



Práctica 7 - Teoría de categorías II

- Sean \mathcal{C} y \mathcal{D} dos categorías. Probar que $P_1: \mathcal{C} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ tal que $P_1(C, D) = C$ y $P_2: \mathcal{C} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ tal que $P_2(C, D) = D$ definen funtores.
- Sea $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un funtor de una categoría \mathcal{C} en una categoría \mathcal{D} y sea $f \in \text{mor } \mathcal{C}$.
 - Probar que si f es un monomorfismo en \mathcal{C} , $F(f)$ no necesariamente es un monomorfismo en \mathcal{D} .
 - Probar que si f es un epimorfismo en \mathcal{C} , $F(f)$ no necesariamente es un epimorfismo en \mathcal{D} .
 - Probar que si f es un isomorfismo en \mathcal{C} entonces $F(f)$ es un isomorfismo en \mathcal{D} .
- Dado un conjunto X , definimos el conjunto $\text{List}(X)$ de las listas finitas de elementos de X . Probar que $\text{List}: \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$ es un funtor. Considerando ahora $\text{List}(X)$ como un monoide, probar que $\text{List}: \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Mon}$ es un funtor. Determinar si List preserva productos. **Ayuda:** pensar en cuál monoide es isomorfo $\text{List}(X)$ cuando X es un conjunto con un solo elemento.
- Sea \mathcal{C} una categoría con productos, coproductos y exponenciales y $A \in \text{ob}(\mathcal{C})$. Probar que las siguientes aplicaciones pueden extenderse con estructura funtorial:
 - $\Delta: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ tal que $\Delta(B) = (B, B)$.
 - $- \times A: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ tal que $(- \times A)(B) = B \times A$.
 - $-^A \times A: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ tal que $(-^A \times A)(B) = B^A \times A$.
 - $\prod: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ tal que $\prod(B, C) = B \times C$.
 - $\sum: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ tal que $\sum(B, C) = B + C$.
 - $A^{A^-}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ tal que $(A^{A^-})(B) = A^{A^B}$.
- Si $f: A \rightarrow B$ en \mathbf{Set} , entonces definimos $f^{-1}(X) = \{a \in A: f(a) \in X\}$ donde $X \subset B$. Probar que $I: \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$ es un funtor contravariante, llevando $I(A) = \mathcal{P}(\mathcal{A})$ y $I(f) = f^{-1}$.
- Dado un semigrupo (S, \cdot) , podemos construir un monoide (S', \cdot') donde $S' = S \uplus \{e\}$, $(0, x) \cdot' (0, y) = (0, x \cdot y)$, y $(1, e) \cdot' x = x = x \cdot' (1, e)$. Utilizando esta construcción, definir un funtor $F: \mathbf{Sem} \rightarrow \mathbf{Mon}$ y probar que es un monomorfismo en \mathbf{Cat} .
- Probar o refutar: sea \mathcal{C} una categoría con productos, y $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ un funtor, entonces siempre existe un único morfismo $F(A \times B) \rightarrow FA \times FB$.
- Sea $U: \mathbf{Mon} \rightarrow \mathbf{Set}$ el funtor que olvida la estructura de monoide. Definimos además $U^2: \mathbf{Mon} \rightarrow \mathbf{Set}$ que en objetos actúa llevando $(X, \oplus, e) \mapsto X \times X$. Probar que a U^2 se lo puede dotar de estructura funtorial.

Transformaciones naturales

- Considere el funtor $\text{List}: \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$. Mostrar que puede construirse un isomorfismo natural $\text{rev}: \text{List} \rightarrow \text{List}$ tal que rev_X es la función que invierte las palabras de $\text{List}(X)$. ¿Se puede hacer lo mismo con el funtor $\text{List}: \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Mon}$?

10. Sea \mathcal{C} una categoría cartesiana cerrada, y A un objeto de la misma. Definir una transformación natural $\eta : Id \rightarrow A^{A^-}$, y probar que efectivamente es una transformación natural. **Ayuda:** puede ser útil probar los siguientes lemas $curry(f) \circ g = curry(f \circ (g \times id))$ y $swap \circ (h \times i) = (i \times h) \circ swap$, donde $swap$ es el isomorfismo que conmuta los factores de un producto.

11. Probar o refutar: sea $U : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$ el funtor forgetful de grupos, entonces toda transformación natural $\eta : U \rightarrow U$ es un isomorfismo natural.

