Universidad Nacional de Rosario

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura

Resúmen

Complementos de Matemática II

Autor:
Arroyo, Joaquín

December 14, 2023

Contents

1 Unidad 1: Relaciones

Definición 1. Relación.
Definición 2. Relación funcional.
Definición 3. Sobreyectividad, inyectividad y biyectividad de relación funcional.
Definición 4. Matriz de una relación.
Definición 5. Relación inversa.
Lema 1. Si R relación y R^{-1} su inversa, entonces $Dom(R^{-1}) = Im(R)$ y $Dom(R) = Im(R^{-1})$.
Lema 2. Si R relación y R^{-1} su inversa, entonces $M(R^{-1}) = M(R)^t$
Lema 3. Si R relación funcional, entonces R^{-1} es una relación funcional sii R es biyectiva
Definición 6. Composición de relaciones.
Definición 7. Restricción de una relación. Sea R una relación de A en B, y sean $C \subset A$ y $D \subset B$, entonces la restricción de R en $C \times D$ es:

$$R|_{C\times D} = \{(a, b) \in C \times D \mid aRb\} = R \cap (C \times D)$$

Definición 8. Definición de reflexividad, simetría, transitividad y antisimetría.
Definición 9. Una relación R en A se denomina:

1. **Preorden** si R es reflexiva y transitiva
2. De **Equivalencia** si R es reflexiva, transitiva y simétrica.
3. De **Order parcial** si R es reflexiva, transitiva y antisimétrica.

Definición 10. Una relación $\sim$ una relación de equivalencia en A. Para cada $x \in A$ se define la *clase de equivalencia* de x como el conjunto:

$$[x] = \{y \in A \ : \ x \sim y\}$$

Teorema 1. Una relación $\sim$ una relación de equivalencia en un conjunto no vacío A. Entonces:

1. $[x] \neq \emptyset$ para cada $x \in A$
2. $x \sim y$ sii $[x] = [y]$
3. si $x \nsim y$ entonces $[x] \cap [y] = \emptyset$
4. La unión de todas las clases de equivalencia es el conjunto A

Definición 11. Partición de un conjunto.
Teorema 2. Sea $P = \{B_i\}_{i\in I}$ una partición del conjunto $A \neq \emptyset$. Entonces la relación $\sim$ en A dada por $x \sim y$ si $x, y \in B_i$ para algún $i \in I$ es una relación de equivalencia en A. Más aún, si $x \in B_i$ entonces, $[x] = B_i$.
Teorema 3. Existe una correspondencia biunívoca entre el conjunto de relaciones de equivalencia en un conjunto no vacío A y el conjunto de particiones de A.
Definición 12. Definición de conjunto cociente. Sea A un conjunto no vacío y $\sim$ una relación de equivalencia en A. El conjunto cociente $A/\sim$ se define como:

$$A/\sim = \{[x] : x \in A\}$$

2 Unidad 2: Conjuntos ordenados

Definición 1. Grafo dirigido.
Definición 2. Grafo dirigido asociado a una relación.
Definición 3. Camino simple.
Definición 4. **Jerarquías** Sea R un preorden en un conjunto no vacío A. Decimos que un elemento $a \in A$ es un elemento:

- **maximal** si para cada $x \in A$ tal que aRx se verifica xRa.

- **minimal** si para cada $x \in A$ tal que xRa se verifica aRx.
- **máximo** si para cada $x \in A$ tal que xRa.
- **mínimo** si para cada $x \in A$ tal que aRx.

Claramante, todo elemento máximo es maximal y todo mínimo minimal.

Definición 5. Sea R un preoden en $A, B \subseteq A$ y $a \in A$. Decimos que

- a es **cota superior** de B si bRa para cada $b \in B$. Si existe una cota superior de B decimos que B esta **acotado superiormente**.
- a es **cota inferior** de B si aRb para cada $b \in B$. Si existe una cota inferior de B decimos que B esta **acotado inferiormente**.
- a es **supremo** de B si a es un mínimo de

$$\{c \in A : c\ es\ cota\ superior\ de\ B\}$$

- a es **ínfimo** de B si a es un máximo de

$$\{c \in A : c\ es\ cota\ inferior\ de\ B\}$$

Definición 6. Si R es un orden parcial en A decimos que A es un poset.
Definición 7. Sea $\preceq$ una relación de orden en un conjunto A. Dados $x, y \in A$, decimos que x e y son elementos **comparables** si se verifica $x \preceq y$ o $y \preceq$ x (Como $\preceq$ es antisimétrica, estas dos condiciones se verifican simultáneamente ólo cuando $x = y$).
Definición 8. La relación $\preceq$ se denomina un **orden total** si todo par de elementos de A son comparables.
Lema 1. Sea $\preceq$ una relación de orden en un conjunto A y sea $B \subseteq A$, entonces:

1. $\preceq_{|B}$ es un orden en B. Si $\preceq$ es un orden total, entonces $\preceq_{|B}$ también lo es.
2. $\preceq^{-1}$ es un orden en A denominada el **orden inverso**. Si $\preceq$ es un orden total, entonces su orden inverso también lo es.

Definición 9. Orden lexicográfico y Orden producto.
Teorema 1. Sea $(A, \preceq)$ un conjunto parcialmente ordenado y sea $a \in A$. Entonces

1. a es un elemento minimal si para cada $x \in A$ se verifica que: $x \preceq a \implies x = a$
2. a es un elemento maximal si para cada $x \in A$ se verifica que: $a \preceq x \implies x = a$

Teorema 2. Si un conjunto parcialmente ordenado tiene un elemento máximo (mínimo) entonces este es único.
Corolario 1. Todo subconjunto de un conjunto parcialmente ordenado tiene a lo sumo un ínfimo y/o un supremo.
Teorema 3. Sea $(A, \preceq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Si $B \neq \emptyset$ es un subconjunto finito de A, entonces $(B, \preceq_{|B})$ tiene al menos un elemento minimal y al menos un elemento maximal.
Corolario 2. Todo conjunto finito totalmente ordenado tiene un máximo y un mínimo.
Definición 10. Sea $(A, \preceq)$ un poset. Un subconjunto $X \subseteq A$ se dice una **cadena** si $(X, \preceq_{|X})$ es un conjunto totalmente ordenado.
Teorema 4. Lema de Zorn. Sea $(A, \preceq)$ un poset no vacío. Si toda cadena en A tiene cota superior, entonces A tiene al menos un elemento maximal.
Definición 11. Principio de dualidad. Consiste en que cualquier proposición que involucre cotas inferiores, elementos minimales, mínimos o ínfimos en $(A, \preceq)$ sigue siendo válida en $(A, \preceq^{-1})$ cambiando estos elementos por cotas superiores, elementos maximales, máximos o supremos respectivamente (y también cambiando cotas superiores en $(A, \preceq)$ por cotas inferiores en $(A, \preceq^{-1})$ etc.)

Teorema 5. Sea $(A, \preceq)$ un conjunto parcialmente ordenado y sea $\preceq^{-1}$ el orden inverso de $\preceq$. Entonces

1. Si a es un elemento minimal (resp. maximal) de $(A, \preceq)$, entonces a es un elemento maximal (resp. minimal) de $(A, \preceq^{-1})$.
2. Si a es un mínimo (resp. máximo) de $(A, \preceq)$, entonces a es un máximo (resp. mínimo) de $\preceq^{-1}$
3. Sea $B \subseteq A$. Si a es una cota inferior de B (resp. cota superior) en $(A, \preceq)$, entonces a es una cota superior de B (resp. cota inferior) en $\preceq^{-1}$.
4. Sea $B \subseteq A$. Si a es el ínfimo de B (resp. supremo) en $(A, \preceq)$, entonces a es el supremo de B (resp. ínfimo) en $\preceq^{-1}$.

Definición 12. Morfismos Sean $(A, \preceq_A)$ y $(B, \preceq_B)$ dos posets y sea $f : (A, \preceq_A) \to (B, \preceq_B)$ decimos que:

- f es un **morfismo de orden** (o **morfismo de posets**) si para cada $x, y \in A$ se verifica

$$x \preceq_A y \implies f(x) \preceq_B f(y)$$

- f es un **isomorfismo** de $(A, \preceq_A)$ en $(B, \preceq_B)$ si f es un morfismo de orden biyectivo tal que $f^{-1} : (B, \preceq_B) \to (A, \preceq_A)$ es un morfismo de orden.

Teorema 6. Sean $(A, \preceq_A)$ y $(B, \preceq_B)$ dos conjuntos parcialmente ordenados y sea $f : (A, \preceq_A) \to (B, \preceq_B)$ un morfismo de orden, entonces:

1. f es un isomorfismo de $(A, \preceq_A)$ en $(B, \preceq_B)$ sii f es sobreyectiva y se verifica que para cada $x, y \in A$

$$x \preceq_A y \Leftrightarrow f(x) \preceq_B f(y)$$

2. f es un isomorfismo de $(A, \preceq_A)$ en $(B, \preceq_B)$ sii f^{-1} es un isomorfisco de $(B, \preceq_B)$ en $(A, \preceq_A)$
3. Si $f : (A, \preceq_A) \to (B, \preceq_B)$ y $g : (B, \preceq_B) \to (C, \preceq_C)$ son morfismos de orden, entonces:

$$g \circ f : (A, \preceq_A) \to (C, \preceq_C)$$

   es un morfismo de orden. Si f y g son isomorfismos, entonces $g \circ f$ es un isomorfismo.

Corolario 3. Sea *Poset* el conjunto de todos los conjuntos parcialmente ordenados. Entonces la relación $\sim$ en *Poset* dada por $(A, \preceq_A) \sim (B, \preceq_B)$ es una relación de equivalencia si existe un isomorfismo f de $(A, \preceq_A)$ en $(B, \preceq_B)$.
Teorema 7. Sean $(A, \preceq_A)$, $(B, \preceq_B)$ posets y sea $f : (A, \preceq_A) \to (B, \preceq_B)$ un isomorfismo. Entonces.

1. A y B tienen el mismo cardinal.
2. A es totalmente ordenado sii B es totalmente ordenado.
3. $a \in A$ es un elemento maximal (resp. minimal) de A sii $f(a)$ es un elemento maximal (resp. minimal) de B.
4. $a \in A$ es un máximo (resp. mínimo) de A sii $f(a)$ es un mínimo (resp. máximo) de B.
5. Sea $X \subseteq A$. $a \in A$ es una cota superior (resp. inferior) de X sii $f(a)$ es una cota inferior (resp. superior) de $f(X)$.
6. Sea $X \subseteq A$. $a \in A$ es el supremo (resp. ínfimo) de X sii $f(a)$ es el supremo (resp. ínfimo) de $f(X)$.

