Álgebra Lineal 2020 (LCC - LM - PM)
Cap.3- Ortogonalidad (1era. Parte)[1]

Graciela Nasini - Yanina Lucarini - Eduardo Martinez

{nasini,lucarini,eduardom}@fceia.unr.edu.ar

[1] [1] *Linear Algebra and its applications*, G. Strang. [2] *Notas de Clase*, E. Mancinelli (2019)

Vectores ortogonales

En cualquier espacio vectorial (de dimensión finita n), una base nos permite pensar cualquier vector como una n-upla de escalares.

En los primero cursos de matemática, aprendimos a expresar entes geométricos (curvas, superficies, volúmenes) en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ en términos algebraicos. Esto fue posible a partir de la relación $1-1$ entre un punto de $\mathbb{R}^2$ (o $\mathbb{R}^3$) y un par (o terna) ordenado, correspondientes a la descomposición de su **vector posición** en términos de los los **versores canónicos** $\vec{i}, \vec{j}$ (y $\vec{k}$).

En la terminología de espacios vectoriales, los **versores canónicos** $\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$ y $\vec{k} = (0,0,1)$ son una base de $\mathbb{R}^3$ y cualquier punto P tiene asociado su representación (x,y,z) en esta base.

Pero sabemos que $\mathbb{R}^3$ tiene infinitas bases. Por ejemplo, $(1,1,1)$, $(1,1,0)$ y $(1,0,0)$ también forman una base de $\mathbb{R}^3$. Nos preguntamos por qué trabajamos siempre con la base de versores canónicos y no con cualquier otra.

Vectores ortogonales

La base de los versores canónicos en $\mathbb{R}^n$ tiene dos virtudes: sus vectores son perpendiculares y su longitud es 1. Esto es lo que se denomina una *base ortonormal* (*vectores ortogonales y de norma 1*).

Las ideas de ortogonalidad y ortonormalidad de las bases son parte de los conceptos fundacionales del Álgebra Lineal: necesitamos poder hacer los cálculos más sencillos (sic Strang).

Queremos extender esta idea de *perpendicularidad entre vectores* y *longitud de un vector* a cualquier espacio vectorial.

¿Cómo determinamos que dos vectores son perpendiculares en $\mathbb{R}^3$?.¿Cómo calculamos la longitud de un vector en $\mathbb{R}^3$? (Idem $\mathbb{R}^2$).

Ambas respuestas pueden ser dadas en función del producto escalar entre vectores. Recordemos:
Dados $\vec{u}, \vec{v}$ son dos vectores ("geométricos") de $\mathbb{R}^3$, su producto escalar es

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos(\vec{u}\,^\wedge \vec{v}).$$

Así, si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son no nulos y perpendiculares, su producto escalar es cero y recíprocamente.

Vectores ortogonales

Sabemos además que si $u = (u_1, u_2, u_3)$ y $v = (v_1, v_2, v_3)$ son las representaciones de $\vec{u}, \vec{v}$ en la base canónica, entonces

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u^T v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3,$$

lo cual es mucho más sencillo de calcular.

Por otro lado, gracias a Pitágoras, sabemos que $|\vec{u}|^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$ o, equivalentemente, $|\vec{u}|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = u^T u$.

Para poder extender entonces la idea de *ortogonalidad* y *norma* a cualquier espacio vectorial, debemos tener definido un producto escalar o *producto interno*.

Definición: Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). Un producto interno sobre V es una función $\langle ., . \rangle$ que a cada par de vectores $u, v \in V$ le asigna un escalar $\langle u, v \rangle \in \mathbb{K}$ y verifica las siguientes propiedades para todo $\alpha \in \mathbb{K}$, $u, v, w \in V$ (recordar: $\bar{z} =$ conjugado de z):

(1) $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$,
(2) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$,
(3) $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$,
(4) $\langle u, u \rangle \geq 0$,
(5) $\langle u, u \rangle = 0 \iff u = 0$

Producto interno

Ejercicio:

1. $\langle u, 0\rangle = \langle 0, v\rangle = 0$
2. $\langle u, \alpha v\rangle = \overline{\alpha}\,\langle u, v\rangle$.
3. $\langle u, v + w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle$.

Ejemplos:

1. Recordemos que $\mathbb{C}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Definiendo $\langle z, w\rangle = z\bar{w}$ para todo $z, w \in \mathbb{C}$, donde $\bar{w}$ es el conjugado de w, es fácil probar que $\langle ., .\rangle$ es un producto interno en $\mathbb{C}$.

   Más aún, si pensamos en el espacio vectorial $\mathbb{C}^n$ y con $\bar{z}$ indicamos la n-upla de números complejos correspondientes a los conjugados de las componentes de $z \in \mathbb{C}^n$, se puede verificar que $\langle z, w\rangle = z\bar{w}$ es un producto interno en $\mathbb{C}^n$. Se conoce como *producto interno canónico*.
2. Ya conocemos el producto interno *canónico* en $\mathbb{R}^2$. Sin embargo, podemos definir otros. Para $u = (u_1, u_2)$ y $v = (v_1, v_2)$ definimos $\langle u, v\rangle = u_1 v_1 - u_2 v_1 - u_1 v_2 + 4u_2 v_2$.

