Álgebra Lineal 2020 (LCC- LM- PM)
Cap.2: Espacios vectoriales-4ta parte

Graciela Nasini - Yanina Lucarini - Eduardo Martinez

nasini,lucarini, eduardom@fceia.unr.edu.ar

Repasamos un poco

A pedido de Eduardo, vamos a darle un lugar más destacado al

Teorema fundamental del Álgebra Lineal (Parte I)

En toda matriz, el número de vectores fila linealmente independientes coincide con el número de vectores columna linealmente independientes. Si A es una matriz de tamaño $m \times n$, el número de filas (o columnas) l.i. de A es su rango r y la dimensión del espacio de soluciones del sistema $Ax = 0$ es $n - r$.

¿Cómo lo cuenta Strang?

"En toda matriz $m \times n$ A de rango r la dimensión de los espacios columna de A y A^T es r, la dimensión del espacio nulo de A es $n - r$ y del espacio nulo de A^T es $m - r$".

Ejercicio: Probar que ambos enunciados son equivalentes.

Repasamos un poco

Vimos que si $\mathcal{B}_1 = \{v^i : i = 1, \ldots, n\}$ es una base de un espacio vectorial V, para cualquier vector $w \in V$ existe una única combinación lineal de los elementos de $\mathcal{B}_1$ que nos da w. Y llamamos *representación de* w en la base $\mathcal{B}_1$ a la n-upla de escalares en dicha combinación lineal.

Pensemos en V un espacio vectorial en $\mathbb{R}^n$. Recordemos que toda combinación lineal de los vectores de la base puede expresarse a partir de un producto matricial. Esto es, si llamamos B a la matriz $n \times n$ que tiene por columnas a los vectores de $\mathcal{B}_1$ (i.e. $B^j = v^j$ para $j = 1, \ldots, n$), toda combinación lineal de estos vectores puede expresarse como Bx, con $x \in \mathbb{R}^n$.
Entonces, la representación de w en $\mathcal{B}_1$ no es más que la solución del sistema $Bx = w$.

Como B es no singular (justificar),el sistema $Bx = w$ tiene por única solución a $x = B^{-1}w$ que será justamente la representación de w en la base $\mathcal{B}_1$.

Recordar: La representación de x en la base existe y es única, y coincide con $B^{-1}w$. ¡Esto no justifica que para encontrar la respresentación de un vector calculemos B^{-1}!Resolvemos el sistema por Eliminación Gaussiana.

Matriz de cambio de base

Tenemos entonces nuestra base $\mathcal{B}_1 = \{v^i : i = 1, \ldots, n\}$ y su matriz no singular B asociada.
Vimos también que un espacio vectorial (no nulo) sobre $\mathbb{R}$ tiene infinitas bases. Supongamos que $\mathcal{B}_2 = \{z^i : i = 1, \ldots, n\}$ es otra base de V y sea $\tilde{B}$ la matriz no singular asociada (cuyas columnas son los vectores z^i).
La pregunta que nos hacemos es: ¿qué relación existe entre la representación $x = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ de w en $\mathcal{B}_1$ y la representación $y = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ de w en $\mathcal{B}_2$?

Sabemos que x e y son los vectores que verifican $Bx = w$ y $\tilde{B}y = w$. Por lo tanto,

$$Bx = \tilde{B}y \Rightarrow y = \tilde{B}^{-1}(Bx) = (\tilde{B}^{-1}B)x = Tx$$

donde $T = \tilde{B}^{-1}B$.
La matriz T *transforma* la representación en la base $\mathcal{B}_1$ en la representación en la base $\mathcal{B}_2$ y se llama *matriz de cambio de base* (de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$).

¿Cómo podemos obtener T?

Matriz de cambio de base

Sabemos que $T = \tilde{B}^{-1}B$, por lo tanto, la columna i-esima T^i de T se obtiene con el producto $\tilde{B}^{-1}B^i$, donde B^i es la columna i-ésima de B.

Como $B^i = v^i$, tenemos que $T^i = \tilde{B}^{-1}v^i$ o, equivalentemente, T^i es la solución del sistema $\tilde{B}x = v^i$.
Esto es, la columna i-ésima de la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$ es la representación del vector i-ésimo de la base $\mathcal{B}_1$ en la base $\mathcal{B}_2$.

