Capítulo 5 - Autovalores y Autovectores (2da. parte) [1]

Facultad de Cs. Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario

[1] Siguiendo *Linear Algebra and its applications*, G. Strang.

Outline

- Ecuación matricial protagónica:
$$Ax = \lambda x \quad (A \text{ matriz } n \times n,\ \lambda \text{ y } x, \text{ variables}).$$
Buscamos el conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$ cuya dirección no varía por efecto de A.
- **Autovalores de una transformación lineal T de V en V**:
$\lambda \in \mathbb{K}$ es un *autovalor de T* si existe $v \in V$, $v \neq 0$ tal que $Tv = \lambda v$.
- Dado λ autovalor de T:
    - $v \in V$ *autovector de T asociado a λ* si $v \neq 0$ y $Tv = \lambda v$.
    - $\{$autovectores asociados a $\lambda\} \cup \{0\}$ es un subespacio vectorial de V denominado *autoespacio de T asociado a λ*
- **Caracterización de los autovalores**:
$\lambda \in \mathbb{K}$ es un autovalor de $T \iff$ existe $v \neq 0$ tal que $Tv - \lambda v = 0 \iff$ existe $v \neq 0$ tal que $(T - \lambda I)v = 0 \iff T - \lambda I$ no es un isomorfismo.

Transformaciones lineales definidas por matrices $\longrightarrow$ autovectores, autovalores y autoespacios *de la matriz*.

- λ es un autovalor de A si y solo si
$$det(A-\lambda I)=0 \quad \text{(Ecuación característica de } A\text{).}$$
El autoespacio asociado a un autovalor λ es $N(A-\lambda I)$.
- desarrollo de $det(A-\lambda I) \longrightarrow$ polinomio en λ de grado $n \longrightarrow$ Polinomio característico de A.
λ autovalor de $A \Longleftrightarrow \lambda$ raíz del polinomio característico de A.
- **Nuevo convenio**: trabajamos con $\mathbb{R}^n$ como subconjunto de vectores del espacio vectorial $\mathbb{C}^n$ sobre $\mathbb{C} \longrightarrow$ Toda matriz $n\times n$ tiene n autovalores (en $\mathbb{C}$).
La *multiplicidad (algebraica) de un autovalor* es la multiplicidad como raíz del polinomio característico.
Observación Si A es una matriz real y z es un autovalor de A entonces $\bar{z}$ también lo es.
- Los autovalores de una matriz triangular son sus entradas en la diagonal.

Queremos *diagonalizar* las matrices sin modificar sus autovalores.

- A con autovalores $\lambda_i, i = 1, \ldots, n \longrightarrow \Lambda$: matriz diagonal con λ_i su entrada sobre la diagonal en la fila i, $i = 1, \ldots, n$.
- A es *diagonalizable* si existe una matriz inversible S y una matriz diagonal D tal que $S^{-1}AS = D$. Decimos que S *diagonaliza a* A.
- S diagonaliza a A si y solo si las columnas de S son autovectores de A y $D = \Lambda$.

  Prueba:
  S diagonaliza a $A \Longleftrightarrow AS = SD \Longleftrightarrow (AS)^i = (SD)^i,\ i = 1, \ldots, n \Longleftrightarrow AS^i = D_i^i S^i,\ i = 1, \ldots, n \Longleftrightarrow S^i$ es un autovector de A asociado al autovalor $D_i^i,\ i = 1, \ldots, n$.
- A matriz $n \times n$, A es diagonalizable si y solo si A tiene n autovectores l.i..
- No todas las matrices son diagonalizables: Ej: $n = 2$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow$ no todas las matrices tienen n autovectores l.i..

- Si A tiene n autovalores diferentes, A tiene n autovectores l.i..
  La recíproca no es cierta. Ejemplo: la matriz identidad.
- S diagonaliza a A, $\lambda_i, i = 1, \ldots, n$ autovalores de A. Entonces:
  - Para todo $k \geq 2$, S diagonaliza a A^k y $\lambda_i^k, i = 1, \ldots, n$ autovalores de A^k.
  - Si A es inversible, S diagonaliza a A^{-1} y $\lambda_i^{-1}, i = 1, \ldots, n$ autovalores de A^{-1}.

