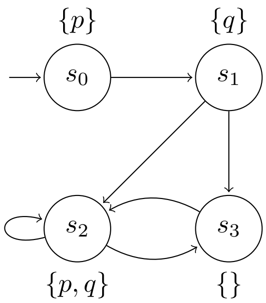
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Escuela de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Ciencias de la Computación
Lógica

Práctica 7: Lógica Temporal

1. Sea $\mathcal{M}$ el siguiente sistema de transiciones:



Demuestre:

a) $\mathcal{M}, s_0 \models p$

b) $\mathcal{M}, s_0 \not\models q$

c) $\mathcal{M}, s_1 \models \exists\bigcirc p$

d) $\mathcal{M}, s_1 \not\models \forall\bigcirc p$

e) $\mathcal{M}, s_3 \models \forall\bigcirc p \wedge \forall\bigcirc q$

f) $\mathcal{M}, s_0 \models \forall[\top \,\mathbf{U}\, (p \wedge q)]$

g) $\mathcal{M}, s_0 \models \exists[(p \vee q) \,\mathbf{U}\, (\neg p \wedge \neg q)]$

h) $\mathcal{M}, s_0 \not\models \exists[p \,\mathbf{U}\, (\neg p \wedge \neg q)]$

Solución:

a) $\mathcal{M}, s_0 \vDash p$:

$$
\begin{aligned}
& \mathcal{M}, s_0 \vDash p \\
\iff & \langle \text{definición de } \vDash \text{ para } AT \rangle \\
& p \in L(s_0) \\
& \text{lo cual vale}
\end{aligned}
$$

b) $\mathcal{M}, s_0 \nvDash q$:

$$
\begin{aligned}
& \mathcal{M}, s_0 \nvDash q \\
\iff & \langle \text{definición de } \nvDash \text{ para } AT \rangle \\
& q \notin L(s_0) \\
& \text{lo cual vale}
\end{aligned}
$$

c) $\mathcal{M}, s_1 \vDash \exists\bigcirc p$:

$$
\begin{aligned}
& \mathcal{M}, s_1 \vDash \exists\bigcirc p \\
\iff & \langle \text{definición de } \vDash \text{ para } \exists\bigcirc \rangle \\
& \text{para algún } s_1' \text{ tal que } s_1 \to s_1' \text{ se cumple } \mathcal{M}, s_1' \vDash p
\end{aligned}
$$

En particular, para $s_1' := s_2$ se cumple $s_1 \to s_2$ y $\mathcal{M}, s_2 \vDash p \iff p \in L(s_2)$ lo cual vale.

d) $\mathcal{M}, s_1 \not\models \forall\bigcirc p$:

$$\begin{aligned} & \mathcal{M}, s_1 \not\models \forall\bigcirc p \\ \iff & \langle \text{definición de } \not\models \text{ para } \forall\bigcirc \rangle \\ & \text{no ocurre que para todo } s_1' \text{ tal que } s_1 \to s_1' \text{ se cumple } \mathcal{M}, s_1' \models p \\ \iff & \langle \text{intercambio de cuantificadores} \rangle \\ & \text{para algún } s_1' \text{ tal que } s_1 \to s_1' \text{ se cumple } \mathcal{M}, s_1' \not\models p \end{aligned}$$

En particular, para $s_1' := s_3$ se cumple $s_1 \to s_3$ y $\mathcal{M}, s_3 \not\models p \iff p \notin L(s_3)$ lo cual vale.

e) $\mathcal{M}, s_3 \models \forall\bigcirc p \wedge \forall\bigcirc q$:

$$\begin{aligned} & \mathcal{M}, s_3 \models \forall\bigcirc p \wedge \forall\bigcirc q \\ \iff & \langle \text{definición de } \models \text{ para } \forall\bigcirc \rangle \\ & \underbrace{\mathcal{M}, s_3 \models \forall\bigcirc p}_{(1)} \text{ y } \underbrace{\mathcal{M}, s_3 \models \forall\bigcirc q}_{(2)} \end{aligned}$$