Ejemplo:
Sea $A = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ y $U = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$, su forma triangular superior.
Sabemos que $\mathcal{B}^1 = \{A^1, A^2\}$ y $\mathcal{B}^2 = \{U^1, U^2\}$ son bases de $\mathbb{R}^2$. Justificar.
Para encontrar la matriz de cambio de base que nos lleva de la base $\mathcal{B}^1$ a la base $\mathcal{B}^2$ debemos encontrar la representación de A^1 y A^2 en $\mathcal{B}^2$. Esto es, debemos encontrar la combinación lineal de U^1 y U^2 que nos dé estos vectores. Esto es equivalente a encontrar una matriz X, 2×2, tal que $UX = A$.
Es fácil verifica que la matriz $X = \begin{bmatrix} \frac{8}{7} & -\frac{1}{28} \\ \frac{4}{7} & \frac{6}{7} \end{bmatrix}$ es la matriz de cambio de base.

Inversas a izquierda y a derecha

Dada una matriz A, $m \times n$, decimos que B es *una inversa a izquierda de* A si $BA = I$ donde I es la matriz identidad ($n \times n$). Si $AC = I$ (en este caso, I es la matriz identidad $m \times m$), decimos que C es *una inversa a derecha de* A.

Vimos que si A tiene inversas B y C a derecha y a iquierda, respectivamente, A es cuadrada e inversible, $B = C = A^{-1}$.

¿cuándo una matriz A, $m \times n$ tiene inversa a izquierda o inversa a derecha?

Una *respuesta rápida* a esta pregunta es: "cuando el rango de A sea lo más grande posible".

¿cuál es el máximo valor que puede tener el rango de una matriz $m \times n$?

Claramente $rg(A) \leq m$ y $rg(A) \leq n$, por lo tanto $rg(A) \leq min(m, n)$.[1]

[1] Notación: a partir de ahora $rg(A)$ está notando "rango de A"

Inversas a izquierda y a derecha

Decimos que una matriz A, $m \times n$ es *de rango completo* si $rg(A) = \min(m, n)$.

Ejercicio: Probar que, para todo $m, n \in \mathbb{Z}_+$, existen matrices $m \times n$ de rango completo.

Nos encaminamos a probar que las matrices que tienen inversa a derecha o a izquierda son matrices de rango completo.

Observación: Una matriz cuadrada de rango completo es una matriz no singular y tiene inversa a derecha **y también** inversa a iquierda.

Analicemos primero las matrices A de rango completo tales que $rg(A) = m \leq n$. Veremos que estas matrices tienen inversa a derecha, o sea, existe C, matriz $n \times m$, tal que $AC = I$.

Ejercicio: Sea A matriz $m \times n$ tal que $rg(A) = m$. Entonces, $C(A) = \mathbb{R}^m$.

Inversas a izquierda y a derecha

Con el resultado del ejercicio anterior podemos probar:

Lema: Sea A matriz $m \times n$ tal que $rg(A) = m$. Entonces, A tiene inversa a derecha.

Prueba: Sabemos que el sistema de ecuaciones $Ax = b$ tiene solución para todo $b \in \mathbb{R}^m$. En particular, si C^i es una solución del sistema $Ax = e^i$ (con e^i el i-esimo vector canónico de $\mathbb{R}^n$), la matriz C que tiene por i-esimo vector columna a C^i es inversa a derecha de A.

Observación: Si $m < n$, la inversa a derecha no es única. Justificar.

Veamos qué pasa con la inversa a derecha si $rg(A) = n < m$. ¿Puede existir?
Siguiendo el mismo razonamiento que antes, la columna i-ésima de C debería ser solución del sistema $Ax = e^i$, para $i = 1, \ldots, m$. ¿Es posible que todos esos sistemas tengan solución?

Ejercicio: Si A es una matriz $m \times n$ con $rg(A) = n$ y $n < m$, entonces A no tiene inversa a derecha.

¿Tendrán inversa a izquierda?

Inversas a izquierda y a derecha

Sea A es una matriz $m \times n$ con $rg(A) = n$ y $n < m$. Entonces A^T es $n \times m$ y tiene inversa a derecha C, o sea, $A^T C = I_n$. Entonces,

$$C^T A = (A^T C)^T = I_n^T = I_n$$

y resulta $B = C^T$ es una inversa a izquierda de A.

Veamos algunas consecuencias que se derivan de las inversas a derecha e izquierda referidas a los conjuntos solución de sistemas que involucran matrices de rango completo.
Recordemos primero que si $n < m$, $C(A)$ no coincide con $\mathbb{R}^m$ y por lo tanto existen vectores $b \in \mathbb{R}^m$ tales que el sistema $Ax = b$ no tiene solución. En el caso en que $rg(A) = m$, $C(A) = \mathbb{R}^m$ y el sistema siempre tiene al menos una solución.

