Álgebra Lineal 2020 (LCC- LM- PM)
Cap.2: Espacios vectoriales

Graciela Nasini - Yanina Lucarini - Eduardo Martinez

nasini,lucarini, eduardom@fceia.unr.edu.ar

Interpretación geométrica de sistemas lineales

$$\begin{array}{rcrcrl} x & + & 2y & = & 3 & (1) \\ 4x & + & 5y & = & 6 & (2) \end{array}$$

Geometría por filas:

$(r_1)\ x + 2y = 3$ $\qquad$ $(r_2)\ 4x + 5y = 6$

Ejercicio: encontrar gráficamente la solución del sistema como intersección de las rectas r_1 y r_2 en $\mathbb{R}^2$.

Geometría por columnas:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Buscamos una combinación lineal de los vectores $u = (1, 4)$ y $v = (2, 5)$ que nos dé el vector $b = (3, 6)$.

Ejercicio: Dibujar en $\mathbb{R}^2$ los vectores u, v y b y mostrar (gráficamente) que b es combinación lineal de u y v.

Interpretación geométrica

¿En $n = 3$?

$$
\begin{array}{ccccccccc}
x & + & y & + & z & = & 4 & (1) \\
x & + & y & & & = & 2 & (2) \\
x & - & y & & & = & 0 & (3)
\end{array}
$$

Ejercicio: Mostrar gráficamente que el sistema tiene solución utilizando ambas *geometrías*, por filas y columnas.

¿En $n = 10$?
Deberemos ser capaces de imaginar planos 9-dimesionales en $\mathbb{R}^{10}$ *y en combinaciones lineales de vectores* 10- *dimensionales...*

Casos singulares

$$\begin{array}{rcrcrcrl} u & + & v & + & w & = & 2 & (1) \\ 2u & + & & + & 3w & = & 5 & (2) \\ 3u & + & v & + & 4w & = & 6 & (3) \end{array}$$

Algebraicamente:

$$ec(1) + ec(2) : 3u + v + 4w = 7 \text{ y } ec(3) : 3u + v + 4w = 6$$

Inconsistente (no hay solución).

Geométricamente "por filas": no hay puntos en la intersección de los tres planos.
¿Qué situaciones pueden darse?

- dos de los tres planos no se intersectan (dos planos paralelos) o
- todos los planos se intersecten dos a dos pero no se intersectan entre los tres.

Ejercicio: ¿Qué sucede con las soluciones del sistema en cada uno de los casos anteriores? ¿Cuál es nuestro caso?.

Casos singulares

$$\begin{array}{rcrcrcrl} u & + & v & + & w & = & 2 & (1) \\ 2u & + & & + & 3w & = & 5 & (2) \\ 3u & + & v & + & 4w & = & 6 & (3) \end{array}$$

Geométricamente "por columnas":

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} w = b = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Buscamos una combinación lineal de $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ que nos dé $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$.

Casos singulares

Observemos que $(1, 2, 3)$ está en el plano determinado por $(1, 0, 1)$ y $(1, 3, 4)$.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Ejercicio: Sabemos que el sistema no tienen solución. ¿Qué podemos decir del vector b y el plano determinado por los vectores columna de la matriz de coeficientes?

Ejercicio: ¿Qué situación geométrica se da si cambiamos el lado derecho b por $b' = (2, 5, 7)$? ¿Qué podemos decir de las soluciones del sistema en este caso? ¿Qué estaría pasando en la geometría por filas?

Casos singulares

Vimos que $(1,2,3)$ está en el plano determinado por $(1,0,1)$ y $(1,3,4)$.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

De otra forma:

$$3\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Existe una combinación lineal no nula de los vectores columna que da el vector nulo

Los tres vectores NO son *linealmente independientes*

Casos singulares

En general:

El sistema es singular $\leftrightarrow$ los n planos no tienen puntos en común o tienen infinitos puntos en común $\leftrightarrow$ los n vectores columna subyacen en un mismo plano $(n-1)$-dimensional $\leftrightarrow$ los n vectores columna no son linealmente independientes.