Veamos que vale (1):

$$\begin{aligned} & \mathcal{M}, s_3 \models \forall\bigcirc p \\ \iff & \langle \text{definición de } \models \text{ para } \forall\bigcirc \rangle \\ & \text{para todo } s_3' \text{ tal que } s_3 \to s_3' \text{ se cumple } \mathcal{M}, s_3' \models p \\ \iff & \langle \text{único caso: } s_3 \to s_2 \rangle \\ & \mathcal{M}, s_2 \models p \\ \iff & \langle \text{definición de } \models \text{ para } AT \rangle \\ & p \in L(s_2) \\ & \text{lo cual vale} \end{aligned}$$

Análogamente se prueba (2).

f) $\mathcal{M}, s_0 \models \forall[\top\ \mathbf{U}\ (p \wedge q)]$:

$$\begin{aligned} & \mathcal{M}, s_0 \models \forall[\top\ \mathbf{U}\ (p \wedge q)] \\ \iff & \langle \text{definición de } \models \text{ para } \forall\,\mathbf{U} \rangle \\ & \underbrace{\text{para cada traza } s_0 = s_0' \to s_1' \to \ldots \text{ existe } j \in \mathbb{N} : \mathcal{M}, s_j' \models p \wedge q}_{(1)} \\ & \text{y } \underbrace{\mathcal{M}, s_i' \models \top \text{ para todo } i < j}_{(2)} \end{aligned}$$

Sea $s_0 = s_0' \to s_1' \to \ldots$ luego,

$$\left.\begin{array}{r} s_0' = s_0 \\ s_0' \to s_1' \end{array}\right\} \Rightarrow s_1' = s_1 \text{ (por definición de } \mathcal{M}\text{).}$$

$$\left.\begin{array}{r} s_1' = s_1 \\ s_1' \to s_2' \end{array}\right\} \Rightarrow s_2' = s_2 \text{ o } s_2' = s_3 \text{ (por definición de } \mathcal{M}\text{).}$$

Análisis por casos:

- $s'_2 = s_2$:

$$\left.\begin{array}{r} p \in L(s_2) \Rightarrow \mathcal{M}, s_2 \vDash p \\ q \in L(s_2) \Rightarrow \mathcal{M}, s_2 \vDash q \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{\mathcal{M}, s_2 \vDash p \wedge q}_{(*)}$$

Luego con $j = 2$ resulta $\mathcal{M}, s'_2 \vDash p \wedge q$.

- $s'_2 = s_3$:

$$\left.\begin{array}{r} s'_2 = s_3 \\ s'_2 \to s'_3 \end{array}\right\} \Rightarrow s'_3 = s_2 \text{ (por definición de } \mathcal{M}\text{)}.$$

Por $(*)$ tenemos $\mathcal{M}, s_2 \vDash p \wedge q$, luego con $j = 3$ resulta $\mathcal{M}, s'_3 \vDash p \wedge q$.

Por lo tanto, para toda traza $s_0 = s'_0 \to s'_1 \to \ldots$ existe $j \in \mathbb{N} : \mathcal{M}, s'_j \vDash p \wedge q$, es decir, vale (1); y como (2) vale trivialmente podemos concluir lo propuesto.

g) $\mathcal{M}, s_0 \vDash \exists\left[(p \vee q) \mathbf{~U~} (\neg p \wedge \neg q)\right]$:

$$\begin{array}{rl} & \mathcal{M}, s_0 \vDash \exists\left[(p \vee q) \mathbf{~U~} (\neg p \wedge \neg q)\right] \\ \Longleftrightarrow & \langle \text{definición de } \vDash \text{ para } \exists \cup \rangle \\ & \underbrace{\text{para alguna traza } s_0 = s'_0 \to s'_1 \to \ldots \text{ existe } j \in \mathbb{N} : \mathcal{M}, s'_j \vDash \neg p \wedge \neg q}_{(1)} \text{ y} \\ & \underbrace{\mathcal{M}, s'_i \vDash (p \vee q) \text{ para todo } i < j}_{(2)} \end{array}$$

En particular, para la traza $s'_0 = s_0 \to s'_1 = s_1 \to s'_2 = s_3 \to \ldots$ y $j = 2$ resulta $\mathcal{M}, s'_2 \vDash \neg p \wedge \neg q \iff \mathcal{M}, s'_2 \vDash \neg p$ y $\mathcal{M}, s'_2 \vDash \neg q$ lo cual vale pues $p \notin L(s_3)$ y $q \notin L(s_3)$ por lo que vale (1).

