tenemos que $c_i' = e$ para algún i, la eliminamos de la palabra.

Así por ejemplo,

$$r(aa^{-1}b^{-1}b) = \emptyset, \quad r(aba^2a^3b^{-1}b^2) = aba^5b$$

Denotemos por $A * B$ el conjunto de palabras reducidas en $P(A \sqcup B)$. Definamos en $A * B$ la operación

$$p_1 * p_2 = r(p_1p_2), \quad \emptyset * p = p * \emptyset = p$$

donde p_1p_2 indica la yuxtaposición de palabras. Entonces es fácil ver que $(A{*}B, *)$ es un grupo, donde el elemento neutro es la palabra vacía $\emptyset$ y el inverso de una palabra reducida $c_1c_2 \dots c_n$ es la palabra $c_n^{-1} \dots c_2^{-1}c_1^{-1}$.

Tenemos definidas dos inclusiones triviales $j_A : A \to A{*}B$ e $j_B : B \to A{*}B$, donde $j_A(a) = a$ y $j_B(b) = b$ y es inmediato verificar que se trata de homomorfismos de grupos.

Supongamos ahora que C es un grupo y $f : A \to C$, $g : B \to C$ son morfismos de grupos. Pongamos $[f, g] : A \times B \to C$ dada por $[f, g](\emptyset) = e_C$, $[f, g](c_1c_2 \dots c_n) = f(c_1)g(c_2) \dots f(c_n)$ (si suponemos que $c_1 \in A$, $c_2 \in B$, etc., si no intercambiamos f y g). Entonces es fácil verificar (lo dejamos como ejercicio) que $[f, g]$ es el único morfismo de grupos tal que $[f, g] \circ j_A = f$, $[f, g] \circ j_B = g$. Luego $(A * B, j_A, j_B)$ es el coproducto de A y B en Grp.

Las nociones de producto y coproducto pueden generalizarse a una familia arbitraria de objetos:

Definición **11.** *Si $\{A_k\}_{k \in K}$ es una familia de objetos indexada por un conjunto K, un* ***producto*** *de $\{A_k\}_{k \in K}$ es un objeto $\prod_{k \in K} A_k$ junto con una familia de morfismos $\left\{\pi_j : \prod_{k \in K} A_k \to A_j\right\}_{j \in K}$ que verifican la siguiente propiedad universal:*

- *para todo objeto C y para toda familia de morfismos $\{f_k : C \to A_k\}_{k \in K}$, existe un único morfismo*

$$\langle f_k \rangle_{k \in K} : C \to \prod_{k \in K} A_k$$

tal que para cada $j \in K$, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[d, dashed, "\exists! \langle f_k \rangle_{k \in K}"'] \arrow[dr, "f_j"] & \\ \prod_{k \in K} A_k \arrow[r, "\pi_j"'] & A_j \end{tikzcd} \tag{9}$$

Un ***coproducto*** *de $\{A_k\}_{k \in K}$ es un objeto $\bigoplus_{k \in K} A_k$ junto con una familia de morfismos $\left\{i_j : A_j \to \bigoplus_{k \in K} A_k\right\}_{j \in K}$ que verifican la siguiente propiedad universal:*

- *Para todo objeto C y para toda familia de morfismos $\{f_k : A_k \to C\}_{k\in K}$, existe un único morfismo*

$$[f_k]_{k\in K} : \bigoplus_{k\in K} A_k \to C$$

tal que para cada $j \in K$, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} A_j \arrow[r, "i_j"] \arrow[dr, "f_j"'] & \bigoplus_{k\in K} A_k \arrow[d, dashed, "\exists! [f_k]_{k\in K}"] \\ & C \end{tikzcd}$$

Ejemplo **29.** Encontremos un producto arbitrario en Set. Si tenemos dos conjuntos A_1 y A_2, ya vimos en el Ejemplo 19 que el producto de A_1 y A_2 coincide con el producto cartesiano usual junto con las proyecciones canónicas. Es fácil verificar que esta construcción puede generalizarse a una familia finita de conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ cuyo producto es el conjunto

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \,:\, a_i \in A_i,\ \forall\, i = 1, \ldots, n\}$$

junto con las proyecciones $\pi_i : A_1 \times \cdots \times A_n \to A_i$, $\pi_i(a_1, \ldots, a_n) = a_i$. Con una prueba análoga a las anteriores puede verse también que si $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una familia numerable de conjuntos, su producto es

$$\prod_{k\in\mathbb{N}} A_k = \{(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \,:\, a_k \in A_k\}$$

y las proyecciones son las naturales.

¿Pero qué ocurre si ahora tomamos un conjunto K arbitrario de índices? ¿Cómo podemos definir el producto de una familia de conjuntos indexada por ejemplo por $K = \mathbb{R}$ o $K = \mathbb{C}$? Para poder dar este paso será útil recordar la construcción alternativa del producto que vimos en el Ejemplo 19. En efecto, si $\{A_k\}_{k\in K}$ es una familia de conjuntos indexada por un conjunto K arbitrario, consideremos el conjunto

$$\mathcal{F} = \left\{ h : K \to \bigcup_{k\in K} A_k \,:\, h(k) \in A_k \right\}$$

y sea $\pi_k : \mathcal{F} \to A_k$, $\pi_k(f) = f(k)$. Entonces dado un conjunto C y una familia de morfismos $\{f_k : C \to A_k\}_{k\in K}$, la función

$$\langle f_k \rangle_{k\in K}(c) = h : C \to \prod_{k\in K} A_k \,/\, h(k) = f_k(c)$$

es la única función que hace conmutativo el diagrama 9.

