Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Departamento de Matemática - Escuela de Ciencias Exactas y Naturales

COMPLEMENTOS DE MATEMÁTICA II

Licenciatura en Ciencias de la Computación - Año 2023
Docentes: Francisco Vittone - Mauro Lucci - Delfina Martin

Unidad 7: Categorías II.

1. Funtores

En la unidad anterior estudiamos los conceptos y las construcciones básicas asociadas a una categoría. Definiremos ahora una forma de relacionar dos categorías diferentes y establecer un concepto de *categorías equivalentes*. En todas las estructuras algebraicas que hemos estudiado el concepto de equivalencia está asociado con la existencia de isomorfismos, esto es, funciones biyectivas que asignan los elementos de una estructura en otra y preservan todas las características constitutivas de la estructura en cuestión. Como las categorías están definidas a partir de dos clases fundamentales, $\operatorname{ob}\mathscr{C}$ y $\operatorname{mor}\mathscr{C}$, necesitamos definir una forma de "mapear" objetos y morfismos de una categoría en otra:

Definición **1.** *Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ dos categorías. Un **funtor covariante** o simplemente un **funtor** de $\mathscr{C}$ en $\mathscr{D}$ es un par de funciones de clase, ambas denotadas por F,*

$$F : \operatorname{ob}\mathscr{C} \to \operatorname{ob}\mathscr{D}, \quad F : \operatorname{mor}\mathscr{C} \to \operatorname{mor}\mathscr{D}$$

tales que:

1. *para cada $f \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$, $F(f) \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{D}}(F(A),F(B))$:*

$$\begin{array}{cccccc} & A & \xrightarrow{f} & B & \text{en } \mathscr{C} \\ F: & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ & F(A) & \xrightarrow[F(f)]{} & F(B) & \text{en } \mathscr{D} \end{array}$$

2. *Para cada objeto A de $\mathscr{C}$, $F(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{F(A)}$*

3. *Para cualesquiera objetos A,B,C,D de $\mathscr{C}$ y morfismo $f \in \operatorname{Hom}(A,B)$, $g \in \operatorname{Hom}(B,C)$,*

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f).$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[rr, bend right, "F(g\circ f)=F(g)\circ F(f)"'] & F(B) \arrow[r, "F(g)"] & F(C) \end{tikzcd}$$

Si F es un funtor covariante de $\mathscr{C}$ en $\mathscr{D}$, lo denotamos $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$.

Ejemplos **1.** 1. **El funtor identidad.** Sea $\mathscr{C}$ una categoría. Pongamos $\mathrm{Id} : \mathrm{ob}\,\mathscr{C} \to \mathrm{ob}\,\mathscr{C}$ tal que $\mathrm{Id}(A) = A$ e $\mathrm{Id} : \mathrm{mor}\,\mathscr{C} \to \mathrm{mor}\,\mathscr{C}$ tal que $\mathrm{Id}(f) = f$. Es inmediato verificar que Id es un funtor covariante, denominado funtor identidad.

2. **El funtor olvido.** Sea $\mathscr{C}$ una categoría donde los objetos son conjuntos (con alguna estructura adicional), los morfismos son funciones, la composición es la composición usual de funciones y el morfismo identidad es la función identidad (por ejemplo Sgrp, Mon, Grp, Ab, Vect, Ret, etc.). Podemos definir un funtor $\mathrm{fgt} : \mathscr{C} \to \mathrm{Set}$ de modo que si A es un objeto de $\mathscr{C}$, $\mathrm{fgt}(A) = A$ y si f es un morfismo de $\mathscr{C}$, $\mathrm{fgt}(f) = f$, es decir, fgt devuelve a cada objeto de $\mathscr{C}$ el conjunto subyacente y a cada morfismo de $\mathscr{C}$ el mismo morfismo visto como función. Es claro que fgt es un funtor covariante (dejamos los detalles como ejercicio). Por ejemplo en Mon, podemos considerar los moniodes $(\mathbb{Z}, +)$ y $(\mathbb{Z}, \cdot)$, y tendremos que $\mathrm{fgt}(\mathbb{Z}, +) = \mathrm{fgt}(\mathbb{Z}, \cdot) = \mathbb{Z}$.

Definición **2.** *Una categoría $\mathscr{C}$ se dice **pequeña** si tanto $\mathrm{ob}\,\mathscr{C}$ como $\mathrm{mor}\,\mathscr{C}$ son conjuntos. De otra manera, $\mathscr{C}$ se dice una categoría **grande**. $\mathscr{C}$ se dice **localmente pequeña** si para cada par de objetos A, B de $\mathscr{C}$, $\mathrm{Hom}(A, B)$ es un conjunto.*

Ejemplo **2. El funtor hom_A.** Sea $\mathscr{C}$ una categoría localmente pequeña (por ejemplo Set, Grp, Sgrp, Poset, etc.) y sea A un objeto fijo en $\mathscr{C}$. Definamos $\mathrm{hom}_A : \mathrm{ob}\,\mathscr{C} \to \mathrm{ob}\,\mathrm{Set}$ por

$$\mathrm{hom}_A(B) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B).$$

Para ver que hom_A define un funtor de $\mathscr{C}$ en Set, debemos definir una función de clase de $\mathrm{mor}\,\mathscr{C}$ en $\mathrm{mor}\,\mathrm{Set}$. Consideremos un morfismo f en $\mathrm{mor}\,\mathscr{C}$ y supongamos que $f \in \mathrm{Hom}(B, C)$. Como $\mathrm{hom}_A(B) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$ y $\mathrm{hom}_A(C) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, C)$, debemos definir una función (un morfismo en Set)

$$\mathrm{hom}_A(f) : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, C) \tag{1}$$

Para ello basta observar que si $h \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$, entonces $h \circ f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, C)$. Por lo tanto, poniendo

$$\mathrm{hom}_A(f)(h) = f \circ h$$

queda bien definida la función (1):

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B) & \xrightarrow{\mathrm{hom}_A(f)} & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, C) \\ h & \longmapsto & f \circ h \end{array}$$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "f"] & & C \\ & A \arrow[ul, "h"] \arrow[ur, dashed, "f \circ h"'] & \end{tikzcd}$$

lo que a su vez permite definir la función de clases

$$\mathrm{hom}_A : \mathrm{mor}\,\mathscr{C} \to \mathrm{mor}\,\mathrm{Set}, \quad f \mapsto \mathrm{hom}_A(f)$$

que por construcción verifica la condición 1 de la Definición 1.

Veamos que se verifican las condiciones 2 y 3. Para ver que se verifica 2, consideremos un objeto B cualquiera en $\mathscr{C}$. Entonces $\hom_A(\mathrm{id}_B) : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$ está dado por

$$\hom_A(\mathrm{id}_B)(h) = \mathrm{id}_B \circ h = h = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)}(h)$$

donde la última es la identidad en Set. Luego $\hom_A(\mathrm{id}_B) = \mathrm{id}_{\hom_A(B)}$.

Veamos ahora que se verifica la condición 3. Sean $f \in \mathrm{Hom}(B,C)$ y $g \in \mathrm{Hom}(C,D)$. Tendremos entonces:

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B) & \xrightarrow{\hom_A(f)} & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,C) & \xrightarrow{\hom_A(g)} & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,D) \\ h & \longmapsto & f \circ h & \longmapsto & g \circ (f \circ h) \end{array}$$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] & C \arrow[r, "g"] & D \\ & A \arrow[ul, "h"] \arrow[u, dashed, "f \circ h"] \arrow[ur, dashed, "g\circ(f\circ h)"'] & \end{tikzcd}$$

que si $h \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$,

$$\hom_A(g) \circ \hom_A(f)(h) = \hom_A(g)(f \circ h) = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = \hom_A(g \circ f)(h).$$

Muchas veces el funtor $\hom_A$ se denota como $\mathrm{Hom}(A,-)$, donde la barra $-$ debe reemplazarse con los objetos de $\mathscr{C}$, esto es, esta notación sólo indica cómo actúa el funtor en $\mathrm{ob}\,\mathscr{C}$. De esta manera $\mathrm{Hom}(A,f)$ para un morfismo f simplemente denota la función $\hom_A(f)$.

Ejemplo **3. Los funtores producto $\times_A$ y $\times^A$.** Sea $\mathscr{C}$ una categoría con productos binarios. Fijemos un objeto $A \in \mathscr{C}$ y definamos $\times_A : \mathrm{ob}\,\mathscr{C} \to \mathrm{ob}\,\mathscr{C}$ tal que $\times_A(B) = A \times B$. Si $f \in \mathrm{Hom}(B,C)$, podemos considerar el morfismo producto $\mathrm{id}_A \times f : A \times B \to A \times C$ y por lo tanto queda definida una función de clases $\times_A : \mathrm{mor}\,\mathscr{C} \to \mathrm{mor}\,\mathscr{C}$ tal que $\times_A(f) = \mathrm{id}_A \times f$. Claramente $\times_A$ verifica la condición 1 de la Definición 1. Veamos que se verifican las otras dos.

Recordemos que dado $f \in \mathrm{Hom}(B,C)$, $f \circ \pi_B : A \times B \to C$ y $\mathrm{id}_A \times f$ es el único morfismo que hace conmutativo el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "\mathrm{id}_A"'] & A \times B \arrow[l, "\pi_A"'] \arrow[r, "\pi_B"] \arrow[dl, "\pi_A"'] \arrow[d, dashed, "\mathrm{id}_A \times f"] \arrow[dr, "f\circ\pi_B"] & B \arrow[d, "f"] \\ A & A \times C \arrow[l, "\pi_A"] \arrow[r, "\pi_C"'] & C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & A \times B \arrow[dl, "\pi_A"'] \arrow[d, dashed, "\mathrm{id}_A \times f"] \arrow[dr, "f\circ\pi_B"] & \\ A & A \times C \arrow[l, "\pi_A"] \arrow[r, "\pi_C"'] & C \end{tikzcd}$$

esto es, $\mathrm{id}_A \times f = \langle \pi_A, f \circ \pi_B \rangle$.

Como $\mathrm{id}_B \circ \pi_B = \pi_B$, $\mathrm{id}_A \times \mathrm{id}_B$ es el único morfismo que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} & A \times B \arrow[dl, "\pi_A"'] \arrow[d, dashed, "\mathrm{id}_A \times \mathrm{id}_B"] \arrow[dr, "\pi_B"] & \\ A & A \times B \arrow[l, "\pi_A"] \arrow[r, "\pi_B"'] & B \end{tikzcd}$$

Pero es evidente que $\mathrm{id}_{A\times B}$ también hace conmutativo el diagrama, de donde

$$\mathrm{id}_A \times \mathrm{id}_B = \mathrm{id}_{A\times B} \implies \times_A(\mathrm{id}_B) = \mathrm{id}_{\times_A(B)}$$

y entonces vale la condición 2. Si ahora $f \in \operatorname{Hom}(B, C)$ y $g \in \operatorname{Hom}(C, D)$, tenemos que $(\mathrm{id}_A \times g) \circ (\mathrm{id}_A \times f)$ hace conmutativo el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & A \times B \arrow[dl, "\pi_A"'] \arrow[d, dashed, "\mathrm{id}_A \times f"] \arrow[dr, "f \circ \pi_B"] & \\
A \arrow[d, "\mathrm{id}_A"'] & A \times C \arrow[l, "\pi_A"] \arrow[r, "\pi_C"'] \arrow[dl, "\pi_A"'] \arrow[d, dashed, "\mathrm{id}_A \times g"] \arrow[dr, "g \circ \pi_C"] & C \arrow[d, "g"] \\
A & A \times D \arrow[l, "\pi_A"'] \arrow[r, "\pi_D"] & D
\end{tikzcd}$$

En particular,

$$\pi_D \circ [(\mathrm{id}_A \times g) \circ (\mathrm{id}_A \times f)] = g \circ (f \circ \pi_B) = (g \circ f) \circ \pi_B. \tag{2}$$

Ahora bien, $\Phi = \mathrm{id}_A \times (g \circ f)$ es el único morfismo que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & A \times B \arrow[dl, "\pi_A"'] \arrow[d, dashed, "\Phi"] \arrow[dr, "(g \circ f) \circ \pi_B"] & \\
A & A \times D \arrow[l, "\pi_A"] \arrow[r, "\pi_D"'] & D
\end{tikzcd}$$

pero por (2) también hace conmutativo el diagrama, de donde

$$(\mathrm{id}_A \times g) \circ (\mathrm{id}_A \times f) = \mathrm{id}_A \times (g \circ f) \implies (\times_A(g)) \circ \times_A(f)) = \times_A(g \circ f)$$

y por lo tanto se verifica la condición 3 de la Definición 1. Luego $\times_A$ es un funtor de $\mathscr{C}$ en $\mathscr{C}$. Nuevamente, el funtor $\times_A$ muchas veces se denota por $A \times -$.