Nos interesa entonces estudiar, entre otros, el *espacio que generan* los vectores columna de una matriz.

Espacios vectoriales

espacios vectoriales$\longleftrightarrow$ *combinaciones lineales*$\longleftrightarrow$conjunto de *vectores* que pueden ser *sumados y multiplicados* por *escalares*.

- escalares: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, cualquier *cuerpo* $\mathbb{K}$ (*conjunto de escalares, con suma, producto, con elementos neutros, opuestos, recíproco, etc....*)
- ¿vectores? cualquier tipo de elementos, siempre que podamos definir suma y producto por escalares.

Espacios vectoriales

Definición: $(V, +, \cdot)$ es un *espacio vectorial sobre* $\mathbb{K}$ si, para todo $u, v, w \in V$ y todo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, se verifica:

1. (suma cerrada en V) , $u + v \in V$,
2. (suma asociativa y conmutativa) $u + (v + w) = (u + v) + w$ y $u + v = v + u$,
3. (neutro de la suma) existe $0 \in V$ tal que $v + 0 = v$
4. (elemento opuesto para la suma) existe $v^* \in V$ tal que $v + v^* = 0$,
5. $\alpha \cdot v \in V$,
6. $1 \in \mathbb{K}$ elemento neutro del producto en $\mathbb{K}$, entonces $1 \cdot v = v$,
7. $(\alpha\beta) \cdot v = \alpha(\beta \cdot v)$,
8. $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$,
9. $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$.

De ahora en más $\mathbb{K} = \mathbb{R}$*, salvo que aclaremos. O sea, trabajamos con espacios vectoriales reales, salvo aclaración.*

Espacios vectoriales reales

Ejemplos: No explicitamos las operaciones suma y producto porque consideramos las habituales.

1. $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \ldots, \mathbb{R}^n$ también $\mathbb{R}$!
2. $\mathbb{R}^\infty$ =sucesiones reales
3. matrices reales $m \times n \longleftrightarrow \mathbb{R}^{m\times n}$
4. funciones reales definidas en $[a, b]$,
5. funciones reales continuas
6. funciones derivables en x_0,
7. $\{$polinomios a coef. reales$\} \cup \{$polinomio nulo$\}$
8. $\{$*polinomios de grado a lo sumo n*$\} \cup \{$polinomio nulo$\}$
9. $\{0\}$?

Espacios vectoriales reales

$V = (\{0\}, +, \cdot)$ con suma y producto en $\mathbb{R}$, ¿es un espacio vectorial?
Verifiquemos:

1. ¿suma cerrada en V? $0 + 0 = 0 \in V$ ✓
2. ¿suma asociativa y conmutativa? lo hereda de $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.
3. ¿neutro de la suma? Si, el propio 0.
4. ¿elemento opuesto? Si, 0 es su propio opuesto.
5. ¿$\alpha v \in V$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y $v \in V$? $\alpha 0 = 0 \in V$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$
6. $1.0 = 0$ ✓

Es fácil ver que se verifican también las propiedades 7., 8. y 9..

Observación: $\{0\} \subset \mathbb{R}$ y la suma y producto por escalares son las de $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ que ya sabemos es un espacio vectorial. En estos casos diremos que $(0, +, \cdot)$ es un subespacio de $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ y veremos más adelante que no es necesario chequear las 9 condiciones.

Espacios vectoriales reales

Verifiquemos algún otro ejemplo:

Funciones reales derivables en $x_0 \in \mathbb{R} = \mathcal{F}$

- (suma) $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$
- (producto por escalares) $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

1. $f + g \in \mathcal{F}$? ✓ Por qué?
2. suma asociativa y conmutativa ✓
3. ¿Neutro de la suma? La función nula. ¿Está en $\mathcal{F}$ la función nula? ¿Por qué?
4. ¿Quién es el opuesto de $f \in \mathcal{F}$? ¿Pertenece a $\mathcal{F}$ su opuesto?
5. ¿$\alpha f \in \mathcal{F}$? ¿Por qué?
6. $1f = f$ ✓
7. $(\alpha\beta)f = \alpha(\beta f)$ ✓
8. $\alpha(f+g) = \alpha f + \alpha g$ ✓
9. $(\alpha+\beta)f = \alpha f + \beta f$ ✓

Espacios vectoriales sobre otros cuerpos

El conjunto $\mathbb{C}$ de números complejos es un cuerpo algebraico.