Ejemplo **30.** Sea ahora $\{G_k\}_{k\in K}$ una familia de grupos. Pongamos $G = \{f : K \to \cup_{k\in K} G_k \,/\, f(k) \in G_k\}$ el producto de los conjuntos G_k. Daremos a este conjunto estructura de grupo. Si $f, g \in G$ ponemos

$$f * g(k) = f(k)g(k)$$

Luego si $f, g, h \in G$,

$$(f * g) * h(k) = (f * g)(k)h(k) = (f(k)g(k))h(k) = f(k)(g(k)h(k)) = f * (g * h)(k)$$

con lo cual $*$ es asociativa.

Pongamos $e : K \to \cup_{k \in K} G_k$, $e(k) = e_k$ y si $f \in G$, ponemos $f^* : K \to \cup_{k \in K} G_k$, $f^*(k) = f(k)^{-1}$. Entonces para cada $g \in G$,

$$e * g(k) = e(k)g(k) = e_k g(k) = g(k), \quad g * e(k) = g(k)e(k) = g(k)e_k = g(k)$$

con lo cual e es el elemento neutro de G. Además

$$f * f^*(k) = f(k)f(k)^{-1} = e_k = e(k), \quad f^* * f(k) = f(k)^{-1}f(k) = e_k = e(k)$$

con lo cual todo elemento f de G admite un inverso f^*. Concluimos que $(G, *)$ es un grupo.

Cosideremos ahora las funciones $\pi_k : G \to G_k$, $\pi_k(f) = f(k)$. Entonces

$$\pi_k(f * g) = f * g(k) = f(k)g(k) = \pi_k(f)\pi_k(g)$$

con lo cual π_k es un morfismo de grupos. A partir de aquí no es dificil verificar que $(G, \{\pi_k\}_{k \in K})$ verifica la propiedad universal del producto en Grp.

4. Ecualizadores y coecualizadores

Muchos problemas matemáticos pueden modelarse a través del conjunto de soluciones de una ecuación. El caso más simple es aquel en el que intervienen dos funciones $f, g : X \to Y$, y se desea hallar el conjunto

$$S = \{x \in X \,:\, f(x) = g(x)\}$$

Por ejemplo, si $f : G \to H$ es un homomorfismo de grupos, entonces $\ker(f)$ es un conjunto de este tipo: basta considerar el homomorfismo trivial $g : G \to H$ tal que $g(x) = e_H$ para cada $x \in X$.

El conjunto S se denomina *ecualizador* de las funciones f y g. Nos interesa definir un concepto análogo para dos morfismos entre objetos de una categoría cualquiera. Pero como los objetos de una categoría no tienen por qué se conjuntos, la definición del conjunto S no tiene sentido en muchos casos, por lo tanto, una vez más, debemos caracterizarlo a partir de alguna propiedad universal que involucre estos objetos y estos morfismos.

Observemos que como $S \subseteq X$, podemos considerar la inclusión $i : S \to X$. Entonces i verifica que $f \circ i = g \circ i$. Supongamos ahora que tenemos un conjunto Z y una función $h : Z \to X$ tal que $f \circ h = g \circ h$. Esto implica que $h(z) \in S$ para cada $z \in Z$, y por lo tanto podemos definir una nueva función $\tilde{h} : Z \to S$ (simplemente restringiendo el codominio de Z) que verifica que $i \circ \tilde{h} = h$, es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "i"] & X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \\
Z \arrow[u, dashed, "\tilde{h}"] \arrow[ur, "h"'] & &
\end{tikzcd}$$

Claramente $\tilde{h}$ es la única función que hace conmutativo el diagrama anterior, pues si $\tilde{h}' : Z \to S$ es tal que $i \circ \tilde{h}' = h$, entonces $\tilde{h}'(z) = h(z) = \tilde{h}(z)$ para cada $z \in Z$.

Con esta idea en mente, definiremos a continuación el ecualizador de dos morfismos en una categoría arbitraria:

Definición **12.** *El* ***ecualizador*** *de dos morfismos $f, g : A \to B$ en una categoría $\mathscr{C}$ es un par (X, e) donde X es un objeto de $\mathscr{C}$ y $e : X \to A$ es un morfismo de $\mathscr{C}$ tal que:*

- $f \circ e = g \circ e$
- *para todo objeto X' de $\mathscr{C}$ y todo morfismo $e' : X' \to A$ tal que $f \circ e' = g \circ e'$, existe un único morfismo $k : X' \to X$ tal que $e \circ k = e'$*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ X' \arrow[u, dashed, "\exists! k"] \arrow[ur, "e'"'] & & \end{tikzcd}$$

Ejemplo **31.** Como vimos en la motivación inicial, en Set el ecualizador de $f, g : X \to Y$ es el par (S, i) donde $S = \{x \in X \ : \ f(x) = f(y)\}$ e $i : S \to X$ es la inclusión.