  Aplicaciones: sistemas de ecuaciones en diferencias.

  ¿Qué sabemos de los autovalores de un producto de matrices AB?

- A, B matrices $n \times n$, S diagonaliza a A. Entonces:
  S diagonaliza a $B \iff A$ y B tienen los mismos autovectores $\iff AB = BA$.
- **Lema**: Sean A y B matrices $n \times n$ tales que $AB = BA$ y A diagonalizable. Entonces, λ es un autovalor de AB si y solo si $\lambda = \lambda_A \lambda_B$ con λ_A, λ_B autovalores de A y B, respectivamente, correspondientes a un mismo autovector.

- (continuación)

  Prueba: Sea S tal que S diagonaliza a A y a B. Entonces,

  $$AB = (S^{-1}\Lambda_A S)(S^{-1}\Lambda_B S) = S^{-1}(\Lambda_A \Lambda_B)S.$$

  Observar que $\Lambda_A \Lambda_B$ es diagonal y la entrada i-ésima en su diagonal es el producto de las entradas i-ésimas en las diagonales de Λ_A y de Λ_B que son autovalores de A y de B, respectivamente, correspondientes al autovector S^i de A y de B. Por lo tanto, la entrada i-ésima en la diagonal de $\Lambda_A \Lambda_B$ es un autovalor de AB correspondiente al autovector S^i de AB. Así, S diagonaliza a AB con $\Lambda_{AB} = \Lambda_A \Lambda_B$. $\square$

- **Matrices de Markov**;
  VER STRANG

Vimos que cuando se trata de autovalores, necesitamos trabajar en el campo de los complejos y ver a $\mathbb{R}^n$ como subconjunto de vectores del espacio vectorial $\mathbb{C}^n$ sobre $\mathbb{C}$.

Si en $\mathbb{C}^n$ consideramos el producto interno $\langle z, w\rangle = \bar{z}^T w = \sum_{i=1}^n \bar{z}_i w_i$, la norma que obtenemos es $\|z\|^2 = \sum_{i=1}^n |z_i|^2$, donde $|z_i|$ es el módulo de $z_i \in \mathbb{C}$.

De esta manera, cuando miramos a $\mathbb{R}^n$ como subespacio de $\mathbb{C}^n$ sobre $\mathbb{C}$, el producto interno y la norma coinciden con las habituales en $\mathbb{R}^n$.

Nos interesa saber cómo se extienden las ideas que hemos trabajado con matrices reales al caso de matrices complejas.
Empecemos *extendiendo* el concepto de transpuesta.

Dada una matriz A compleja $m \times n$, definimos la matriz A^H *hermitiana de* A como $A^H = \bar{A}^T$. Así,

$$\begin{bmatrix} 2+i & 3i \\ 4-i & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^H = \begin{bmatrix} 2-i & 4+i & 0 \\ -3i & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Observaciones:

- Si A es una matriz real, $A^H = A^T$.
- Si $z, w \in \mathbb{C}^n$, $\langle z, w\rangle = \bar{z}^T w = \sum_{i=1}^n \bar{z}_i w_i = z^H w$.
- $(A^H)^H = A$ y $(AB)^H = B^H A^H$. (Ejercicio).

La extensión de matrices simétricas al campo de las matrices complejas resulta entonces:

Definición: Una matriz A es *hermitiana* si $A^H = A$.

Observación:

- Si A es matriz real, A es hermitiana si y solo si A es simétrica.
- Claramente, las matrices hermitianas son cuadradas.
- La diagonal de una matriz hermitiana tiene entradas reales. (Justificar)

Las matrices hermitianas (y por ende las reales simétricas) poseen importantes propiedades: sus *autovalores son reales* y sus *autovectores pueden elegirse ortonormales*.

Veamos antes el siguiente lema:

Lema: Si A es una matriz hermitiana entonces, para todo $x \in \mathbb{C}^n$, $x^H A x \in \mathbb{R}$.

Prueba: Sea $z = x^H A x \in \mathbb{C}$. Como z es una matriz compleja 1×1, $z^H = \bar{z}$. Además,

$$z^H = (x^H A x)^H = x^H A^H (x^H)^H = x^H A^H x = z.$$

Por lo tanto, $z = \bar{z}$ y $z \in \mathbb{R}$. □

Teorema: Si A es una matriz compleja hermitiana, sus autovalores son reales.