De manera completamente análoga, puede probarse que s $\times^A = - \times A$ dado por $\times^A(B) = B \times A$ para cada objeto B de $\mathscr{C}$ y si $f \in \operatorname{Hom}(B, C)$, $\times^A(f) = f \times \mathrm{id}_A \in \operatorname{Hom}(B \times A, C \times A)$ es un funtor covariante. Dejamos los detalles como ejercicio.

Ejemplo 4. **Morfismos como funtores**

1. Sean P, Q posets, $\mathscr{C}_P$ y $\mathscr{C}_Q$ las categorías asociadas y sea $F : P \to Q$ un morfismo de orden, esto es

$$x \preceq_P y \implies F(x) \preceq_Q F(y)$$

   Entonces F define una función de $\operatorname{ob}\mathscr{C}_P$ en $\operatorname{ob}\mathscr{C}_Q$. Pero observemos que si $(x, y) \in \operatorname{mor}\mathscr{C}_P$, es decir si $x \preceq_P y$, entonces $(F(x), F(y)) \in \operatorname{mor}\mathscr{C}_Q$. Por lo tanto $F(x, y) = (F(x), F(y))$ es una función entre $\operatorname{mor}\mathscr{C}_P$ y $\operatorname{mor}\mathscr{C}_Q$.

   Es inmediato verificar que F cumple las tres condiciones de la definición 1 y por lo tanto es un funtor de $\mathscr{C}_P$ en $\mathscr{C}_Q$. Recíprocamente, es fácil ver que si $G : \mathscr{C}_P \to \mathscr{C}_Q$ es un funtor, si nos quedamos con la función $G : \operatorname{ob}\mathscr{C}_P \to \operatorname{ob}\mathscr{C}_Q$, G es un morfismo de orden de P en Q.

2. Sean M y M' monoides y sea $F : M \to M'$. Entonces se verifica una situación análoga a la anterior: F define un funtor de $\mathscr{C}_M$ en $\mathscr{C}_{M'}$, donde si $\mathrm{ob}\,\mathscr{C}_M = \{x\}$ y $\mathrm{ob}\,\mathscr{C}_{M'} = \{y\}$, ponemos $F(x) = y$. Además $F(\mathrm{id}_x) = F(e_M) = e_{M'} = \mathrm{id}_y$ y $F(f \circ g) = F(f *_M g) = F(f) *_{M'} F(g) = F(f) \circ F(g)$ con lo cual se satisfacen todas las condiciones de la Definición 1. Recíprocamente, todo funtor $F : \mathscr{C}_M \to \mathscr{C}_{M'}$ define un morfismo de monoides.

Ejercicio **1.** *Sean G y H grupos y $\mathscr{C}_G$ y $\mathscr{C}_H$ las categorías asociadas (vistos como monoides). Probar que todo morfismo de grupos define un funtor de $\mathscr{C}_G$ en $\mathscr{C}_H$. ¿Es válida la recíproca?*

Ejemplo **5.** **Composición de funtores.** Sean $F : \mathscr{C}_1 \to \mathscr{C}_2$ y $G : \mathscr{C}_2 \to \mathscr{C}_3$ dos funtores covariantes. Definamos $G \circ F : \mathrm{ob}\,\mathscr{C}_1 \to \mathrm{ob}\,\mathscr{C}_3$ como $G \circ F(A) = G(F(A))$ y $G \circ F : \mathrm{mor}\,\mathscr{C}_1 \to \mathrm{mor}\,\mathscr{C}_3$ por $G \circ F(f) = G(F(f))$. Veamos que $G \circ F$ es un funtor de $\mathscr{C}_1$ en $\mathscr{C}_2$.

Sea $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_1}(A, B)$. Si $F(A) = A'$, $F(B) = B'$, $G(A') = A''$ y $G(B') = B''$, entonces si $f' = F(f)$, $f' \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_2}(A', B')$ y $G(f') \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_3}(A'', B'')$:

$$\begin{array}{cccc}
 & A & \xrightarrow{f} & B \\
F: & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 & F(A) & \xrightarrow[F(f)]{} & F(B) \\
G: & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 & G(F(A)) & \xrightarrow[G(F(f))]{} & G(F(B))
\end{array}$$

Por lo tanto

$$G \circ F(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_3}(G \circ F(A), G \circ F(B))$$

con lo cual se verifica la primera condición de la Definición 1.

Por otra parte, como F y G son funtores, tendremos $F(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{F(A)}$, $G(\mathrm{id}_{F(A)} = \mathrm{id}_{G(F(A)}$ de donde $G \circ F(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{G \circ F(A)}$.

Finalmente, si $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$, $g \in \mathrm{Hom}(C, D)$, tendremos que

$$G \circ F(g \circ f) = G(F(g) \circ F(f)) = G(F(g)) \circ G(F(f)) = (G \circ F)(g) \circ (G \circ F)(g).$$

Por lo tanto $G \circ F : \mathscr{C}_1 \to \mathscr{C}_2$ es un funtor, como queríamos probar.

Es fácil probar que si $\mathrm{Id}_{\mathscr{C}_1}$ es el funtor identidad de $\mathscr{C}_1$ e $\mathrm{Id}_{\mathscr{C}_2}$ es el funtor identidad de $\mathscr{C}_2$, entonces para cualquier funtor $F : \mathscr{C}_1 \to \mathscr{C}_2$ se verifica $F \circ \mathrm{Id}_{\mathscr{C}_1} = F$ y $\mathrm{Id}_{\mathscr{C}_2} \circ F = F$

Ejemplo **6.** **Categoría de categorías.** Como la composición de funtores entre categorías es un funtor y cada categoría tiene un funtor identidad, estamos tentados a considerar una nueva categoría Cat cuyos objetos sean todas las categorías y cuyos morfismos sean los funtores entre categorías. Esta definición lleva, incluso en la teoría de clases, a contradicciones como la paradoja de Russell. Sin embargo, sí podemos considerar una categoría Cat cuyos objetos sean todas las categorías pequeñas y los morfismos son funtores entre categorías pequeñas. Es fácil verificar que Cat cumple con todas las condiciones que definen una categoría, y se trata de una categoría grande, con lo cual Cat no es un objeto de sí misma.

Ejemplo **7. Funtores y diagramas.** Sea $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un funtor entre dos categorías $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$. Consideremos los siguientes diagramas en $\mathscr{C}$:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] & & B \arrow[dl, "g"] \\
& C \arrow[ul, "h"] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "j"] \arrow[d, "l"'] & B \arrow[d, "k"] \\
C \arrow[r, "m"] & D
\end{tikzcd}
$$

Si ambos diagramas son conmutativos, es decir, si

$$g \circ f = h, \quad k \circ j = m \circ l$$

entonces, como F es un funtor,

$$F(g) \circ F(f) = F(g \circ f) = F(h), \quad F(k) \circ F(j) = F(k \circ j) = F(m \circ l) = F(m) \circ F(l)$$

es decir, en $\mathscr{D}$ los siguientes diagramas también son conmutativos:

$$
\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[rr, "F(f)"] & & F(B) \arrow[dl, "F(g)"] \\
& F(C) \arrow[ul, "F(h)"] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "F(j)"] \arrow[d, "F(l)"'] & F(B) \arrow[d, "F(k)"] \\
F(C) \arrow[r, "F(m)"] & F(D)
\end{tikzcd}
$$

Más generalmente puede probarse que si un diagrama es conmutativo en $\mathscr{C}$, su imagen por un funtor es un diagrama conmutativo en $\mathscr{D}$.

Ejemplo **8. El funtor $\exp_A$.** Sea $\mathscr{C}$ una categoría con exponenciales y definamos $\exp_A : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ tal que $\exp_A(B) = B^A$ para cada objeto B de $\mathscr{C}$. Para definir $\exp_A(f)$ para un morfismo $f \in \mathrm{Hom}(B, C)$, consideremos el morfismo $f \circ \mathrm{eval}_B : B^A \times A \to C$. Por la propiedad universal de las exponenciales, existe un único morfismo $f^A := \mathrm{curry}(f \circ \mathrm{eval}_B) : B^A \to C^A$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$
\begin{tikzcd}
C^A \\
B^A \arrow[u, dashed, "f^A"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
C^A \times A \arrow[r, "\mathrm{eval}_C"] & C \\
B^A \times A \arrow[u, dashed, "f^A \times \mathrm{id}_A"] \arrow[ur, "f \circ \mathrm{eval}_B"] \arrow[r, "\mathrm{eval}_B"] & B \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}
$$

Por lo tanto podemos definir $\exp_A(f) = f^A \in \mathrm{Hom}(B^A, C^A)$.

Veamos que $\exp_A : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ es un funtor. Sea B un objeto cualquiera de $\mathscr{C}$ y veamos que $\exp_A(\mathrm{id}_B) = \mathrm{id}_{B^A}$. Observemos que $\mathrm{id}_B^A = \mathrm{curry}(\mathrm{eval} \circ \mathrm{id}_B)$ es el único morfismo que hace conmutativo el diagrama siguiente:

$$
\begin{tikzcd}
B^A \\
B^A \arrow[u, dashed, "\mathrm{id}_B^A"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
B^A \times A \arrow[r, "\mathrm{eval}"] & B \\
B^A \times A \arrow[u, dashed, "\mathrm{id}_B^A \times \mathrm{id}_A"] \arrow[ur] \arrow[r, "\mathrm{eval}"] & B. \arrow[u, "\mathrm{id}_B"']
\end{tikzcd}
$$

Pero trivialmente id_{B^A} también hace conmutativo el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
B^A \\
B^A \arrow[u, dashed, "\mathrm{id}_{B^A}"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
B^A \times A \arrow[r, "\mathrm{eval}"] & B \\
B^A \times A \arrow[u, dashed, "\mathrm{id}_{B^A} \times \mathrm{id}_A"] \arrow[ur] \arrow[r, "\mathrm{eval}"] & B. \arrow[u, "\mathrm{id}_B"']
\end{tikzcd}
$$

con lo cual deberá ser $\mathrm{id}_{B^A} = \mathrm{id}_B^A = \exp(\mathrm{id}_B)$.

Consideremos ahora objetos B, C, D y sean $f \in \mathrm{Hom}(B, C)$, $g \in \mathrm{Hom}(C, D)$ y observemos el siguiente diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
D^A \\
C^A \arrow[u, dashed, "g^A"] \\
B^A \arrow[u, dashed, "f^A"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
D^A \times A \arrow[r, "\mathrm{eval}_D"] & D \\
C^A \times A \arrow[u, dashed, "g^A \times \mathrm{id}_A"] \arrow[r, "\mathrm{eval}_C"] & C \arrow[u, "g"'] \\
B^A \times A \arrow[u, dashed, "f^A \times \mathrm{id}_A"] \arrow[r, "\mathrm{eval}_B"] & B \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}
\quad \rightsquigarrow \quad
\begin{tikzcd}
D^A \\
B^A \arrow[u, dashed, "g^A \circ f^A"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
D^A \times A \arrow[r, "\mathrm{eval}_D"] & D \\
B^A \times A \arrow[u, dashed, "\varphi"] \arrow[r, "\mathrm{eval}_B"] & B \arrow[u, "g \circ f"']
\end{tikzcd}
$$

donde $\varphi = (g^A \times \mathrm{id}_A) \circ (f^A \times \mathrm{id}_A)$. Como los cuadrados interiores del diagrama de la izquierda son conmutativos, el diagrama de la derecha resulta conmutativo, Pero por el Ejercicio 15 de la Práctica 6=, tenemos que

$$(g^A \times \mathrm{id}_A) \circ (f^A \times \mathrm{id}_A) = (g^A \circ f^A) \times \mathrm{id}_A$$

.