En Poset, el ecualizador es similar: si P y P' son posets y $f, g : P \to P'$ son morfismos de posets, entonces $S = \{x \in P \ : \ f(x) = g(x)\}$ es un poset con el orden restringido de P y la inclusión $i : S \to P$ es un morfismo de posets.

Lo mismo ocurre en Mon, puesto que si $f, g : M \to N$ son morfismos de monoides, S es un monoide: en efecto si $x, y \in S$, $f(x * y) = f(x) * f(y) = g(x) * g(y) = g(x * y)$, entonces $x * y \in S$. Además, dado que $f(e_M) = e_N = g(e_N)$, $e_M \in S$. Luego S es un submonoide de M e $i : S \to M$ es un morfismo de monoides.

En todos los casos dejamos como ejercicio verificar que se cumple la propiedad universal.

La noción dual de un ecualizador es un *coecualizador*:

Definición **13.** *El* ***coecualizador*** *de dos morfismos $f, g : A \to B$ en una categoría $\mathscr{C}$ es un par (Y, q), donde Y es un objeto de $\mathscr{C}$ y $q : B \to Y$ es un morfismo de $\mathscr{C}$ tal que:*

- $q \circ f = q \circ g$
- *para todo objeto Y' de $\mathscr{C}$ y todo morfismo $q' : B \to Y'$ tal que $q' \circ f = q' \circ g$, existe un único morfismo $u : Y \to Y'$ tal que $u \circ q = q'$.*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "q'"'] & Y \arrow[d, dashed, "\exists! u"] \\ & & Y' \end{tikzcd}$$

Ejemplo **32.** Sean A, B dos conjuntos y $f, g : A \to B$ dos funciones. Encontraremos su coecualizador en Set.

Observemos que estamos buscando un conjunto Y y una función $q : B \to Y$ tal que $q(f(a)) = q(g(a))$ para cada $a \in A$.

Sea $C = \{(f(a), g(a)) \,:\, a \in A\} \subset B \times B$ y sea $\sim$ la menor relación de equivalencia en B que contiene a C (observemos que $\sim$ se obtiene de intersecar, como subconjuntos de $B \times B$, todas las relaciones de equivalencia que contienen a C). Pongamos $Y = B/\sim$ y sea $q : B \to Y$ la proyección al cociente, esto es, $q(b) = [b]$. Como $C \subset \sim$, resulta $f(a) \sim g(a)$ para cada $a \in A$, y por lo tanto $[f(a)] = [g(a)]$, es decir, $q(f(a)) = q(g(a))$ para cada $a \in A$. Luego q satisface la condición que queríamos.

Si ahora $q' : B \to Y'$ satisface $q' \circ f = q' \circ g$, entonces $q'(f(a)) = q'(g(a))$ para cada $a \in A$. Pongamos enconces

$$u : Y \to Y', \quad u([b]) = q'(b). \tag{10}$$

Debemos probar que u está bien definida, esto es, si $b_1 \sim b_2$, entonces $q'(b_1) = q'(b_2)$. Una vez que hayamos probado esto, es claro que $u \circ q = q'$ y es la única función de Y en Y' que verifica esta propiedad. Por lo tanto (Y, q) será un coecualizador de f, g.

Para ello necesitamos describir explícitamente a $\sim$ en función de C. Observemos primero que como $\sim$ es una relación de equivalencia que contiene a C, debe contener a $\Delta = \{(b, b) \,:\, b \in B\}$ (para que sea reflexiva) y a $C^{-1} = \{(g(a), f(a)) \,:\, a \in A\}$ (para que sea simétrica). Esto es, si ponemos $C^1 = C \cup \Delta \cup C^{-1}$, entonces $C^1 \subset \sim$. Definamos inductivamente

$$C^{i+1} = C^1 \circ C^i = \{(b_1, b_2) \in B \times B \,:\, \exists\, b \in B/(b_1, b) \in C_1 \,\wedge (b, b_2) \in C_i\}$$

Dejamos como ejercicio probar que la composición de relaciones es asociativa, y por lo tanto inductivamente se pueba que

$$C^{i+1} = C^i \circ C = C^k \circ C^j \;\text{ tal que }\; k + j = i + 1. \tag{11}$$

Definamos

$$\mathcal{R} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} C^i$$

Observemos que como $\sim$ es transitiva, debemos tener que $C^i \subset \sim$ para cada $i \in \mathbb{N}$ y por lo tanto $\mathcal{R} \subset \sim$. Veamos que en realidad estos subconjuntos de $B \times B$ son iguales. Como $\sim$ es la menor relación de equivalencia que contiene a C, bastará probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia (que claramente contiene a C). Observemos primero que $\mathcal{R}$ es reflexiva pues contiene a Δ.

Veamos que $\mathcal{R}$ es simétrica. Probaremos inductivamente que $(C^i)^{-1} = C_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Esto es evidente para $i = 1$. Supongamos que es válido para un cierto i. Sea $(b_1, b_2) \in C^{i+1}$. Entonces existe $b \in B$ tal que $(b_1, b) \in C^1$ y $(b, b_2) \in C^i$. Pero entonces $(b, b_1) \in C^1$, y por hipótesis inductiva $(b_2, b) \in C^i$. Luego $(b_2, b_1) \in C^i \circ C = C^{i+1}$ (por (11)).