Además para $i = 1$:

$$\begin{array}{rl} & \mathcal{M}, s'_1 \vDash (p \vee q) \\ \Longleftrightarrow & \langle \text{definición de } \vDash \text{ para } \vee \rangle \\ & \mathcal{M}, s'_1 \vDash p \text{ o } \mathcal{M}, s'_1 \vDash q \\ \Longleftrightarrow & \langle \text{definición de } \vDash \text{ para } \vee \rangle \\ & p \in L(s_1) \text{ o } q \in L(s_1) \\ & \langle \text{lo cual vale pues } q \in L(s_1) \rangle \end{array}$$

y análogamente para $i = 0$, por lo que también vale (2).

h) $\mathcal{M}, s_0 \nvDash \exists\left[p \mathbf{~U~} (\neg p \wedge \neg q)\right]$:

$$\begin{array}{rl} & \mathcal{M}, s_0 \vDash \exists\left[p \mathbf{~U~} (\neg p \wedge \neg q)\right] \\ \Longleftrightarrow & \langle \text{definición de } \vDash \text{ para } \exists \mathbf{~U~} \rangle \\ & \underbrace{\text{para alguna traza } s_0 = s'_0 \to s'_1 \to \ldots\ \exists j \in \mathbb{N} : \mathcal{M}, s'_j \vDash \neg p \wedge \neg q}_{(1)} \text{ y} \\ & \underbrace{\mathcal{M}, s'_i \vDash p \text{ para todo } i < j}_{(2)} \end{array}$$

lo cual no vale, pues toda traza comienza por $s'_0 = s_0 \to s'_1 = s_1 \to \ldots$ y si vale (2) deberá ser $j = 0$ (en cualquier otro caso resultaría $\mathcal{M}, s'_1 \not\models p$) pero entonces no vale (1) pues $\mathcal{M}, s'_0 \not\models \neg p \wedge \neg q$.

---

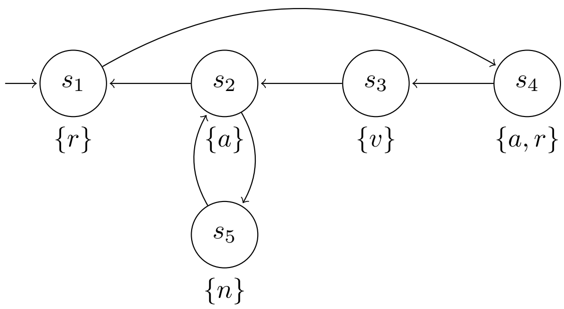
2. Considere los operadores derivados $\forall\Box$ y $\exists\Diamond$. De forma similar a como se hizo en clase de teoría, defina una semántica para estos operadores en térmimos de trazas del sistema de transición.

Solución:

$$\begin{aligned}
& \mathcal{M}, s \models \forall\Box\phi \\
\iff & \langle \text{definición de } \forall\Box \rangle \\
& \mathcal{M}, s \models \neg\exists\Diamond\neg\phi \\
\iff & \langle \text{definición de } \models \text{ para } \neg \rangle \\
& \mathcal{M}, s \not\models \exists\Diamond\neg\phi \\
\iff & \langle \text{definición de } \exists\Diamond \rangle \\
& \text{no ocurre que } \mathcal{M}, s \models \exists\,[\top\,\mathbf{U}\,\neg\phi] \\
\iff & \langle \text{definición de } \models \text{ para } \exists\,\mathbf{U} \rangle \\
& \text{no ocurre que para alguna traza } s = s'_0 \to s'_1 \to \ldots \;\text{ existe } j \in \mathbb{N} \text{ tal que:} \\
& \mathcal{M}, s'_j \models \neg\phi \text{ y } \mathcal{M}, s'_i \models \top \text{ para todo } i < j \\
\iff & \langle \mathcal{M}, s \models \top \text{ para todo } s \rangle \\
& \text{no ocurre que para alguna traza } s = s'_0 \to s'_1 \to \ldots \;\text{ existe } j \in \mathbb{N} : \mathcal{M}, s'_j \models \neg\phi \\
\iff & \langle \text{definición de } \models \text{ para } \neg \rangle \\
& \text{no ocurre que para alguna traza } s = s'_0 \to s'_1 \to \ldots \;\text{ existe } j \in \mathbb{N} : \mathcal{M}, s'_j \not\models \phi \\
\iff & \langle \text{intercambio de cuantificadores} \rangle \\
& \text{para toda traza } s = s'_0 \to s'_1 \to \ldots \;\text{ no existe } j \in \mathbb{N} : \mathcal{M}, s'_j \not\models \phi \\
\iff & \langle \text{intercambio de cuantificadores} \rangle \\
& \text{para toda traza } s = s'_0 \to s'_1 \to \ldots \;\text{ resulta } \mathcal{M}, s'_j \models \phi \text{ para todo } j \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mathcal{M}, s \models \exists\Diamond\phi \\
\iff & \langle \text{definición de } \exists\Diamond \rangle \\
& \mathcal{M}, s \models \exists\,[\top\,\mathbf{U}\,\phi] \\
\iff & \langle \text{definición de } \models \text{ para } \exists\,\mathbf{U} \rangle \\
& \text{para alguna traza } s = s'_0 \to s'_1 \to \ldots \;\text{ existe } j \in \mathbb{N} \text{ tal que:} \\
& \mathcal{M}, s'_j \models \phi \text{ y } \mathcal{M}, s'_i \models \top \text{ para todo } i < j \\
\iff & \langle \mathcal{M}, s \models \top \text{ para todo } s \rangle \\
& \text{para alguna traza } s = s'_0 \to s'_1 \to \ldots \;\text{ existe } j \in \mathbb{N} \text{ tal que: } \mathcal{M}, s'_j \models \phi
\end{aligned}$$

3. Consideremos el sistema de transiciones para un semáforo visto en clase de teoría:



Determine el conjunto de estados que satisface cada fórmula:

a) $r \to \forall\bigcirc v$

b) $a \to \forall\bigcirc\forall\bigcirc a$

c) $\exists\Box\neg v$

d) $\forall\Diamond v$

e) $\forall\Diamond a$

f) $\forall\Box a$

g) $\forall\Box\forall\Diamond a$

h) $\forall(n\,\mathbf{U}\,\neg n)$

i) $\forall(\neg n\,\mathbf{U}\,n)$

j) $\exists(n\,\mathbf{U}\,r)$

k) $r \to \forall\Diamond v$

Solución:

a) $\{s_2, s_3, s_4, s_5\}$

b) $\{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$

c) $\{s_2, s_5\}$

d) $\{s_1, s_3, s_4\}$

e) $\{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$

f) $\{\}$

g) $\{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$

h) $\{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$

i) $\{s_5\}$

j) $\{s_1, s_4\}$

k) $\{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$

---

4. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son válidas?

a) $\models \phi \to \forall\Box\phi$

b) Si $\models \phi$ entonces $\models \forall\Box\phi$

c) $\models \exists\Box\phi \to \forall\Diamond\phi$

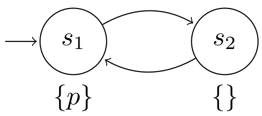
d) $\models \forall[\bot\, \mathbf{U}\, \phi] \to \phi$

Solución:

a) $\models \phi \to \forall\Box\phi$:

Falso.

Basta considerar $s = s_1$ y $\phi \equiv p$ en el siguiente sistema de transiciones:



Luego:

$$
\begin{aligned}
& \mathcal{M}, s_1 \not\models p \to \forall\Box p \\
\iff & \langle \text{definición de } \to \rangle \\
& \mathcal{M}, s_1 \not\models \neg p \vee \forall\Box p \\
\iff & \langle \text{definición de } \not\models \text{ para } \vee \rangle \\
& \mathcal{M}, s_1 \not\models \neg p \text{ o } \mathcal{M}, s_1 \not\models \forall\Box p \\
\iff & \langle \text{definición de } \not\models \rangle \\
& \text{no ocurre } \mathcal{M}, s_1 \models \neg p \text{ o } \mathcal{M}, s_1 \not\models \forall\Box\phi \\
\iff & \langle \text{definición de } \models \text{ para } \neg \rangle \\
& \text{no ocurre } \mathcal{M}, s_1 \not\models p \text{ o } \mathcal{M}, s_1 \not\models \forall\Box\phi \\
\iff & \langle \text{definición de } \not\models \text{ para } AT \rangle \\
& \text{no ocurre } p \notin L(s_1) \text{ o } \mathcal{M}, s_1 \not\models \forall\Box\phi \\
& \text{lo cual vale pues } p \in L(s_1)
\end{aligned}
$$

b) Si $\models \phi$ entonces $\models \forall\Box\phi$:

Verdadero.