Por otra parte, $(g \circ f)^A \times \mathrm{id}_A$ hace conmutativo el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
D^A \\
B^A \arrow[u, dashed, "(g \circ f)^A"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
D^A \times A \arrow[r, "\mathrm{eval}_D"] & D \\
B^A \times A \arrow[u, dashed, "(g \circ f)^A \times \mathrm{id}_A"] \arrow[r, "\mathrm{eval}_B"] & B \arrow[u, "g \circ f"']
\end{tikzcd}
$$

y por lo tanto $(g \circ f)^A = g^A \circ f^A$, esto es, $\exp_A(g \circ f) = \exp_A(f) \circ \exp_A(g)$.

Ejemplo 9. **Funtores y dualidad.** Supongamos ahora que $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}^{op}$ es un funtor de una categoría $\mathscr{C}$ en la categoría opuesta (o dual) $\mathscr{D}^{op}$ de una categoría $\mathscr{D}$. Observemos que $F : \mathrm{ob}\,\mathscr{C} \to \mathrm{ob}\,\mathscr{D}^{op}$ puede considerarse directamente como una función de clases $F : \mathrm{ob}\,\mathscr{C} \to \mathrm{ob}\,\mathscr{D}$, dado que $\mathrm{ob}\,\mathscr{D}^{op} = \mathrm{ob}\,\mathscr{D}$. Por otra parte, recordemos que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^{op}}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(B, A)$. Por lo tanto, $F : \mathrm{mor}\,\mathscr{C} \to \mathrm{mor}\,\mathscr{D}^{op}$ es una función de clase $F : \mathrm{mor}\,\mathscr{C} \to \mathrm{mor}\,\mathscr{D}$ tal que si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$, entonces

$$F(f) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^{op}}(F(A), F(B)) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(B), F(A)).$$

Finalmente, si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$ y $g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B, C)$, entonces

$$F(g \circ f) = F(g) \circ^{op} F(f) = F(f) \circ F(g).$$

Es decir que cualquier funtor de $\mathscr{C}$ en $\mathscr{D}^{op}$ puede describirse completamente en términos de $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$, dando lugar al concepto de *funtor contravariante*:

Definición **3.** *Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ dos categorías. Un* ***funtor contrariante*** *de $\mathscr{C}$ en $\mathscr{D}$, denotado $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ es un par de funciones de clase, ambas denotadas por F,*

$$F : \mathrm{ob}\,\mathscr{C} \to \mathrm{ob}\,\mathscr{D}, \quad F : \mathrm{mor}\,\mathscr{C} \to \mathrm{mor}\,\mathscr{D}$$

tales que:

1. *para cada $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$, $F(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(B), F(A))$:*

$$\begin{array}{ccccc} & A & \xrightarrow{f} & B & \text{en } \mathscr{C} \\ F: & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ & F(A) & \xleftarrow[F(f)]{} & F(B) & \text{en } \mathscr{D} \end{array}$$

2. *Para cada objeto A de $\mathscr{C}$, $F(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{F(A)}$*

3. *Para cualesquiera objetos A, B, C, D de $\mathscr{C}$ y morfismo $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$, $g \in \mathrm{Hom}(B, C)$,*

$$F(g \circ f) = F(f) \circ F(g).$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F(A) & F(B) \arrow[l, "F(f)"'] & F(C) \arrow[l, "F(g)"'] \arrow[ll, bend left, "F(g\circ f)=F(f)\circ F(g)"] \end{tikzcd}$$

Ejemplo **10. El funtor contravariante Id^*.** Sea $\mathscr{C}$ una categoría y consideremos la categoría $\mathscr{C}^{op}$. Pongamos $\mathrm{Id}^* : \mathscr{C} \to \mathscr{C}^{op}$ por $\mathrm{Id}^*(A) = A$ para cada objeto A de $\mathscr{C}$ y $\mathrm{Id}^*(f) = f$ para cada morfismo f de $\mathscr{C}$. Si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$ entonces $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^{op}}(B, A)$ con lo cual $\mathrm{Id}^*(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^{op}}(\mathrm{Id}^*(B), \mathrm{Id}^*(A))$. Por otra parte,

$$\mathrm{Id}^*(g \circ f) = g \circ f = f \circ^{op} g = \mathrm{Id}^*(f) \circ^{op} \mathrm{Id}^*(g)$$

y por lo tanto Id^* es un funtor contravariante.

Observemos que de manera completamente análoga podemos definir un funtor contravariante $\mathrm{Id}^{**} : \mathscr{C}^{op} \to \mathscr{C}$, poniendo $\mathrm{Id}^{**}(A) = A$ y $Id^{**}(f) = f$, y resulta

$$\mathrm{Id}^* \circ \mathrm{Id}^{**} = \mathrm{Id}_{\mathscr{C}^{op}}, \quad \mathrm{Id}^{**} \circ \mathrm{Id}^* = \mathrm{Id}_{\mathscr{C}}\,.$$

Ejemplo **11. El funtor contravariante hom^B.** Si $\mathscr{C}$ es una categoría localmente pequeña, podemos considerar

$$\mathrm{hom}^B : \mathscr{C} \to \mathrm{Set}$$

poniendo $\mathrm{hom}^B(A) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$ para cada objeto A de $\mathscr{C}$ y si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, C)$,

$$\mathrm{hom}^B(f) : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$$

es tal que

$$\mathrm{hom}^B(f)(h) = f \circ h$$

para cada $h \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C,B)$:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C,B) \arrow[r, "\mathrm{hom}^B(f)"] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B) \\
h \arrow[r, mapsto] & h \circ f
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, dashed, "h\circ f"'] & & C \arrow[dl, "h"] \\
& B &
\end{tikzcd}$$

Si ahora $f \in \mathrm{Hom}(A,C)$, $g \in \mathrm{Hom}(C,D)$, entonces para cada $h \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(D,B)$,

$$\mathrm{hom}^B(f) \circ \mathrm{hom}^B(g)(h) = \mathrm{hom}^B(f)(h\circ g) = (h \circ g)\circ f = h \circ (g \circ f) = \mathrm{hom}^B(g\circ f)(h)$$

de donde $\mathrm{hom}^B(g \circ f) = \mathrm{hom}^B(f) \circ \mathrm{hom}^B(g)$:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(D,B) \arrow[r, "\mathrm{hom}^B(g)"] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C,B) \arrow[r, "\mathrm{hom}^B(f)"] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B) \\
h \arrow[r, mapsto] & h \circ g \arrow[r, mapsto] & (h\circ g)\circ f
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dashed, "(h\circ g)\circ f"'] & C \arrow[r, "g"] \arrow[d, dashed, "h\circ g"] & D \arrow[dl, "h"] \\
& B &
\end{tikzcd}$$

Dejamos los demás detalles de la prueba de que hom^B es un funtor contravariante como ejercicio. El funtor contravariante hom^B suele denotarse también como $\mathrm{Hom}(-,B)$.

Ejemplo **12. El funtor contravariante B^-.** Condieremos ahora una categoría con exponenciales $\mathscr{C}$ y fijemos $B \in \mathscr{C}$. Pongamos $F_B : \mathrm{ob}\,\mathscr{C} \to \mathrm{ob}\,\mathscr{C}$ tal que

$$F_B(A) = B^A.$$

Denotemos por $\mathrm{eval}^B : B^A \times A \to B$ y $\mathrm{eval}^C : B^C \times C \to B$ las funciones eval para las exponenciales B^A y B^C respectivamente. Si $f \in \mathrm{Hom}(A,C)$, definamos

$$\varphi = \mathrm{eval}^C \circ (\mathrm{id}_{B^C} \times f) : B^C \times A \to B$$

$$\begin{tikzcd}
B^C \times A \arrow[r, "\mathrm{id}_{B^C}\times f"] \arrow[rr, bend right, "\varphi"'] & B^C \times C \arrow[r, "\mathrm{eval}^C"] & B
\end{tikzcd}$$

Entonces existe un único morfismo $\mathrm{curry}(\varphi) : B^C \to B^A$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
B^A & & B^A \times A \arrow[r, "\mathrm{eval}^B"] & B \\
B^C \arrow[u, dashed, "\mathrm{curry}(\varphi)"] & & B^C \times A \arrow[u, dashed, "\mathrm{curry}(\varphi)\times \mathrm{id}_A"] \arrow[ur, "\varphi"] &
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto podemos definir $F_B : \mathrm{Hom}(A,C) \to \mathrm{Hom}(B^C, B^A)$ por

$$F_B(f) = \mathrm{curry}(\mathrm{eval}^C \circ (\mathrm{id}_{B^C} \times f)).$$

Dejamos como ejercicio verificar que F_B es efectivamente un funtor contravariante.

Ejercicio **2.** *Un funtor contravariante mapea diagramas conmutativos en diagramas conmutativos, con las flechas en el sentido inverso del diagrama original.*

2. Categorías isomorfas y anti-isomorfas. El principio de dualidad

El concepto de funtor permite definir una noción de morfismos entre categorías que en cierta forma preservan las relaciones entre objetos y morfismos. El paso que nos queda dar es definir una noción de equivalencia entre categorías. Imitando las definiciones que hemos dado de isomorfismo en las distintas estructuras algebraicas que estudiamos, introducimos la siguiente definición:

Definición **4.** *Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ dos categorías. Decimos que $\mathscr{C}$ es una* ***categoría isomorfa*** *a $\mathscr{D}$ si existen funtores $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ y $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ tales que $G \circ F = \mathrm{Id}_{\mathscr{C}}$ y $F \circ G = \mathrm{Id}_{\mathscr{D}}$.*

Decimos que $\mathscr{C}$ es ***anti-isomorfa*** *a $\mathscr{D}$ si existen funtores contravariantes $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ y $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ tales que $G \circ F = \mathrm{Id}_{\mathscr{C}}$, $F \circ G = \mathrm{Id}_{\mathscr{D}}$.*

Ejercicio **3.** *Probar que $\mathscr{C}$ es anti-isomorfa a $\mathscr{D}$ si y sólo si $\mathscr{C}$ es isomorfa a $\mathscr{D}^{op}$.*

Observemos que esta noción de isomorfismo de categorías coincide con la noción de isomorfismo en Cat, pero abarca a categorías que no necesariamente son pequeñas. Por otra parte, esencialmente dos categorías isomorfas son idénticas (cambian los "nombres" eventuales de sus objetos y sus morfismos).

Ejemplo **13.** Supongamos que $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ son categorías isomorfas mediante funtores $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ y $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$. Supongamos que $\mathscr{C}$ tiene un objeto inicial 0, esto es, para cada objeto A de $\mathscr{C}$, existe un único morfismo $f_A : 0 \to A$.

Sea $0' = F(0)$. Veamos que entonces $0'$ es un objeto inicial en $\mathscr{D}$. Fijemos un objeto A' de $\mathscr{D}$ y sea $A = G(A')$. Entonces existe un morfismo $f_A : 0 \to A$, y por lo tanto $F(f_A) : F(0) \to F(A)$.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "f_A"] \arrow[d, "F"'] & A \arrow[d, "F"] \\ 0' \arrow[r, "F(f_A)"'] & A' \end{tikzcd}$$

Pero $F(0) = 0'$ y $F(A) = F(G(A')) = \mathrm{Id}_{\mathscr{D}}(A') = A'$. Luego existe al menos un morfismo $f_{A'} = F(f_A) : 0' \to A'$. Si ahora $g : 0' \to A'$ es un morfismo cualquiera, entonces $G(g)$ es un morfismo de $G(0')$ en $A = G(A')$. Pero $G(0') = G(F(0)) = 0$, con lo cual $g = f_A$ como queríamos probar.

