Práctica 4: Lógica de Predicados, Sintaxis

1. Encuentre una formalización en lógica de predicados para las siguientes oraciones. Tenga en cuenta que $P(x,y), M(x,y), H(x,y), E(x,y)$ significan, respectivamente, que x es padre, madre, hermano, esposo de y y $Mj(x), V(x)$ significan que x es mujer o varón, respectivamente.

a) Todas las personas tienen madre.

b) Todas las personas tienen madre y padre.

c) Quien tiene una madre tiene un padre.

d) Juan es abuelo.

e) Nadie que sea tío es tía.

f) Nadie que sea abuela de alguien es padre de alguien.

g) Juan y Lisa son marido y mujer.

h) Carlos es el cuñado de Mónica.

Solución:

a) $\forall x(\exists y M(y,x))$

b) $\forall x(\exists y M(y,x) \wedge \exists z P(z,x))$

c) $\forall x(\exists y M(y,x) \rightarrow \exists z P(z,x))$

d) $\exists x(\exists y(P(Juan,y) \wedge (P(y,x) \vee M(y,x))))$

e) Primero formalicemos $T(x)$: x es tío como

$$\exists y(H(y,x) \wedge ((V(y) \wedge \exists z P(y,z)) \vee (Mj(y) \wedge \exists z M(y,z))))$$

y entonces “nadie que sea tío es tía”queda

$$\neg\exists x((V(x) \wedge T(x)) \rightarrow (Mj(x) \wedge T(x)))$$

f) Primero formalicemos $A(x,z)$: x es abuela de z como

$$Mj(x) \wedge ((\exists y(M(x,y) \wedge V(y)) \rightarrow \exists z P(y,z)) \vee (\exists y(M(x,y) \wedge Mj(y)) \rightarrow \exists z M(y,z)))$$

y entonces “nadie que sea abuela de alguien es padre de alguien”queda

$$\neg(\exists z A(x,z) \rightarrow \exists y P(x,y))$$

g) $E(Juan, Lisa)$

h) $\exists y((E(Carlos,y) \wedge H(y,Monica)) \vee (H(Carlos,y) \wedge E(y,Monica)))$

---

2. Defina el principio de inducción primitiva para $\textsc{Term}$ y $\textsc{Form}$.

Solución:

Principio de inducción primitiva para $\textsc{Term}$**:**

Sea $A(t)$ una propiedad de términos. Si valen:

- $A(t)$ cuando t es una variable o constante
- $A(t_1), A(t_2), \ldots A(t_n) \Rightarrow A(f(t_1, t_2, \ldots t_n))$ para todos $t_1, t_2, \ldots t_n \in \textsc{Term}$ y símbolos de función f

entonces vale $A(t)$ para todo $t \in \textsc{Term}$.

Principio de inducción primitiva para $\textsc{Form}$**:**

Sea $A(\phi)$ una propiedad de fórmulas. Si valen:

I.
- $A(\bot)$
- $A(P_i)$ cuando $ar(P_i) = 0$
- $A(P_i(t_1, t_2, \ldots t_n))$ cuando $ar(P_i) = n > 0$ y $t_1, t_2, \ldots t_n \in \textsc{Term}$

II. $A(\phi) \Rightarrow A(\neg\phi)$

III. $A(\phi), A(\psi) \Rightarrow A(\phi \Box \psi)$

IV. $A(\phi) \Rightarrow A(\forall x_i \phi), A(\exists x_i \phi)$ para $x_i \in \textsc{Var}$

entonces vale $A(\phi)$ para todo $\phi \in \textsc{Form}$.

---

4. Defina la función $BV : \textsc{Form} \to 2^{\textsc{Var}}$ que, dada una fórmula ϕ, devuelve el conjunto de variables ligadas de ϕ.

Solución:

$$BV(\phi) = \begin{cases} \emptyset & \phi = \bot \\ \emptyset & \phi \in \mathcal{P} \\ \emptyset & \phi = P_i(t_1, \ldots t_n) \\ BV(\psi) & \phi = \neg\psi \\ BV(\psi_1) \cup BV(\psi_2) & \phi = \psi_1 \Box \psi_2 \\ BV(\psi) \cup \{x_i\} & \phi = \forall x_i \psi \\ BV(\psi) \cup \{x_i\} & \phi = \exists x_i \psi \end{cases}$$