Finalmente veamos que $\mathcal{R}$ es transitiva. Sean $(b_1, b_2) \in \mathcal{R}$ y $(b_2, b_3) \in \mathcal{R}$ y sean $j, k \in \mathbb{N}$ tal que $(b_1, b_2) \in C^j$, $(b_2, b_3) \in C^k$. Entonces $(b_1, b_3) \in C^j \circ C^k = C^{j+k} \subset \mathcal{R}$.

Probemos entonces que la función u definida en (10) está efectivamente bien definida. Para ello probaremos inductivamente que si $(b_1, b_2) \in C^i$, entonces $q'(b_1) = q'(b_2)$. Para $i = 1$ tenemos tres posibilidades: $b_1 = b_2$

(o sea $b_1, b_2 \in \Delta$), o bien $b_1 = f(a)$ y $b_2 = g(a)$ para algún $a \in A$ ($(b_1, b_2) \in C$) o $b_1 = g(a)$, $b_2 = f(a)$ ($(b_1, b_2) \in C^{-1}$). Si se verifica la primera posibilidad es trivial que $q'(b_1) = q'(b_2)$. Las dos últimas posibilidades son análogas, por lo que probaremos que si $b_1 = f(a)$ y $b_2 = g(a)$, entonces $q'(b_1) = q'(b_2)$. Pero esto es inmediado del hecho que $q' \circ f = q' \circ g$.

Probado el caso base, supongamos que es cierto que para un cierto i, si $(b_1, b_2) \in C^i$ entonces $q'(b_1) = q'(b_2)$. Sea $(b_1, b_2) \in C^{i+1}$. Entonces existe $b \in B$ tal que $(b_1, b) \in C$ y $(b, b_2) \in C^i$. Luego por el caso base $q'(b_1) = q'(b)$ y por hipótesis inductiva $q'(b) = q'(b_2)$. Concluimos que $q'(b_1) = q'(b_2)$ como queríamos probar.

Observemos que en Set un ecualizador tiene asociado una función inyectiva, o sea un monomorfismo, y un coecualizador una función sobreyectiva, o sea un epimorfismo. Esto es válido en cualquier categoría:

Lema **11.** *Sea $\mathscr{C}$ una categoría, A, B objetos en $\mathscr{C}$ y $f, g : A \to B$ dos morfismos en $\mathscr{C}$.*

1. *Si (X, e) es un ecualizador de f y g, entonces $e : X \to A$ es un momorfismo. Si además e es un epimorfismo, entonces es un isomorfismo.*

2. *Si (Y, q) es un coecualizador de f y g, entonces $q : B \to Y$ es un epimorfismo. Si además q es un monomorfismo, entonces es un isomorfismo.*

Ejercicio **2.** *Probar el Lema 11.*

5. Conos, coconos, límites y colímites

En esta última sección presentaremos algunas construcciones universales asociadas a diagramas en una categoría.

Definición **14.** *Sea $\mathscr{C}$ una categoría y $\mathcal{D}$ un diagrama en $\mathscr{C}$. Denotemos por $\operatorname{ob}\mathcal{D}$ los objetos de $\mathscr{C}$ que representan algún nodo de $\mathcal{D}$ y $\operatorname{mor}\mathcal{D}$ los morfismos de $\mathscr{C}$ que representan aristas de $\mathcal{D}$.*

*Un **cono** para $\mathcal{D}$ es un par $(X, \mathcal{F}_{\mathcal{D}})$ donde:*

- *X es un objeto en $\mathscr{C}$.*

- *$\mathcal{F}_{\mathcal{D}}$ es una familia de morfismos de $\mathscr{C}$ formada por un único morfismo $f_D : X \to D$ para cada objeto D de $\operatorname{ob}\mathcal{D}$ tal que si $f : A \to B$ es un morfismo en $\operatorname{mor}\mathcal{D}$, el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "f_A"'] \arrow[dr, "f_B"] & \\ A \arrow[rr, "f"] & & B \end{tikzcd}$$

*Un **cocono** para $\mathcal{D}$ es un par $(Y, \mathcal{G}_{\mathcal{D}})$ donde:*

- *Y es un objeto en $\mathscr{C}$.*

- *$\mathcal{G}_{\mathcal{D}}$ es una familia de morfismos de $\mathscr{C}$ formada por un morfismo $g_D : D \to Y$ para cada objeto D de $\operatorname{ob}\mathcal{D}$ tal que si $f : A \to B$ es un morfismo en $\operatorname{mor}\mathcal{D}$, el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g_A"'] & & B \arrow[dl, "g_B"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

Ejemplo **33.** Para el diagrama $\mathcal{D}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

un cono está unívocamente determinado por cualquier morfismo $f_A : X \to A$ tal que

$$g \circ f_A = f \circ f_A$$

En efecto, como los dos diagramas siguientes deben ser conmutativos:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f_A"] \arrow[rr, bend left, "f_B"] & A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "f_A"] \arrow[rr, bend left, "f_B"] & A \arrow[r, "g"] & B \end{tikzcd}$$

si $(X, \{f_A, f_B\})$ es un cono, necesariamente $f_B = f \circ f_A = g \circ f_A$.

Ejemplo **34.** Para el diagrama $\mathcal{D}$:

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

un cono es $(X, \mathcal{F}_{\mathcal{D}})$ con $\mathcal{F}_{\mathcal{D}} = \{f_A : X \to A, f_B : X \to B, f_C : X \to C\}$ que completan $\mathcal{D}$ a un cuadrado **conmutativo**

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f_B"] \arrow[d, "f_A"'] \arrow[dr, dashed, "f_C"] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

es decir, $f \circ f_A = f_C$, $g \circ f_B = f_C$.