De manera similar se prueba que si $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ son categorías anti-isomorfas y 0 es un objeto inicial de $\mathscr{C}$, entonces $F(0)$ es un objeto terminal de $\mathscr{D}$:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "f_A"] \arrow[d, "F"'] & A \arrow[d, "F"] \\ 0' & A' \arrow[l, "F(f_A)"] \end{tikzcd}$$

En particular, como el funtor contravariante $\mathrm{Id}^* : \mathscr{C} \to \mathscr{C}^{op}$ define un anti-isomorfismo de $\mathscr{C}$ en $\mathscr{C}^{op}$, todo objeto inicial en $\mathscr{C}$ es un objeto terminal en $\mathscr{C}^{op}$.

Con el mismo razonamiento que en el ejemplo anterior, puede probarse que si F y G son categorías isomorfas, el funtor F mapea objetos terminales en $\mathscr{C}$ en objetos terminales de $\mathscr{D}$, monomorfismos, epimorfismos e isomorfismos de $\mathscr{C}$ en monomorfismos, epimorfismos, isomorfismos de $\mathscr{D}$ repectivamente, ecualizadores, productos, coproductos, límites, etc. en $\mathscr{C}$ en las respectivas construcciones en $\mathscr{D}$.

Por otra parte, si $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ son anti-isomorfas, el funtor contravariante F mapea objetos iniciales en terminales, monomorfismos en epimorfismos, productos en coproductos, límites en colímites, etc., y viceversa.

Como $\mathrm{Id}^* : \mathscr{C} \to \mathscr{C}^{op}$ es un anti-isomorfismos, existe una correspondencia biunívoca entre las construcciones en $\mathscr{C}$ y las co-construcciones en $\mathscr{C}$ y las co-construcciones en $\mathscr{C}$ y las construcciones en $\mathscr{C}^{op}$ (es decir, un epimorfismo en $\mathscr{C}$ es un monomorfismo en $\mathscr{C}^{op}$, un colímite en $\mathscr{C}$ es un límite en $\mathscr{C}^{op}$, etc.). Esta correspondencia se conoce como **principio de dualidad** y permite probar que las propiedades de una estructura (por ejemplo unicidad de los productos, límites, etc) son también válidas para la co-estructura.

3. Transformaciones naturales

La noción de categorías isomorfas (o anti-isomorfas) si bien es teóricamente útil (para probar por ejemplo el principio de dualidad), resulta demasiado restrictiva. Una noción más amplia y que tiene muchas más aplicaciones prevee que las composiciones $F \circ G$ y $G \circ F$ no *sean* los funtores identidad, sino que sean *equivalentes* a ellos en un cierto sentido *natural*. Para poder definir estos conceptos necesitamos introducir la noción de *transformaciones naturales* entre funtores:

Definición **5.** *Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ dos categorías y sean $F, G : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ dos funtores de $\mathscr{C}$ en $\mathscr{D}$. Una* ***transformación natural*** *de F en G, denotada $\eta : F \to G$, es una función de clases $\eta : \mathrm{ob}\,\mathscr{C} \to \mathrm{mor}\,\mathscr{D}$ tal que:*

1. *para cada objeto A de $\mathscr{C}$, $\eta_A = \eta(A) \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(A), G(A))$*

2. *para cada morfismo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$, el siguiente diagrama en $\mathscr{D}$ es conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(B) \arrow[r, "\eta_B"] & G(B) \end{tikzcd}$$

   es decir,

$$\eta_B \circ F(f) = G(f) \circ \eta_A.$$

Si cada morfismo η_A es un isomorfismo en $\mathscr{D}$, η se dice un ***isomorfismo natural****.*

Ejemplo **14.** Si $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ es un funtor, poniendo $\eta_A = \mathrm{id}_{F(A)}$ para cada $A \in \mathscr{C}$, resulta trivialmente que η es un isomorfismo natual de F en F.

Ejemplo **15.** Sea $\mathscr{C}$ una categoría con productos y sean $\times_A$ y $\times^A$ los funtores producto definidos en el Ejemplo 3, esto es,

$$\times_A = A \times -, \quad \times^A = - \times A.$$

Para cada $B \in \mathrm{ob}\,\mathscr{C}$, tenemos los productos $(A \times B, \pi_A, \pi_B)$ y $(B \times A, \tilde{\pi}_B, \tilde{\pi}_A)$ para los cuales el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
 & A \times B \arrow[dl, "\pi_B"'] \arrow[d, dashed, "\eta_B"] \arrow[dr, "\pi_A"] & \\
B & B \times A \arrow[l, "\tilde{\pi}_B"] \arrow[r, "\tilde{\pi}_A"'] & A
\end{tikzcd}$$

donde $\eta_B = \langle \widetilde{\pi_B, \pi_A} \rangle \in \mathrm{Hom}(A \times B, B \times A) = \mathrm{Hom}(\times_A(B), \times^A(B))$. No es dificil ver que de hecho η_B es un isomorfismo para cada $B \in \mathrm{ob}\,\mathscr{C}$.

Para ver que $\eta : \times_A \to \times^A$ define un isomorfismo natural debemos considerar $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B, C)$ y probar que el diagrama siguiente conmuta:

$$\begin{tikzcd}
A \times B \arrow[r, "\eta_B"] \arrow[d, "\mathrm{id}_A \times f = \times_A(f)"'] & B \times A \arrow[d, "\times^A(f) = f \times \mathrm{id}_A"] \\
A \times C \arrow[r, "\eta_C"] & C \times A
\end{tikzcd}$$

Analicemos la composición $\times^A(f) \circ \eta_B$. Usaremos la siguiente notación para las proyecciones en los distintos productos:

$$\pi_A : A \times B \to A, \quad \pi_B : A \times B \to B, \quad \tilde{\pi}_A : B \times A \to A, \quad \tilde{\pi}_B : B \times A \to B$$

$$p_A : A \times C \to A, \quad p_C : A \times C \to C, \quad \tilde{p}_A : C \times A \to A, \quad \tilde{p}_C : C \times A \to C.$$

Entonces $\times^A(f) \circ \eta_B$ es un morfismo que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & A \times B \arrow[dl, "\pi_B"'] \arrow[d, "\eta_B"] \arrow[dr, "\pi_A"] & \\
B \arrow[d, "f"'] & B \times A \arrow[l, "\tilde{\pi}_B"] \arrow[r, "\tilde{\pi}_A"'] \arrow[d, "\times^A(f)"] & A \arrow[d, "\mathrm{id}_A"] \\
C & C \times A \arrow[l, "\tilde{p}_C"] \arrow[r, "\tilde{p}_A"'] & A
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto también conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & A \times B \arrow[dl, "f \circ \pi_B"'] \arrow[d, "\times^A(f) \circ \eta_B"] \arrow[dr, bend left, "\pi_A"] & \\
C & C \times A \arrow[l, "\tilde{p}_C"] \arrow[r, "\tilde{p}_A"'] & A
\end{tikzcd} \tag{3}$$

De manera similar, el morfismo $\eta_C \circ \times_A(f)$ hace conmutar los siguientes diagramas:

$$
\begin{tikzcd}
 & A\times B \arrow[dl, "\pi_A"'] \arrow[d, "\times_A(f)"] \arrow[dr, "f\circ\pi_B"] & \\
A \arrow[d, "\mathrm{id}_A"'] & A\times C \arrow[l, "p_A"] \arrow[r, "p_C"'] \arrow[d, "\eta_C"] & C \arrow[d, "\mathrm{id}_C"] \\
A & C\times A \arrow[l, "\tilde{p}_A"] \arrow[r, "\tilde{p}_C"'] & C
\end{tikzcd}
\quad \rightsquigarrow \quad
\begin{tikzcd}
 & A\times B \arrow[dl, "\pi_A"'] \arrow[d, "\eta_C\circ\times_A(f)"] \arrow[dr, bend left, "f\circ\pi_B"] & \\
A & C\times A \arrow[l, "\tilde{p}_A"] \arrow[r, "\tilde{p}_C"'] & C
\end{tikzcd}
\tag{4}
$$

Si observamos el diagrama (3) y el diagrama de la derecha en (4), vemos que los triángulos exteriroes son escencialmente los mismos (son simétricos). Como existe un único morfismo que hace conmutar el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
 & A\times B \arrow[dl, "\pi_A"'] \arrow[d, dashed] \arrow[dr, "f\circ\pi_B"] & \\
A & C\times A \arrow[l, "\tilde{p}_A"] \arrow[r, "\tilde{p}_C"'] & C
\end{tikzcd}
$$

concluimos que

$$\times^A(f)\circ\eta_B = \eta_C\circ\times_A(f)$$

como queríamos probar.

Ejemplo **16.** Consideremos una categoría $\mathscr{C}$ con exponenciales y sea A un objeto fijo de $\mathscr{C}$. Pongamos $F_A : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ el funtor $F_A = \times^A \circ \exp_A$, esto es:

- $F_A(B) = B^A \times A$,
- Si $f \in \mathrm{Hom}(B, C)$,
$$F_A(f) = \times^A \circ \exp_A(f) = f^A \times \mathrm{id}_A .$$

Pongamos $\eta_B = \mathrm{eval}_B : B^A \times A \to B$. Entonces $\eta : F_A \to \mathrm{Id}$ es una transformación natural. En efecto, si $f \in \mathrm{Hom}(B, C)$ vimos en el Ejemplo 8 que el siguiente diagrama conmuta:

$$
\begin{tikzcd}
C^A\times A \arrow[r, "\mathrm{eval}_C"] & C \\
B^A\times A \arrow[u, dashed, "f^A\times\mathrm{id}_A"] \arrow[r, "\mathrm{eval}_B"] & B \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}
$$

En términos de los funtores F_A, Id y la transformación η lo podemos reescribir como

$$
\begin{tikzcd}
F_A(B) \arrow[r, "\eta_B"] \arrow[d, "F(f)"] & \mathrm{Id}(B) \arrow[d, "\mathrm{Id}(f)"] \\
F_A(C) \arrow[r, "\eta_C"] & \mathrm{Id}(C)
\end{tikzcd}
$$

Ejemplo **17. Composición de transformaciones naturales** Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ dos categorías y sean $F, G, H : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ funtores. Supongamos que existen transformaciones naturales $\eta : F \to G$ y $\tau : G \to H$. Pongamos $\tau \circ \eta : F \to H$ de modo que $\tau \circ \eta(A) = \tau_A \circ \eta_A$. Tenemos entonces el siguiente diagrama para cada par de objetos A, B de $\mathscr{C}$ y cada $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$:

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[r, "\tau_A"] \arrow[d, "G(f)"] & H(A) \arrow[d, "H(f)"] \\ F(B) \arrow[r, "\eta_B"] & G(B) \arrow[r, "\tau_B"] & H(B) \end{tikzcd} \tag{5}$$

Como los cuadrados interiores del diagrama (5) conmutan, conmuta el rectángulo exterior, esto es, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\tau_A \circ \eta_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & H(A) \arrow[d, "H(f)"] \\ F(B) \arrow[r, "\tau_B \circ \eta_B"] & H(B) \end{tikzcd}$$

y por lo tanto $\tau \circ \eta$ es una transformación natural de F en H. Como la composición de isomorfismos en una categoría es un isomorfismos, resulta que si η y τ son isomorfismos naturales, entonces $\tau \circ \eta$ es un isomorfismo natural.