Definición 13. Un poset $(A, \preceq)$ se dice un **conjunto bien ordenado** si para cualquier subconjunto no vacío B de A, $(B, \preceq_B)$ tiene un mínimo (denominado **primer elemento**). La relación $\preceq$ se dice en este caso un **buen orden**.
Lema 2. Si $(A, \preceq)$ es un conjunto bien ordenado, entonces $\preceq$ es un orden total.
Lema 3. Si $(A, \preceq_A)$ y $(B, \preceq_B)$ son conjuntos ordenados isomorfos, entonces $(A, \preceq_A)$ es un conjunto bien ordenado sii $(B, \preceq_B)$ es bien ordenado.
Teorema 8. Principio del Buen Orden. $(\mathbb{N}, \leq)$ es un conjunto bien ordenado.
Teorema 9. Algoritmo de la división. Sean a y b números enteros con a ¿ 0. Entonces existen únicos números enteros q y r tales que $b = qa + r$ y $0 \leq r < a$
Teorema 10. Cualesquiera sean $a, b \in \mathbb{N}$, existe el máximo común divisor de a y b.
Corolario 4. El máximo común divisor entre a y b es la única combinación entera positiva de a y b que divide a a y b.
Definición 14. Un número entero k se dice **primo** si tiene exactamente dos divisores positivos: 1 y k. Si k tiene más de dos divisores positivos, k se dice **compuesto** (en consecuencia 1 no es primo ni compuesto).

Dos enteros a y b se denominan **coprimos** o **primos relativos** si $mcd(a, b) = 1$ (mcd denota el máximo común divisor)
Teorema 11. Sea $n \in \mathbb{N}$ un número compuesto. Entonces existe un número primo p tal que $p \mid n$.
Teorema 12. Euclides. Existen infinitos números primos.
Teorema 13. Teorema Fundamental de la Aritmética. Cada entero $n > 1$ puede escribirse de manera única como un producto de factores primos, excepto por el orden de los mismos.
Corolario 5. Sean $x, y \in \mathbb{N}$. Entonces el máximo común divisor de x e y es el producto de los factores primos comunes de x e y elevados al mínimo exponente en el que aparecen y el mínimo común múltiplo de x e y es el producto de los factores comunes y no comunes elevados al máximo exponente en el que aparecen.
Teorema 14. Principio del Buen Orden. Todo conjunto no vacío X admite una relación de orden $\preceq$ tal que $(X, \preceq)$ es un conjunto bien ordenado.

3 Unidad 3: Lattices

Definición 1. Retículo.
Definición 2. join y meet. Sea $(L, \preceq)$ un retículo. Para cada par $x, y \in L$ podemos definir las siguientes operaciones:

1. **join.** $x \vee y = sup\{x, y\}$
2. **meet.** $x \wedge y = inf\{x, y\}$

Teorema 1. Sea $(L, \preceq)$ un retículo. Entonces para cada $x, y, z \in L$ se verifica:

1. $x \preceq x \vee y$
2. $x \wedge y \preceq y$
3. $x \preceq y \Leftrightarrow x = x \wedge y \Leftrightarrow y = x \vee y$
4. $\vee$ y $\wedge$ son asociativas.
5. $\vee$ y $\wedge$ son conmutativas.
6. $\vee$ y $\wedge$ son idempotentes.
7. $x \vee (x \wedge y) = x = x \wedge (x \vee y)$ (absorción)
8. $\vee$ y $\wedge$ son compatibles con el orden, esto es,

$$x \preceq y \;\&\&\; w \preceq z \implies x \vee w \preceq y \vee z$$

$$x \preceq y \;\&\&\; w \preceq z \implies x \wedge w \preceq y \wedge z$$

(Uso && para denotar el AND lógico para diferenciar de join y meet)

Teorema 2. Sea L un conjunto no vacío con dos operaciones $\vee^{\sim}$ y $\wedge^{\sim}$ tales que:

1. $\vee^{\sim}$ y $\wedge^{\sim}$ son asociativas.
2. $\vee^{\sim}$ y $\wedge^{\sim}$ son conmutativas.
3. $\vee^{\sim}$ y $\wedge^{\sim}$ son idempotentes.
4. Valen las propiedades de absorción.

Entonces la relación $\preceq$ en L definida por

$$x \preceq y \Leftrightarrow x \vee^{\sim} y = y$$

es un orden parcial en L tal que $(L, \preceq)$ es un retículo para el cual $\vee = \vee^{\sim}$ y $\wedge = \wedge^{\sim}$.

Definición 3. Si $(L, \preceq)$ es un retículo, entonces $(L, \preceq^{-1})$ se denomina **retículo dual** de $(L, \preceq)$. Cuando la relación es conocida y denotamos al retículo por L, su dual suele denotarse por L^*. Además si $\wedge^*$ y $\vee^*$ son operaciones asociadas a L^*, es inmediato que $\vee = \wedge^*$ y $\wedge = \vee^*$

Definición 4. Subretículos. Sea $(L, \preceq) = (L, \vee, \wedge)$ un retículo. Un subconjunto $L' \subseteq L$ es un subretículo de L si para cada $x, y \in L'$, $x \vee y \in L'$ y $x \wedge y \in L'$, es decir, $(L', \vee', \wedge')$ es un retículo definido algebraicamente, donde $\vee' = \vee_{L' \times L'}$ y $\wedge' = \wedge_{L' \times L'}$.

Definición 5. Sean $(L, \preceq)$ y $(L', \preceq')$ dos retículos. Una función $f : L \to L'$ es un **morfismo de retículos** si f es un morfismo de orden tal que para cada $x, y \in L$

$$f(sup\{x,y\}_L) = sup\{f(x), f(y)\}_{L'} \text{ y}$$

$$f(inf\{x,y\}_L) = inf\{f(x), f(y)\}_{L'}$$

o equivalentemente,

$$f(x \vee y) = f(x) \vee' f(y) \text{ y}$$

$$f(x \wedge y) = f(x) \wedge' f(y)$$

Definición 6. f es un **morfismo de retículos** si f es un isomorfismo de orden tal que f y f^{-1} son morfismos de retículos.

Definición 7. f es un **anti isomorfismo de retículos** de L en L' SI f es un isomorfismo de retículos de $(L, \preceq)$ en $(L', \preceq^{-1})$

Lema 1. Sean $(L, \preceq)$ y $(L', \preceq')$ dos retículos, y sea $f : L \to L'$. Entonces:

1. f es un morfismo de retículos sii para cada $x, y \in L$ se verifican

$$f(x \vee y) = f(x) \vee' f(y),\ f(x \wedge y) = f(x) \wedge' f(y)$$

2. f es un isomorfismo de retículos sii f es un morfismo de retículos biyectivo.

Corolario 1. Sean L, L' y L'' retículos y sean $f : L \to L'$, $g : L' \to L''$ isomorfismos de retículos. Entonces:

1. $f^{-1} : L' \to L$ es un isomorfismo de retículos.
2. $g \circ f : L \to L''$ es un isomorfismo de retículos.

Corolario 2. Sea Ret el conjunto de todos los retículos. Entonces la relación $\sim$ en Ret definida por $L \sim L'$ si L y L' son retículos isomorfos es una relación de equivalencia.

Teorema 3. Si $f : L \to L'$ y $g : S \to S'$ son morfismos de retículos, entonces $f \times g : L \times S \to L' \times S'$ definido por $(f \times g)(x, y) = (f(x), g(y))$ es un morfismo de retículos. Si f y g son isomorfismos, entonces $f \times g$ es un isomorfismo.

Definición 8. Un retículo L se dice **auto-dual** si L y $L*$ son isomorfos.

Teorema 4. Sean L y S dos retículos y sea $f : L \to S$ un morfismo de retículos. Entonces:

1. Si L' es un subretículo de L, entonces $f(L')$ es un subretículo de S.

2. Si S' es un subretículo de S, entonces $f(S')^{-1}$ es un subretículo de L.

Definición 9. Un retículo $(L, \preceq) = (L, \vee, \wedge)$ se dice **acotado** si como conjunto ordenado tiene máximo y mínimo. El máximo de L suele denotarse por $\top$ o por 1 (**top**) y el mínimo de L por $\perp$ o 0 (**bottom**). Denotaremos $(L, \preceq, 1, 0) = (L, \vee, \wedge, 1, 0) = (L, \vee, \wedge, \perp, \top)$ a un retículo acotado con máximo 1 o $\top$ y mínimo 0 o $\perp$.

Definición 10. Sea L un retículo acotado. Dado $a \in L$, un elemento $b \in L$ se denomina un **complemento** de a, o se dice que a está **complementado por** b, si

$$a \vee b = \top, a \wedge b = \perp$$

Denotamos por $comp(a) = \{b \in L : b \text{ } es \text{ } un \text{ } complemento \text{ } de \text{ } a\}$

Un retículo acotado se dice un **retículo complementado** si existe una función

$$(.)^c : L \to L, a \mapsto a^c$$

tal que para cada $a \in L$, a^c es un complemento de a.

Observación 1. Resulta claro (apelando al Axioma de elección) que un retículo es complementado sii todo elemento admite al menos un complemento.

En este caso, el complemento de a no necesariamente es único, y por lo tanto, pueden existir distintas funciones que hagan de L un retículo complementado.

Observación 3. Es inmediato de la conmutatividad de $\wedge$ y $\vee$ que para cada $a \in L$, b es un complemento de a sii a es un complemento de b.

Además es claro que $\top$ u $\perp$ son complementos uno del otro.

Teorema 5. Sean L y S retículos y $f : L \to S$ un isomorfismo de retículos. Entonces:

1. L es un retículo acotado sii S es un retículo acotado.

2. Para cada $x \in L$, $comp(f(x)) = f(comp(x))$

3. L es un retículo complementado sii S es un retículo complementado.

Definición 11. Sea $(L, \preceq) = (L, \wedge, \vee)$ un retículo. Decimos que L es un **retículo distributivo** si para cada $x, y, z \in L$ se verifican:

$$(1) \quad x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

$$(2) \quad x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

Teorema 6. Sean L y S retículos y sea $f : L \to S$ un isomormismo de retículos. Entonces L es un retículo dsitributivo sii S es un retículo distributivo.

Teorema 7. Si un retículo L satisface una de las propiedades (1) o (2) entonces satisface la otra, y por lo tanto es distributivo.

Teorema 8. (Teorema $M_3 - N_5$). Un retículo es distributivo sii no contiene subretículos isomorfos a M_3 o a N_5.