En efecto, sea $\mathcal{M}$ un sistema y s un estado:

$$
\begin{aligned}
& \mathcal{M}, s \models \forall\Box\phi \\
\iff & \langle \text{definición de } \models \text{ para } \forall\Box \rangle \\
& \text{para toda traza } s = s'_0 \to s'_1 \to \dots \;\text{ resulta } \mathcal{M}, s'_j \models \phi \text{ para todo } j \in \mathbb{N}
\end{aligned}
$$

Sea $j \in \mathbb{N}$, luego por hipótesis resulta $\mathcal{M}, s'_j \models \phi$ por lo que vale lo propuesto.

c) $\models \exists\Box\phi \to \forall\Diamond\phi$:

Verdadero.

En efecto, sea $\mathcal{M}$ un sistema y s un estado:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M}, s \models \exists\Box\phi \to \forall\Diamond\phi \\
\iff &\langle \text{definición de } \to \rangle \\
&\mathcal{M}, s \models \neg\exists\Box\phi \vee \forall\Diamond\phi \\
\iff &\langle \text{definición de } \models \text{ para } \vee \rangle \\
&\underbrace{\mathcal{M}, s \models \neg\exists\Box\phi}_{(1)} \text{ o } \underbrace{\mathcal{M}, s \models \forall\Diamond\phi}_{(2)}
\end{aligned}$$

Observemos que: si vale (1), también vale lo anterior. En caso contrario: también, ya que

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M}, s \not\models \neg\exists\Box\phi \\
\iff &\langle \text{definición de } \models \text{ para } \neg \rangle \\
&\mathcal{M}, s \models \exists\Box\phi \\
\iff &\langle \text{definición de } \models \text{ para } \exists\Box \rangle \\
&\underbrace{\text{para alguna traza } s = s'_0 \to s'_1 \to \dots \text{ para todo } j \in \mathbb{N} \text{ resulta } \mathcal{M}, s'_j \models \phi}_{(3)}
\end{aligned}$$

por lo que vale (2) pues

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M}, s \models \forall\Diamond\phi \\
\iff &\langle \text{definición de } \models \text{ para } \forall\Diamond \rangle \\
&\text{para toda traza } s = s''_0 = s'_0 \to s''_1 \to \dots \text{ existe } j \in \mathbb{N} \text{ tal que } \mathcal{M}, s''_j \models \phi \\
&\text{lo cual vale tomando } j = 0 \text{ por } (3)
\end{aligned}$$

d) $\models \forall\,[\bot\,\mathbf{U}\,\phi] \to \phi$:

Verdadero.

En efecto, sea $\mathcal{M}$ un sistema y s un estado:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M}, s \models \forall\,[\bot\,\mathbf{U}\,\phi] \to \phi \\
\iff &\langle \text{definición de } \to \rangle \\
&\mathcal{M}, s \models \neg\forall\,[\bot\,\mathbf{U}\,\phi] \vee \phi \\
\iff &\langle \text{definición de } \models \text{ para } \vee \rangle \\
&\mathcal{M}, s \models \neg\forall\,[\bot\,\mathbf{U}\,\phi] \text{ o } \mathcal{M}, s \models \phi \\
\iff &\langle \text{definición de } \models \text{ para } \neg \rangle \\
&\underbrace{\mathcal{M}, s \not\models \forall\,[\bot\,\mathbf{U}\,\phi]}_{(1)} \text{ o } \underbrace{\mathcal{M}, s \models \phi}_{(2)}
\end{aligned}$$

Observemos que: si vale (1), también vale lo anterior. En caso contrario: también, ya que

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M}, s \models \forall\,[\bot\,\mathbf{U}\,\phi] \\
\iff &\langle \text{definición de } \models \text{ para } \forall\,\mathbf{U} \rangle \\
&\underbrace{\text{para cada traza } s = s'_0 \to s'_1 \to \dots \text{ existe } j \in \mathbb{N} : \mathcal{M}, s'_j \models \phi}_{(3)} \\
&\text{y } \underbrace{\mathcal{M}, s'_i \models \bot \text{ para todo } i < j}_{(4)}
\end{aligned}$$

y como vale (4) necesariamente será $j = 0$ (en cualquier otro caso $\mathcal{M}, s_i \nvDash \bot$), concluyendo que vale (2).