   Probemos que $\langle . , .\rangle$ es realmente un producto interno:

(1), (2), (3) Son sencillas de verificar (ejercicio).

(4) $\langle u, u\rangle = u_1^2 - 2u_2 u_1 + 4u_2^2 = (u_1 - u_2)^2 + 3u_2^2 \geq 0$.

(5) $\langle u, u\rangle = 0 \iff (u_1 - u_2)^2 + 3u_2^2 = 0 \iff$
$\iff (u_1 - u_2)^2 = 0 \wedge u_2^2 = 0 \iff u_2 = 0 \wedge u_1^2 = 0 \iff u = 0$.

Producto interno

Ejemplos:(continuación)

3. Sea V el espacio vectorial de los polinomios sobre $\mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$, de grado a lo sumo n y $t_0, t_1, \ldots, t_n$ escalares distintos. Para $p; q \in V$ definimos

$$\langle p, q \rangle = \sum_{i=1}^{n} p(t_i)\, \bar{q}(t_i).$$

   Ejercicio: Probar que es un producto interno. (Ayuda: recordar que si un polinomio de grado a lo sumo n tiene $n+1$ raíces distintas, ese polinomio es el polinomio nulo.)

4. Sea V el espacio vectorial de las funciones reales continuas en el intervalo $[0, 1]$. Para $f; g \in V$ sea

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

   Ejercicio: Probar que es un producto interno. (Ayuda: recordar que si una función contínua es positiva en un punto x_0, por el teorema de conservación de signo será positiva en un todo un entorno de x_0.)

Norma

Como habíamos mencionado, el producto interno en un espacio vectorial nos permite definir el concepto de vectores *perpendiculares u ortogonales* y también el concepto de *norma* de un vector:

Definición: Sea V un espacio vectorial con un producto interno $\langle ., . \rangle$. Para todo $u, v \in V$:

1. decimos que u es *perpendicular u ortogonal a* v, y lo notamos $u \perp v$, si $\langle u, v \rangle = 0$.
2. La *norma de* u (inducida por $\langle ., . \rangle$) se denota $\|u\|$ y su valor es $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$. Equivalentemente, $\|u\|^2 = \langle u, u \rangle$ y $\|u\| \geq 0$.

Observemos que el producto escalar de dos vectores x, y en $\mathbb{R}^2$ o en $\mathbb{R}^3$, (definido en asignaturas anteriores) puede ser expresado como $x^T y$.
Es fácil ver que el producto escalar es un producto interno en estos espacios vectoriales.
Con este producto interno la norma de un vector (en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$) es *su longitud* según la geometría euclídea y el Teorema de Pitágoras.
En efecto, si $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

Norma

Es sabido que la norma euclídea en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, verifica las siguientes propiedades:

1. $\|x\| \geq 0$
2. $\|x\| = 0 \iff x = 0$
3. $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (desigualdad triangular).

Otra propiedad muy importante que satisface esta norma es

5. $| \langle x, y \rangle | \leq \|x\| \, \|y\|$ (desigualdad de Cauchy-Swartz).

Si recordamos que en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ el producto escalar verificaba $\langle x, y \rangle = \|x\| \, \|y\| \cos(x^\wedge y)$, la desigualdad de Cauchy-Swartz es claramente válida.

Lo interesante es que *toda norma proveniente de un producto escalar en cualquier espacio vectorial* cumple con estas cuatro propiedades.

Lema: En todo espacio vectorial con un producto interno la norma por él definida satisface las 5 propiedades presentadas anteriormente.

Prueba: Las propiedades 1., 2. y 3. son inmediatas. Para las dos restantes, precisamos probar primero la 5. y después la 4.

Norma

Prueba (continuación)

5. Debemos probar $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$. Claramente, la desigualdad vale si $x = 0$.
   Sea $x \neq 0$. Construimos $z = y - \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|^2}x$. Es fácil verificar (ejercicio) que
   $$\|z\|^2 = \|y\|^2 - \frac{\langle x, y\rangle^2}{\|x\|^2}.$$
   Como $\|z\|^2 \geq 0$, resulta $\|y\|^2\,\|x\|^2 \geq \langle x, y\rangle^2$. Por lo tanto,
   $$|\langle x, y\rangle| \leq \|y\|\,\|x\|.$$
4. Debemos probar $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. Tenemos
   $$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y\rangle| + \|y\|^2 \leq$$
   $$\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$
   Por lo tanto, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Ángulos en espacios vectoriales

En espacios vectoriales de funciones o matrices, y también en $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 4$, no tenemos el concepto de *ángulo* entre dos vectores no nulos.Sin embargo, la desigualdad de Cauchy-Swartz nos permite definir este concepto en cualquier espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, $x, y \in V$, $x \neq 0$, $y \neq 0$. Por Cauchy-Swartz sabemos que $-1 \leq \frac{\langle x,y \rangle}{\|x\| \|y\|} \leq 1$. Por lo tanto, podemos definir el ángulo entre x e y como

$$x\hat{}y = arccos \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \, \|y\|}.$$

Observar que, con esta definición, tenemos que en cualquier espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con producto interno se verifica $\langle x, y \rangle = \|x\| \, \|y\| \, cos(x\hat{}y)$.