Teorema 8. Sea L un retículo distributivo y acotado. Entonces todo elemento de L tiene a lo sumo un elemento complementario.

4 Unidad 4: Operaciones sobre Conjuntos

Definición 1. Sea X un conjunto. Una **operación** (binaria) en X es una función $* : X \times X \to X$. Normalmente denotamos $x * y := *(x, y)$. Se dice que:

- $*$ es **asociativa** si para cada $x, y, z \in X$, $*(x, *(y, z)) = *(*(x, y)z)$, o sea

$$x * (y * z) = (x * y) * z$$

- $*$ admite un **elemento neutro a derecha** si existe $e_d \in X$ tal que $*(x, e_d) = x$ para cada $x \in X$, o sea

$$x * e_d = x$$

- $*$ admite un **elemento neutro a izquierda** si existe $e_i \in X$ tal que $*(e_i, x) = x$ para cada $x \in X$, o sea

$$e_i * x = x$$

- Decimos que $*$ admite un **elemento neutro** o **elemento identidad** si existe $e \in X$ tal que e es un elemento neutro a derecha y a izquierda.

- Si $*$ admite un elemento neutro e, decimos que un elemento $x \in X$ admite un **inverso a derecha** para $*$ si existe un elemento $x_d^* \in X$ tal que $x*x_d^* = *(x, x_d^*) = e$ y admite un **inverso a izquierda** si existe un elemento $x_i^* \in X$ tal que $x_i^* * x = *(x_i^*, x) = e$

- $x \in X$ admite un **inverso** si existe $x^* \in X$ tal que x^* es inverso a izquierda y derecha de x.

- Un elemento $a \in X$ se dice **elemento absorbente a derecha** para $*$ si $x * a = a$ para cada $x \in X$, y se dice un **elemento absorbente a izquierda** para $*$ si $a * x = a$ para cada $x \in X$. a es un **elemento absorbente** si es absorbente a izquierda y derecha.

- $*$ es **conmutativa** si para cada $x, y \in X$, $*(x, y) = *(y, x)$ o sea

$$x * y = y * x$$

Lema 1. Sea $*$ una operación en un conjunto X. Si $*$ admite un elemento neutro, éste es único.
Lema 2. Sea $*$ una operación en un conjunto X que es asociativa y admite un elemento neutro. Si un elemento admite un inverso, entonces el inverso es único.
Observación 1. Es importante notar que la asociatividad de la operación no garantiza, aún existiendo elemento neutro, que cada elemento tenga un inverso.
Lema 3. Sea X un conjunto con una operación binaria $*$ que admite un elemento neutro. Entonces:

1. Si x^* es un inverso a derecha (resp. a izquierda) de $x \in X$, entonces x es un inverso a izquierda (resp. derecha) de x^*.

2. Si x admite un inverso x^{-1}, entonces x es también el inverso de x^{-1}.

3. Si $*$ es asociativa y x e y admiten inversos, entonces $x*y$ admite un inverso y $(x*y)^{-1} = y^{-1}*x^{-1}$

Definición 2. Sea X un conjunto con una operación $*$ y sea $Y \subset X$. Decimos que $*$ es **cerrada** en Y (o que Y es un **subconjunto cerrado** para $*$) si para cada $x, y \in Y$, $*(x, y) \in Y$. Decimos que $*$ es en Y la operación inducida desde X, o heredada de X.
Lema 4. Sea $*$ una operación en un conjunto X y sea $Y \subset X$ un subconjunto cerrado para $*$. Entonces:

1. Si $*$ es asociativa en X, entonces $*$ es asociativa en Y.

2. Si $*$ es conmutativa en X, entonces $*$ es conmutativa en Y.

3. Si e es un neutro en X y $e \in Y$, entonces e es un neutro en Y.

4. Si Y hereda el neutro de X y $x \in Y$ admite un inverso x^* tal que $x^* \in Y$, entonces x^* es un inverso de x para la operación restringida a Y.

Definición 3. Sea X un conjunto con una operación $*$ y $\sim$ una relación de equivalencia en X. Decimos que $*$ **se induce al cociente** $X/\sim$ si se verifica que:

$$x \sim x' \wedge y \sim y' \implies x * y \sim x' * y'$$

Si $*$ se induce al cociente $X/\sim$ queda bien definida una operación en $X/\sim$, que seguiremos denotando por $*$, definida por $* : X/\sim \times X/\sim \to X/\sim$,

$$[x] * [y] := [x * y]$$

Teorema 1. Sea $*$ una operación en un conjunto X y sea $\sim$ una relación de equivalencia en X tal que $*$ se induce al cociente $X/\sim$ entonces:

1. Si $*$ es asociativa en X, la operación inducida a $X/\sim$ es asociativa.
2. Si $*$ es conmutativa en X, la operación inducida a $X/\sim$ es conmutativa.
3. Si e es un elemento neutro (a izq, der o bilátero) para $*$ en X, entonces $[e]$ es un neutro con las mismas características para la operación inducida en $X/\sim$.
4. Si $x \in X$ posee inverso (a izq, der o bilátero) x^*, entonces $[x^*]$ es un inverso (con las mismas características de x^*) para la operación inducida en $X/\sim$.

Teorema 2. Sea $\overline{k} \in \mathcal{Z}_m$. $\overline{k}$ admite un inverso multiplicativo sii $mcd(k, m) = 1$ (es decir, k y m son primos relativos).
Corolario 1. Si $p \in \mathcal{Z}$ es primo, todo elemento distinto de $\overline{0}$ en $\mathcal{Z}_{\surd}$ admite un inverso multiplicativo.
Definición 4. Sea X un conjunto con una operación $\cdot : X \times X \to X$.

1. Si $\cdot$ es asociativa $(X, \cdot)$ se denomina un **semigrupo**.
2. Si $(X, \cdot)$ es un semigrupo que admite un elemento neutro, $(X, \cdot)$ se denomina un **monoide**.
3. Si $(X, \cdot)$ es un monoide donde todo elemento tiene un elemento inverso, $(X, \cdot)$ se denomina un**grupo**.
4. Si $*$ es conmutativa, cualquiera de las estructuras anteriores se dice **conmutativa**. Si $(X, \cdot)$ es un grupo conmutativo, se denomina **grupo abeliano**.

Teorema 3. (Ley de cancelación). Sea $(X, *)$ un monoide, y sean $a, b, c \in X$ tal que a admite un inverso. Entonces

$$\begin{aligned} a * b = a * c &\implies b = c \\ b * a = c * a &\implies b = c \end{aligned}$$

Definición 5. Sea $(X, *)$ un conjunto con una operación e $Y \subset X$ un subjunto cerrado para $*$.

1. Si $(X, *)$ es un semigrupo, diremos que $(Y, *)$ es un **subsemigrupo** de X.
2. Si $(X, *)$ es un monoide, diremos que $(Y, *)$ es un **submonoide** de X si la identidad e de Y pertenece a X.
3. Si $(X, *)$ es un grupo con identidad e, diremos que $(Y, *)$ es un **subgrupo** de X si $e \in Y$ y $x^{-1} \in Y$ para cada $x \in Y$.

Observemos que todo submonoide de un monoide es un monoide en sí mismo, pero hemos visto que un subconjunto de un monoide puede ser un monoide sin ser submonoide.

Análogamente, cualquier subgrupo de un grupo es un grupo en sí mismo, pero a diferencia de lo que ocurre con los monoides, cualquier subconjunto cerrado de un grupo que sea a su vez un grupo (con la operación inducida) debe ser un subgrupo. Esto es, si un subconjunto de un grupo es a su vez un grupo, es porque hereda del grupo la identidad y los inversos de todos sus elementos.
Teorema 4. Sea G un grupo y sea $H \subset G$ un subconjunto cerrado. Si H con la operación heredada es un grupo, entonces H es un subgrupo de G.
Teorema 5. Sea G un grupo y H un subconjunto de G. Entonces H es un subgrupo de G sii para todo $a, b \in H$ se verifica $ab^{-1} \in H$
Definición 6. Sean $(X, *)$ e $(Y, \odot)$ dos semigrupos. Una función $f : X \to Y$ que verifique

$$f(x * y) = f(x) \odot f(y)$$

se denomina un **morfismo** u **homomorfismo de semigrupos**.

- Si $(X, *)$ e $(Y, \odot)$ son monoides, un **homomorfismo de monoides** es un homomorfismo de semigrupos tal que $f(e_X) = e_Y$, donde e_X, e_Y son la identidad de X e Y respectivamente.
- Si $(X, *)$ e $(Y, \odot)$ son grupos, un **homomorfismo de grupos** es un homomorfismo de monoides tal que $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$ para cada $x \in X$.

Un **isomorfismo** (de semigrupos, monoides o grupos) es un homorfismo biyectivo (de semigrupos, monoides o grupos resp.) tal que f^{-1} es un homorfismo (de semigrupos, monoides o grupos resp.).
Teorema 6. Sean $(G, \cdot)$ y $(H, *)$ dos grupos. Entonces $f : G \to H$ es un homomorfirsmo de grupos sii f es un homomorfismo de semigrupos.
Teorema 7. Todo homomorfismo biyectivo de semigrupos, monoides o grupos es un isomorfismo de semigrupos, monoides o grupos.
Teorema 8. Sean X, Y, Z semigrupos (resp. monoides o grupos) y $f : X \to Y, g : Y \to Z$ homomorfismos de semigrupos (resp. monoides o grupos). Entonces:

1. $g \circ f$ es un homomorfismo de semigrupos (resp. monoides o grupos).
2. Si f es un isomorfismo, entonces f^{-1} es un isomorfismo.
3. Si f y g son isomorfismos, entonces $g \circ f$ es un isomorfismo.

Definición 7. Sea X un semigrupo, monoide o grupo. El grupo $(Iso(X), \circ)$ se denomina **grupo de isomorfismos** de X.
Lema 5. Sea S el conjunto de todos los semigrupos. Entonces $X \cong Y$ sii existe un isomorfismo $f : X \to Y$ es una relación de equivalencia. Un resultado análogo vale en el conjunto M de todos los monoides o en el conjunto G de todos los grupos.