Ejemplo **18. Categoría de funtores $\mathscr{D}^{\mathscr{C}}$.** Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ dos categorías y pongamos $\mathscr{D}^{\mathscr{C}}$ tal que los objetos de $\mathscr{D}^{\mathscr{C}}$ son los funtores de $\mathscr{C}$ en $\mathscr{D}$ y los morfismos son transformaciones naturales entre funtores.

Las funciones dom y codom son las obvias y la composición es la composición de transformaciones naturales, que como vimos en el Ejemplo 17 está bien definida.

Para cada funtor $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$, la transformación $\mathrm{id}_F : F \to F$ tal que $\mathrm{id}_F(A) := \mathrm{id}_{F(A)}$ es una transformación natural (ver Ejemplo 14) y es inmediato verificar que si $\eta : F \to G$ es una transformación natural entre F y G, entonces

$$\eta \circ \mathrm{id}_F = \eta, \quad \mathrm{id}_G \circ \eta = \eta$$

con lo cual id_F es una identidad en $\mathscr{D}^{\mathscr{C}}$.

Finalmente, si $\eta : F \to G$, $\tau : G \to H$ y $\rho : H \to N$ son transformaciones naturales, entonces

$$\rho \circ (\tau \circ \eta)(A) = \rho_A \circ (\tau_A \circ \eta_A) = (\rho_A \circ \tau_A) \circ \eta_A = (\rho \circ \tau) \circ \eta(A)$$

con lo cual la composición es asociativa.

Concluimos que $\mathscr{D}^{\mathscr{C}}$ es una categoría.

La categoría $\mathscr{D}^{\mathscr{C}}$ es particularmente importante dado que muchas categorías son categorías de funtores "disfrazadas".

Ejemplo **19. En Cat, $\mathscr{C}^{\mathbf{1}} \simeq \mathscr{C}$.** Recordemos que $\mathbf{1}$ es la categoría con un único objeto, pongamos $\mathrm{ob}\,\mathbf{1} = \{*\}$ y un único morfismo, id_*. Sea $\mathscr{C}$ una categoría cualquiera en Cat (la categoría de categorías pequeñas, ver Ejemplo 6). Si $\mathrm{ob}\,\mathscr{C} = \emptyset$, entonces $\mathrm{mor}\,\mathscr{C} = \emptyset$ y $\mathscr{C}^{\mathbf{1}} = \mathscr{C}$. Supondremos entonces que $\mathrm{ob}\,\mathscr{C}$ es un conjunto no vacío. Cada funtor de $\mathbf{1}$ en $\mathscr{C}$ está completamente determinado por algún elemento de $\mathrm{ob}\mathscr{C}$, pues en efecto, una vez que fijamos $x \in \mathrm{ob}\mathscr{C}$, existe un único funtor $F_x : \mathbf{1} \to \mathscr{C}$ que es aquel definido por $F_x(*) = x$, $F(\mathrm{id}_*) = \mathrm{id}_x$. Ahora bien, si $f \in Hom_{\mathscr{C}}(x, y)$ es un morfismo cualquiera de x en y, entonces $\eta(*) = f$ define una tranformación natural $\eta : F_x \to F_y$: en efecto, el siguiente diagrama conmuta trivialmente:

$$\begin{tikzcd}
x = F_x(*) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{id}_x = F_x(\mathrm{id}_*)"'] & y = F_y(*) \arrow[d, "\mathrm{id}_y = F_y(\mathrm{id}_*)"] \\
x = F_x(*) \arrow[r, "f"] & y = F_y(*)
\end{tikzcd}$$

Ahora bien, los objetos de $\mathscr{C}^{\mathbf{1}}$ son los funtores de $\mathbf{1}$ en $\mathscr{C}$ y los morfismos son las transformaciones naturales entre funtores. Por otra parte, en Cat, los morfismos son funtores entre categorías. Pongamos entonces $\tilde{F} : \mathscr{C}^{\mathbf{1}} \to \mathscr{C}$, $\tilde{F}(F) = F(*)$, $\tilde{F}(\eta) = \eta(*)$, entonces es claro que $\tilde{F}$ es un funtor. Además $\hat{F} : \mathscr{C} \to \mathscr{C}^{\mathbf{1}}$ dado por $\hat{F}(x) = F_x$ y $\hat{F}(f) = \eta$ tal que $\eta(*) = f$ también es un funtor, y es fácil verificar que $\hat{F} \circ \tilde{F} = \mathrm{Id}_{\mathscr{C}^{\mathbf{1}}}$, $\tilde{F} \circ \hat{F} = \mathrm{Id}_{\mathscr{C}}$ con lo cual $\tilde{F}$ es un isomorfismo de Cat.

Definición **6.** *Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ dos categorías. Una* ***equivalencia de categorías*** *entre $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ consiste de dos funtores $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ y $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ y dos isomorfismos naturales $\eta : \mathrm{Id}_{\mathscr{C}} \to G \circ F$ y $\tau : \mathrm{Id}_{\mathscr{D}} \to F \circ G$.*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "f"'] & G(F(A)) \arrow[d, "G(F(f))"] & A' \arrow[r, "\tau_{A'}"] \arrow[d, "g"'] & F(G(A')) \arrow[d, "F(G(g))"] \\
B \arrow[r, "\eta_B"] & G(F(B)) & B' \arrow[r, "\tau_{B'}"] & F(G(B'))
\end{tikzcd}$$

Esencialmente, una equivalencia entre una categoría $\mathscr{C}$ y una categoría $\mathscr{D}$ mapea un objeto A de $\mathscr{C}$ en uno de $\mathscr{D}$ por F, y a su vez lo devuelve a un objeto A' de $\mathscr{C}$ por G que es isomorfo a A. Es decir, $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ son esencialmente la misma categoría salvo objetos isomorfos.

Como consecuencia de las propiedades que discutimos en los ejemplos anteriores, tenemos el siguiente reusltado, cuya prueba dejamos como ejercicio:

Lema **1.** *Sean $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_3$ categorías.*

1. *$\mathscr{C}_1$ es equivalente a $\mathscr{C}_1$.*

2. *Si $\mathscr{C}_1$ es equivalente a $\mathscr{C}_2$ entonces $\mathscr{C}_2$ es equivalente a $\mathscr{C}_1$.*

3. *Si $\mathscr{C}_1$ es equivalente a $\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_2$ es equivalente a $\mathscr{C}_3$, entonces $\mathscr{C}_1$ es equivalente a $\mathscr{C}_3$.*

Ejemplo **20.** La categoría $\mathbf{1}$ cuyo único objeto es $*$ y cuyo único morfismo es id_* es equivalente a la categoría $\mathscr{D}$ con dos objetos A y B y cuatro morfismos: id_A, id_B, $f : A \to B$ y $g : B \to A$ tal que $g \circ f = \mathrm{id}_A$ y $f \circ g = \mathrm{id}_B$. Observemos que en $\mathscr{D}$ los objetos A y B son isomorfos, dado que f y g son isomorfismos, inverso uno del otro. Por lo tanto los objetos de $\mathscr{D}$ no "modelan" más situaciones que el único objeto de $\mathbf{1}$, y tiene sentido que estas categorías sean equivalentes, aunque claramente no son isomorfas.

Podemos ver esto explicitamente definiendo $F : \mathbf{1} \to \mathscr{D}$, $F(*) = A$, $F(\mathrm{id}_*) = \mathrm{id}_A$ y $G : \mathscr{D} \to \mathbf{1}$, $G(A) = G(B) = *$, $G(\mathrm{id}_A) = G(\mathrm{id}_B) = G(f) = G(g) = \mathrm{id}_*$. Es inmediato verificar que F es un funtor y, como $g \circ f = \mathrm{id}_A$ y $f \circ g = \mathrm{id}_B$, G también lo es.

Definamos ahora $\eta : \mathrm{Id}_{\mathbf{1}} \to G \circ F$ como $\eta_* = \mathrm{id}_*$, y $\tau : \mathrm{Id}_{\mathscr{D}} \to F \circ G$ tal que $\tau_A = \mathrm{id}_A$, $\tau_B = g$. Es inmediato que η es un isomorfismo natural. Para ver que τ también lo es, observemos que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\tau_A = \mathrm{id}_A"] \arrow[d, "\mathrm{id}_A"'] & A = F(G(A)) \arrow[d, "\mathrm{id}_A = F(G(\mathrm{id}_A))"] \\ A \arrow[r, "\tau_A = \mathrm{id}_A"] & A = F(G(A)) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\tau_A = \mathrm{id}_A"] \arrow[d, "f"'] & A = F(G(A)) \arrow[d, "\mathrm{id}_A = F(G(f))"] \\ B \arrow[r, "\tau_B = g"] & A = F(G(B)) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\tau_B = g"] \arrow[d, "\mathrm{id}_B"'] & A = F(G(B)) \arrow[d, "\mathrm{id}_A = F(G(\mathrm{id}_B))"] \\ B \arrow[r, "\tau_B = g"] & A = F(G(B)) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B \arrow[r, "\tau_B = g"] \arrow[d, "g"'] & A = F(G(B)) \arrow[d, "\mathrm{id}_A = F(G(g))"] \\ A \arrow[r, "\tau_A = \mathrm{id}_A"] & A = F(G(A)) \end{tikzcd}$$

Definición **7.** *Sea $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un funtor. Decimos que:*

1. *F es **full** si para cada par de objetos A, B de $\mathscr{C}$, la función $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(A), F(B))$ es sobreyectiva.*

2. *F es **fiel** si para cada par de objetos A, B de $\mathscr{C}$, la función $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(A), F(B))$ es inyectiva.*

3. *F es **esencialmente sobreyectiva en objetos** si para cada objeto $D \in \mathscr{D}$, existe un objeto A en $\mathscr{C}$ tal que D es isomorfo a $F(A)$.*

Lema **2.** *Si $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ define una equivalencia de $\mathscr{C}$ en $\mathscr{D}$, entonces F es full, fiel y esencialmente sobreyectivo en objetos.*

Demostración. Supongamos que $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ define una equivalencia y sean $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$, η y τ los elementos que completan la definición.

Veamos primero que F es fiel. Sean $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$ y supongamos que $F(f) = F(g)$. Luego $G(F(f)) = G(F(g))$ y los diagramas siguientes conmutan:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "f"'] & G(F(A)) \arrow[d, "G(F(f))"] \\ B \arrow[r, "\eta_B"] & G(F(B)) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "g"'] & G(F(A)) \arrow[d, "G(F(g))"] \\ B \arrow[r, "\eta_B"] & G(F(B)) \end{tikzcd}$$

Pero como η_A y η_B son isomorfismos tenemos que

$$f = \eta_B^{-1} \circ G(F(f)) \circ \eta_A = \eta_B^{-1} \circ G(F(g)) \circ \eta_A = g.$$

Como los roles de F y G en la definición son simétricos, con la misma prueba resulta que G también es fiel.

Veamos ahora que F es full. Sea $g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(A), F(B))$ y sea $k = G(g) \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(G(F(A)), G(F(B)))$. Pongamos $h = \eta_B^{-1} \circ k \circ \eta_A$, entonces nuevamente los siguientes diagramas conmutan:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "h"'] & G(F(A)) \arrow[d, "k"] \\
B \arrow[r, "\eta_B"] & G(F(B))
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "h"'] & G(F(A)) \arrow[d, "G(F(h))"] \\
B \arrow[r, "\eta_B"] & G(F(B))
\end{tikzcd}
$$

Luego con el mismo argumento que antes, tenemos que $k = G(F(h))$ o sea $G(g) = G(F(h))$ y como G es fiel, $g = F(h)$.