Prueba: Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ un autovalor de A y $x \in \mathbb{C}^n$ tal que $Ax = \lambda x$. Entonces,

$$x^H A x = x^H \lambda x = \lambda \|x\|^2 .$$

Como $x^H A x$ y $\|x\|^2$ son valores reales, $\lambda \in \mathbb{R}$. □

Teorema: Si A es una matriz hermitiana y $\lambda_1 \neq \lambda_2$ son autovalores de A, entonces el autoespacio de λ_1 es ortogonal al autoespacio de λ_2.

Prueba: Para $i = 1, 2$, sea z^i un autovector asociado a λ_i. Debemos probar que $z^1 \perp z^2$ o, equivalentemente, que $(z^1)^H z^2 = 0$.

Tenemos:

$$(\lambda_1 z^1)^H z^2 = (Az^1)^H z^2 = (z^1)^H A^H z^2 = (z^1)^H A z^2 = (z^1)^H \lambda_2 z^2$$

Como $\lambda_{1,2}$ son reales, tenemos $\lambda_1 (z^1)^H z^2 = \lambda_2 (z^1)^H z^2$. Como $\lambda_1 \neq \lambda_2$, resulta $(z^1)^H z^2 = 0$. $\square$

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3-3i \\ 3+3i & 5 \end{bmatrix}.$$

$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3-3i \\ 3+3i & 5-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(5-\lambda) - (3+3i)(3-3i) =$$

$$= (2-\lambda)(5-\lambda) - 18 = \lambda^2 - 7\lambda - 8 = (\lambda - 8)(\lambda + 1).$$

Ejemplo:(continuación)
Los autovalores son distintos, los autovectores son ortogonales.

$$x^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1+i \end{bmatrix}, \quad x^2 = \begin{bmatrix} 1-i \\ -1 \end{bmatrix}, \quad (x^1)^H x^2 = (1, 1-i) \begin{bmatrix} 1-i \\ -1 \end{bmatrix} = 0.$$

Corolario:

1. Si A es hermitiana y S diagonaliza a A, S puede ser elegida con sus columnas ortonormales.
2. Si A es real, simétrica y diagonalizable, $A = Q\Lambda Q^T$ con Q matriz ortogonal.

Prueba:

1. Ejercicio.
2. Como A es simétrica, sus autovalores son reales y sus autovectores son solución del sistema (real) lineal de ecuaciones $(A-\lambda I)x = 0$. El método de Eliminación de Gauss nos asegura que los vectores solución son reales. □

Observaciones:

- Si A es simétrica (real) diagonalizable

$$A = Q\Lambda Q^T = [Q^1, \ldots, Q^n]\ \Lambda \begin{bmatrix} (Q^1)^T \\ \cdots \\ \cdots \\ (Q^n)^T \end{bmatrix} = \lambda_1 Q^1 (Q^1)^T + \ldots + \lambda_n Q^n (Q^n)^T$$

  A es una combinación lineal de matrices simétricas de rango 1 $\longrightarrow$ A es una combinación lineal de matrices proyección unidimensionales.

- Veremos que toda matriz simétrica tiene n autovectores l.i. y por lo tanto, toda matriz simétrica se *descompone* en n matrices de rango 1 $\longrightarrow$ *Teorema Espectral*.

Extendiendo el concepto de matrices ortogonales reales, una matriz compleja (cuadrada) con columnas ortonormales se denomina *matriz unitaria*.

Propiedades (*ya vistas para ortogonales*) Sea U una matriz $n \times n$ unitaria. Entonces,

1. $U^H U = UU^H = I$. $U^{-1} = U^H$.
2. Para todo $x \in \mathbb{C}^n$, $\|Ux\| = \|x\|$.

Prueba: Ejercicio.

Propiedades (*nuevas*):
Sea U una matriz $n \times n$ unitaria. Entonces todos sus autovalores tienen módulo 1. Además, a autovalores diferentes le corresponden autovectores ortogonales.

Prueba: Sean λ y x, autovalor de U y autovector correspondiente. Entonces, $\|x\| = \|Ux\| = \|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\| \Longrightarrow |\lambda| = 1$.