5 Unidad 5: Grupos

Definición 1. Grupo. Si G es un conjunto con una operación $\cdot : G \times G \to G$, decimos que G es un **grupo** si:

1. La operación $\cdot$ es asociativa.
2. Existe un elemento neutro $e \in G$ para $\cdot$
3. Todo elemento $g \in G$ admite un elemento inverso, denotado por g^{-1}

Si además la operación $\cdot$ es conmutativa, $(G, \cdot)$ se denomina un **grupo abeliano.**
Definición 2. El cardinal de G se denomina **orden** del grupo G y se denota $o(G)$.
Notación 1. A partir de aquí denotaremos por $\cdot$ a una operación genérica en un grupo cualquiera. Si $g_1, g_2 \in G$, denotaremos por $g1g2$ al producto $g1 \cdot g2$ (es decir, la yuxtaposición de dos elementos representa su producto). Más aún, si trabajamos con dos grupos abstractos distintos G_1 y G_2, denotaremos por $\cdot$ a la operación en ambos grupos, aunque sean operaciones distintas, a menos que tratemos con algún caso concreto.
Definición 3. Sean $(G, \cdot)$ un grupo y $a \in G$. Se definen:

- $a^0 = e$
- para cada $n \in \mathcal{N}$, a^n se define inductivamente como $a^n = a^{n-1}a$
- para cada $k \in \mathcal{Z}$, con $k < 0$, se define $a^k = (a^{-1})^{-k}$

Teorema 1. Sea G un grupo y $a \in G$. Para cada $m, n \in \mathcal{Z}$, se verifican:

1. $a^n a^m = a^{n+m}$
2. $(a^n)^m = a^{nm}$

En notación aditiva:

1. $na + ma = (n+m)a$
2. $m(na) = (mn)a$

Notación 2. Usaremos la notación $H < G$ para indicar que $H \subset G$ es un subgrupo de G.
Definición 4. Sea G un grupo y $a \in G$.

- El subgrupo $\langle a \rangle$ de G dado por $\langle a \rangle = \{a^k : k \in \mathcal{Z}\}$ (o $\langle a \rangle = \{ka : k \in \mathcal{Z}\}$ en notación aditiva) se denomina **subgrupo cíclico** de G generado por a.
- Si existe $a \in G$ tal que $G = \langle a \rangle$, G se dice un **grupo cíclico** y a es un generador de G.
- Se define el **orden** del elemento $a \in G$ como el orden (es decir, el cardinal) del subgrupo cíclico $\langle a \rangle$ generado por a.

Lema 1. Todo subgrupo H de $(\mathcal{Z}, +)$ es cíclico. Además $H = \langle 0 \rangle = \{0\}$ o bien $H = \langle m \rangle$, donde m es el menor entero positivo de H.
Lema 2. Sea G un grupo y H_1, H_2 subgrupos de un grupo G. Entonces $H_1 \cap H_2$ es un subgrupo de G. Generalmente, si $\{H_i\}_{i \in I}$ es una familia de subgrupos de G, entonces $\bigcap_{i \in I} H_i$ es un subgrupo de G.
Teorema 2. Sea G un grupo y sea $X \subset G$.

1. Existe un único subgrupo H de G que contiene a X y tal que para cada $H' < G$ con $X \subset H'$, resulta $H \subset H'$
2. Los elementos del subgrupo H del item anterior son de la forma
$$a_1^{n_1} a_2^{n_2} ... a_k^{n_k}$$
con $k \in \mathcal{N}, n_j \in \mathcal{Z}$ y $a_j \in X$ para cada $j = 1, ..., k$

Definición 5. Sea G un grupo y $X \subset G$ un subconjunto cualquiera. El menos subgrupo de G que contiene a X definido en el **Teorema 2** se denomina **subgrupo generado por** X y se denota $\langle X \rangle$.
Observación 1. Si $X = \{a\}$ consta de un único elemento, es claro que el subgrupo generado por $\{a\}$ es el subgrupo cíclico generado por a.
Lema 3. Sea G un grupo y sea $\sim$ una relación de equivalencia tal que $G/\sim$ es un grupo. (con la operación inducida). Entonces:

1. $H = [e]$ es un subgrupo de G
2. para cada $x, y \in G$,
$$x \sim y \Leftrightarrow xy^{-1} \in H$$
3. para cada $x, y \in G$,
$$x \sim y \Leftrightarrow x^{-1}y \in H$$

Esto nos dice entonces que si $\sim$ es una relación de equivalencia en G tal que $G/\sim$ es un grupo, existe un subgrupo H de G tal que la relación está dada por cualquiera de las dos definiciones equivalentes dadas en los items 2 y 3.
Definición 6. Sea G un grupo y H un subgrupo. Sean $a, b \in G$, decimos que a es **congruente a derecha** con b **módulo** H, y lo denotamos $a \equiv_r b(H)$, si $ab^{-1} \in H$. Decimos que a es **congruente a izquierda** con b **módulo** H, y lo denotamos $a \equiv_l b(H)$, si $a^{-1}b \in H$.
Lema 4. Sea G un grupo y H un subgrupo de G, entonces las congruencias a izquierda y a derecha módulo H son relaciones de equivalencia en G. Más aún, para cada $a \in G$,

- La clase de equivalencia de a por $\equiv_r$ es $[a]_r = Ha = \{ha : h \in H\}$

- La clase de equivalencia de a por $\equiv_l$ es $[a]_l = aH = \{ah : h \in H\}$

Teorema 3. Sea H un subgrupo de G tales que la congruencia a izquierda módulo H y la congruencia a derecha módulo H coinciden. Sea $\sim=\equiv_r=\equiv_l$. Entonces la operación del grupo se induce al conciente $G/\sim$, que por lo tanto es un grupo.
Teorema 4. Sea $\sim$ una relación de equivalencia en G. Entonces $G/\sim$ es un grupo con la operación que se induce de G sii existe un subgrupo H de G para el cuál $\sim=\equiv_r=\equiv_l$ módulo H.
Definición 7. Un subgrupo N de un grupo G para el cual las congruencias a derecha e izquierda módulo N coinciden se denomina un **subgrupo normal** de G. Se denota $N \triangleleft G$. El subgrupo cociente $G/\sim$, donde $\sim$ es la congruencia a derecha o izquierda módulo N, se denota por G/N.
Teorema 5. (Caracterización de los subgrupos normales) Sea G un grupo y N un subgrupo de G. Entonces son equivalentes:

1. N es un subgrupo normal de G
2. para cada $a \in G$, $aN = Na$
3. para cada $a \in G$, $aNa^{-1} \subset N$, donde $aNa^{-1} = \{ana^{-1} : n \in N\}$
4. para cada $a \in G$, $aNa^{-1} = N$

Definición 8.

- Si f es un homomorfismo inyectivo, se denomina un **monomorfismo**
- Si f es un homomorfismo sobreyectivo, se denomina un **epimorfismo**
- Si f es un homomorfismo biyectivo, se denomina un **isomorfismo**, y si $G' = G$ f se dice **automorfismo**.

Teorema 6. Sea $f : G \to G'$ un homomorfismo y sea $ker(f) = \{x \in G : f(x) = e_{G'}\}$ el núcleo de f. Entonces:

1. $ker(f)$ es un subgrupo normal de G.
2. f es un monomorfismo sii $ker(f) = \{e_G\}$

Teorema 7. (Primer Teorema de Isomorfismo) Si $f : G \to H$ es un epimorfismo, entonces $G/ker(f)$ es **isomorfo** a H.
Teorema 8. Sea $f : G \to G'$ un homomorfismo de grupos. Si G es un grupo cíclico, entonces $f(G)$ es un subgrupo cíclico de G' cuyos generadores son las imágenes de los generadores de G.
Corolario 1. Sea $f : G \to G'$ un isomorfismo de grupos. Entonces para cada $a \in G$, $o(a) = o(f(a))$ (donde o es el orden).
Teorema 9. Sea G un grupo cíclico. Entonces G es isomorfmo a alguno de los siguientes grupos:

1. $(\mathcal{Z}, +)$ si $o(G)$ es infinito.
2. $(\mathcal{Z}_m, +)$ para algún $m \in \mathcal{N}$, si $o(G) = m$.

Corolario 2. Todo subgrupo de un grupo cíclico es cíclico.
Teorema 10. Sea $G = \langle a \rangle$ un grupo cíclico. Entonces:

1. Si G es infinito, a y a^{-1} son los únicos generadores de G.
2. Si G es finito de orden m, entonces a^k es un generador de G sii $(k : m) = 1$.

Corolario 3. Si un grupo cíclico G tiene orden p, con p primo, entonces G no tiene subgrupos propios.
Teorema 11. Sea G un grupo y $a \in G$

1. a tiene orden infinito sii vale: $[a^k = e \; sii \; k = 0]$. En ese caso, los elementos a^k con $k \in \mathcal{Z}$ son todos distintos entre si.

2. a tiene orden finito sii existe $m \in \mathcal{N}$ tal que $a^m = e$. En este caso $o(a) = min\{k \in \mathcal{N} : a^k = e\}$ y $a^r = a^s$ sii $r \equiv s(m)$. Es decir, $\langle a \rangle = \{e, a, a^2, ..., a^{o(a)-1}\}$

Definición 9. Las clases $[a]_l$ y $[a]_r$ definidas en el **Lema 4** suele denominarse **coclases a derecha e izquierda** respectivamente determinadas por el subgrupo H.

Hemos visto que $[a]_l = [a]_r$ para cada $a \in G$ sii H es un subgrupo normal de G. Por lo tanto, para que un subgrupo genérico H de G, estas clases no coinciden. Sin embargo, tienen algunas propiedades comunes.

Teorema 12. Sea H un subgrupo de un grupo G. Entonces:

1. El cardinal de cada coclase (a derecha o izquierda) coincide con el cardinal de H.

2. Un subgrupo H de G determina la misma cantidad de coclases a derecha que a izquierda en G (es decir, el cardinal de los conjuntos cociente $G/[a]_l$ y $G/[a]_r$ es el mismo).

Teorema 13. (Lagrange) Sea H un subgrupo de un grupo G. Entonces $o(G) = [G : H]o(H)$. En particular, si G es finito, entonces para cada $a \in G$, $o(a)$ divide a $o(G)$.

Teorema 14. Todo grupo de orden primo es cíclico y no tiene subgrupos propios

Teorema 15. (Pequeño Teorema de Fermat) Sea p un número primo. Entocnes para todo entero a no divisible por p resulta $a^{p-1} \equiv 1(p)$.