Lema: Sean A matriz $m \times n$ y $b \in \mathbb{R}^m$.

1. Si $rg(A) = n$ y el sistema $Ax = b$ tiene solución, entonces esa solución es única.
2. Si $rg(A) = m$ entonces el sistema $Ax = b$ tiene una o infinitas soluciones.

Prueba: Ejercicio.

Inversas a izquierda y a derecha

Observemos entonces que las matrices de rango completo siempre nos aseguran existencia o unicidad de los sistemas que las tienen como matriz de coeficientes. El único caso en que ambas cosas pueden darse a la vez es en el caso en que la matriz sea cuadrada y, por ende no singular.

¿Cómo obtenemos las inversas laterales?

Ejemplo: Sea $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$. Tenemos que A es 2×3 y $rg(A) = 2$. Por lo tanto, tiene inversa a derecha.

Es fácil chequear que $C = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix}$ es inversa a derecha de A, para cualquier valor de c_{31} y de c_{32}.

La transpuesta de A nos da un ejemplo de una matriz con infinitas inversas a izquierda. Justificar.

Como siempre, elegimos como *mejor inversa* (a derecha o a izquierda) a aquella donde los valores arbitrarios están en cero, y la llamamos *pseudo-inversa* (a derecha o izquierda) de A.

Inversas a izquierda y a derecha

¿Podemos expresar las pseudo-inversas de A (en caso de existir) en términos de A?

Dada una matriz A $m \times n$, AA^T y A^TA son matrices cuadradas $m \times m$ y $n \times n$, respectivamente. Más adelante veremos que si $rg(A) = n$, entonces A^TA es inversible. Similarmente, AA^T es inversible si $rg(A) = m$. Es fácil verificar que, si las inversas mencionadas existen,

$$B = (A^TA)^{-1}A^T \quad \text{y} \quad C = A^T(AA^T)^{-1}$$

son, respectivamente, inversas a izquierda y derecha de A. Ejercicio. También es posible probar que ambas son las pseudo-inversas de A, pero lo dejaremos para más adelante.

Terminamos esta sección con una duda que ha sido bastante habitual en cursos anteriores:

¿Qué estamos pensando mal?: Sabemos que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Entonces, ¿$B = (A^TA)^{-1}A^T$ no es simplemente A^{-1}?

Transformaciones lineales

Empezamos a trabajar con un concepto nuevo y fundamental en Álgebra Lineal: transformaciones (u operadores) lineales.

Sea A una matriz $n \times n$. Cuando A multiplica a un vector $x \in \mathbb{R}^n$, podemos decir que *lo transforma* en el vector Ax. Y eso pasa para todo vector de $\mathbb{R}^n$. Con lo cual podemos decir que A *transforma* o *mapea* a $\mathbb{R}^n$ en si mismo.

Veamos algunos ejemplos en $\mathbb{R}^2$:

1. $A = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} = c\ I_2, c \in \mathbb{R}$.
   Es fácil ver que $Ax = cx$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$. Por lo tanto, si $c > 0$, A expande o contrae al vector x, dependiendo de si $c > 1$ o $c < 1$. En caso $c < 0$ además cambia su sentido.

2. Si $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $x = (x_1, x_2)$ tenemos que $Ax^T = (-x_2, x_1)^T$.
   O sea, A rota a todo vector de $\mathbb{R}^2$, 90^o a la izquierda.

3. Si $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, ¿qué transformación está realizando A sobre $\mathbb{R}^2$?.
   Ejercicio.

Transformaciones lineales

4. Analicemos el caso $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   En este caso, $A(x_1, x_2)^T = (0, x_2)^T$.O sea, A nos brinda *la segunda componente del vector*. Dicho de otra manera, la proyección del vector sobre su segunda componente.
   Observar que este es el único de los ejemplos presentados donde el conjunto imagen de la transformación que realiza A es un subespacio de dimensión menor que el espacio dominio.

Rotar, estirar, proyectar son transformaciones que podemos realizar en el espacio $\mathbb{R}^3$ y también podemos abstraer esos conceptos en un espacio $\mathbb{R}^n$. Estas transformaciones también podrán modelarse como el producto por una matriz $n \times n$.

Sin embargo, no toda transformación de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ podrá expresarse a partir de una matriz. Por ejemplo, cualquier transformación que *mueve el origen* no puede expresarse a partir de una matriz A ya que, cualquiera sea A, $A0 = 0$.