Recordemos que:

$$FV(\phi) = \begin{cases} \emptyset & \phi = \bot \\ \emptyset & \phi \in \mathcal{P} \\ FV_T(t_1) \cup \ldots \cup FV_T(t_n) & \phi = P_i(t_1, \ldots, t_n) \\ FV(\psi) & \phi = \neg\psi \\ FV(\psi_1) \cup FV(\psi_2) & \phi = \psi_1 \Box \psi_2 \\ FV(\psi) - \{x_i\} & \phi = \forall x_i \psi \\ FV(\psi) - \{x_i\} & \phi = \exists x_i \psi \end{cases}$$

donde la función $FV_T : \textsc{Term} \to 2^{\textsc{Var}}$ devuelve el conjunto de variables libres de un término:

$$FV_T(t) = \begin{cases} \emptyset & t \in \mathcal{F} \\ \{t\} & t \in Var \\ FV_T(t_1) \cup \ldots \cup FV_T(t_n) & t = f_i(t_1, t_2, \ldots, t_n) \end{cases}$$

---

5. Realizar la sustitución $\varphi[t/x]$ para los siguientes valores de φ y t:

a) $\varphi = \forall x\ P(x), \quad t = g(x)$

b) $\varphi = \forall z\ P(x), \quad t = h(y)$

c) $\varphi = \forall z\ P(x), \quad t = f(y, z)$

d) $\varphi = B(x, y) \to \exists x\ C(x), \quad t = s(y)$

e) $\varphi = \neg(\exists y\ (\forall x\ P(x, y, z)) \wedge (\exists z\ G(z, y, x))) \to B(a), \quad t = g(z)$

f) $\varphi = \exists y\ pow(y, x) = x, \quad t = dos$

Solución:

a) $(\forall x P(x))[g(x)/x] = (\forall x P(x))$

b) $(\forall z P(x))[h(y)/x] = (\forall z P(x)[h(y)/x]) = (\forall z P(x[h(y)/x])) = (\forall z P(h(y)))$

c) $(\forall z P(x))[f(y,z)/x] = (\forall z P(x)[f(y,z)/x]) = (\forall z P(x[f(y,z)/x])) = (\forall z P(f(y,z)))$

d)
$$\begin{aligned} (B(x,y) \to \exists x C(x))[s(y)/x] &= (B(x,y)[s(y)/x] \to (\exists x C(x))[s(y)/x]) \\ &= (B(x[s(y)/x], y[s(y)/x]) \to (\exists x C(x))) \\ &= (B(s(y), y) \to \exists x C(x)) \end{aligned}$$

e) $\varphi = \neg(\exists y\ (\forall x\ P(x, y, z)) \wedge (\exists z\ G(z, y, g(z)))) \to B(a)$

f) $\varphi = \exists y\ pow(y, dos) = dos$

6. Decida, para cada caso, si el término t está libre para la variable x en la fórmula ϕ:

a) x para la variable x en $(x = x)$

b) y para la variable x en $(x = x)$

c) $x + y$ para la variable y en $(z = c)$

d) $c + y$ para la variable y en $\exists x(y = x)$

e) $x + w$ para la variable z en $\forall w(x + z = c)$

f) $x + y$ para la variable z en $\forall w(x + z = c) \land \exists y(z = x)$

g) $x + y$ para la variable z en $\forall u(u = v) \to \forall z(z = y)$

Solución:

a) x está libre para la variable x en $(x = x)$, pues $(x = x)$ es atómica.

b) y está libre para la variable x en $(x = x)$, pues $(x = x)$ es atómica.

c) $x + y$ está libre para la variable y en $(z = c)$, pues $(z = c)$ es atómica.

d) $c + y$ está libre para la variable y en $\exists x\,(y = x)$, pues $x \neq y$, $c + y$ está libre para y en $(y = x)$ y además:
$$x \notin FV_T\,(c + y) = FV_T\,(c) \cup FV_T\,(y) = \emptyset \cup \{y\} = \{y\}$$

e) $x + w$ no está libre para la variable z en $\forall w\,(x + z = c)$, pues:
$$w \in FV_T\,(x + w) = FV_T\,(x) \cup FV_T\,(w) = \{x\} \cup \{w\} = \{x, w\}$$

f) $x+y$ no está libre para la variable z en $\forall w\,(x + z = c) \land \exists y\,(z = x)$ pues no lo está en $\exists y\,(z = x)$. En efecto:
$$y \in FV_T\,(x + y) = FV_T\,(x) \cup FV_T\,(y) = \{x\} \cup \{y\} = \{x, y\}$$

g) $x + y$ está libre para la variable z en $\forall u\,(u = v) \to \forall z\,(z = y)$ pues en $\forall z\,(z = y)$ la variable cuantificada es z. Al hacer la sustitución la fórmula no cambia.