Colorario 4. Sea p un número primo y $a \in \mathcal{Z}$ cualquiera. Entonces $a^p \equiv a(p)$

Teorema 16. (Teorema Chino del Resto). Sean $m_1.m_2, ..., m_r$ números naturales coprimos dos a dos, y sea m su producto. Si $a_1, a_2, ..., a_r$ son números enteros cualesquiera, existe solución al sistema (3) y está unívocamente determinada módulo m. Esto es, si x_0 es una solución cualquiera de (3), entonces x satisface $x = x_0(m)$. En particular, existe un único $x_0 \in \mathcal{Z}$ solución de (3) tal que $0 \leq x_0 < m$

$$\begin{cases} x & \equiv a_1\,(m_1) \\ x & \equiv a_2\,(m_2) \\ \vdots & \quad \vdots \\ x & \equiv a_r\,(m_r) \end{cases} \tag{3}$$

Teorema 17. (Algoritmo de Euclides)

6 Unidad 6: Categorías I

Definición 1. Una categoría $\mathscr{C}$ comprende:

- una clase de **objetos** que dentamos $ob\mathscr{C}$, cuyos elementos se denotan por $A,\ B,\ C,\ etc.$
- una clase de **morfismo** o **flechas** que denotamos $mor\mathscr{C}$, cuyos elementos se denotan por $f,\ g,\ h,$ *etc.*
- dos funciones de clase:
  - *dom*: $mor\mathscr{C} \to ob\mathscr{C}$, denominada **dominio**
  - *codom*: $mor\mathscr{C} \to ob\mathscr{C}$, denominada **codominio**

  Si $f \in mor\mathscr{C}$ es tal que $dom(f) = A \in ob\mathscr{C}$ y $codom(f) = B \in ob\mathscr{C}$, se denota $f : A \to B$. Denotamos también por $Hom(A, B) := \{f \in mor\mathscr{C} : f : A \to B\}$.

- Una función $\circ$ para cada $A,\ B,\ C \in ob\mathscr{C}$, denominada **composición** tal que

$$\circ : Hom(A, B) \times Hom(B, C) \to Hom(A, C),\ \circ(f, g) = g \circ f$$

  que verifica:

  - para cada $A,\ B,\ C,\ D \in ob\mathscr{C}$, $f \in Hom(A, B)$, $g \in Hom(B, C)$ y $h \in Hom(C, D)$,

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g\circ f"] \arrow[rrr, bend left=40, "h\circ(g\circ f)"] \arrow[rrr, bend right=40, "(h\circ g)\circ f"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "h\circ g"'] & C \arrow[r, "h"] & D
\end{tikzcd}$$

    Nos referimos a esta propiedad como **asociatividad** de la composición.

  - Para cada $A \in ob\mathscr{C}$ existe un morfismo $id_A \in Hom(A, A)$ denominado **morfismo identidad** tal que:
    - para cada $B \in ob\mathscr{C}$ y cada $f \in Hom(A, B)$, $id_A \circ f = f$
    - para cada $C \in ob\mathscr{C}$ y cada $G \in Hom(C, A)$, $g \circ id_A = g$

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "g"'] & A \arrow[loop above, "\mathrm{id}_A"] \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

Observación 1. La existencia de las funciones *dom* y *codom* permite probar que si $A,\ B,\ C,\ D \in ob\mathscr{C}$ son objetos distintos, entonces $Hom(A, B) \cap Hom(C, D) = \emptyset$, pues en efecto, si f fuese un morfismo en $Hom(A, B) \cap Hom(C, D)$, tendríamos $dom(f) = A = C$ y $codom(f) = B = D$. En muchos textos esta condición aparece en la definición de una categoría.

Definición 2. Un **diagrama** en una categoría $\mathscr{C}$ es un grafo dirigido etiquetado consistentemente, donde los vértices se etiquetan con objetos de $\mathscr{C}$, las aristas dirigidad con flechas de $\mathscr{C}$ de modo que si una artista está etiquetada con una flecha f cuyo dominio es A y codominio es B, el nodo inicial y final de esta arista se etiquetan con A y B respectivamente.

Un diagrama en $\mathscr{C}$ se dice **conmutativo** o se dice **que conmuta** si para cualquier par de vértices X e Y del diagrama, todos los caminos enre X e Y son equivalentes, en el sentido que determinan una arista dirigida entre X e Y que representa una misma flecha en $\mathscr{C}$.

Lema 1. Si en el siguiente diagrama ambos cuadrados interiores son conmutativos, entonces el rectángulo exterior es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "b"'] & C \arrow[d, "c"] \\
A' \arrow[r, "g"] & B' \arrow[r, "g'"] & C'
\end{tikzcd}$$

Definición 3. Categoría discreta. Dado un conjunto X cualquiera, podemos definir una categoría $\mathscr{C}$ tal que $ob\mathscr{C} = X$ y $mor\mathscr{C} = \{id_a : A \in X\}$. La composición se define de modo tal que $id_A \circ id_A = id_A$, con lo cual es inmediato que se verifica la definición 1. $\mathscr{C}$ se denomina categoría discreta, y puede representarse mediante el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow["\mathrm{id}_A", loop above] & & B \arrow["\mathrm{id}_B", loop above] & \\
& C \arrow["\mathrm{id}_C", loop above] & & D \arrow["\mathrm{id}_D", loop above] \\
E \arrow["\mathrm{id}_E", loop above] & & \ddots &
\end{tikzcd}$$

Como sucede con las estructuras algebraicas, a partir de una categoría podemos construir nuevas categorías.

Definición 4. Categoría dual. Sea $\mathscr{C}$ una categoría, la categoría dual denotada por $\mathscr{C}^{op}$ tal que:

- $\mathscr{C} = \mathscr{C}^{op}$.
- $mor\mathscr{C}^{op}$ es tal que $f \in Hom^{op}(A, B)$ si $f \in Hom(B, A)$.
- $dom^{op} = codom$ y $codom^{op} = dom$.
- $\circ^{op}$ es tal que si $f \in Hom^{op}(A, B)$ y $g \in Hom^{op}(B, C)$, entonces $g \circ^{op} f = f \circ g$.
- $id_A^{op} = id_A$.

Observación 2. En la categoría dual de una categoría $\mathscr{C}$ muchas veces dejan de tener sentido las nociones de morfismo y composición que tienen en la categoría $\mathscr{C}$. Sintácticamente estas propiedades pueden resumirse en el siguiente diagrama:

$$\text{En } \mathscr{C} \qquad \begin{tikzcd}
A \arrow[d, "f"'] \arrow[dd, bend left, "g \circ f"] \\
B \arrow[d, "g"'] \\
C
\end{tikzcd} \qquad\qquad \text{En } \mathscr{C}^{op} \qquad \begin{tikzcd}
A \\
B \arrow[u, "f"] \\
C \arrow[u, "g"] \arrow[uu, bend right, "f \circ^{op} g := g \circ f"']
\end{tikzcd}$$

Definición 5. Categoría opuesta.

Definición 6. Categoría producto. Sean $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$. Se denomina **categoría producto** a una categoría $\mathscr{C}$, que se denota $\mathscr{C} = \mathscr{C}_1 \times \mathscr{C}_2$ tal que:

- $ob\mathscr{C} = \{(A, B) : A \in ob\mathscr{C}_1, B \in ob\mathscr{C}_2\}$

- $mor\mathscr{C} = \{(f,g) : f \in mor\mathscr{C}_1, f \in mor\mathscr{C}_2\}$ y las funciones dominio y codominio están dadas por $dom(f_1, f_2) = (dom\ f_1, dom\ f_2)$ y $codom(f_1, f_2) = (codom\ f_1, codom\ f_2)$. De esta manera si, $(A, B), (A', B') \in ob\mathscr{C}$,

$$Hom((A,B),(A',B')) = \{(f,g) : (A,B) \to (A',B') : f \in Hom(A,A'), g \in Hom(B,B')\}$$

- La composición es componente a componente, esto es $(f', g') \circ (f, g) = (f' \circ f, g' \circ g)$. Es fácil ver que a partir de la asociatividad de la composición en $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ que la composición en $\mathscr{C}$ es asociativa.

- $id_{(A,B)} = (id_A, id_B)$. En efecto, si $(f,g) \in Hom((A,B),(A',B'))$, se verifica

$$(f,g) \circ id_{(A,B)} = (f,g) \circ (id_A, id_B) = (f \circ id_A, h \circ id_B) = (f,g)$$

  La otra composición es análoga.

Definición 7. Categoría de flechas.
Definición 8. Subcategoría. Sea $\mathscr{C}$ una categoría. Una **subcategoría** $\mathscr{S}$ de $\mathscr{C}$ es una categoría tal que:

- Todos los objetos de $\mathscr{S}$ son objetos de $\mathscr{C}$ (abusando de la notación, $ob\mathscr{S} \subseteq ob\mathscr{C}$)
- Todos los morfismos de $\mathscr{S}$ son morfismos de $\mathscr{C}$ (o sea, $mor\mathscr{S} \subseteq mor\mathscr{C}$)
- Las funciones dominio, codominio así como la composición de morfismos y los morfismos de identidad en $\mathscr{S}$ son los mismos que en $\mathscr{C}$.

Defición 9. Sea $\mathscr{C}$ una categoría y $f : A \to B$ un morfismo de $\mathscr{C}$. Decimos que f es un **monomorfismo** si par cualquier par de morfismos $g : C \to A$, $h : C \to A$ en $mor\mathscr{C}$ se verifica que

$$f \circ g = f \circ h \implies g = h$$

Es decir, f es mónico si para cada $g, h \in Hom(C, A)$ se tiene:

$$C \overset{g}{\underset{h}{\rightrightarrows}} A \xrightarrow{f} B \quad conmutativo \implies g = h$$

Claramente si un morfismo es mónico en una categoría $\mathscr{C}$ lo será en cualquier subcategoría $\mathscr{S}$ de $\mathscr{C}$ que lo contenga como morfismo, dado que la composición en $\mathscr{S}$ es la misma que en $\mathscr{C}$. Es decir: (siguiente lema)
Lema 2. Sea $\mathscr{C}$ una categoría y $\mathscr{S}$ una subcategoría de $\mathscr{C}$. Si $f \in mor\mathscr{C}$ es mónico y $f \in mor\mathscr{S}$, entonces f es un monomorfismo en $\mathscr{S}$
Lema 3. En Set un morfismo es mónico sii es una función inyectiva.
Lema 4. En toda categoría donde los objetos sean conjuntos, los morfismos sean funciones entre conjuntos y la composición sea la composición usual de funciones, toda función inyectiva es un monomorfismo.
Definición 10. Sea $\mathscr{C}$ una categoría y $f : A \to B$ un morfismo de $\mathscr{C}$. Decimos que f es un epiformismo o un morfismo **épico** si para cualquier $C \in ob\mathscr{C}$ y cualquier par de morfismos $g, h \in Hom(B, C)$, se verifica

$$g \circ f = h \circ f \implies g = h$$

Es decir, f es épico si para cada $g, h \in Hom(B, C)$ se tiene:

$$A \xrightarrow{f} B \overset{g}{\underset{h}{\rightrightarrows}} C \quad conmutativo \implies g = h$$

Nuevamente, tenemos que los epiformismos de $\mathscr{C}$ son epimorfismos en cualquier subcategoría que los contenga como morfismos.