1. $\mathbb{C}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K} = \mathbb{C}$
2. Matrices $m \times n$ con entradas complejas, también definen un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$

Ejercicio: Verificar que los ejemplos mencionados anteriormente son espacios vectoriales sobre $\mathbb{C}$.

Veamos un ejemplo de un cuerpo algebraico distinto de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$:

Sea $(\mathbb{Z}_2, \oplus, \odot)$ con $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$, 0 el elemento neutro de $\oplus$, $1 \oplus 1 = 0$, 1 el elemento neutro de $\odot$ y $0 \odot 0 = 0$. Aceptamos que $(\mathbb{Z}_2, \oplus, \odot)$ es un cuerpo algebraico.

Ejercicio: Verificar que $\oplus$ y $\odot$ son asociativas, que todo elemento de $\mathbb{Z}_2$ tiene opuesto, que todo elemento distinto del neutro de $\oplus$ tiene recíproco y que $\odot$ es distributiva respecto de $\oplus$.

Ejercicio: Probar que el conjunto de n-uplas con componentes en $\mathbb{Z}_2$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{Z}_2$, (con la suma y el producto de un escalar realizado componente a componente).

Pregunta: ¿Es $\mathbb{R}^n$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{Z}_2$?

Propiedades de los espacios vectoriales

Unicidad del neutro: si $\mathbf{0}' \in V$ es tal que $\mathbf{0}' + x = x$ para todo $x \in V$, entonces $\mathbf{0}' = \mathbf{0}$.
Prueba:
$\mathbf{0}' + x = x$ para todo $x \in V$ y $\mathbf{0} + x = x$ para todo $x \in V$.
En particular, $\mathbf{0}' + \mathbf{0} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{0} + \mathbf{0}' = \mathbf{0}'$.
Por conmutatividad de la suma, $\mathbf{0} = \mathbf{0}' + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}' = \mathbf{0}'$.

Propiedad: $0v = 0$ para todo $v \in V$.
Prueba: Sea $v \in V$ y $w = 0v$. Por la distributiva del producto respecto a la suma de escalares (prop. 9.) y la prop. 7. ($1v = v$ para todo v) tenemos que,

$$w + v = 0v + v = 0v + 1v = (0 + 1)v = 1v = v$$

O sea, $w + v = v$ y w resulta elemento neutro de la suma. Por la unicidad del elemento neutro, $w = 0v = 0$.

Unicidad del opuesto: dado $x \in V$, si $\bar{x} \in V$ es tal que $x + \bar{x} = \mathbf{0}$, entonces $\bar{x} = x^*$.
Prueba: En práctica.

Propiedades de los espacios vectoriales

Propiedad: $(-1) \cdot x$ es el opuesto de x.
Prueba: Ejercicio

La unicidad del opuesto nos permite definir un símbolo para indicarlo. En función de la propiedad anterior, a partir de ahora notamos con $-v$ al opuesto de v.

Propiedad :$\alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \ \ \forall \alpha \in \mathbb{K}$.
Prueba: Ejercicio

Propiedad : Si $\alpha \cdot v = \mathbf{0}$ entonces $\alpha = 0$ o $v = \mathbf{0}$.
Prueba:
Observar que es suficiente probar que si $\alpha \neq 0$ entonces $v = \mathbf{0}$.
Sean $\alpha \neq 0 \in \mathbb{K}$ y $v \in V$ tal que $\alpha \cdot v = \mathbf{0}$. Como $\alpha \neq 0$, existe $\alpha^{-1} \in \mathbb{K}$ tal que $\alpha\alpha^{-1} = 1 \in \mathbb{K}$.
Tenemos entonces:

$$\alpha \cdot v = \mathbf{0} \Longrightarrow \alpha^{-1}(\alpha \cdot v) = \alpha^{-1}\mathbf{0} \Longrightarrow (\alpha^{-1}\alpha) \cdot v = \mathbf{0} \Longrightarrow 1 \cdot v = v = \mathbf{0}$$

Propiedad cancelativa de la suma: si $z + x = z + y$ entonces $x = y$.
Prueba: Ejercicio

Espacios vectoriales

Otro ejemplo de espacio vectorial:
Sea $\Pi = \{x \in \mathbb{R}^3 : 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\}$. Entonces $(\Pi, +, \cdot)$, con $+$ y $\cdot$ las operaciones del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, es un espacio vectorial.