Transformaciones lineales

Más específicamente, las transformaciones realizadas por las matrices $n \times n$ verifican ser *lineales*, esto es:

$$A(\alpha v + \beta w) = \alpha A v + \beta A w.$$

Extendemos este concepto a cualquier transformación de un espacio vectorial en otro.

Definición: Sean $(V, \oplus, \odot)$ y $(W, +, \cdot)$ espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$. Una *transformación lineal de V en W* es una función

$$T : V \longrightarrow W$$

que verifica:
Para todo $v, w \in V$ y todo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$,

$$T\left((\alpha \odot v) \oplus (\beta \odot w)\right) = (\alpha \cdot T(v)) + (\beta \cdot T(w))\,.$$

Transformaciones lineales

Ejemplos:

1. La funciones definidas a partir del producto por una matriz son transformaciones lineales. En general, dada una matriz A, $m \times n$, la función

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & v & \longrightarrow & T(v) = Av \end{array}$$

   es una transformación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$.

2. En espacios vectoriales generales V y W, la *función nula* que asigna a todo vector de V el vector nulo de W es una transformación lineal. Justificar.

3. También la *función identidad* definida de un espacio vectorial en si mismo y que a cada vector v le asigna el propio v es una transformación lineal. Justificar.

4. Si $\mathcal{P}$ es el espacio vectorial de los polinomios reales, la *función derivación* de $\mathcal{P}$ en $\mathcal{P}$ es una transformación lineal. Sea

$$\begin{array}{rccc} D: & \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ & p & \longrightarrow & D(p) = p' \end{array}$$

Transformaciones lineales

Ejemplos:

4. (continuación) Dado $p \in \mathcal{P}$ tal que $p(x) = \sum_{r=0}^{n} a_r x^r$, sabemos que p' es el polinomio tal que $p'(x) = \sum_{r=1}^{n} a_r\, r\, x^{r-1}$.
   Además, dados $p, q \in \mathcal{P}$, podemos suponer ambos del mismo grado, completando con coeficientes nulos. Entonces, si

   $$p(x) = \sum_{r=0}^{n} a_r x^r \text{ y } q(x) = \sum_{r=0}^{n} b_r x^r,$$

   $\alpha p + \beta q \in \mathcal{P}$ para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y verifica

   $$[\alpha p + \beta q](x) = \sum_{r=0}^{n} (\alpha a_r + \beta b_r) x^r.$$

   Por lo tanto,

   $$[D(\alpha p + \beta q)](x) = \sum_{r=1}^{n} (\alpha a_r + \beta b_r)\, r\, x^{r-1} = \alpha \sum_{r=1}^{n} a_r\, r\, x^{r-1} + \beta \sum_{r=1}^{n} b_r\, r\, x^{r-1} =$$

   $$= \alpha p'(x) + \beta q'(x) = [\alpha D(p) + \beta D(q)](x).$$

   Por lo tanto,

   $$D(\alpha p + \beta q) = \alpha D(p) + \beta D(q).$$

Transformaciones lineales

Ejemplos (continuación):

5. Observar que el operador *derivación* también es un operador lineal en el espacio vectorial de funciones derivables en un cierto subconjunto U de $\mathbb{R}$ en el espacio vectorial de funciones reales definidas en $\mathbb{R}$.
6. La *integración* también puede ser vista como un operador lineal sobre el espacio vectorial $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ de funciones continuas en $\mathbb{R}$. Definimos:

$$\begin{array}{rccc} I: & \mathcal{C}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}(\mathbb{R}) \\ & f & \longrightarrow & I(f) \end{array}$$

tal que

$$\begin{array}{rccc} I(f): & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & \int_0^x f(t)dt \end{array}$$

Observar que, como f es una función continua en $\mathbb{R}$, f es integrable en $\mathbb{R}$ y por lo tanto $I(f)$ está bien definida.

Ejercicio: Probar que I es un operador lineal.

Transformaciones lineales

Lema: Dado un operador lineal T entre los espacios V y W, el recorrido de T es un subespacio vectorial de W y $N(T) = \{v \in V : T(v) = 0\}$ es un subespacio vectorial de V.
Prueba: Ejercicio.

Si T es una transformación lineal de V en W, al subespacio $N(T)$ se lo llama *espacio nulo de* T o *kernel de* T.

Observación: Si T es un operador lineal asociado a una matriz A, $m \times n$ (i.e. $T(v) = Av$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$) el espacio nulo de T no es más que $N(A)$ y el recorrido de T coincide con $C(A)$. Por esta razón, se suele identificar el operador con la matriz y nos permitimos hablar de una matriz como operador. También, cuando no lleve a confusión, vamos a notar $T(v)$ como Tv.