Dejamos como ejercicio la prueba de que F es esencialmente sobreyectivo en objetos. $\square$

Ejemplo **21.** Supongamos que $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ son equivalentes, con funtores $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$, $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ e isomorfismos naturales $\eta : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ y $\tau : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$. Supongamos que $\mathscr{C}$ tiene un objeto inicial 0 y sea $0' = F(0)$. Veamos que $0'$ es un objeto inicial de $\mathscr{D}$. Sea A' un objeto de $\mathscr{D}$ y $A = G(A')$. Entonces existe un único morfismo $f_A : 0 \to A$, que se mapea por F en un morfismo $F(f_A) : 0' \to F(A)$. Ahora bien, $F(A) = F(G(A'))$ no necesariamente es A', pero existe un isomorfismo $\tau_{A'} : A' \to F(G(A')) = F(A)$. Por lo tanto poniendo $g_{A'} = \tau_{A'}^{-1} \circ F(f_A)$, tenemos un morfismo de $0'$ en A'.

$$
\begin{tikzcd}
0' \arrow[d, dashed, "g_{A'}"'] \arrow[dr, "F(f_A)"] & \\
A' & F(A) \arrow[l, "\tau_{A'}^{-1}"]
\end{tikzcd}
$$

Supongamos ahora que existe otro morfismo $h : 0' \to A'$. Entonces $\tau_{A'} \circ h : 0' \to F(A)$ es un morfismo de $0'$ en $F(A)$.

$$
\begin{tikzcd}
0' \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, dashed, "\tau_{A'} \circ h"] & \\
A' \arrow[r, "\tau_{A'}"] & F(A)
\end{tikzcd}
$$

Por el Lema 2, existe $f : 0 \to A$ tal que $F(f) = \tau_{A'} \circ h$. Pero el único morfismo de 0 en A es f_A, con lo cual $\tau_{A'} \circ h = F(f_A)$ y por lo tanto $h = \tau_{A'}^{-1} \circ F(f_A) = g_{A'}$. Luego $0'$ es un objeto inicial de $\mathscr{D}$.

Con argumentos similares al del ejemplo anterior puede probarse el siguiente resultado:

Teorema **3.** *Si $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ define una equivalencia entre $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$, entonces F preserva las propiedades categóricas de $\mathscr{C}$. Esto es, F mapea objetos iniciales, terminales, productos, límites, colímites, exponenciales, etc. en $\mathscr{C}$ en los respectivos objetos de $\mathscr{D}$.*

4. Adjunciones.

Una definición aún más débil que la de equivalencia, pero útil en muchas aplicaciones, es la de *adjunción*:

Definición **8.** *Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ dos categorías y $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$, $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ funtores.*

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C} \arrow[r, shift left, "F"] & \mathscr{D} \arrow[l, shift left, "G"] \end{tikzcd}$$

*Una **adjunción** entre F y G es una transformación natural $\eta : \mathrm{Id}_{\mathscr{C}} \to (G \circ F)$*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "h"'] & G(F(A)) \arrow[d, "G\circ F(h)"] \\ B \arrow[r, "\eta_B"] & G(F(B)) \end{tikzcd}$$

tal que vale la siguiente propiedad universal: Para cada $X \in \mathrm{ob}\,\mathscr{C}$, cada $Y \in \mathrm{ob}\,\mathscr{D}$ y cada $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, G(Y))$, existe un único morfismo $f^{\#} : F(X) \to Y$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[dr, "f"'] & G(F(X)) \arrow[d, dashed, "G(f^{\#})"] \\ & G(Y) \end{tikzcd} \tag{6}$$

*En este caso, decimos que F es un **adjunto a izquierda** de G y G es un **adjunto a derecha** de F. La transformación natural η se denomina **unidad** de la ajunción.*

Ejemplo **22. Todo isomorfismo es una equivalencia y toda equivalencia define una adjunción.** La primera afirmación es trivial: si $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ define un isomorfismo entre categorías, es decir, existe un funtor $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ tal que $G \circ F = \mathrm{Id}_{\mathscr{C}}$ y $F \circ G = \mathrm{Id}_{\mathscr{D}}$, entonces definiendo η y τ como los isomorfismos naturales del Ejemplo 14 tenemos que F define una equivalencia entre $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$.

Si ahora $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ son equivalentes con funtores $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$, $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ e isomorfismos naturales η y τ, entonces en particular η es una transformación natural de $\mathrm{Id}_{\mathscr{C}}$ en $G \circ F$. Para ver que es una adjunción, cinsideremos un objeto X de $\mathscr{C}$, un objeto Y de $\mathscr{D}$ y un morfismo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, G(Y))$. Pongamos $k : G(F(X)) \to G(Y)$, $k = f \circ \eta_X^{-1}$. Entonces k hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[dr, "f"'] & G(F(X)) \arrow[d, "k"] \\ & G(Y) \end{tikzcd}$$

Por el Lema 2 aplicado a G, existirá $f^{\#} : F(X) \to Y$ tal que $G(f^{\#}) = k$.

Observemos ahora que si $h : F(X) \to Y$ es un morfismo que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[dr, "f"'] & G(F(X)) \arrow[d, "G(h)"] \\ & G(Y) \end{tikzcd}$$

resulta $G(h) = f \circ \eta_X^{-1} = k$, con lo cual $G(h) = G(f^{\#})$, y como G es fiel, $h = f^{\#}$, esto es, $f^{\#}$ es único como queríamos probar.

Ejemplo **23. Conexiones de Galois.** Como hemos verificado hasta el momento, cada propiedad de un poset P puede pensarse a través de alguna propiedad de la categoría $\mathscr{C}_P$. Consideremos ahora dos posets P y G y un par de morfismos de orden $F : P \to Q$ y $G : Q \to P$. Decimos que el par (F, G) es una *conexión de Galois (monótona)* si para cada $x \in P$, $y \in Q$,

$$F(x) \preceq_Q y \iff x \preceq_P G(y). \tag{7}$$

Sean ahora $\mathscr{C}_P$, $\mathscr{C}_Q$ las categorías asociadas a P y Q. Recordemos que si $x, x' \in P = \mathrm{ob}\,\mathscr{C}_P$, existe un morfismo de x en x' si y sólo si $x \preceq_P x'$ y por lo tanto todo morfismo de orden $F : P \to Q$ induce un funtor $F : \mathscr{C}_P \to \mathscr{C}_Q$, poniendo $F(x, x') = (F(x), F(x'))$ cada vez que $(x, x') \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_P}(x, x')$ (ver Ejemplo 4).

Probaremos que (F, G) es una conexión de Galois si y sólo si existe una adjunción η de F en G.

Comencemos analizando cuándo existe una unidad de adjunción $\eta : \mathrm{Id}_{\mathscr{C}_P} \to G \circ F$. Como una unidad de adjunción debe ser una transformación natural, el diagrama

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "\eta_x"] \arrow[d, "{(x,x')}"'] & G(F(x)) \arrow[d, "{G\circ F(x,x')}"] \\ x' \arrow[r, "\eta_{x'}"] & G(F(x')) \end{tikzcd}$$

debe ser conmutativo para cualquier par de objetos x, x' tales que $x \preceq_P x'$. A su vez, esto ocurre si y sólo si el diagrama de Hasse de $(P, \preceq_P)$ tiene como subdiagrama a:

$$\begin{tikzcd} & G(F(x')) \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \\ G(F(x)) \arrow[dr, dash] & x' \arrow[d, dash] \\ & x \end{tikzcd}$$

Ahora bien, como $G \circ F : P \to P$ es un morfismo de orden, tendremos automáticamente que si $x \preceq_P x'$, entonces $G(F(x)) \preceq_P G(F(x'))$. Por lo tanto, existirá una transformación natural $\eta : \mathrm{Id}_{\mathscr{C}_P} \to G \circ F$ si y sólo si

$$\forall\, x \in P, \quad x \preceq_P G(F(x)). \tag{8}$$

Por otra parte, la transformación natural η será una unidad de adjunción si y sólo si para cada $x \in P = \mathrm{ob}\,\mathscr{C}_P$ y cada $y \in Q = \mathrm{ob}\,\mathscr{C}_Q$, si existe un morfismo $f : x \to G(y)$ (o sea, si $x \preceq_P G(y)$), existe un morfismo $f^\# : F(x) \to y$ (o sea, $F(x) \preceq_Q y$) tal que conmuta

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "\eta_x"] \arrow[dr, "f"'] & G(F(x)) \arrow[d, dashed, "G(f^\#)"] \\ & G(y) \end{tikzcd}$$

Esto es, η será una unidad de adjunción si y sólo si η es una transformación natural tal que

$$x \preceq_P G(y) \implies F(x) \preceq_Q y \;\wedge\; x \preceq_P G(F(x)) \preceq_P G(y) \tag{9}$$

Es decir, η es una unidad de adjunción si y sólo si valen (8) y (9). Como la condición $F(x) \preceq_Q y$ junto con (8) y el hecho que G es un morfismo de orden implican la condición $x \preceq_P G(F(x)) \preceq_P G(y)$ concluimos que existe una unidad de adjunción η de F en G si y sólo si para cada $x \in P$ y cada $y \in G$ se verifica

$$\begin{cases} x \preceq_P G(F(x)) \\ x \preceq_P G(y) \implies F(x) \preceq_Q y. \end{cases} \tag{10}$$

Supongamos entonces que (F, G) es una conexión de Galois (o sea vale (7)) entonces vale inmediatamente la segunda condición en (10). Por otra parte, si (F, G) es una conexión de Galois, vale

$$F(x) \preceq_Q y \implies x \preceq_P G(y)$$

y por lo tanto tomando $y = F(x)$, como $F(x) \preceq_Q F(x)$, resulta que $x \preceq_P G(F(x))$ cualquiera sea $x \in P$. Luego vale (10) y existe una adjunción η de F en G.

Recíprocamente, si existe una adjunción η de F en G, entonces por (10) tenemos la implicación

$$x \preceq_P G(y) \implies F(x) \preceq_Q y$$

para cada $x \in P$, $y \in Q$. Supongamos ahora que $x \in P$, $y \in Q$ son tales que $F(x) \preceq_Q y$. Como G es un morfismo de orden, $G(F(x)) \preceq_P G(y)$. Pero por (10) $x \preceq_P G(F(x))$ y por transitividad resulta

$$x \preceq_P G(F(x)) \preceq_P G(y).$$

Hemos probado entonces que

$$F(x) \preceq_Q y \implies x \preceq_P G(y)$$

con lo cual (F, G) es una conexión de Galois.

En muchos ejemplos importantes es más simple encontrar una transformación natural $\varepsilon : (G \circ F) \to \mathrm{Id}_{\mathscr{D}}$ antes que una unidad de adjunción. Veremos que, bajo ciertas condiciones, ambas construcciones son equivalentes.

Definición **9.** *Sean $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ y $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ dos funtores. Una* ***counidad de adjunción*** *entre F y G es una transformación natural $\varepsilon : F \circ G \to \mathrm{Id}_{\mathscr{D}}$ tal que para cada objeto X de $\mathscr{C}$, cada objeto Y de $\mathscr{D}$ y cada morfismo $g : F(X) \to Y$, existe un único morfismo $g^* : X \to G(Y)$ tal que el siquiete diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} F(G(Y)) \arrow[r, "\varepsilon_Y"] & Y \\ F(X) \arrow[u, dashed, "F(g^*)"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Lema **4.** *Toda unidad de adjunción η define una counidad de adjunción y, recíprocamente, toda counidad de adjunción ε define una adjunción.*

Demostración. Sean $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ dos funtores y $\eta : \mathrm{Id}_{\mathscr{C}} \to G \circ F$ una unidad de adjunción.

Construiremos una counidad de adjunción $\varepsilon : F \circ G \to \mathrm{Id}_{\mathscr{D}}$.