Prueba: para todo $u, v, w \in \Pi$ y todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ debemos verificar:

1. ¿$u + v \in \Pi$? ¿$3(u_1 + v_1) + 2(u_2 + v_2) + (u_3 + v_3) = 0$?

   $3(u_1 + v_1) + 2(u_2 + v_2) + (u_3 + v_3) =$
   $(3u_1 + 2u_2 + u_3) + (3v_1 + 2v_2 + v_3) = 0 + 0 = 0$
2. ¿suma asociativa y conmutativa? Se hereda del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$.
3. ¿existe $0 \in \Pi$ tal que $v + 0 = v$?
   $0 \in \mathbb{R}^3$, ¿$0 \in \Pi$? Claramente si.
4. ¿$-v \in \Pi$? Verificar que si.
5. $\alpha \cdot v \in \Pi$? Verificar que si.

6. ¿$1 \cdot v = v$?
7. ¿$(\alpha\beta) \cdot v = \alpha(\beta \cdot v)$?
8. ¿$\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$?
9. ¿$(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$?.

   Todas estas se heredan de $\mathbb{R}^3$

Observación: Tenemos $\Pi \subset \mathbb{R}^3$, lo dotamos de las mismas operaciones del espacio vectorial real $\mathbb{R}^3$ y resultó ser también un espacio vectorial. Además, para probarlo, no fue necesario verificar muchas de las propiedades ya que se heredan naturalmente de $\mathbb{R}^3$.

Subespacios vectoriales

Definición: Sea $(V, +, \cdot)$ un espacio vectorial y $U \subset V$. Entonces, U es un *subespacio vectorial de* V si $(U, +, \cdot)$ es un espacio vectorial.

Lema:Sea $(V, +, \cdot)$ un espacio vectorial y $U \subset V$. Entonces, U es un *subespacio (vectorial) de* V si y sólo si toda combinación lineal de elementos de U pertenece a U; i.e. para todo $u_1, u_2 \in U$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, resulta $\alpha u_1 + \beta u_2 \in U$.

Prueba: Sólo hay que verificar que la suma y el producto por escalares son cerrados en U, además de que $0 \in U$ y $-v \in U$ para todo $v \in U$. El resto de las condiciones se heredan de V.
Completar la prueba como ejercicio.

Subespacios vectoriales

Ejercicio: Determinar cuales de estos subconjuntos definen subespacios vectoriales.

- $\mathbb{R}^2_+ \subset \mathbb{R}^2$
- $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$
- $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^3 : 4x_1 - 6x_2 + x_3 = 5\} \subset \mathbb{R}^3$
- matrices triangulares $n \times n \subset$ matrices $n \times n$.
- matrices simétricas $n \times n \subset$ matrices $n \times n$.

Definición: Dado un espacio vectorial V y un subconjunto de vectores $U \subset V$, llamamos *subespacio generado por* U y lo notamos $< U >$ al subespacio determinado por todas las combinaciones lineales de elementos de U.

Pregunta: ¿Por qué $< U >$ es un subespacio vectorial?

Espacios vectoriales asociados a matrices

Dada una matriz A, $m \times n$, definimos:

- *Espacio columna de A*: es el subespacio de $\mathbb{R}^m$ generado por los vectores columna de A. Lo notamos $C(A)$.
- *Espacio nulo de A*: es el subespacio de $\mathbb{R}^n$ definido por $N(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$.

Ejercicio: Probar la correcta definición de $N(A)$, o sea, probar que $N(A)$ es un subespacio vectorial.