Ejemplos:

1. Veamos quienes son el kernel y el recorrido del operador derivación D aplicado al espacio vectorial de las funciones polinómicas. $N(D)$ son aquellos polinomios cuya derivada da el polinomio nulo. Por lo tanto $N(D) = \{p \in \mathcal{P} : gr(p) = 0\}$. O sea, los polinomios constantes. ¿Y quién es el espacio recorrido? Ejercicio.

Transformaciones lineales

Ejemplos:(continuación)

2. Pensemos ahora en el operador integración I de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ en $\mathcal{C}(\mathbb{R})$. En el kernel o espacio nulo tenemos a las funciones continuas cuya función integral es la función constante nula.
   ¿Cómo probar que $N(I)$ sólo contiene a la función constante nula? Tendremos que recurrir a lo que aprendimos en Análisis Matemático! Ejercicio.
   ¿Y qué pasa con el recorrido de I? ¿Será todo $\mathcal{C}(\mathbb{R})$? La respuesta es no y queda como ejercicio caracterizar el subespacio vectorial de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ correspondiente al recorrido del operador lineal I.

Las transformaciones lineales, como todas las funciones, pueden ser inyectivas, sobreyectivas o ambas cosas, o sea, biyectivas. Además, las transformaciones lineales de espacios vectoriales también suelen llamarse *homomorfismos de espacios vectoriales*. De esa otra nominación surgen los términos:

- *Monomorfismo*, para las transformaciones lineales inyectivas,
- *epimorfismo*, para las transformaciones lineales sobreyectivas, e
- *isomorfimo*, para las transformaciones lineales biyectivas,

Transformaciones lineales

Es claro que una transformación lineal de V en W es un epimorfismo si el subespacio vectorial recorrido es todo W.
La inyectividad de una transformación lineal está asociada a su espacio nulo:

Lema: Una transformación lineal T de V en W es un monomorfismo si y sólo si $N(T) = \{0\}$.

Prueba: Claramente, para toda transformación lineal T, $T(0) = 0$. Justificar. Por lo tanto, si T es un monomorfismo, es inyectiva y no existe otro vector en V cuya imagen sea $0 \in W$.
Debemos probar ahora que si $N(T) = \{0\}$ entonces T es inyectiva o, equivalentemente,

$$Tv = Tw \Rightarrow v = w.$$

Tenemos:

$$Tv = Tw \Rightarrow Tv - Tw = 0 \Rightarrow T(v - w) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v - w \in N(T) \Rightarrow v - w = 0 \Rightarrow v = w.$$

Ejercicio: Justificar cada una de las implicancias anteriores.

Transformaciones lineales

De acuerdo a los resultados anteriores, dada una matriz A, $m \times n$, ¿Cuándo *es* un isomorfismo?

La transformación lineal (definida por) A va de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$. Si A es un isomorfismo, en particular es inyectiva y resulta $N(A) = \{0\}$. Por lo tanto, A es una matriz de rango completo $n \leq m$. Justificar. .
Además, A debe ser sobreyectiva o sea que su recorrido, $C(A) = \mathbb{R}^m$. Como la dimensión de $\mathbb{R}^m$ es m y es generado por las n columnas l.i. de A, tenemos que A es cuadrada, $n \times n$. Como $rg(A) = n$, A es una matriz no singular.

Para recordar: las únicas matrices que definen isomorfismos son las matrices cuadradas no singulares.

Transformaciones lineales

Las transformaciones lineales inyectivas (monomorfismos) preservan lineal independencia. Esto es:

Lema: Sea T un monomorfismo de V en W y sean $\{v^1, \ldots, v^k\}$ vectores l.i. en V. Entonces, $\{Tv^1, \ldots, Tv^k\}$ son vectores l.i. en W.

Prueba: Considermos una combinación lineal nula en W de los vectores en $\{Tv^1, \ldots, Tv^k\}$,

$$\alpha_1 Tv^1 + \ldots + \alpha_k Tv^k = 0 \in W.$$

Entonces,

$$T(\alpha_1 v^1 + \ldots + \alpha_k v^k) = 0$$

y $\alpha_1 v^1 + \ldots + \alpha_k v^k \in N(T)$.
Como T es inyectiva, $N(T) = \{0\}$ y por lo tanto
$\alpha_1 v^1 + \ldots + \alpha_k v^k = 0 \in V$.
Finalmente, como los vectores de $\{v^1, \ldots, v^k\}$ son l.i. por hipótesis, tenemos que necesariamente $\alpha_i = 0$ para todo $i = 1, \ldots, k$.
Por lo tanto los vectores $\{Tv^1, \ldots, Tv^k\}$ son vectores l.i. en W.

