Álgebra Lineal - LCC - LM - PM 2020

Graciela Nasini - Yanina Lucarini - Eduardo Martinez
nasini, lucarini, eduardom@fceia.unr.edu.ar

Práctica 2: ELIMINACIÓN GAUSSIANA - FACTORIZACIÓN LU- GAUSS JORDAN

1. Resolver los siguientes sistemas utilizando eliminación gaussiana e identificar las matrices de eliminación y/o permutación utilizadas en cada caso.

$$\begin{cases} x_2 + 4x_3 = -5 \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -2 \\ 3x_1 + 7x_2 + 7x_3 = 6 \end{cases} \qquad ii) \begin{cases} x_1 - 3x_2 = -4 \\ 3x_1 - 7x_2 + 7x_3 = -8 \\ -4x_1 + 6x_2 - x_3 = 7 \end{cases} \qquad iii) \begin{cases} x_1 - 3x_2 = 5 \\ -x_1 + x_2 + 5x_3 = 2 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$iv) \left\{ \begin{array}{ccccccc} u & + & 4v & + & 2w & = & -2 \\ -2u & - & 8v & + & 3w & = & 32 \\ & & v & + & w & = & 1 \end{array} \right.$$

2. En cada item, encontrar la matriz que transforma A en B.

$a)$ $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & -7 \\ 3 & -1 & 6 \end{bmatrix}$, $\quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 0 & -2 & 5 \\ 3 & -1 & 6 \end{bmatrix}$.

$b)$ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & -5 & 9 \end{bmatrix}$, $\quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -5 & 9 \end{bmatrix}$.

$c)$ $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 8 \\ 4 & -1 & 3 & -6 \end{bmatrix}$, $\quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 8 \\ 0 & 7 & -1 & -6 \end{bmatrix}$.

$d)$ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & -3 & 9 & 5 \end{bmatrix}$, $\quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

3. Determinar los valores de a y b para los cuales la matriz A es no singular siendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ a & 8 & 3 \\ 0 & b & 3 \end{bmatrix}$$

4. Considere el sistema de ecuaciones $Ax = b$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 6 & 9 & 8 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

   Resolver el sistema y hallar la factorización LU de A.

5. Probar que la descomposición LU y la descomposición LDU de una matriz A son únicas.

6. $a)$ Resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} 2x_1 & + & 4x_2 & & & + & 2x_4 & = & 6 \\ & & 3x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 4 \\ 2x_1 & + & 7x_2 & + & 9x_3 & + & 7x_4 & = & 8 \\ & & & & 6x_3 & + & 5x_4 & = & -4 \end{array} \right.$$

b) Si A es la matriz de coeficientes del sistema anterior, resolver el sistema $Ax = \tilde{b}$ para los casos $\tilde{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 10 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $\hat{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

7. Encontrar los factores L, D, U para la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Resolver el sistema $Ax = b$ con $b = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix}$.

8. Hallar la factorización LDU de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 6 & 9 & 8 \end{bmatrix}.$$

Resolver el sistema $A^T x = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$.

9. Encontrar P tal que PA admite una factorización LDU y mostrar tal factorización.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

10. Encontrar cuando sea posible, las matrices inversas de las matrices de coeficientes del ejercicio 1., utilizando el método de Gauss-Jordan.

EJERCICIOS ADICIONALES

1. Encontrar la matriz inversa de

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -c & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -b & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. *a*) Determinar las matrices que llevan la siguiente matriz A a su forma triangular U

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) Calcular la matriz $E = E_{32}E_{31}E_{21}$ que realiza todos los pasos de la eliminación $EA = U$.