Observación: El *ángulo* (en particular, la ortogonalidad) entre dos vectores no depende de su norma. En efecto, si $x, y \in V$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces, $|\cos(x\hat{}y)| = |\cos((\alpha x)\hat{}(\beta y))|$. (Ejercicio).

Ortogonalidad y lineal independencia

Lema: Sea V un espacio vectorial con producto interno y $W \subset V$ un conjunto vectores no nulos mutuamente ortogonales. Entonces, los vectores de W son vectores l.i..

Prueba: Consideremos una combinación lineal nula de los vectores $v^1, \ldots, v^k$ de W:

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v^i = 0.$$

Para $j \in \{1, \ldots, k\}$, realicemos el producto escalar

$$\left\langle v^j, \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v^i \right\rangle = \sum_{i=1}^{k} \overline{\alpha_i} \left\langle v^j, v^i \right\rangle.$$

Como $v^j \perp v^i$ para todo $i \neq j$, resulta

$$\overline{\alpha_j} \left\langle v^j, v^j \right\rangle = 0.$$

Considerando que $v^j \neq 0$, tenemos que $\alpha_j = 0$ para todo $j \in \{1, \ldots, k\}$. Por lo tanto, los vectores W son l.i..

Ejercicio: La recíproca del lema anterior no es válida.

Ortogonalidad y lineal independencia

Si V es un espacio de dimensión infinita, W en el lema anterior puede ser un conjunto infinito de vectores ortogonales.

Ejemplo:
Sea V el espacio vectorial de las funciones reales continuas en el intervalo $[0,1]$ con el producto interno $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos las funciones

$$f_n(x) = \sqrt{2}\, cos(2\pi nx) \;\;,\;\; g_n(x) = \sqrt{2}\, sen(2\pi nx).$$

Puede probarse que el conjunto $\{f_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{g_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto infinito de vectores ortogonales de V.

Más aún, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\| = \|g_n\| = 1$.

Bases ortonormales

Hemos visto que vectores mutuamente ortogonales son l.i.. Observemos que si V es un espacio vectorial con producto interno $\langle ., . \rangle$ y $\mathcal{B} = \{u^1, \ldots, u^k\}$ es una base de vectores mutuamente ortogonales, la descomposición de cualquier vector en esta base es muy sencilla de calcular.
En efecto, sea $v = \sum_{i=1}^k \alpha_i u^i$. Si realizamos el producto interno de v con cualquiera de los elementos $u^j \in \mathcal{B}$, obtenemos:

$$\left\langle u^j, v \right\rangle = \sum_{i=1}^k \alpha_i \left\langle u^j, u^i \right\rangle = \alpha_j \left\langle u^j, u^j \right\rangle = \alpha_j \left\| u^j \right\|^2 .$$

Por lo tanto, $\alpha_j = \frac{\left\langle u^j, v \right\rangle}{\left\| u^j \right\|^2}$ para $j = 1, \ldots, k$.

Observemos que si $\left\| u^j \right\| = 1$ para todo $j = 1, \ldots, k$, tenemos

$$v = \sum_{i=1}^k \left\langle v, u^i \right\rangle u^i .$$

Bases ortonormales

Como la ortogonalidad no se afecta *escalando* los vectores, si los vectores no tienen norma 1, podemos definir $\mathcal{B}' = \{w^j : w^j = \frac{u^j}{\|u^j\|}; j = 1, \ldots, k\}$, la cual resulta también base de V. (Justificar)
Claramente, los cálculos se simplifican cuando trabajamos con bases cuyos vectores, además de ser mutuamente ortogonales tienen todos norma 1.

Definición: Dado un espacio vectorial V con producto interno, una base de V es *ortogonal* si sus vectores son mutuamente ortogonales y es *ortonormal* si es base ortogonal y sus vectores tienen norma 1.

Los versores canónicos $e^i, i = 1, \ldots, n$ son la base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ más utilizada. Sin embargo, cualquier rotación de estos vectores configura una nueva base ortonormal.
Así, dado cualquier ángulo θ, los vectores $v^1 = (cos\,\theta, sen\,\theta)$ y $v^2 = (-sen\,\theta, cos\,\theta)$ definen una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$.