Lema 5. Sea $\mathscr{C}$ una categoría y $\mathscr{S}$ una subcategoría de $\mathscr{C}$. Si $f \in mor\mathscr{C}$ es épico y $f \in mor\mathscr{S}$, entonces f es un epiformismo en $\mathscr{S}$.

Lema 6. En Set un morfismo es épico sii es una función sobreyectiva.

Lema 7. En toda categoría donde los objetos sean conjuntos, y los morfismos sean funciones entre conjuntos y la composición sea la composición usual de funciones, toda función sobreyectiva es un epimorfismo.

Definición 11. Sea $\mathscr{C}$ una categorría y $f \in mor\mathscr{C}$ un morfismo. Si $f \in Hom(A, B)$ decimos que f es un **isomorfismo** si existe un morfismo $g \in Hom(B, A)$ tal que $g \circ f = id_A$ y $f \circ g = id_B$. Si existe un isomorfismo $f \in Hom(A, B)$ decimos que A y B son objetos **isomorfos**.

Lema 8. Sea $\mathscr{C}$ una categoría. Entonces:

1. Para cada $A \in ob\mathscr{C}$, id_A es un isomorfismo.

2. Si $f \in Hom(A, B)$ es un isomorfismo, entonces $f^{-1} \in Hom(B, A)$ es un isomorfismo.

3. Si $f \in Hom(A, B)$ y $g \in Hom(B, C)$ son isomorfismos, entonces $g \circ f \in Hom(A, C)$ es un isomorfismo.

4. La relación $\sim$ en $ob\mathscr{C}$ dara por $A \sim B$ si existe un isomorfismo $f \in Hom(A, B)$ esuna relación de equivalencia.

Observemos que la definición de isomorfismo difiere sustancialmente de las definiciones que hemos hecho de monomorfismo y epimorfismo. En primer lugar, es inmediato de la definición que en Set un morfismo es un somorfismo sii es una función biyectiva.

Por otra parte, si $\mathscr{C}$ es una categoría donde los objetos son conjuntos, los morfismos son funciones entre conjuntos, la composición y las identidades son las usuales, entonces **todo isomorfismo es una función biyectiva.** En este sentido, tenemos la implicación inversa de las que teníamos para las definiciones de monomorfismo y epimorfismo, Esto es si en $\mathscr{C}$ los morfismos son funciones entonces:

- f inyectiva $\implies$ f monomorfismo.

- f sobreyectiva $\implies$ f epimorfismo.

- f isomorfismo $\implies$ f biyectiva.

Ya vimos que en Set valen todas las recíprocas, pero hay categorías donde las recíprocas de las dos primeras implicaciones son falsas. Esto implica automáticamente que en una categoría un morfismo puede ser simultáneamente un monomorfiso y un epimorfismo sin ser un isomorfismo.

Finalmente, también existen categorías donde un morfismo puede ser biyectivo sin ser un isomorfismo, con lo cual la recíproca de la última implicación también es falsa.

Definición 12. Sea $\mathscr{C}$ una categoría. Un objeto $0 \in ob\mathscr{C}$ se dice un **objeto inicial** si para cada objeto A de $\mathscr{C}$ existe un único morfismo $f : 0 \to A$. Un objeto $1 \in ob\mathscr{C}$ se dice un **objeto terminal** si para cada objeto A de $\mathscr{C}$ existe un único morfismo $g : A \to 1$. Un objeto en $\mathscr{C}$ se dice un **objeto nulo** u **objeto cero** si es inicial y terminal.

Observación 3. Si bien una categoría puede tener más de un objeto inciial o terminal, estos son todos isomorfmos entre sí.

Definición 12. Sea $\mathscr{C}$ una categoría y A, B objetos de $\mathscr{C}$. El **producto** de A y B en $\mathscr{C}$ es una terna $(A \times B, \pi_A, \pi_B)$ tales que:

- $\pi_A \in Hom(A \times B, A)$ y $\pi_B \in (A \times B, B)$
- y se satisface la propiedad universal:

  para todo objeto C y para todo par de morfismos $f : C \to A, g : C \to B$ existe un único morfismo $\langle f, g\rangle : C \to A \times B$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed, "\exists! \langle f,g\rangle"] \arrow[dr, "g"] & \\ A & A \times B \arrow[l, "\pi_A"] \arrow[r, "\pi_B"'] & B \end{tikzcd}$$

Si en $\mathscr{C}$ existe el producto $(A \times B, \pi_A, \pi_B)$ para cualquier par de objetos A y B, decimos que $\mathscr{C}$ es una **categoría con productos**.

Lema 9. Sea $\mathscr{C}$ una categoría y sean A y B dos objetos de $\mathscr{C}$. Si existe el producto $(A \times B, \pi_A, \pi_B)$, éste es único salvo isomorfismos.

Definición 13. Sea $\mathscr{C}$ una categoría y A, B, C, D objetos de $\mathscr{C}$ para los cuales existen los productos $(A \times B, \pi_A, \pi_B)$ y $(C \times D, \pi_C, \pi_D)$. Sean $f : A \to C$ y $g : B \to D$ son dos morfismos de $\mathscr{C}$. El morfismo $f \times g = \langle f \circ \pi_A, g \circ \pi_B\rangle : A \times B \to C \times D$, se denomina el **morfismo producto** de f y g.

Definición 14. Sea $\mathscr{C}$ una categoría y A, B objetos de $\mathscr{C}$. El **coproducto** de A y B en $\mathscr{C}$ es una terna $(A + B, i_A, i_B)$ tales que:

- $i_A \in Hom(A, A + B)$ y $i_B \in (B, A + B)$
- y se satisface la propiedad universal:

  para todo objeto C y para todo par de morfismos $f : A \to C, g : B \to C$ existe un único morfismo $[f, g] : A + B \to C$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i_A"] \arrow[dr, "f"'] & A + B \arrow[d, dashed, "\exists! [f,g]"] & B \arrow[l, "i_B"'] \arrow[dl, "g"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

Si en $\mathscr{C}$ existe el coproducto $(A + B, i_A, i_B)$ para cualquier par de objetos A y B, decimos que $\mathscr{C}$ es una **categoría con coproductos.**

Lema 10. Sea $\mathscr{C}$ una categoría y A, B objetos en $\mathscr{C}$. Si existe el coproducto $(A + B, i_A, i_B)$, éste es único salvo isomorfismos.

Definición 15. Si $\{A_k\}_{k\in K}$ es una familia de objetos indexada por un conjunto K, un **producto** de $\{A_k\}_{k\in K}$ es un objeto $\prod_{k\in K} A_k$ junto con una familia de morfismos $\{\pi_j : \prod_{k\in K} A_k \to A_j\}_{j\in K}$ que verifican la siguiente propiedad universal:

- para todo objeto C y para toda familia de morfismos $\{f_k : C \to A_k\}_{k\in K}$, existe un único morfismo

$$\langle f_k\rangle_{k\in K} : C \to \prod_{k\in K} A_k$$

  tal que para cada $j \in K$, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[d, dashed, "\exists! \langle f_k \rangle_{k\in K}"'] \arrow[dr, "f_j"] & \\
\prod_{k\in K} A_k \arrow[r, "\pi_j"'] & A_j
\end{tikzcd}$$

Un **coproducto** de $\{A_k\}_{k\in K}$ es un objeto $\bigoplus_{k\in K} A_k$ junto con una familia de morfismos $\{i_j : A_j \to \bigoplus_{k\in K} A_k\}_{j\in K}$ que verifican la siguiente propiedad universal:

Para todo objeto C y para toda familia de morfismos $\{f_k : A_k \to C\}_{k\in K}$ existe un único morfismo

$$[f_k]_{k\in K} : \bigoplus_{k\in K} A_k \to C$$

tal que para cada $j \in K$, el siguiente diagrama conmuta:

Definición 16. El **ecualizador** de dos morfismos $f, g : A \to B$ en una categoría $\mathscr{C}$ es un par (X, e) donde X es un objeto de $\mathscr{C}$ y $e : X \to A$ es un morfismo de $\mathscr{C}$ tal que:

- $f \circ e = g \circ e$
- para todo objeto X' de $\mathscr{C}$ y todo morfismo $e' : X' \to A$ tal que $f \circ e' = f \circ e'$, existe un único morfismo $k : X' \to X$ tal que $e \circ k = e'$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\
X' \arrow[u, dashed, "\exists! k"] \arrow[ur, "e'"'] & &
\end{tikzcd}$$

Definición 17. El **coecualizador** de dos morfismos $f, g : A \to B$ en una categoría $\mathscr{C}$ es un par (Y, q), donde Y es un objeto de $\mathscr{C}$ y $q : B \to Y$ es un morfismo de $\mathscr{C}$ tal que:

- $q \circ f = q \circ g$
- para todo objeto Y' de $\mathscr{C}$ y todo morfismo $q' : B \to Y'$ tal que $q' \circ f = q' \circ g$, existe un único morfismo $u : Y \to Y'$ tal que $u \circ q = q'$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "q'"'] & Y \arrow[d, dashed, "\exists!\, u"] \\
& & Y'
\end{tikzcd}$$

Lema 11. Sea $\mathscr{C}$ una categoría, A, B objetos en $\mathscr{C}$ y $f, g : A \to B$ dos morfismos en $\mathscr{C}$.

1. Si (X, e) es un ecualizador de f y g, entonces $e : X \to A$ es un momorfismo. Si además e es un epimorfismo, entonces es un isomorfismo.
2. Si (Y, q) es un coecualizador de f y g, entonces $q : B \to Y$ es un epimorfismo. Si además q es un monomorfismo, entonces es un isomorfismo.

Definición 18. Sea $\mathscr{C}$ una categoría y D un diagrama en $\mathscr{C}$. Denotemos por obD los objetos de $\mathscr{C}$ que representan algún nodo de D y $morD$ los morfismos de $\mathscr{C}$ que representan aristas de D.

Un **cono** para D es un par (X, F_D) donde:

- X es un objeto de $\mathscr{C}$.