Transformaciones lineales

Corolario: Sea T un monomorfismo de V en W y $\{v^1, \ldots, v^k\}$ una base de V. Entonces, $\{Tv^1, \ldots, Tv^k\}$ es una base del subespacio imagen de T.

Prueba: Sea $W' \subset W$ el recorrido o imagen de T.
Por el lema anterior sabemos que los vectores de $\{Tv^1, \ldots, Tv^k\}$ son l.i. y, claramente, pertenecen W'. Sólo tenemos que probar que $\{Tv^1, \ldots, Tv^k\}$ generan W'.
Sea $w \in W'$ y $v \in V$ tal que $w = Tv$. Como $\{v^1, \ldots, v^k\}$ es una base de V, existen $\alpha_i \in \mathbb{K}, i = 1, \ldots, k$ tales que

$$v = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v^i.$$

Entonces,

$$Tv = T\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v^i = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i Tv^i$$

resultando que Tv es generado por los vectores $\{Tv^1, \ldots, Tv^k\}$.

Transformaciones lineales

Observación: Toda transformación lineal de un espacio vectorial V en otro W queda unívocamente definida por las imágenes a través de T de los elementos de una de sus bases.
Esto es, si $\mathcal{B} \subset V$ es una base de V, para *conocer a* T, la única información que necesito es $T(\mathcal{B}) = \{Tv : v \in \mathcal{B}\}$.
En efecto, contando con esa información, si queremos saber como actua T sobre cualquier vector $z \in V$, encontramos su representación en términos de la base. Esto es, si

$$z = \sum_{i=1}^{t} \alpha_i v^i$$

, con $\{v^1, \ldots, v^t\} \subset \mathcal{B}$, entonces,

$$Tz = \sum_{i=1}^{t} \alpha_i Tv^i.$$

Transformaciones lineales

Con los resultados anteriores obtenemos este importante resultado:

Lema: Sean V y W dos espacios vectoriales de dimensión finita. Entonces, V y W son isomorfos si y solo si V y W tienen la misma dimensión.

Prueba:
Si V y W son isomorfos, existe una transformación lineal T de V en W que es biyectiva. En particular, T es inyectiva y si $\{v^1, \ldots, v^k\}$ es una base de V, entonces $\{Tv^1, \ldots, Tv^k\}$ una base del recorrido de T. Como T es también sobreyectiva, $\{Tv^1, \ldots, Tv^k\}$ es una base de W y ambos espacios tienen la misma dimensión, k.
Para demostrar la recíproca partimos de dos bases (del mismo cardinal) $\{v^1, \ldots, v^k\}$ y $\{w^1, \ldots, w^k\}$ de V y W, respectivamente. Debemos probar que existe un isomorfismo de T de V en W.
Definimos a T como la transformación lineal $T : V \longrightarrow W$ tal que $T(v^i) = w^i$ para $i = 1, \ldots, k$. Por lo visto anteriormente, T con esta información conocemos la imagen de T en todo su dominio. (Justificar)
Sólo resta probar que T es biyectiva. Ejercicio.

Transformaciones lineales

Corolario: Todo espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión n es isomorfo a $\mathbb{R}^n$.

Observación: El resultado anterior es válido para cualquier cuerpo $\mathbb{K}$, esto es, todo espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensión n es isomorfo al espacio vectorial $\mathbb{K}^n$ de las n-uplas de elementos de $\mathbb{K}$.

Observar que un isormorfismo puede ser pensado como *un espejo* entre los espacios vectoriales. Todo lo que *sucede* o *es válido* en uno de ellos, puede *reflejarse* en el otro,

Así, el corolario anterior justifica por qué poner el énfasis en conocer los espacios vectoriales $\mathbb{R}^n$.

Más aún, veremos que toda transformación lineal de un espacio V de dimensión n en un espacio W de dimensión m puede pensarse como una matriz $m \times n$.

Transformaciones lineales y matrices

Ya vimos que una matriz A de tamaño $m \times n$ define una transformación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ a través de la ley

$$\begin{array}{rccc} A: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & x & \longrightarrow & Ax \end{array}$$

Es fácil ver que cualquier transformación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ puede ser pensada como una transformación definida por una matriz $m \times n$.