---

5. Sean $\phi, \psi \in$ **CTL**. Decimos que ϕ es equivalente a ψ ($\phi \equiv \psi$) si y sólo si para todo sistema de transiciones $\mathcal{M}$ vale $\mathcal{M} \models \phi \iff \mathcal{M} \models \psi$.
Determine la veracidad de las siguientes afirmaciones, justificando su respuesta:

a) $\forall\bigcirc\phi \equiv \neg\exists\bigcirc\neg\phi$

b) $\forall\Diamond\phi \equiv \neg\exists\Box\neg\phi$

c) $\forall[\phi\,\mathbf{U}\,\psi] \equiv \psi \vee (\phi \wedge \forall\bigcirc\forall[\phi\,\mathbf{U}\,\psi])$

d) $\forall\Diamond\phi \vee \forall\Diamond\psi \equiv \forall\Diamond(\phi \vee \psi)$

e) $\forall\Box(\phi \wedge \psi) \equiv \forall\Box\phi \wedge \forall\Box\psi$

f) $\exists\Diamond(\phi \wedge \psi) \equiv \exists\Diamond\phi \wedge \exists\Diamond\psi$

Solución:

a) $\forall\bigcirc\phi \equiv \neg\exists\bigcirc\neg\phi$:

Verdadero.

En efecto, sean $\mathcal{M}$ y s cualesquiera:

$$
\begin{aligned}
& \mathcal{M}, s \vDash \forall\bigcirc\phi \\
\iff & \langle \text{definición de } \vDash \text{ para } \forall\bigcirc \rangle \\
& \text{para todo } s'/s \to s' \text{ vale } \mathcal{M}, s' \vDash \phi \\
\iff & \langle \text{intercambio de cuantificadores} \rangle \\
& \text{no ocurre que para algún } s'/s \to s' \text{ vale } \mathcal{M}, s' \nvDash \phi \\
\iff & \langle \text{definición de } \vDash \text{ para } \neg \rangle \\
& \text{no ocurre que para algún } s'/s \to s' \text{ vale } \mathcal{M}, s' \vDash \neg\phi \\
\iff & \langle \text{definición de } \vDash \text{ para } \exists\bigcirc \rangle \\
& \text{no ocurre } \mathcal{M}, s \vDash \exists\bigcirc\neg\phi \\
\iff & \langle \text{definición de} \nvDash \rangle \\
& \mathcal{M}, s \nvDash \exists\bigcirc\neg\phi \\
\iff & \langle \text{definición de } \vDash \text{ para } \neg \rangle \\
& \mathcal{M}, s \vDash \neg\exists\bigcirc\neg\phi
\end{aligned}
$$

b) $\forall\Diamond\phi \equiv \neg\exists\Box\neg\phi$:

Verdadero.

Por definición de $\exists\Box$:

$$
\begin{aligned}
\exists\Box\phi &\equiv \neg\forall\Diamond\neg\phi \\
\exists\Box\neg\phi &\equiv \neg\forall\Diamond\neg(\neg\phi) \equiv \neg\forall\Diamond\phi \\
\neg\exists\Box\neg\phi &\equiv \neg(\neg\forall\Diamond\phi) \equiv \forall\Diamond\phi
\end{aligned}
$$

c) $\forall\,[\phi\,\mathbf{U}\,\psi] \equiv \psi \vee (\phi \wedge \forall\bigcirc\forall\,[\phi\,\mathbf{U}\,\psi])$:
Verdadero.

d) $\forall\Diamond\phi \vee \forall\Diamond\psi \equiv \forall\Diamond\,(\phi \vee \psi)$:
Verdadero.

e) $\forall\Box\,(\phi \wedge \psi) \equiv \forall\Box\phi \wedge \forall\Box\psi$:
Verdadero.

f) $\exists\Diamond\,(\phi \wedge \psi) \equiv \exists\Diamond\phi \wedge \exists\Diamond\psi$:
Falso.