Observemos que conociendo $\mathcal{D}$, f_A y f_B podemos deducir f_C.

Consideremos un caso particular de $\mathcal{D}$ en la categoría Set:

$$\begin{tikzcd} & A = \mathbb{R} \arrow[d, "g"] \\ B = \mathbb{R} \arrow[r, "f"'] & C = \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

donde $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$. Un cuadrado conmutativo se obtiene poniendo $f_B(x) = x^2$, $f_A(x) = x^3$, luego un cono para $\mathcal{D}$ es $(\mathbb{R}, \{f_A, f_B, f_C\})$, donde $f_C(x) = x^6$. Pero tambien podemos considerar el cono $(\mathbb{R}, \{f'_A, f'_B, f'_C\})$ poniendo $f'_B(x) = x^4$, $f'_A(x) = x^6$, $f'_C(x) = x^{12}$. En este caso, el objeto X del cono es el mismo, aunque varían los morfismos. Un tercer cono es $(\mathbb{N}, f''_A, f''_B, f''_C)$, donde las leyes de f''_A, f''_B, f''_C pueden tomarse iguales a cualquiera de las dos opciones anteriores.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[r, "f_B(x)=x^2"] \arrow[d, "f_A(x)=x^3"'] \arrow[dr, dashed, "f_C"] & \mathbb{R} \arrow[d, "g(x)=x^3"] \\
\mathbb{R} \arrow[r, "f(x)=x^2"'] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[r, "f'_B(x)=x^4"] \arrow[d, "f'_A(x)=x^6"'] \arrow[dr, dashed, "f'_C"] & \mathbb{R} \arrow[d, "g(x)=x^3"] \\
\mathbb{R} \arrow[r, "f(x)=x^2"'] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{N} \arrow[r, "f''_B(x)=x^2"] \arrow[d, "f''_A(x)=x^3"'] \arrow[dr, dashed, "f''_C"] & \mathbb{R} \arrow[d, "g(x)=x^3"] \\
\mathbb{R} \arrow[r, "f(x)=x^2"'] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}
$$

En este caso vemos que los conjuntos $X = \mathbb{R}$ y $X' = \mathbb{N}$ que definen ambos conos no sólo son distintos, sino que ni siquiera son isomorfos (dado que no hay ninguna biyección entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{N}$). Luego el concepto de cono no es único salvo isomorfismos.

Definición **15.** *Sea $\mathscr{C}$ una categoría y $\mathcal{D}$ un diagrama en $\mathscr{C}$. Un* ***límite*** *para $\mathcal{D}$ es un cono $(X, \mathcal{F}_{\mathcal{D}})$ que verifica la siguiente propiedad universal:*

- *para todo cono $(X', \mathcal{F}'_{\mathcal{D}})$ de $\mathcal{D}$, existe un único morfismo $k : X' \to X$ tal que el siguiente diagrama conmuta para cada objeto D en $\operatorname{ob}\mathcal{D}$:*

$$
\begin{tikzcd}
X' \arrow[rr, dashed, "k"] \arrow[dr, "f'_D"'] & & X \arrow[dl, "f_D"] \\
& D &
\end{tikzcd}
$$

Un ***colímite*** *para $\mathcal{D}$ es un cocono $(Y, \mathcal{G}_{\mathcal{D}})$ que verifica la siguiente propiedad universal:*

- *para todo cocono $(Y', \mathcal{G}'_{\mathcal{D}})$ de $\mathcal{D}$, existe un único morfismo $k : X \to X'$ tal que el siguiente diagrama conmuta para cada objeto D en $\operatorname{ob}\mathcal{D}$:*

$$
\begin{tikzcd}
Y \arrow[rr, dashed, "k"] & & Y' \\
& D \arrow[ul, "g_D"] \arrow[ur, "g'_D"'] &
\end{tikzcd}
$$

Ejemplo **35.** Si $\mathcal{D}$ es un diagrama sin flechas formado por dos objetos A y B, entonces un límite para $\mathcal{D}$ es un producto entre A y B:

$$
\begin{tikzcd}
& X' \arrow[d, dashed, "\exists! k"] \arrow[ddl, bend right, "f'_A"'] \arrow[ddr, bend left, "f'_B"] & \\
& X \arrow[dl, "\pi_A"'] \arrow[dr, "\pi_B"] & \\
A & & B
\end{tikzcd}
$$

Este ejemplo muestra que no siempre existen límites para cualquier diagrama. Más generalmente, para un diagrama sin flechas $\mathcal{D}$ (formado por una colección arbitraria de objetos) un límite para $\mathcal{D}$ es un producto entre sus objetos.

De manera análoga, un colímite para un diagrama sin flechas es un coproducto entre sus objetos.

Ejemplo **36.** Continuando con el Ejemplo 33, es imediato verificar que un límite para el diagrama $\mathcal{D}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

es un ecualizador de f y g. Análogamente, un colímite para $\mathcal{D}$ es un coecualizador para f y g.