En efecto, sea T una transformación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ y sean $e^i, i = 1, \ldots, n$ los vectores canónicos en $\mathbb{R}^n$. Definimos la matriz $m \times n$ A, cuya i-ésima columna $A^i = Te^i$. Es fácil verificar que $Tv = Av$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$. En efecto, dado $v = (v_1, \ldots, v_n)^T \in \mathbb{R}^n$, sabemos que $v = \sum_{i=1}^n v_i e^i$. Por lo tanto,

$$Tv = \sum_{i=1}^{n} v_i Te^i = \sum_{i=1}^{n} v_i A^i = Av.$$

Transformaciones lineales y matrices

Ejemplo: Sea

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & v=(v_1,v_2) & \longrightarrow & Tv=(0,v_1,v_2) \end{array}.$$

Probar que T es una transformación lineal. ¿Qué espacio ocupa la imágen de T en $\mathbb{R}^3$? Ejercicio.
Construimos A cuya primer columna es $T(1,0)=(0,1,0)$ y su segunda columna es $T(0,1)=(0,0,1)$, esto es,

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Es fácil chequear que $A(v_1,v_2)=(0,v_1,v_2)=T(v_1,v_2)$.

Veamos que, en realidad, toda transformación lineal de *cualquier espacio vectorial de dimensión* n en *cualquier espacio vectorial de dimensión* m puede ser representado por una matriz $m\times n$.

Transformaciones lineales y matrices

Consideremos ahora V un espacio vectorial de dimensión n y $\mathcal{B}_V = \{v^1, \ldots, v^n\}$ una base de V. Tenemos también un espacio vectorial W de dimensión m con una base $\mathcal{B}_W = \{w^1, \ldots, w^m\}$ y una transformación lineal de V en W.

Para todo $i = 1, \ldots, n$, $Tv^i \in W$ y por lo tanto, existen escalares β^i_j, con $j = 1, \ldots, m$ tales que $Tv^i = \sum_{j=1}^m \beta^i_j w^j$.

Además sabemos que, para todo $v \in V$, existen escalares $\alpha_i, i = 1, \ldots n$ tales que $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v^i$. Por lo tanto,

$$Tv = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i Tv^i.$$

Construimos entonces la matriz A_T cuya columna i-ésima A^i_T es el vector $(\beta^i_1, \ldots, \beta^i_m)^T$.

Ejercicio: Mostrar que si $x_V = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ es la representación de v en $\mathcal{B}_V$, entonces, $A_T x_V$ es la representación de Tv en $\mathcal{B}_W$.

Transformaciones lineales y matrices

Ejemplo: Sea V el espacio vectorial de los polinomios de grado a lo sumo 2 y W el espacio de los polinomios de grado a los sumo 3. Sabemos que las funciones potencias $p_i(t) = t^i$ con $t = 0, 1, 2$ son una base de V y $p_i(t) = t^i$ con $t = 0, 1, 2, 3$ son una base de W. Consideremos la transformación lineal *integración*:

$$\begin{array}{rccl} T: & V & \longrightarrow & W \\ & p & \longrightarrow & Tp : Ip(x) = \int_0^x p(t)dt \end{array}$$

Para todo $i = 0, 1, 2,$

$$Tp_i(x) = \int_0^x t^i dt = \left.\frac{t^{i+1}}{i+1}\right|_0^x = \frac{1}{i+1} x^{i+1} = \frac{1}{i+1}\, p_{i+1}.$$

O sea, la representación en $\mathbb{R}^4$ de Tp_i en $\mathcal{B}_W$ tiene $\frac{1}{i+1}$ en la entrada $i+1$ y 0 en las restantes. Justificar. Así, la matriz asociada a T es

$$A_T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Transformaciones lineales y matrices

Ejemplo: (continuación)
Verifiquemos con un polinomio arbitrario de V, Sea $p(x) = ax^2 + bx + c$. Entonces $Tp(x) = a\frac{x^3}{3} + b\frac{x^2}{2} + cx$. Tenemos que la representación de p en $\mathcal{B}_V$ es $x_P = (c, b, a)$ y la representación de Tp en $\mathcal{B}_W$ es $y_P = (0, c, \frac{b}{2}, \frac{a}{3})$.

Lo que hemos visto es que la matriz A_T caracteriza completamente al operador T. En efecto, para conocer el comportamiento de T sobre p sólo necesitamos hacer el producto $A_T x_P$, obtendremos y_P y con ello toda la información necesaria para obtener el polinomio Tp, imagen de p a través de la transformación T.