Pregunta: Si A es una matriz 1×3, ¿qué interpretación geométrica tiene su espacio nulo? ¿Y su espacio columna? ¿Qué relación geométrica hay entre ambos espacios?

Espacio columna

Dada una matriz A y un vector b, ¿cómo sabemos si $b \in C(A)$?

$b \in C(A)$ si existe una combinación lineal de las columnas de A que nos dé b.O sea, si existen $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$\sum_{i=1}^{n} A^i x_i = b.$$

Equivalentemente, si existe $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $Ax = b$.

observación: El espacio columna está definido para todas las matrices, no necesariamente cuadradas. Con lo cual, el sistema $Ax = b$ no necesariamente tiene mismo número de ecuaciones e incógnitas.

Para matrices cuadradas tenemos:
Lema: Si A es una matriz no singular $n \times n$, $C(A) = \mathbb{R}^n$.
Prueba: De acuerdo a lo anteriormente observado, $C(A) = \mathbb{R}^n$ si y sólo si, para todo $b \in \mathbb{R}^n$, el sistema $Ax = b$ tiene solución. Si A es no singular, sabemos que Gauss encuentra siempre una solución del sistema. De otra manera, si A es no singular, sabemos que A es inversible y por lo tanto $x = A^{-1}b$ es (la única) solución del sistema.

Espacio columna

Pregunta: Si A es la matriz nula $m \times n$, ¿quién es $C(A)$?

Veamos algunos casos donde $C(A)$ no es todo $\mathbb{R}^m$ ni el vector nulo.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$C(A) = \{x_1(1,0,0)+x_2(0,1,0) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} = \{(x_1, x_2, 0) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$$

$C(A)$ es el plano xy de $\mathbb{R}^3$.

Espacio columna

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$C(A) = \{x_1(1,1,1)+x_2(2,2,2)+x_3(3,3,3)+x_4(4,4,4) : x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{(x_1+2x_2+3x_3+4x_4, x_1+2x_2+3x_3+4x_4, x_1+2x_2+3x_3+4x_4) : x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z\}.$$

$C(A)$ es el la recta en $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origen y tiene vector dirección $(1, 1, 1)$.

Observación: Si A es una matriz $m \times n$, $C(A)$ es un subespacio de $\mathbb{R}^m$. Veremos que este subespacio puede ser de cualquier *dimensión*, entre 0 (A matriz nula) y m (A matriz no singular).

Espacio nulo

Recordemos que, dada una matriz $m \times n$ A, $N(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$ es un espacio vectorial.

Observación 1: $N(A)$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

Observación 2: Si A es una matriz cuadrada no singular, $N(A) = \{0\} \subset \mathbb{R}^n$. ¿Por qué?

Observación 3: Si A es la matriz nula $m \times n$, $N(A) = \mathbb{R}^n$. ¿Por qué?

Veremos que el espacio nulo de una matriz $m \times n$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ que puede tener cualquier *dimensión* entre 0 (A matriz singular) y n (A matriz nula).

Espacio columna y espacio nulo

Ejercicio: Dada A una matriz $m \times n$, sea A' la matriz que se obtiene de agregar una columna A^{n+1} a A, donde A^{n+1} es una combinación lineal de las columnas de A. Probar que $C(A) = C(A')$.

Pregunta: ¿Puede ser $N(A) = N(A')$? Claramente no, $N(A) \subseteq \mathbb{R}^n$ mientras que $N(A') \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. ¿Puede ser $N(A) = \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ y $N(A') \neq \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$? Veamos que si con un ejemplo.

Espacio columna y espacio nulo

Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

Observar que B se obtiene agregando a A una columna que es la suma de sus columnas. Por lo tanto $C(A) = C(B)$.

Es fácil ver que $N(A) = \{(0,0)\}$. (Verificar) ¿Cómo sabemos que $N(B) \neq \{(0,0,0)\}$? Es fácil ver que $(1,1,-1) \in N(B)$. (Verificar) ¿Puede ser éste el único elemento no nulo de $N(B)$? Justificar.

Queremos poder describir $C(A)$ y $N(A)$ para cualquier matrix $m \times n$.
En ese camino vamos...