Prueba (continuación).
Para $i = 1, 2$, sean λ_i y x^i, autovalor de U y autovector correspondiente, con $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Entonces:

$$(x^1)^H x^2 = (x^1)^H (U^H U) x^2 = (Ux^1)^H (Ux^2) = (\lambda_1 x^1)^H (\lambda_2 x^2) = \bar{\lambda_1} \lambda_2 (x^1)^H x^2.$$

Por lo tanto, $\bar{\lambda_1} \lambda_2 = 1$ o $(x^1)^H x^2 = 0$.
Supongamos que $\bar{\lambda_1} \lambda_2 = 1$. Como $|\lambda_1|^2 = \bar{\lambda_1} \lambda_1 = 1$, tenemos $\bar{\lambda_1} \lambda_2 = \bar{\lambda_1} \lambda_1 = 1$ y entonces, $\bar{\lambda_1} = \lambda_2$, una contradicción. Por lo tanto $(x^1)^H x^2 = 0$ y $x^1 \perp x^2$. □

Finalmente, extendemos el concepto de *simétrica sesgada*. Una matriz K es *hermitiana sesgada* si $K^H = -K$.

Lema Sea K una matriz sesgada hermitiana. Entonces:

1. $K = iA$ con A matriz hermitiana.
2. Los autovalores de K son imaginarios.
3. Los autovectores de K y A coinciden.

Vimos que si A tiene n autovectores l.i. y S es la matriz que tiene esos autovectores como columnas, $S^{-1}AS$ *transforma a* A en una matriz diagonal con sus mismos autovalores.

También vimos que no todas las matrices son diagonalizables. Nos preguntamos ahora sobre *el efecto* que tiene sobre una matriz A una transformación del tipo $M^{-1}AM$ donde M es una matriz inversible cualquiera.

Definición: Dada una matriz inversible M, la transformación que a toda matriz A la lleva a $M^{-1}AM$ es una *transformación de similaridad o semenjanza*. Decimos que A es *semejante* a B si existe M inversible tal que $B = M^{-1}AM$.

Observación: La relación de semejanza entre matrices es una relación de equivalencia. (Ejercicio).

Las transformaciones de semejanza aparecen naturalmente en los *cambios de variables* en sistemas lineales. Por ejemplo, en los sistemas de ecuaciones diferenciales o sistemas en diferencias.

Sea el sistema de diferencias $u_{k+1} = Au_k$, $k \in \mathbb{N}$. Hacemos un *cambio de variables* $u = Mv$ (M inversible) y el sistema se transforma en $Mv_{k+1} = AMv_k$ o, equivalentemente, $v_{k+1} = (M^{-1}AM)v_k$.
Los cambios de variables se realizan cuando el nuevo sistema resulta *más fácil* de resolver que el inicial. Por ejemplo, si S diagonaliza a A, el cambio de variables con $M = S$ nos lleva a un sistema *desacoplado* que es la foma más sencilla a la que podemos aspirar.

Si A no es diagonalizable, ¿Cuál es el *mejor cambio de variables* que podemos hacer? Dicho de otra manera, ¿cuál es la matriz *más sencilla* semejante a A? De eso se trata esta última parte del capítulo.

Nos preguntamos ahora:

¿Qué propiedades comparten las matrices semejantes?

Lema: Sean A, M y $B = M^{-1}AM$ matrices $n \times n$. Entonces A y B tienen los mismos autovalores. Además, si x es un autovector de A correspondiente a λ entonces $M^{-1}x$ es un autovector de B correspondiente a λ.

Prueba: Sea λ un autovalor de A y x un autovector asociado. Entonces $Ax = \lambda x$. Como $A = MBM^{-1}$, tenemos $MBM^{-1}x = \lambda x$ o, equivalentemente, $B(M^{-1}x) = \lambda(M^{-1}x)$. Por lo tanto, λ es un autovalor de B y $M^{-1}x$ autovector asociado. $\square$

Ejercicio: Las matrices semejantes tienen el mismo polinomio característico.

Recordemos que toda transformación lineal T entre espacios vectoriales V y W de dimensión finita tiene una matriz asociada. Esta matriz está determinada por las bases en las que estemos trabajando en dominio y codominio de T.