12. Probar que \mathbf{Cat} es una CCC.

13. Dada una categoría pequeña \mathcal{C} , mostrar que las categorías \mathcal{C}^2 y $\mathcal{C}^{\rightarrow}$ son isomorfas en \mathbf{Cat} .

Adjunciones

14. Definir una adjunción entre el funtor $List : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Mon}$ y el funtor olvido $U : \mathbf{Mon} \rightarrow \mathbf{Set}$. Dado un conjunto de símbolos Σ y la función constante $f : \Sigma \rightarrow U(\mathbb{N}_0)$ tal que $f(x) = 1$, explicitar el morfismo de monoides asociado $\tilde{f} : List(\Sigma) \rightarrow \mathbb{N}_0$.

15. Sea \mathcal{C} una categoría con productos. Dar una relación de adjunción entre \prod y Δ . Dar un resultado análogo respecto al functor $\Sigma(X, Y) = X + Y$ cuando \mathcal{C} tiene coproductos.

16. Dada una categoría \mathcal{C} y un objeto A de \mathcal{C} . Probar que $- \times A \dashv -^A$.

17. Construir la unidad de adjunción a partir de la counidad de adjunción

18. Sea $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ y $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ dos funtores (\mathcal{C} y \mathcal{D} localmente pequeñas).

a) Explicar cómo se definen los funtores.

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(-), -) : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{Set}$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, G(-)) : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{Set}$$

b) Probar que F es adjunto a izquierda de G si y solo si $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(-), -)$ es naturalmente isomorfo a $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, G(-))$.

19. Explicar qué es una adjunción en el caso de que las categorías en cuestión sean conjuntos ordenados vistos como categorías.

Mónadas

20. Considere un poset P visto como categoría y un endofuntor $T : P \rightarrow P$. Probar que si T admite estructura monádica, i.e. transformaciones naturales η y μ tal que los axiomas de mónadas se cumplan, entonces $x \leq T(x)$ y $T(T(x)) = T(x)$ para todo $x \in P$.

21. Considere el endofuntor $T : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$ definido por $T(X) = \mathcal{P}(X)$ y $T(f : X \rightarrow X')$ es la función que asigna a cada $A \in \mathcal{P}(X)$ el conjunto $f(A) = \{f(a) : a \in A\} \in \mathcal{P}(X')$. Dar estructura monádica a T .

22. Sea (M, \otimes, e) un monoide. Se define el endofuntor $F(X) = M \times X$ sobre \mathbf{Set} . Dar estructura monádica a F .

23. Una tupla (M, μ) es una semi-mónada sobre \mathcal{C} cuando $M : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ es un functor, y $\mu : M \circ M \rightarrow M$ es una transformación natural tal que $\mu \circ \mu_M = \mu \circ M\mu$. Decimos que una semi-mónada (M, μ) se puede extender via $\eta : \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \rightarrow M$ a una mónada si la tripla (M, μ, η) es una mónada. Probar que si una semi-mónada (M, μ) admite una extensión a una mónada via η , entonces η es única.

24. Sea **Form** el conjunto de fórmulas de la lógica proposicional. Se ha probado en prácticas anteriores que $\mathcal{P}(\mathbf{Form})$ forma un poset, y por ende, se lo puede interpretar como una categoría. Dar un ejemplo de mónada sobre $\mathcal{P}(\mathbf{Form})$.

25. Probar que toda adjunción $F \dashv G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ da origen a una mónada para el endofunctor $G \circ F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$.

26. Probar que toda mónada (M, μ, η) se puede factorizar en $M = G \circ F$ mediante una adjunción $F \dashv G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$. **Ayuda:**

a) Definir la *categoría Kleisli* (notada $\mathcal{C}_{\mathcal{M}}$):

- Sus objetos son los mismos que los de \mathcal{C} .
- Por cada morfismo $A \rightarrow MB$ en \mathcal{C} , hay un morfismo $A \rightarrow B$ en $\mathcal{C}_{\mathcal{M}}$.

b) Definir un functor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{M}}$ que en los objetos se comporte $FA = A$.

c) Definir un functor $G : \mathcal{C}_{\mathcal{M}} \rightarrow \mathcal{C}$ que en los objetos se comporte $GA = MA$.

Lema de Yoneda

27. Enunciar y probar el lema de Yoneda para funtores contravariantes.