---

6. Walter desconfía de la siguiente equivalencia usada en el paso 1 del algoritmo de verificación para **CTL**:

$$\forall[\phi\,\mathbf{U}\,\psi] = \neg(\exists[\neg\psi\,\mathbf{U}\,(\neg\phi \wedge \neg\psi)] \vee \exists\Box\neg\psi)$$

Además, Paula observa que la longitud de la nueva fórmula es mucho mayor que la anterior, pudiendo esto derivar en un mayor tiempo de ejecución para el programa.
Es por esto que ambos deciden calcular *directamente* el conjunto $\mathbf{Sat}(\forall[\psi_1\,\mathbf{U}\,\psi_2])$, siguiendo una idea similar a la vista en clase para los operadores $\forall\Diamond$ y $\exists\,\mathbf{U}$. Ayúdelos a hacerlo.

Solución:

$$\mathbf{Sat}\,(\forall\,[\psi_1\,\mathbf{U}\,\psi_2]) = \textit{forall-until}\,(\mathbf{Sat}\,(\psi_1)\,,\mathbf{Sat}\,(\psi_2))$$

donde *forall-until* es el siguiente procedimiento:

```
forall-until ( X ,  Y ) {
   while  (Y ≠ Y ∪ (X ∩ pre_∀ (Y)))  do
      Y  ←  Y ∪ (X ∩ pre_∀(Y) ) ;
   return Y
}
```

---

7. Las funciones *inev* y *ex-until* vistas en clase pueden reescribirse de la siguiente forma:

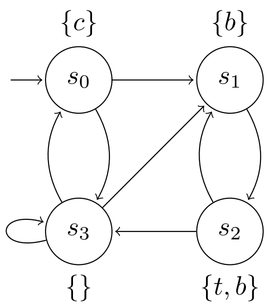
```
inev(Y)
  n ← 0;
  Y_n ← Y;
  repeat
    n ← n + 1;
    Y_n ← Y_{n−1} ∪ pre_∀(Y_{n−1});
  until (Y_n = Y_{n−1});
  return Y_n;
```

```
ex-until(X, Y)
  n ← 0;
  Y_n ← Y;
  repeat
    n ← n + 1;
    Y_n ← Y_{n−1} ∪ (X ∩ pre_∃(Y_{n−1}));
  until (Y_n = Y_{n−1});
  return Y_n;
```

Considere el sistema de transiciones $\mathcal{M}$ que se muestra en la figura.

a) Sea $\phi = \exists[\neg c\, \mathbf{U}\, (b \wedge \neg t)]$. Calcule $\mathbf{Sat}(\phi)$ y decida si vale $\mathcal{M} \models \phi$.

b) ¿Es cierto que $\mathcal{M}, s_0 \models \forall\Box(\neg c \to \forall\bigcirc b)$?



Solución:

a)
- $X = \mathbf{Sat}\,(\neg c) = S - \mathbf{Sat}\,(c) = S - \{s_0\} = \{s_1, s_2, s_3\}$.
- $Y_0 = \mathbf{Sat}\,(b \wedge \neg t) = \mathbf{Sat}\,(b) \cap \mathbf{Sat}\,(\neg t) = \{s_1, s_2\} \cap (S - \mathbf{Sat}\,(t)) =$ $= \{s_1, s_2\} \cap (S - \{s_2\}) = \{s_1\}$.
- $Y_1 = Y_0 \cup pre_\exists\,(Y_0) \cap X = \{s_1\} \cup \{s_0, s_3, s_2\} \cap \{s_1, s_2, s_3\} =$ $= \{s_1\} \cup \{s_2, s_3\} = \{s_1, s_2, s_3\}$.
- $Y_2 = Y_1 \cup pre_\exists\,(Y_1) \cap X = \{s_1, s_2, s_3\} \cup S \cap \{s_1, s_2, s_3\} = Y_1$.

Por lo tanto, $\{s_0\} \nsubseteq \mathbf{Sat}\,(\phi) = \{s_1, s_2, s_3\} \Rightarrow \mathcal{M} \not\models \phi$.