Cuanto trabajamos con una transformación lineal T de un espacio vectorial de dimensión finita V en sí mismo, si elegimos dos bases distintas $\mathscr{B}_1$ y $\mathscr{B}_2$ de V tendremos dos matrices distintas asociadas a T. Sin embargo, no sería lógico que fueran *tan diferentes*:

Lema: Sea T una transformación lineal de un espacio vectorial de dimensión finita V en si mismo y $\mathscr{B}_1$ y $\mathscr{B}_2$ dos bases ordenadas de V. Sean A y B las matrices asociadas a T considerando las bases $\mathscr{B}_1$ y $\mathscr{B}_2$, respectivamente. Entonces A es semejante a B.

Prueba: Ejercicio. (Ayuda: probar que $B = M^{-1}AM$ donde M es la matriz de cambio de base de $\mathscr{B}_2$ a $\mathscr{B}_1$).

Recordemos que si $\mathscr{B} = \{v^1, \ldots, v^n\}$ es la base de V en la que estamos trabajando, la matriz asociada a una transformación T tiene en su columna i-esima el vector representacion de Tv^i en $\mathscr{B}$.

Ejemplo:

Sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la proyección sobre la recta $y = -x$. Podemos trabajar con $\mathscr{B}_1 = \{(1,0),(0,1)\}$, la base canónica de $\mathbb{R}^2$ o con una base *elegida especialmente para* T.

Para obtener la matriz asocicada a T con la base canónica, deberíamos calcular la proyección de $(1,0)$ y $(0,1)$ sobre la recta . En cambio, si elegimos la base de $\mathscr{B}_2 = \{(1,-1),(1,1)\}$, las proyecciones son más sencillas: $T(1,-1) = (1,-1)$ y $T(1,1) = (0,0)$. Y la matriz resulta:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejemplo: (continuación)
Para obtener la matriz A asociada a T con la base canónica, sólo necesitamos la matriz M de cambio de base de $\mathscr{B}_2$ a la base canónica. O sea, la representación de los vectores de $\mathscr{B}_2$ en la báse canónica. Así, finalmente $A = MBM^{-1}$.

Ejercicio: Sea T la proyección en $\mathbb{R}^2$ sobre la recta que pasa por el origen formando un ángulo θ con el eje x. Construir la matriz A asociada a T con la base canónica de $\mathbb{R}^2$ a partir de la matriz B asociada a T con una base que contiene un vector sobre la recta y un vector ortogonal a la recta.

Nos habíamos planteado cuál es la matriz semejante *más sencilla* que puede tener cualquier matriz. Este primer resultado nos dice esa *forma sencilla* puede ser triangular.

Teorema (Lema de Schur) Sea A una matriz $n \times n$. Entonces, existe una matriz unitaria U tal que $U^{-1}AU = T$, con T una matriz triangular.

Prueba: después.

Observación: T tiene los autovalores de A en su diagonal. Y el lema vale para toda matriz, no necesariamente diagonalizable.

Ejemplo: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ tiene autovalor $\lambda = 1$ con multiplicidad 2. El autoespacio asociado a λ tiene dimensión 1, generado por $(1,1)$. Para construir U, seguimos el método en la prueba del Lema de Schur y llegamos a $U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$.
Es fácil verificar que

$$U^{-1}AU = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = T.$$

El Lema de Schur nos permite probar uno de los resultados más importantes del Álgebra Lineal: las matrices hermitianas (y por ende las simétricas) son diagonalizables por una matriz unitaria. Por lo tanto, se descomponen como suma de matrices de rango 1.

Teorema Espectral: Toda matriz hermitiana (resp. simétrica) A puede ser diagonalizable por una matriz unitaria U (resp. ortogonal Q).

Prueba: Sea A una matriz hermitiana. Por el Lema de Schur, existen U matriz unitaria y T matriz triangular tales que $U^{-1}AU = T$. Entonces,

$$T^H = (U^{-1}AU)^H = U^H A^H (U^{-1})^H = U^H AU = T.$$

Así, T es una matriz triangular tal que $T = T^H$. Por lo tanto, T es diagonal. $\square$

¿Para qué otras matrices T es diagonal? Próxima clase del jueves.