Consideremos $X = G(Y)$ y el morfismo identidad $\mathrm{id}_{G(Y)} : G(Y) \to G(Y)$. Como η es una unidad de adjunción, existe un único morfismo $\varepsilon_Y = (\mathrm{id}_{G(Y)})^{\#} : F(X) = F(G(Y)) \to Y$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{G(Y)}"'] & G(F(X)) \arrow[d, dashed, "G(\varepsilon_Y)"] \\
& G(Y)
\end{tikzcd}
\quad \rightsquigarrow \quad
\begin{tikzcd}
G(Y) \arrow[r, "\eta_{G(Y)}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{G(Y)}"'] & G(F(G(Y))) \arrow[d, dashed, "G(\varepsilon_Y)"] \\
& G(Y)
\end{tikzcd}
\tag{11}
$$

Veamos que ε es una transformación natural. Sean Y, Y' objetos de $\mathscr{D}$ y sea $g : Y \to Y'$ un morfismo. Debemos probar que el siguiente diagrama conmuta:

$$
\begin{tikzcd}
F(G(Y)) \arrow[r, "\varepsilon_Y"] \arrow[d, "F(G(g))"'] & Y \arrow[d, "g"] \\
F(G(Y')) \arrow[r, "\varepsilon_{Y'}"] & Y'
\end{tikzcd}
$$

Para ello consideremos el siguiente diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
G(Y) \arrow[rr, "G(g)"] \arrow[dr, "\eta_{G(Y)}"] \arrow[dd, "\mathrm{id}_{G(Y)}"'] & & G(Y') \arrow[dr, "\eta_{G(Y')}"] \arrow[dd, "\mathrm{id}_{G(Y')}"] & \\
& G(F(G(Y))) \arrow[rr, "G(F(G(g)))"] \arrow[dl, "G(\varepsilon_Y)"] & & G(F(G(Y'))) \arrow[dl, "G(\varepsilon_{Y'})"] \\
G(Y) \arrow[rr, "G(g)"'] & & G(Y') &
\end{tikzcd}
$$

Por (11), el diagrama triangular $\mathcal{T}_1$ con vértices $G(Y), G(Y)$ y $G(F(G(Y)))$ y el diagrama triangular $\mathcal{T}_2$ con vértices $G(Y'), G(Y')$ y $G(F(G(Y')))$ conumtan. El rectángulo $\mathcal{R}_1$ de vértices $G(Y)$, $G(Y)$, $G(Y')$, $G(Y')$ conmuta trivialmente.

El rectángulo $\mathcal{R}_2$

$$
\begin{tikzcd}
G(Y) \arrow[r, "G(g)"] \arrow[d, "\eta_{G(Y)}"] & G(Y') \arrow[d, "\eta_{G(Y')}"] \\
G(F(G(Y))) \arrow[r, "G(F(G(g)))"] & G(F(G(Y')))
\end{tikzcd}
$$

conumuta pues $\eta : \mathrm{Id}_{\mathscr{C}} \to G \circ F$ es una transformación natural. Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
G(\varepsilon_{Y'}) \circ [G(F(G(g))) \circ \eta_{G(Y)}] &\overset{\mathcal{R}_2}{=} G(\varepsilon_{Y'}) \circ [\eta_{G(Y')} \circ G(g)] \\
&\overset{asoc}{=} [G(\varepsilon_{Y'}) \circ \eta_{G(Y')}] \circ G(g) \\
&\overset{\mathcal{T}_2}{=} \mathrm{id}_{G(Y')} \circ G(g) \\
&= \boxed{G(g)} \\
&\overset{\mathcal{R}_1}{=} G(g) \circ \mathrm{id}_{G(Y)} \\
&\overset{\mathcal{T}_1}{=} G(g) \circ [G(\varepsilon_Y) \circ \eta_{G(Y)}]
\end{aligned}
$$

donde sobre el símbolo igual se indica qué diagrama conmutativo se debe utilizar.

Luego, como G es un funtor y la composición es asociativa, concluimos que

$$G(\varepsilon_{Y'} \circ F(G(g))) \circ \eta_{G(Y)} = G(g) = G(g \circ \varepsilon_Y) \circ \eta_{G(Y)}$$

Así, obtenemos que tanto $G(\varepsilon_{Y'} \circ F(G(g)))$ como $G(g \circ \varepsilon_Y)$ hacen que conmute el diagrama

$$\begin{tikzcd}
G(Y) \arrow[r, "\eta_{G(Y)}"] \arrow[dr, "G(g)"'] & G(F(G(Y))) \arrow[d, dashed] \\
& G(Y')
\end{tikzcd}$$

y por propiedades de la adjunción η sigue que

$$\varepsilon_{Y'} \circ F(G(g)) = g \circ \varepsilon_Y$$

como queríamos probar.

Consideremos ahora un objeto X cualquiera de $\mathscr{C}$, un objeto Y cualquiera de $\mathscr{D}$ y un morfismo $g : F(X) \to Y$. Buscamos $g^* : X \to G(Y)$ tal que conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd}
F(G(Y)) \arrow[r, "\varepsilon_Y"] & Y \\
F(X) \arrow[u, dashed, "F(g^*)"] \arrow[ur, "g"']
\end{tikzcd}$$

Si existe tal g^*, entonces usando la definición de ε_Y y que η es transformación natural, tenemos

$$\begin{aligned}
g^* &= \mathrm{id}_{G(Y)} \circ g^* \\
&= G(\varepsilon_Y) \circ \eta_{G(Y)} \circ g^* \\
&= G(\varepsilon_Y) \circ G(F(g^*)) \circ \eta_X \\
&= G(\varepsilon_Y \circ F(g^*)) \circ \eta_X. \\
&= G(g) \circ \eta_X
\end{aligned}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "\eta_X"] \arrow[dd, bend right=60, "g^*"'] \\
G(F(X)) \arrow[d, "G(g)"] \\
G(Y)
\end{tikzcd}$$

Lo cual muestra la existencia y la unicidad. □

Ejemplo **24.** Sea $\mathscr{C}$ una categoría con productos y exponenciales, $A \in \mathscr{C}$ un objeto fijo y consideremos la transformación natural $\varepsilon : F_A \to \mathrm{Id}$ dada en el Ejemplo 16, con $F_A = \times^A \circ \exp_A$. Recordemos que $F_A(X) = X^A \times A$, $F_A(f) = f^A \times \mathrm{id}_A$ y $\varepsilon_X = \mathrm{eval}_X : X^A \times A \to X$. Veamos que ε es una counidad de adjunción entre $F : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$, $F = \times^A$ y $G : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$, $G = \exp_A$.

Sea Y un objeto de $\mathscr{C}$ y $g \in \mathrm{Hom}(F(X), Y) = \mathrm{Hom}(X \times A, Y)$. Dado que $G = \exp_A$, debemos definir un morfismo $g^* : X \to G(Y) = Y^A$, de modo que conmute

$$\begin{tikzcd}
F(G(Y)) \arrow[r, "\varepsilon_Y"] & Y \\
F(X) \arrow[u, dashed, "F(g^*)"] \arrow[ur, "g"']
\end{tikzcd}
\quad \rightsquigarrow \quad
\begin{tikzcd}
Y^A \times A \arrow[r, "\mathrm{eval}_Y"] & Y \\
X \times A \arrow[u, dashed, "g^* \times \mathrm{id}_A"] \arrow[ur, "g"']
\end{tikzcd}$$

Observemos que $g^* = \mathrm{curry}(g)$ es el único morfismo que satisface esta condición. Concluimos que $\exp_A$ es un adjunto a derecha de $\times^A$, o $\times^A$ es un adjunto a izquierda de $\exp_A$.

Como consecuencia del ejemplo anterior obtenemos el siguiente resultado. Dejamos los detalles de la prueba como ejercicio.

Lema **5.** *Sea $\mathscr{C}$ un categoría con productos binarios. Entonces $\mathscr{C}$ es una categoría con exponenciales si y sólo si para cada $A \in \mathrm{ob}\,\mathscr{C}$ el funtor $\times^A = - \times A$ tiene un adjunto a derecha.*

Teorema **6.** *Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ categorías localmente pequeñas y sean $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$, $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ dos funtores. Sesa η una unidad de adjunción y ε la correspondiente counidad de adjunción entre F y G. Entonces la función*

$$\varphi : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, G(Y)) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(X), Y), \quad \varphi(f) = f^{\#}$$

es biyectiva (un isomorfismo en Set) con inversa

$$\varphi^{-1} : \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(X), Y) \to (X, G(Y)), \quad \varphi^{-1}(g) = g^*$$

para cada $X \in \mathrm{ob}\,\mathscr{C}$, $Y \in \mathrm{ob}\,\mathscr{D}$.

Demostración. Es inmediata de la definición de adjunción. Dejamos los detalles como ejercicio. $\square$

Notación 7. *En muchos textos si existe una adjunción entre F y G suele denotarse por $\dfrac{X \to G(X)}{F(X) \to Y}$ o bien $F \dashv G$.*

Una de las propiedades fundamentales de las adjunciones (que no demostraremos) es que las adjuntas a derecha mapean límites en límites y las adjuntas a izquierda mapean colímites en colímites. Más precisamente:

Teorema **8.** *Sean $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ y $G : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ dos funtores tales que existe una adjunción η de F en G.*

1. *Sea $\mathcal{D}$ un diagrama en $\mathscr{D}$ que admite un límite $(Y, \mathcal{F}_{\mathcal{D}})$. Entonces $(G(Y), F(\mathcal{G}_{\mathcal{D}}))$ es un límite para $G(\mathcal{D})$ en $\mathscr{C}$.*

2. *Sea $\mathcal{D}$ un diagrama en $\mathscr{C}$ que admite un colímite $(X, \mathcal{G}_{\mathcal{D}})$. Entonces $(F(X), F(\mathcal{G}_{\mathcal{D}}))$ es un colímite para $F(\mathcal{D})$ en $\mathscr{D}$.*

Demostración. Ver Steve Awodey, *Cathegory Theory*, Second Edition, Oxford Logic Guides 52, capítulo 9. $\square$

Como ecualizadores, coecualizadores, productos y coproductos son casos particulares de límites o colímites tenemos:

Corolario **9.** *Sea $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ tal que F admite una adjunta a derecha $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$. Entonces*

1. *G mapea ecualizadores y productos en $\mathscr{D}$ en ecualizadores y productos en $\mathscr{C}$.*

2. *F mapea coecualizadores y coproductos en $\mathscr{C}$ en coecualizadores y coproductoes en $\mathscr{D}$.*

Como las equivalencias entre categorías admiten adjuntos a izquierda y derecha, el Teorema 8 es válido para cualquier equivalencia $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$. Luego:

Corolario **10.** *Toda equivalencia $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ entre dos categorías, mapea ecualizadores, coecualizadores, productos, coproductos y exponenciales en $\mathscr{C}$ en ecualizadores, coecualizadores, productos, coproductos y exponenciales en $\mathscr{D}$*

5. Mónadas

Definición **10.** *Una **mónada** sobre una categoría $\mathscr{C}$ consiste de un funtor $T : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ (denominado un **endofuntor**) y dos transformaciones naturales*

- $\eta : \mathrm{id}_{\mathscr{C}} \to T$ *(unidad)*
- $\mu : T^2 \to T$ *(multiplicación)*

(donde T^n denota la composición de T con sí mismo n-veces) tales que

$$\mu \circ \mu_T = \mu \circ T\mu, \qquad\qquad \mu \circ \eta_T = \mathrm{id}_T = \mu \circ T\eta$$

donde id_T indica el isomorfismo natural del Ejemplo 14, $T\eta : \mathrm{ob}\,\mathscr{C} \to \mathrm{mor}\,\mathscr{C}$, $T\eta(X) = T(\eta_X)$, y similarmente $T\mu(X) = T(\mu_X)$, y η_T, μ_T son transformaciones naturales que se definen como $\eta_T(x) = \eta_{T(x)}$, $\mu_T(X) = \mu_{T(X)}$ O sea, los siguientes diagramas son conmutativos.

$$\begin{tikzcd}
T^3 \arrow[r, "T\mu"] \arrow[d, "\mu_T"'] & T^2 \arrow[d, "\mu"] \\
T^2 \arrow[r, "\mu"] & T
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "\eta_T"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_T"'] & T^2 \arrow[d, "\mu"] & T \arrow[l, "T\eta"'] \arrow[dl, "\mathrm{id}_T"] \\
& T &
\end{tikzcd}$$

Ejemplo **25. Mónadas a partir de adjunciones.** Sea η una adjunción de $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ en $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$. Consideremos el endofuntor $T = G \circ F : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$.