En general, podemos entonces enunciar el siguiente resultado:

Lema: Sea T una transformación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita y A_T su matriz asociada. Entonces, el recorrido de T es isomorfo a $C(A_T)$ y T es un monomorfismo (inyectiva) si $N(A_T) = \{0\}$.

Prueba: Ejercicio.

Propiedades de las transformaciones lineales

Como las transformaciones lineales son funciones, podemos definir su suma y su producto por escalar de la forma estándar que se define en funciones.

Tenemos entonces:

Teorema: Dados dos espacios vectoriales V y W sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$, las transformaciones lineales de V en W definen un espacio vectorial con la suma y producto por escalar estándares en funciones.

Prueba: Ejercicio.

También podemos analizar, en los casos que la operación sea posible, qué tipo de funciones son la composición de dos transformaciones lienales o la inversa de un isomorfismo. Tenemos los siguientes resultados:

Lema: Sean V y W espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$, T un isomorfismo de V en W y T^{-1} la función inversa de T. Entonces, T^{-1} es un isomorfismo de W en V.

Prueba: Claramente T^{-1} es biyectiva, sólo tenemos que probar que es un transformación lineal de W en V. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y $w^1, w^2 \in W$. Debemos probar que

$$T^{-1}(\alpha w^1 + \beta w^2) = \alpha T^{-1} w^1 + \beta T^{-1} w^2.$$

Propiedades de las transformaciones lineales

Prueba: (continuación)
Por definición de función inversa sabemos que

$$T^{-1}(\alpha w^1 + \beta w^2) = \alpha T^{-1} w^1 + \beta T^{-1} w^2 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow T(\alpha T^{-1} w^1 + \beta T^{-1} w^2) = \alpha w^1 + \beta w^2$$

Como T es una transformación lineal, tenemos:

$$T(\alpha T^{-1} w^1 + \beta T^{-1} w^2) = \alpha T(T^{-1} w^1) + \beta T(T^{-1} w^2) = \alpha w^1 + \beta w^2$$

con lo cual queda demostrado que T^{-1} es una transformación lineal y por lo tanto, T^{-1} es un ismorfismo de W en V.

En lo referido a composición de transformaciones lineales podemos demostrar:

Lema: Sean V, W y U tres espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$, T^1 una transformación lineal de V en W y T^2 una transformación lineal de W en U. Entonces, $T = T^2 \circ T^1$ es una transformación lineal de V en U.

Propiedades de las transformaciones lineales

Prueba: Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y $v^1, v^2 \in V$. Debemos probar que

$$T(\alpha v^1 + \beta v^2) = T^2(T^1(\alpha v^1 + \beta v^2)) = \alpha\ Tv^1 + \beta\ Tv^2.$$

Como T^1 es una transformación lineal,

$$T^2(T^1(\alpha v^1 + \beta v^2)) = T^2(\alpha\ T^1 v^1 + \beta\ T^1 v^2)$$

Como T^2 es también una transformación lineal, tenemos:

$$T^2(\alpha\ T^1 v^1 + \beta\ T^1 v^2) = \alpha T^2(T^1 v^1) + \beta T^2(T^1 v^2) = \alpha T v^1 + \beta T v^2$$

con lo que queda demostrado que T es una transformación lineal.

Hemos visto que siempre que trabajemos con espacios de dimensión finita, todo lo que querramos saber sobre transformaciones lineales entre ellos lo conocemos a partir de las transformaciones lineales definidas por matrices.
Nos preguntamos ahora quiénes serán las trasformaciones inversa y composición cuando trabajamos con transformaciones lineales asociadas a matrices.

Transformaciones lineales y matrices

En lo referido a inversas, hemos visto que la trasformacion lineal definida por una matriz A es un isomorfismo si y sólo si A es cuadrada no singular.

Es fácil probar entonces:
Ejercicio Si A es una matriz cuadrada no singular, los isomorfismos defindos por A y A^{-1} son isomorfismos inversos.

Por otra parte, si A es una matriz $m \times n$, A define un homomorfismo de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$. Entonces, si B es una matriz $m \times p$, podemos definir el homomorfismo $B \circ A$ de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^p$. Nos preguntamos quién es la matriz que define al homomorfismo $B \circ A$.

También es sencillo probar:
Ejercicio Sea A una matriz $m \times n$ y B, una matriz $m \times p$. Entonces la matriz BA define al homomorfismo $B \circ A$.

Transformaciones lineales y espacios asociados a matrices

Hemos visto que conocer los espacios vectoriales asociados a matrices tiene fundamental relevancia en el Álgebra Lineal.

En lo que sigue, continuaremos conociendo más sobre ellos.