- F_D es una familia de morfismos de $\mathscr{C}$ formada por un único morfismo $f_D : X \to D$ para cada objeto D de obD tal que si $f : A \to B$ es un morfismo en $morD$, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, "f_A"'] \arrow[dr, "f_B"] & \\
A \arrow[rr, "f"] & & B
\end{tikzcd}$$

Un **cocono** para D es un par (Y, G_D) donde:

- Y es un objeto en $\mathscr{C}$.
- G_D es una familia de morfismos de $\mathscr{C}$ formada por un morfismo $g_D : D \to Y$ para cada objeto D de obD tal que si $f : A \to B$ es un morfismo en $morD$, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g_A"'] & & B \arrow[dl, "g_B"] \\
& Y &
\end{tikzcd}$$

Definición 19. Sea $\mathscr{C}$ una categoría y D un diagrama de $\mathscr{C}$. Un **límite** para D es un cono (X, F_D) que verifica la siguiente propiedad universal:

- para todo cono (X', F'_D) de D, existe un único morfismo $k : X' \to X$ tal que el siguiente diagrama conmuta para cada objeto D en obD:

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[rr, dashed, "k"] \arrow[dr, "f'_D"'] & & X \arrow[dl, "f_D"] \\
& D &
\end{tikzcd}$$

Un **colímite** para D es un cocono (Y', G'_D) que verifica la siguiente propiedad univeral:

- para todo cocono (Y', G'_D) de D, existe un único morfismo $k : X \to X'$ tal que el siguiente diagrama conmuta para cada objeto D en obD:

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[rr, dashed, "k"] & & Y' \\
& D \arrow[ul, "g_D"] \arrow[ur, "g'_D"'] &
\end{tikzcd}$$

Lema 12. Si un diagrama admite un límite o un colímite, éstos son únicos salvo isomorfismos.
Definición 20. Sea $\mathscr{C}$ una categoría con productos finitos y sean A, B dos objetos de $\mathscr{C}$. Un objeto B^A es un **exponencial** si existe un morfismo $eval : B^A \times A \to B$ tal que para conjunto C y cada morfismo $g : C \times A \to B$, existe un único morfismo $\widetilde{g} : C \to B^A$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} B^A & B^A \times A \arrow[r, "\mathrm{eval}"] & B \\ C \arrow[u, dashed, "\tilde{g}"] & C \times A \arrow[u, dashed, "\tilde{g}\times \mathrm{id}_A"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

El morfismo $\widetilde{g}$ se denota $curry(g)$. Si para cada cualquier par de objetos A, B de $\mathscr{C}$ existe un exponencial, $\mathscr{C}$ se dice una categoría con exponenciales.
Definición 21. Sea $\mathscr{C}$ una categoría. Decimos que $\mathscr{C}$ es una **categoría cartesiana cerrada (CCC)** si $\mathscr{C}$ tiene objeto terminal y es una categoría con productos y con exponenciales.

7 Unidad 7: Categorías II

Definición 1. Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ dos categorías. Un **funtor covariante**, o simplemente **funtor** de $\mathscr{C}$ en $\mathscr{D}$ es un par de funciones de clase, ambas denotadas por F,

$$F : ob\ \mathscr{C} \to ob\ \mathscr{D},\ F : mor\ \mathscr{C} \to mor\ \mathscr{D}$$

tales que:

1. para cada $f \in Hom(A, B)$, entonces $F(f) \in Hom(F(A), F(B))$
2. para cada objeto A de $\mathscr{C}$, vale que $F(id_A) = id_{F(A)}$
3. para cada objeto $A,\ B\ y\ C$ de $\mathscr{C}$, y morfismos $f \in Hom(A, B)$, $g \in Hom(B, C)$, vale que:

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$$

Si F un funtor covariante de $\mathscr{C}$ en $\mathscr{D}$ lo denotamos $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$
Definición 2. Una categoría $\mathscr{C}$ se dice **pequeña** si tanto $ob\ \mathscr{C}$ como $mor\ \mathscr{C}$ son conjuntos. De otra manera, $\mathscr{C}$ se dice una categoría **grande**. $\mathscr{C}$ se dice **localmente pequeña** si para cada par de objetos $A,\ B$ de $\mathscr{C}$, $Hom(A, B)$ es un conjunto.
Ejemplos de funtores.

1. **Funtor identidad.** $Id : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ tq $Id(A) = A$ y $Id(f) = f$.
2. **Funtor olvido.** $Fgt : \mathscr{C} \to Set$, donde $\mathscr{C}$ es una categoría cuyos objetos son conjuntos más alguna estructura adicional. Por ejemplo $(N, +)$ (Monoide).
   $Fgt((N, +)) = B$ y $Fgt(f) = f$
3. **Funtor** hom_A. Sea $\mathscr{C}$ una categoría localmente pequeña, luego $hom_A : \mathscr{C} \to Set$ tq
   $hom_A(B) = Hom_{\mathscr{C}}(A, B)$
   Sea $f \in Hom(B, C)$, luego $hom_A(f) : Hom_{\mathscr{C}}(A, B) \to Hom_{\mathscr{C}}(A, C)$
   Luego, $hom_A(f)(g) = f \circ g$
4. **Funtores producto.**
   - $\times_A\ :\ \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ ($\mathscr{C}$ con productos binarios) tq
     $$\times_A(B) = A \times B \text{ y}$$
     Si $f \in Hom(B, C)$ entonces $\times_A(f) \in Hom(A \times B, A \times C)$, luego $\times_A(f) = id_A \times f$
   - $\times^A$ se define de manera análoga donde $\times^A(B) = B \times A$

5. **Funtor exponencial.** Si $\mathscr{C}$ es una categoría con exponenciales, entonces el funtor $exp_A : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ se define como:

   $exp_A(B) = B^A$ para cada objeto B de $\mathscr{C}$.

   Para definir $exp_A(f)$ para un morfimsmo $f \in Hom(B, C)$, consideremos el morfismo $f \circ eval_B : B^A \times A \to C$. Por la **PU** de exponenciales, existe un único morfismo $f^A = curry(f \circ eval_B) : B^A \to C^A$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} C^A \\ B^A \arrow[u, dashed, "f^A"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C^A \times A \arrow[r, "\mathrm{eval}_C"] & C \\ B^A \times A \arrow[u, dashed, "f^A \times \mathrm{id}_A"] \arrow[r, "\mathrm{eval}_B"'] \arrow[ur, "f \circ \mathrm{eval}_B"] & B \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd}$$

   Por lo tanto, $exp_A(f) = f^A \in Hom(B^A, C^A)$

Definición 3. Composición de funtores. Sean $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ y $G : \mathscr{D} \to \mathscr{E}$ dos funtores. Se define $G \circ F : ob\, \mathscr{C} \to ob\mathscr{E}$ como $G \circ F(A) = G(F(A))$ y $G \circ F : mor\, \mathscr{C} \to \mathscr{E}$ por $G \circ F(f) = G(F(f))$. Vale que si G y F son funtores, entonce su composición también lo és.

Categoría de categorías. Se puede definir una categoría de categorías Cat donde los objetos son justamente categorías y los morfismos son funtores. El morfismo identidad es el funtor identidad sobre cada categoría y la composición es la composición definida en la **Definición 3.**

Definición 4. Funtor contravariante. Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ dos categorías. Un **funtor contravariante** de $\mathscr{C}$ en $\mathscr{D}$, denotado por $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ es un par de funciones de clase, ambas denotadas por F,

$$F : ob\, \mathscr{C} \to ob\, \mathscr{D},\ F : mor\, \mathscr{C} \to mor\, \mathscr{D}$$

tales que:

1. para cada $f \in Hom(A, B)$, entonces $F(f) \in Hom(F(B), F(A))$
2. para cada objeto A de $\mathscr{C}$, vale que $F(id_A) = id_{F(A)}$
3. para cada objeto $A,\ B\ y\ C$ de $\mathscr{C}$, y morfismos $f \in Hom(A, B)$, $g \in Hom(B, C)$, vale que:

$$F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$$

Definición 5. Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ dos categorías. Decimos que $\mathscr{C}$ es una **categoría isomorfa** a $\mathscr{D}$ si existen funtores $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ y $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ tales que: $G \circ F = Id_{\mathscr{C}}$ y $F \circ G = Id_{\mathscr{D}}$

Decimos que $\mathscr{C}$ es **anti-isomorfa** a $\mathscr{D}$ si existen dos funtores contravariantes $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ y $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ tales que $G \circ F = Id_{\mathscr{C}}$ y $F \circ G = Id_{\mathscr{D}}$

Definición 6. Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ dos categorías y sean $F, G : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ dos funtores de $\mathscr{C}$ en $\mathscr{D}$. Una **tranformación natural** de F en G, denotada $n : F \to G$, es una función de clases $n : ob\mathscr{C} \to mor\mathscr{D}$ tal que:

1. para cada objeto A de $\mathscr{C}$, $\eta_A = \eta(A) \in Hom_{\mathscr{D}}(F(A), G(A))$
2. para cada morfismo $f \in Hom_{\mathscr{C}}(A, B)$, el siguiente diagrama en $\mathscr{D}$ conmuta:

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(B) \arrow[r, "\eta_B"] & G(B) \end{tikzcd}$$

es decir,

$$\eta_B \circ F(f) = G(f) \circ \eta_A$$

Si cada morfismo η_A es un isomorfismo en $\mathscr{D}$, η se dice un **isomorfismo natural**.

Definición 7. Composición de transformaciones naturales. Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ dos categorías y sean $F, G, H : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ funtores. Supongamos que existen transformaciones naturales $\eta : F \to G$ y $\tau : G \to H$. Pongamos $\tau \circ \eta : F \to H$ de modo que $\tau \circ \eta(A) = \tau_A \circ \eta_A$. Tenemos entonces el siguiente diagrama para cada par de objetos A, B de $\mathscr{C}$ y cada $f \in Hom(A, B)$:

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[r, "\tau_A"] \arrow[d, "G(f)"] & H(A) \arrow[d, "H(f)"] \\
F(B) \arrow[r, "\eta_B"] & G(B) \arrow[r, "\tau_B"] & H(B)
\end{tikzcd}$$

Como los cuadrados interiores del diagrama conmutan, conmuta el rectángulo exterior, esto es, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "\tau_A \circ \eta_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & H(A) \arrow[d, "H(f)"] \\
F(B) \arrow[r, "\tau_B \circ \eta_B"] & H(B)
\end{tikzcd}$$

y por lo tanto $\tau \circ \eta$ es una transformación natural de F en H. Como la composición de isomorfismos en una categoría es un isomorfismo, resulta que si η y τ son isomorfismos naturales, entonces $\tau \circ \eta$ es un isomorfismo natural.

Categoría de Funtores $\mathscr{C}^{\mathscr{D}}$. Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ dos categorías y pongamos $\mathscr{C}^{\mathscr{D}}$ tal que sus objetos son funtores de $\mathscr{C}$ en $\mathscr{D}$ y sus morfimos son transformaciones naturales entre funtores.