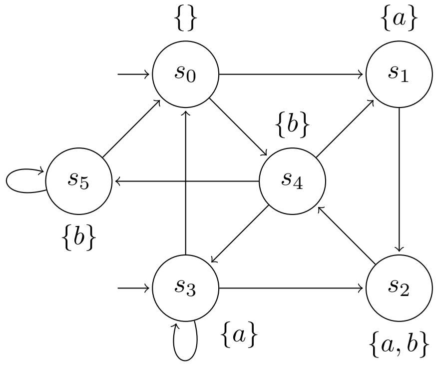
b) No: se puede verificar que $s_0 \notin \mathbf{Sat}(\forall\Box(\neg c \to \forall\bigcirc b))$.

---

8. Considere el sistema de transiciones $\mathcal{M}$ que se muestra en la figura y las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= \exists\Box\forall\Diamond\neg b \\
\phi_2 &= \exists[\exists\bigcirc a\,\mathbf{U}\,\neg a] \\
\phi_3 &= \forall\bigcirc(\exists\Box\neg a \vee \exists\Box b)
\end{aligned}$$

Calcule $\mathbf{Sat}(\phi_i)$ y decida si vale $\mathcal{M} \models \phi_i$ $(1 \leq i \leq 3)$.



Solución:

- ϕ_1:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Sat}\,(\phi_1) =& \mathbf{Sat}(\exists\Box\forall\Diamond\neg b) = \\
=& \mathbf{Sat}\,(\neg\forall\Diamond\neg\forall\Diamond\neg b) = \\
=& S - \mathbf{Sat}\,(\forall\Diamond\neg\forall\Diamond\neg b) = \\
=& S - \mathit{inev}\,(\mathbf{Sat}\,(\neg\forall\Diamond\neg b)) = \\
=& S - \mathit{inev}\,(S - \mathbf{Sat}\,(\forall\Diamond\neg b)) = \\
=& S - \mathit{inev}\,(S - \mathit{inev}\,(\mathbf{Sat}\,(\neg b))) = \\
=& S - \mathit{inev}\,(S - \mathit{inev}\,(\{s_0, s_1, s_3\})) = \\
=& S - \mathit{inev}\,(S - \{s_0, s_1, s_3\}) = \\
=& S - \mathit{inev}\,(\{s_2, s_4, s_5\}) = \\
=& S - (\{s_2, s_4, s_5\} \cup \{s_1\} \cup \{s_0\}) = \\
=& \{s_3\}
\end{aligned}$$

Dado que $\mathbf{Sat}\,(\phi_1) = \{s_3\} \subset I$, tenemos que $\mathcal{M} \vDash \phi_1$.

---

9. En clase de teoría vimos que:

- $\mathbf{Sat}(\neg\phi) = S - \mathbf{Sat}(\phi)$
- $\mathbf{Sat}(\phi \wedge \psi) = \mathbf{Sat}(\phi) \cap \mathbf{Sat}(\psi)$

Derive una expresión para $\mathbf{Sat}(\phi \to \psi)$ en función de $\mathbf{Sat}(\phi)$ y $\mathbf{Sat}(\psi)$.

Solución:

$$\begin{aligned}\mathbf{Sat}\left(\phi \to \psi\right) =& \mathbf{Sat}\left(\neg\phi \vee \psi\right) = \mathbf{Sat}\left(\neg\phi \vee \psi\right) = \mathbf{Sat}\left(\neg\left(\phi \wedge \neg\psi\right)\right) = \\ =& S - \mathbf{Sat}\left(\phi \wedge \neg\psi\right) = S - \left(\mathbf{Sat}\left(\phi\right) \cap \mathbf{Sat}\left(\neg\psi\right)\right) = \\ =& S - \left(\mathbf{Sat}\left(\phi\right) \cap \left(S - \mathbf{Sat}\left(\psi\right)\right)\right)\end{aligned}$$

o en forma más sencilla

$$\mathbf{Sat}\left(\phi \to \psi\right) = \mathbf{Sat}\left(\neg\phi \vee \psi\right) = \mathbf{Sat}\left(\neg\phi\right) \cup \mathbf{Sat}\left(\psi\right) = \left(S - \mathbf{Sat}\left(\phi\right)\right) \cup \mathbf{Sat}\left(\psi\right)$$