Ejemplo **37.** Ya hemos visto que para el diagrama $\mathcal{D}$

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

un cono es $(X, \mathcal{F}_{\mathcal{D}})$ con $\mathcal{F}_{\mathcal{D}} = \{f_A : X \to A, f_B : X \to B, f_C : X \to C\}$ que completan $\mathcal{D}$ a un cuadrado conmutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f_B"] \arrow[d, "f_A"'] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

donde $f_C = g \circ f_B = f \circ f_A$. En este caso, $(X, \mathcal{F}_{\mathcal{D}})$ es un límite si para cada objeto X' y cada par de morfismos $f'_B : X' \to B$, $f'_A : X' \to A$ tal que $g \circ f'_B = f \circ f'_A$, existe un único morfismo $k : X' \to X$ tal que $f'_A = f_A \circ k$, $f'_B = f_B \circ k$:

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[dr, dashed, "k"] \arrow[drr, bend left, "f'_B"] \arrow[ddr, bend right, "f'_A"'] & & \\ & X \arrow[r, "f_B"] \arrow[d, "f_A"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

En este caso, el límite $(X, \mathcal{F}_{\mathcal{D}})$ recibe el nombre de **pullback** de los morfismso $f : A \to C$, $g : B \to C$.

Si ahora consideramos el diagrama "dual", o sea $\mathcal{D}'$:

$$\begin{tikzcd} & B \\ A & C \arrow[l, "f"] \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

un colímite para$\mathcal{D}'$ se denomina un **pushout** de f y g, consiste de dos morfismos $i_B : B \to Y$, $i_A : A \to Y$ que hacen conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} Y & B \arrow[l, "i_B"'] \\ A \arrow[u, "i_A"] & C \arrow[l, "f"] \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

y por lo tanto determinan un cocono $(Y, \{i_A, i_B, i_C\})$, donde $i_C = i_B \circ g = i_A \circ f$, tal que para cada Y' y cada par de morfismos i'_A, i'_B tales que $i'_B \circ g = i'_A \circ f$, existe un único morfismo $k : Y \to Y'$ tal que $k \circ i_A = i'_A$, $k \circ i_B = i'_B$:

$$\begin{tikzcd} Y' & & \\ & Y \arrow[ul, dashed, "k"] & B \arrow[l, "i_B"'] \arrow[ull, bend right, "i'_B"'] \\ & A \arrow[u, "i_A"] \arrow[uul, bend left, "i'_A"] & C \arrow[l, "f"] \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

Ejemplo **38.** Sea $\mathcal{D}$ un diagrama en una categoría $\mathscr{C}$. Denotemos por $\mathrm{Cone}(\mathcal{D})$ una categoría cuyos objetos son los conos para $\mathcal{D}$ y los morfismo de $\mathrm{Cone}(\mathcal{D})$ son morfismos de $\mathscr{C}$ tales que si $(X, \mathcal{F}_{\mathcal{D}})$ y $(X', \mathcal{F}'_{\mathcal{D}})$ son dos conos para $\mathcal{D}$, $k : X \to X'$ es un morfismo en $\mathrm{Cone}(\mathcal{D})$ si el siguiente diagrama es conmutativo para cada $D \in \mathcal{D}$:

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[rr, dashed, "k"] \arrow[dr, "f'_D"'] & & X \arrow[dl, "f_D"] \\ & D & \end{tikzcd}$$

Dejamos como ejercicio probar que $\mathrm{Cone}(\mathcal{D})$ es efectivamente una categoría. Entonces es claro de la definición de límite, que un límite para $\mathcal{D}$ es un objeto terminal en $\mathrm{Cone}(\mathcal{D})$.

De manera similar puede definirse la categoría de coconos para $\mathcal{D}$ de modo que un colímite para $\mathcal{D}$ es un objeto inicial de esta categoía.

Como los objetos iniciales y terminales en una categoría son únicos salvo isomorfismos, a partir del análisis del Ejemplo 38 tenemos que:

Lema **12.** *Si un diagrama admite un límite o un colímite, éstos son únicos salvo isomorfismos.*

6. Exponenciales - Categorías cartesianas cerradas.

Para finalizar con los conceptos básicos asociados a los objetos y morfismos de una categoría introduciremos la noción de *exponenciales*. El objetivo es definir un objeto B^A a partir de dos objetos A y B en una categoría $\mathscr{C}$.

Comencemos analizando la categoría Set. Si tenemos un conjunto B, podemos definir el conjunto B^A como el producto

$$B^A = \prod_{a \in A} B_a = \{f : A \to B\} = \mathrm{Hom}(A, B),$$

poniendo $B_a = B$ para cada $a \in A$ (ver Ejemplo 29).

Esta construcción sin embargo no puede generalizarse a cualquier otra categoría. En primer lugar, porque queremos definir B^A para objetos arbitrarios A, B de $\mathscr{C}$, por lo tanto el producto $\prod_{a \in A} B_a$, poniendo $B_a = B$, sólo tiene sentido en una categoría $\mathscr{C}$ cuyos objetos son conjuntos (además que $\mathscr{C}$ debe admitir productos arbitrarios). Podemos pensar entonces en definir B^A como $\mathrm{Hom}(A, B)$, copiando lo que ocurre en Set. Pero aquí tenemos el problema que $\mathrm{Hom}(A, B)$ no necesariamente es un objeto de $\mathscr{C}$, algo que sí ocurre en Set.