Tenemos asociadas a T dos transformaciones naturales:

- $\eta : \mathrm{id}_{\mathscr{C}} \to T$ (unidad de adjunción)
- $\mu : T^2 \to T$ que se define como sigue:
    - $\varepsilon : F \circ G \to \mathrm{id}_{\mathscr{D}}$ es una counidad de adjunción asociada a η, con lo cual para cada $X \in \mathrm{ob}\,\mathscr{C}$, $\varepsilon_{F(X)} : F(G(F(X))) \to F(X)$
    - Ponemos entonces $\mu_X := G(\varepsilon_{F(X)}) : \underbrace{G(F(G(F(X))))}_{T^2(X)} \to \underbrace{G(F(X))}_{T(X)}$

Dejamos como ejercicio verificar que $\mu : T^2 \to T$ es efectivamente una transformación natural.

Veamos que para cada X, conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} T(T(T(X))) \arrow[r, "T(\mu_X)"] \arrow[d, "\mu_{T(X)}"'] & T(T(X)) \arrow[d, "\mu_X"] \\ T(T(X)) \arrow[r, "\mu_X"] & T(X) \end{tikzcd}$$

$$\mu_X \circ \mu_{T(X)} \stackrel{?}{=} \mu_X \circ T(\mu_X)$$

O sea, hay que ver que

$$\boxed{G(\varepsilon_{F(X)}) \circ G(\varepsilon_{F(G(F(X)))}) = G(\varepsilon_{F(X)}) \circ G(F(G(\varepsilon_{F(X)})))}$$

Para ello observemos que como $\varepsilon : F \circ G \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} \mathrm{id}_{\mathscr{D}}$ es una transformación natural, el diagrama

$$\begin{tikzcd} F(G(F(G(F(X))))) \arrow[r, "\varepsilon_{F(G(F(X)))}"] \arrow[d, "F(G(\varepsilon_{F(X)}))"'] & F(G(F(X))) \arrow[d, "\varepsilon_{F(X)}"] \\ F(G(F(X))) \arrow[r, "\varepsilon_{F(X)}"] & F(X) \end{tikzcd}$$

conmuta. Aplicado el funtor G obtenemos lo que queríamos probar. Dejamos como ejercicio probar que

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "\eta_T"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_T"'] & T^2 \arrow[d, "\mu"] & T \arrow[l, "T\eta"'] \arrow[dl, "\mathrm{id}_T"] \\ & T & \end{tikzcd}$$

conmuta, y por lo tanto $T : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ es una mónada sobre $\mathscr{C}$.

Ejemplo **26.** **El conjunto de partes como mónada**. Consideremos el funtor $T : \mathrm{Set} \to \mathrm{Set}$ tal que $T(X) = \mathcal{P}(X)$ (el conjunto de partes de X) y si $f : X \to Y$ es una función, $T(f) : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$ es tal que $T(f)(W) = f(W)$ para cada $W \subset X$. Dejamos como primer ejercicio probar que T es efectivamente un endofuntor de Set y que T es una mónada sobre Set con unidad de adjunción

$$\eta_A : A \to T(A), \qquad a \mapsto \{a\}$$

y multiplicación

$$\mu_A(\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))) \to \mathcal{P}(A), \qquad \mathcal{X} \mapsto \bigcup \mathcal{X}$$

(Por ejemplo, si $A = \{a, b, c\}$, $\mathcal{X} = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$, entonces $\mu_A(\mathcal{X}) = \{a, b\}$).

Las mónadas y las adjunciones están íntimamente relacionadas:

Teorema **11.** *Toda mónada proviene de adjunción (es decir, puede ser obtenida como en el Ejemplo 25). Más aún dada una mónada*

$$(T, \eta, \mu), \qquad T : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$$

Uno puede formar la categoría $\mathrm{Adj}(\mathscr{C}, T)$ *de todas las adjunciones* F, G *tales que*

$$(T, \eta, \mu) = (G \circ F, \eta, G\varepsilon F)$$

en donde η *y* ε *son la unidad y counidad de la adjunción, respectivamente. La categoría* $\mathrm{Adj}(\mathscr{C}, T)$ *tiene*

- *objeto inicial: categoría de Kleisli*
- *objeto terminal: categoría de Eilenberg-Moore*

6. Lema de Yoneda

Finalizaremos esta unidad presentando el Lema de Yoneda. La filosofía de este resultado se basa en poder "presentar" una categoría abstracta $\mathscr{C}$ dentro de una categoría más sencilla. Entre las categorías que mejor entendemos se encuentra Set, ya que sus objetos son conjuntos y sus morfismos son funciones usuales entre conjuntos.

Para poder estudiar una categoría $\mathscr{C}$ dentro de Set, necesitamos considerar los funtores de $\mathscr{C}$ en Set. Recordemos que:

- Los funtores de $\mathscr{C}$ en Set forman una categoría: $\mathrm{Set}^{\mathscr{C}}$ (los morfismos de esta categoría son las transformaciones naturales, ver Ejemplo 18).
- Si $\mathscr{C}$ es una categoría localmente pequeña, para cada objeto A de $\mathscr{C}$ tenemos definido el funtor covariante hom_A (ver Ejemplo 2) tal que

$$\mathrm{hom}_A : \mathscr{C} \to \mathrm{Set}$$
$$\mathrm{hom}_A(X) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, X)$$
$$\mathrm{hom}_A(f : X \to X') \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, X), \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, X')) \quad \text{es tal que } \boxed{\mathrm{hom}_A(f)(g) = f \circ g}$$

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "g"'] \arrow[dr, "f\circ g"] & \\ X \arrow[rr, "f"'] & & X' \end{tikzcd} \qquad \mathrm{hom}_A(f) : \underbrace{\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, X)}_{\ni g} \to \underbrace{\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, X')}_{\ni f\circ g}$$

Si $F : \mathscr{C} \to \mathrm{Set}$ es un funtor, denotemos por $\mathrm{Nat}(\mathrm{hom}_A, F)$ el conjunto de transformaciones naturales de hom_A en F. Es decir, $\eta \in \mathrm{Nat}(\mathrm{hom}_A, F)$ si η es una familia de funciones (morfismos en Set)

$$\{\eta_B : \mathrm{hom}_A(B) \to F(B) \ : \ B \in \mathrm{ob}\,\mathscr{C}\}$$

tal que para cada $f : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B, C)$, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{hom}_A(B) \arrow[r, "\eta_B"] \arrow[d, "\mathrm{hom}_A(f)"'] & F(B) \arrow[d, "F(f)"] \\ \mathrm{hom}_A(C) \arrow[r, "\eta_C"] & F(C) \end{tikzcd} \tag{12}$$

Lema **12** (Lema de Yoneda)**.** *Sean $\mathscr{C}$ una categoría localmente pequeña, y $F : \mathscr{C} \to \mathrm{Set}$ un funtor (covariante) arbitrario. Fijemos un objeto A de $\mathscr{C}$ cualquiera. Entonces, las transformaciones naturales de $\hom_A$ en F están en correspondencia biyectiva con los elementos de $F(A)$:*

$$\mathrm{Nat}(\hom_A, F) \simeq F(A).$$

Demostración. Consideremos una transformación natural $\eta : \hom_A \to F$. En particular,

$$\eta_A : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, A) \to F(A).$$

Pongamos $a = \eta_A(\mathrm{id}_A)$, entonces a es un elemento del conjunto $F(A)$. Observemos que η queda completamente determinada por el elemento a. En efecto, dado un objeto $X \in \mathrm{ob}\,\mathscr{C}$, y dado $f \in \hom_A(X) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, X)$ tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
\hom_A(A) & \xrightarrow{\eta_A} & F(A) \\
{\scriptstyle \hom_A(f)}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle F(f)} \\
\hom_A(X) & \xrightarrow{\eta_X} & F(X)
\end{array}$$

y como $f = f \circ \mathrm{id}_A = \hom_A(f)(\mathrm{id}_A)$, resulta

$$\eta_X(f) = \eta_X(\hom_A(f)(\mathrm{id}_A)) = (\eta_X \circ \hom_A(f))(\mathrm{id}_A) = (F(f) \circ \eta_A)(\mathrm{id}_A) = F(f)(a)$$

Es decir, como F y f son datos, conociendo a podemos calcular $\eta_X(f)$.

Recíprocamente, cada elemento en $F(A)$ determina una transformación natural $\eta : \hom_A \to F$ de esta misma forma. $\square$

Ejemplo **27. Todo grupo es isomorfo a un grupo de biyecciones (Teorema de Cayley)**. Sea G un grupo y sea $\mathscr{C}_G$ la categoría asociada. O sea, $\mathrm{ob}\,\mathscr{C}_G = \{*\}$ y $\mathrm{mor}\,\mathscr{C}_G = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_G}(*, *) = G$. Consideremos el funtor $F = \hom_* : \mathscr{C}_G \to \mathrm{Set}$. Entonces $F(*) = G$ y si $g \in G = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_G}(*, *)$,

$$\hom_*(g)(h) = gh$$

El Lema de Yoneda nos dice que existe un isomorfismo en Set entre $\mathrm{Nat}(\hom_*, \hom_*)$ y el conjunto $\hom_*(*) = G$. Ahora bien, como $\mathscr{C}_G$ tiene un único objeto, $*$, una transformación natural entre $\hom_*$ y $\hom_*$ consta de un único morfismo $\eta_* : \hom_*(*) \to \hom_*(*)$, es decir, una función $\eta_* : G \to G$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
G & \xrightarrow{\eta_*} & G \\
{\scriptstyle \hom_*(g)}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle \hom_*(g)} \\
G & \xrightarrow{\eta_*} & G
\end{array}$$

O sea, para cada $h \in G$,

$$g\eta_*(h) = \hom_*(g) \circ \eta_*(h) = \eta_* \circ \hom_*(g)(h) = \eta_*(gh)$$

Es decir, una transformación natural $\eta_* : \hom_*(*) \to \hom_*(*)$ no es otra cosa que una función **equivariante** de G en G (o sea, funciones $f : G \to G$ tales que $f(gh) = gf(h)$ para cada $f, g \in G$). Recíprocamente, es fácil ver (de manera completamente análoga a lo anterior) que toda función equivariante de G en G define una transformación natural $\mu_* : \hom_* \to \hom_*$. Pongamos $\mathrm{Equiv}(G)$ el conjunto de funciones equivariantes de G en G, tenemos entonces que

$$\mathrm{Nat}(\hom_*, \hom_*) \simeq \mathrm{Equiv}(G).$$

Observemos que η_* debe ser biyectiva:

- es inyectiva: si $\eta_*(h_1) = \eta_*(h_2)$, entonces

$$h_1\eta_*(e) = \eta_*(h_1 e) = \eta_*(h_1) = \eta_*(h_2) = h_2\eta_*(e) \;\Rightarrow\; h_1 = h_2$$

- es sobreyectiva: dado $h_2 \in G$, pongamos $h_1 = h_2\eta_*(e)^{-1}$, entonces

$$\eta_*(h_1) = h_1\eta_*(e) = (h_2\eta_*(e)^{-1})\eta_*(e) = h_2.$$

Dejamos como ejercicio probar que el conjunto de las funciones equivariante de G en G es un subgrupo de $(\mathcal{B}(G), \circ)$, el grupo de biyecciones de G en G.

Por el Lema de Yoneda existe una biyección

$$\mathrm{Equiv}(G) \to G$$

y no es difícil ver que se trata de un homomorfismos de grupos (dejamos los detalles como ejercicio). Por lo tanto G puede pensarse como un grupo de subgrupo del grupo de transformaciones biyectivas de un conjunto en otro.