Para cada funtor $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ existe la transformación identidad $Id_F : F \to F$.

Además por lo visto anteriormente, existe la composición entre funtores. Por lo tanto, $\mathscr{C}^{\mathscr{D}}$ es una categoría.

Definición 8. Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ dos categorías. Una **equivalencia de categorías** entre $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ consiste en dos funtores $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ y $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ y dos isomorfismos natureles $\eta : Id_{\mathscr{C}} \to G \circ F$ y $\tau : Id_{\mathscr{C}} \to F \circ G$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "f"'] & G(F(A)) \arrow[d, "G(F(f))"] \\
B \arrow[r, "\eta_B"] & G(F(B))
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, "\tau_{A'}"] \arrow[d, "g"'] & F(G(A')) \arrow[d, "F(G(g))"] \\
B' \arrow[r, "\tau_{B'}"] & F(G(B'))
\end{tikzcd}$$

Esencialmente, una equivalencia entre una categoría $\mathscr{C}$ y una categoría $\mathscr{D}$ mapea un objeto A de $\mathscr{C}$ en uno de $\mathscr{D}$ por F, y a su vez lo devuelve a un objeto A' de $\mathscr{C}$ por G que es isomorfo a A. Es decir, $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ son esencialmente la misma categoría salvo objetos isomorfos.

Lema 1. Sean $\mathscr{C}, \mathscr{D}$ y $\mathscr{E}$ categorías.

1. $\mathscr{C}$ es equivalente a $\mathscr{C}$

2. Si $\mathscr{C}$ es equivalente a $\mathscr{D}$ entonces $\mathscr{D}$ es equivalente a $\mathscr{C}$

3. Si $\mathscr{C}$ es equivalente a $\mathscr{D}$ y $\mathscr{D}$ es equivalente a $\mathscr{E}$, entonces $\mathscr{C}$ es equivalente $\mathscr{E}$

Definición 9. Sea $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un funtor. Decimos que:

1. F es **full** si para cada par de objetos A, B de $\mathscr{C}$, la función $Hom_{\mathscr{C}}(A, B) \to Hom_{\mathscr{D}}(F(A), F(B))$ es sobreyectiva.

2. F es **fiel** si para cada par de objetos A, B de $\mathscr{C}$, la función $Hom_{\mathscr{C}}(A, B) \to Hom_{\mathscr{D}}(F(A), F(B))$ es inyectiva.

3. F es **esencialmente sobreyectiva en objetos** si para cada objeto D de $\mathscr{D}$, existe un objeto A en $\mathscr{C}$ tal que D es isomorfo a $F(A)$.

Lema 2. Si $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ define una equivalencia de $\mathscr{C}$ en $\mathscr{D}$, entonces F es full, fiel y esencialmente sobreyectivo en objetos.

Teorema 1. Si $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ define una equivalencia entre $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$, entonces F preserva las propiedades categóricas de $\mathscr{C}$. Esto es, F mapea objetos iniciales, terminales, productos, límites, colímites, exponenciales, etc. en $\mathscr{C}$ en los respectivos objetos de $\mathscr{D}$.

Definición 10. Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ dos categorías y $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$, $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ funtores.

Una **adjunción** entre F y G es una transformación natural $\eta : Id_{\mathscr{C}} \to G \circ F$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "h"'] & G(F(A)) \arrow[d, "G\circ F(h)"] \\
B \arrow[r, "\eta_B"] & G(F(B))
\end{tikzcd}$$

tal que vale la siguiente **PU**: Para cada $X \in ob\ \mathscr{C}$, cada $Y \in ob\ \mathscr{D}$ y cada $f \in Hom(X, G(Y))$, existe un único morfismo $f^{\#} : F(X) \to Y$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[dr, "f"'] & G(F(X)) \arrow[d, dashed, "G(f^{\#})"] \\
 & G(Y)
\end{tikzcd}$$

En este caso, decimos que F es un **adjunto a izquierda** de G y G es un **adjunto a derecha** de F. La transformación natural η se denomina **unidad** de la adjunción.

Definición 11. Sean $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ y $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ dos funtores. Una **counidad de adjunción** entre F y G es una transformación natural $\epsilon : F \circ G \to Id_{\mathscr{D}}$ tal que para cada objeto X de $\mathscr{C}$, cada objeto Y de $\mathscr{D}$ y cada morfismo $g : F(X) \to Y$, existe un único morfismo $g^* : X \to G(Y)$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
F(G(Y)) \arrow[r, "\varepsilon_Y"] & Y \\
F(X) \arrow[u, dashed, "F(g^*)"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Lema 3. Toda unidad de adjunción η define una counidad de ajunción y vale la recíproca.

Lema 4. Sea $\mathscr{C}$ una categoría con productos binarios. Entonces $\mathscr{C}$ es una categoría con exponenciales sii para cada $A \in ob\ \mathscr{C}$ el funtor $\times^A = - \times A$ tiene adjunto a derecha.

Teorema 2. Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ categorías localmente pequeñas y sean $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$, $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ dos funtores. Sea η una unidad de adjunción y ϵ la correspondiente counidad de adjunción entre F y G. Entonces la función

$$\varphi : Hom_{\mathscr{C}}(X, G(Y)) \to Hom_{\mathscr{D}}(F(X), Y), \quad \varphi(f) = f^{\#}$$

es biyectiva (un isomorfismo en Set) con inversa

$$\varphi^{-1} : Hom_{\mathscr{D}}(F(X), Y) \to Hom_{\mathscr{C}}(X, F)(Y)), \quad \varphi(g) = g^*$$

Notación 1. En muchos textos si existe una adjunción entre F y G suele denotarse por $\frac{X\to G(X)}{F(X)\to Y}$ o bien $F \dashv G$

Teorema 3. Sean $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ y $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ dos funtores tales que existe una adjunción η de F en G.

1. Completar
2. Completar

Definición 12. Una **mónada** sobre una categoría $\mathscr{C}$ consiste de un funtor $T : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ (**endofuntor**) y dos transformaciones naturales:

- $\eta : Id_{\mathscr{C}} \to T$ (unidad)
- $\mu : T^2 \to T$ (multiplicación)

(donde T^n denota la composición de T con sí mismo n-veces) tales que

$$\mu \circ \mu_T = \mu \circ T_\mu$$
$$\mu \circ \eta_T = id_T = \mu \circ T_\eta$$

donde id_T indica el isomorfismo natural $T_\eta : ob\mathscr{C} \to mor\mathscr{C}$, $T_\eta(X) = T(\eta_X)$, y similarmente $T_\mu(X) = T(\mu_X)$, y η_T, μ_T son transformaciones naturales que se definen como $\eta_T(X) = \eta_{T(X)}$, $\mu_T(X) = \mu_{T(X)}$ o sea, los siguientes diagramas son conmutativos

$$\begin{tikzcd} T^3 \arrow[r, "T\mu"] \arrow[d, "\mu_T"'] & T^2 \arrow[d, "\mu"] \\ T^2 \arrow[r, "\mu"] & T \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T \arrow[r, "\eta_T"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_T"'] & T^2 \arrow[d, "\mu"] & T \arrow[l, "T\eta"'] \arrow[dl, "\mathrm{id}_T"] \\ & T & \end{tikzcd}$$

Ejemplo. Mónada a partir de adjunciones. Sea η una adjunción de $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ en $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$.
Consideremos el endofuntor $T = G \circ F : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$.
Tenemos asociadas a T dos transformaciones naturales:

- $\eta : id_{\mathscr{C}} \to T$ (unidad)
- $\mu : T^2 \to T$ que se define como sigue:
  - $\epsilon : F \circ G \to Id_{\mathscr{D}}$ es una counidad de adjunción asociada a η, con lo cual para cada $X \in ob\mathscr{C}$, $\epsilon_{F(X)} : F(G(F(X))) \to F(X)$
  - Ponemos entonces $\mu_X = G(\epsilon_{F(X)}) : T^2 = G(F(G(F(X)))) \to G(F(X)) = T$
    Queda ver que μ es transformación natural. (Vale)

Veamos que para cada X, conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} T(T(T(X))) \arrow[r, "T(\mu_X)"] \arrow[d, "\mu_{T(X)}"'] & T(T(X)) \arrow[d, "\mu_X"] \\ T(T(X)) \arrow[r, "\mu_X"] & T(X) \end{tikzcd}$$

$$\mu_X \circ \mu_{T(X)} \stackrel{?}{=} \mu_X \circ T(\mu_X)$$

O sea, hay que ver que

$$G(\epsilon_{F(X)}) \circ G(\epsilon_{F(G(F(X)))}) = G(\epsilon_{F(X)}) \circ G(F(G(\epsilon_{F(X)})))$$

Para ello observemos que como $\epsilon : F \circ G \to Id_{\mathscr{D}}$ es una transformación natural, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
F(G(F(G(F(X))))) \arrow[r, "\varepsilon_{F(G(F(X)))}"] \arrow[d, "F(G(\varepsilon_{F(X)}))"'] & F(G(F(X))) \arrow[d, "\varepsilon_{F(X)}"] \\
F(G(F(X))) \arrow[r, "\varepsilon_{F(X)}"] & F(X)
\end{tikzcd}$$

conmuta. Aplicado el funtor G obtenemos lo que queríamos probar. Queda probar que

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "\eta_T"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_T"'] & T^2 \arrow[d, "\mu"] & T \arrow[l, "T\eta"'] \arrow[dl, "\mathrm{id}_T"] \\
& T &
\end{tikzcd}$$

conmuta, y por lo tanto $T : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ es una mónada sobre $\mathscr{C}$

Teorema 4. Toda mónada proviene de adjunción (es decir puede ser obetnida como en el ejemplo anterior).

Más aún dada una mónada

$$(T, \eta, \mu), \quad T : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$$

Uno puede formar la categoría $Adj(\mathscr{C}, T)$ de todas las adjunciones F, G tales que

$$(T, \eta, \mu) = (G \circ F, \eta, G\epsilon F)$$

donde η y ϵ son la unidad y counidad de la adjunción, respectivamente. La categoría $Adj(\mathscr{C}, T)$ tiene:

- objeto inicial: categoría de *Kleisli*
- objeto terminal: categoría de *Eilenberg-Moore*

Lema de Yoneda. Sean $\mathscr{C}$ una categoría localmente pequeña, y $F : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ un funtor (covariante) arbitrario. Fijemos un objeto A de $\mathscr{C}$ cualquiera. Entonces, las transformaciones de hom_A en F están en corresponencia biyectiva con los elementos de $F(A)$:

$$Nat(hom_A, F) \simeq F(A)$$