Por lo tanto intentaremos encontrar alguna propiedad universal que nos permita caracterizar B^A en Set y así extender esta definición a categorías arbitrarias. Recordemos que B^A, al ser un producto, está dado además por la familia de funciones $\{\pi_a : B^A \to B\}_{a \in A}$ tales que $\pi_a(f) = f(a)$ para cada $a \in A$. Ahora bien, podemos reunir toda la información que nos brinda la familia anterior de funciones en una única función, que llamaremos eval y que definimos como

$$\mathrm{eval} : B^A \times A \to B, \quad \mathrm{eval}(f, a) = f(a) = \pi_a(f).$$

Por otra parte, la propiedad universal del producto nos dice que para cada familia de morfismos $\{f_a : C \to B\}_{a \in A}$, existe una única función $\tilde{g} = \langle f_a \rangle_{a \in A} : C \to B^A$ tal que para cada $x \in A$, $\pi_x \circ \tilde{g} = f_x$. Por lo tanto si ponemos

$$\tilde{g} \times \mathrm{id}_A : C \times A \to B^A \times A, \quad \tilde{g} \times \mathrm{id}_A(c, a) = (\tilde{g}(c), a)$$

tenemos que

$$\mathrm{eval} \circ (\tilde{g} \times \mathrm{id}_A)(c, x) = \mathrm{eval}(\tilde{g}(c), x) = \pi_x(\tilde{g}(c)) = f_x(c).$$

Finalmente observemos que considerar una familia de funciones $\{f_a : C \to B\}_{a \in A}$ es equivalente a considerar una única función $g : C \times A \to B$. En efecto, la familia $\{f_a\}_{a \in A}$ permite definir la función $g(c, a) = f_a(c)$, y recíprocamente, dada $g : C \times A \to B$, g define la familia $\{f_a : C \to B\}_{a \in A}$ poniendo $f_a(c) = g(c, a)$.

En conclusión, tenemos que B^A está caracterizado por la siguiente propiedad universal: existe una función $\mathrm{eval} : B^A \times A \to B$ tal que para cada conjunto C y cada función $g : C \times A \to B$, existe una única función $\tilde{g} : C \to B^A$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} B^A & B^A \times A \arrow[r, "\mathrm{eval}"] & B \\ C \arrow[u, dashed, "\tilde{g}"] & C \times A \arrow[u, dashed, "\tilde{g} \times \mathrm{id}_A"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Definición **16.** *Sea $\mathscr{C}$ una categoría con productos finitos y sean A, B dos objetos de $\mathscr{C}$. Un objeto B^A es un* ***exponencial*** *si existe un morfismo $\mathrm{eval} : B^A \times A \to B$ tal que para cada conjunto C y cada morfismo*

$g : C \times A \to B$, existe un único morfismo $\tilde{g} : C \to B^A$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
B^A & B^A \times A \arrow[r, "\mathrm{eval}"] & B \\
C \arrow[u, dashed, "\tilde{g}"] & C \times A \arrow[u, dashed, "\tilde{g}\times \mathrm{id}_A"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

El morfismo $\tilde{g}$ se denota $\mathrm{curry}(g)$. Si para cualquier par de objetos A, B de $\mathscr{C}$ existe un exponencial, $\mathscr{C}$ se dice una categoría con exponenciales.

Ejemplo **39.** Ya vimos que Set es una categoría con exponenciales. Consideremos ahora la categoría Poset. Sea $(A, \preceq_A)$, $(B, \preceq_B)$ dos objetos en Poset y pongamos

$$B^A = \{f : A \to B \,:\, f \text{ es un morfismo de posets } \} = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Poset}}(A, B).$$

Definimos un orden $\preceq_m$ en B^A por

$$f \preceq_m g \iff f(a) \preceq_B g(a) \, \forall \, a \in A.$$

Es fácil ver que $\preceq_m$ es un orden parcial en B^A y por lo tanto $(B^A, \preceq_m)$ es un objeto en Poset.

Cosideremos la función $\mathrm{eval} : B^A \times A \to B$, tal que $\mathrm{eval}(f, a) = f(a)$. Debemos probar que eval es un morfismo de Poset, es decir que es un morfismo de orden de $(B^A \times A, \preceq)$ en $(B, \preceq_B)$, donde $\preceq$ es el orden producto de $\preceq_m$ y $\preceq_A$, esto es,

$$(f, a) \preceq (f', a') \iff f \preceq_m f' \text{ y } a \preceq_A a'.$$

Tomemos entoces $(f, a), (f', a') \in B^A \times A$ tales que $(f, a) \preceq (f', a')$. Entonces en particular $a \preceq_A a'$, y como f es un morfismo de orden tendremos $f(a) \preceq_B f(a')$. Por otra parte, $f \preceq_m f'$, entonces $f(a') \preceq_B f'(a')$. Luego

$$f(a) \preceq_B f(a') \preceq_B f'(a') \implies \mathrm{eval}(f, a) \preceq_B \mathrm{eval}(f', a').$$

Para terminar de probar que B^A es efectivamente un exponencial en Poset, nos falta encontrar el curry de un morfismo de orden arbitrario $g : (C \times A) \to B$. Sea $(C, \preceq_C)$ un poset y consideremos $(C \times A)$ con el orden producto $\preceq' = \preceq_C \times \preceq_A$. Pongamos

$$\tilde{g} : C \to B^A, \;\; \tilde{g}(c) = f_c : A \to B, \; / \;\; f_c(a) = g(c, a).$$

Observemos que $\tilde{g}$ está bien definida, es decir, que para cada $c \in C$, $f_c : A \to B$ es efectivamente un morfismo de orden. En efecto, para cada $c \in C$ fijo, si $a \preceq_A a'$, entonces $(c, a) \preceq' (c, a')$ y como g es un morfismo de orden, $g(c, a) \preceq_B g(c, a')$, o sea, $f_c(a) \preceq_B f_c(a')$.

Por otra parte,

$$\mathrm{eval} \circ (\tilde{g} \times \mathrm{id}_A)(c, a) = \mathrm{eval}(\tilde{g}(c), a) = \mathrm{eval}(f_c, a) = f_c(a) = g(c, a).$$

Por lo tanto para ver que $\tilde{g} = \mathrm{curry}(g)$ sólo nos queda probar que $\tilde{g}$ es un morfismo de orden. Sean entonces $c, c' \in C$ tales que $c \preceq_C c'$. Entonces para $a \in A$ arbitrario tenemos que $(c, a) \preceq' (c', a)$ y por lo tanto

$$f_c(a) = g(c, a) \preceq_B g(c', a) = f_{c'}(a) \quad \Longrightarrow \quad f_c \preceq_m f_{c'}.$$

Dejamos como ejercicio probar la unicidad de $\tilde{g}$ (que es inmediata de la definición). Concluimos que Poset es una categoría con exponenciales.

Para finalizar esta unidad, introduciremos el concepto de *categoría cartesiana cerrada*.

Definición **17.** *Sea $\mathscr{C}$ una categoría. Decimos que $\mathscr{C}$ es una* ***categoría cartesiana cerrada (CCC)*** *si $\mathscr{C}$ tiene objeto terminal y es una categoría con productos y con exponenciales.*

Ejemplo **40.** Set es una categoría cartesiana cerrada: todo singulete $\{x\}$ es un objeto terminal, y Set es una categoría con productos y exponenciales. Poset también es una categoría cartesiana cerrada: todo conjunto de cardinal 1 con el orden trivial es un poset que es un objeto terminal en Poset. Además como vimos en los ejemplos anteriores, Poset es una categoría con productos y exponenciales.

Ejemplo **41.** Sea B un álgebra de Boole y sea $\mathscr{C}_B$ la categoría asociada. Como B es un retículo, $\mathscr{C}_B$ es una categoría con productos (Ejemplo 21). Además B es un retículo acotado y por lo tanto 1 es un objeto terminal de $\mathscr{C}_B$ (Ejemplo 17). Veamos que $\mathscr{C}_P$ es una categoría con exponenciales. Sean $x, y \in B = \mathrm{ob}\,\mathscr{C}_B$. Recordemos que B es un retículo complementado, por lo tanto podemos considerar $y^c \in B$ tal que $y \wedge y^c = 0$, $y \vee y^c = 1$. Pongamos

$$x^y := y^c \vee x.$$

Veamos que efectivamente x^y es un exponencial en $\mathscr{C}_B$. Recordemos que para cualquier par de objetos a, b en $\mathscr{C}_B$ existe un morfismo $f \in \mathrm{Hom}(a, b)$ si y sólo si $a \preceq b$, en cuyo caso $f = (a, b)$. Por lo tanto hay un único morfismo posible $\mathrm{eval} : x^y \times y \to x$, y éste existe sí y sólo si $x^y \times y \preceq x$. Pero como B es un retículo distributivo,

$$x^y \times y = x^y \wedge y = (y^c \vee x) \wedge y = (y^c \wedge y) \vee (x \wedge y) = 0 \vee (x \wedge y) = x \wedge y \preceq x.$$

Consideremos ahora $z \in B = \mathrm{ob}\,\mathscr{C}_B$ tal que existe un morfismo $g : z \times y \to x$, es decir, tal que

$$z \wedge y \preceq x \quad \Longleftrightarrow \quad (z \wedge y) \vee x = x \tag{12}$$

Nuevamente, el único candidato a $\mathrm{curry}(g) : z \to x^y$ es el morfismo (z, x^y) que existe si y sólo si $z \preceq x^y$. En efecto:

$$\begin{aligned} z \vee x^y &= z \vee (y^c \vee x) = (z \wedge 0) \vee (y^c \vee x) = (z \wedge (y \vee y^c)) \vee (y^c \vee x) \\ &= [(z \wedge y) \vee (z \wedge y^c)] \vee (y^c \vee x) = (z \wedge y) \vee [(z \wedge y^c) \vee (y^c \vee x)] \\ &= (z \wedge y) \vee (y^c \vee x) = [(z \wedge y) \vee x] \vee y^c = x \vee y^c \\ &= x^y \end{aligned}$$

Finalmente, el morfismo producto $g \times \mathrm{id}_y$ está dado por $(z \wedge y, x^y \wedge y)$ y verifica que

$$\mathrm{eval} \circ (\mathrm{curry}(g) \times \mathrm{id}_y) = (x^y \wedge y, x) \circ (z \wedge y, x^y \wedge y) = (z \wedge y, x) = g.$$

Concluimos que $\mathscr{C}_B$ es una categoría cartesiana cerrada.