Universidad Nacional de Rosario

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura

Práctica

Complementos de Matemática II

Autor:
Arroyo, Joaquín

September 18, 2023

Contents

1 Práctica 1

Ejercicio 1.

a) $R_1 = \{(x, y) \in \mathcal{Z}^2 \mid y = x^2 + 7\}$

- $Dom(R_1) = \mathcal{Z}$
- $Im(R_1) = \{y \in \mathcal{Z} \mid \exists x \in \mathcal{Z} \ : \ y = x^2 + 7\}$
- $R_1^{-1} = \{(x, y) \in \mathcal{Z}^2 \mid x = y^2 + 7\}$
- R_1 es una relación funcional ya que:
  1. Supongamos que R_1 no es un funcional, i.e, $\exists y_1, y_2 \in \mathcal{Z}$ t.q $x \ R_1 \ y_1 \wedge x \ R_1 \ y_2 \implies y_1 = x^2 + 7 \wedge y_2 = x^2 + 7 \implies y_1 = y_2$
     Luego, $\forall x \in Dom(R_1), \exists! y \ t.q \ xRy$
  2. $Dom(R_1) = \mathcal{Z}$,
- R_1 no es sobreyectiva ya que por ejemplo, dado $y = 2 \in \mathcal{Z}$, $\nexists x \in \mathcal{Z} \ t.q \ 2 = x^2 + 7$, i.e, $Im(R_1) \neq \mathcal{Z}$.
- Sea $x_1, x_2 \in \mathcal{Z}, y \in \mathcal{Z}$ t.q $x_1 R_1 y$ y $x_2 R_1 y$:
  (i) Como $x_1 R_1 y \implies y = x_1^2 + 7$
  (ii) Como $x_2 R_1 y \implies y = x_2^2 + 7$
  Luego, combinando (i) y (ii) tenemos que: $x_1^2 + 7 = x_2^2 + 7 \Leftrightarrow x_1 = x_2$
  Luego, R_1 es inyectiva.

b) $R_2 = \{(x, y) \in \mathcal{R}^2 \mid y^2 = x\}$

- $Dom(R_2) = \mathcal{R}_0^+$
- $Im(R_2) = \mathcal{R}$
- $R_2^{-1} = \{(x, y) \in \mathcal{R}^2 \mid x^2 = y\}$
- R_2 no es funcional ya que
  (i) $1 R_2 1$ ya que $1^2 = 1$
  (ii) $1 R_2 (-1)$ ya que $(-1)^2 = 1$
  Es decir, existen dos imágenes para un elemento del dominio.

d) $A = \{a_1, a_2, a_3\}, B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ y R_4 la relación de A en B tal que:

$$M(R_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M(R_4^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $Dom(R_4) = A$
- $Im(R_4) = \{b_1, b_4\}$
- R_4 es una relación funcional ya que en cada fila de su matriz asociada hay un único 1.
- R_4 es inyectiva debido a que en cada columna hay a lo sumo un 1.
- R_4 no es sobreyectiva debido a que existe alguna columna nula en la matriz.

e) $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}, C = \{u, v, x, y, z\}$ y R_5 la relación de B en C tal que:

$$M(R_5) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M(R_5^{-1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- $Dom(R_5) = B$
- $Im(R_4) = \{u, v, z\}$
- R_5 no es una relación funcional ya por ejemplo en la fila 4 de su matriz asociada, hay mas de un uno, i.e, $b_4 R_5 u \wedge b_4 R_5 v$.

f) $R_6 = R_5 \circ R_4$ $(A \to C)$

$$M(R_6) = M(R_4).M(R_5) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$M(R_6^{-1}) = M(R_6)^t$

- $Dom(R_6) = A$
- $Im(R_6) = \{v\}$
- R_6 es una relación funcional ya que en cada fila de su matriz asociada hay un único 1.
- R_6 no es inyectiva ya que por ejemplo en la columna 2 de su matriz asociada, tiene mas de un 1.
- R_6 no es sobreyectiva ya que tiene al menos una columna nula.

Ejercicio 2. Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$, y sea $A' \subseteq A$

a) Si f es inyectiva (sobreyectiva) entonces $f|_{A'}$ es inyectica (sobreyectiva).

- **VERDADERO.** Sean $x_1, x_2 \in A',\ y_1 \in B / f|_{A'}(x_1) = y \wedge f|_{A'}(x_2) = y$.

  Como $A' \subseteq A$, entonces vale que $f(x_1) = y \wedge f(x_2) = y$, pero como f es inyectiva, $x_1 = x_2$. Luego $f|_{A'}$ es inyectiva.
- **FALSO.** Si f es sobreyectiva, entonces $\forall y \in B, \exists x \in A\ t.q\ f(x) = y$ .Si restringimos el dominio de f a A', puede existir el caso que $\exists y \in B, \exists x \in A - A'\ t.q\ f(x) = y$, por lo que el par $(x, y) \notin f|_{A'} \implies Im(f|_{A'}) \neq B$

b) Si $f|_{A'}$ es inyectiva (sobreyectiva) entonces f es inyectica (sobreyectiva).

- **FALSO.** Sea $A = \{1, 2, 3\}, A' = \{1, 2\}\ y\ B = \{1, 2\}$

  Sea $f : A \to B$ tal que:

  $$f(x) = \begin{cases} x\ si\ x \in A' \\ 2\ caso\ contrario \end{cases}$$

  Luego, $f|_{A'}(x) = x$, i.e, inyectiva, pero f no es inyectiva debido a que $f(2) = f(3) = 2$.
- **VERDADERO.** Si $f|_{A'}$ es sobreyectiva entonces $\forall y \in B \exists x \in A'\ t.q\ f(x) = y$. Como $A' \subseteq A$, quitar la restricción a $f|_{A'}$ no rompe con la propiedad de sobreyectividad, debido a que no estamos restringiendo el codominio, este sigue estando cubierto por completo. Luego f es sobreyectiva.

c) Si $g \circ f$ es inyectiva, entonces f es inyectiva.

VERDADERO. Si $g \circ f$ es inyectiva, entonces dados $x_1, x_2 \in A$, si $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) \implies x_1 = x_2$

Supongamos f no inyectiva, i.e, $\exists x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2\ t.q\ f(x_1) = f(x_2)$. Luego, existe una misma imagen para dos elementos distintos del dominio.

$g \circ f(x_1) = g(y) = g(y_2) = g(f(x_2) = g \circ f(x_2)$ lo que nos indica que $g \circ f$ no es inyectiva, ABS!

Luego, necesariamente f es inyectiva.

d) Si $g \circ f$ es inyectiva, entonces g es inyectiva.

VERDADERO. Si $g \circ f$ es inyectiva, entonces dados $x_1, x_2 \in A$, si $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) \implies x_1 = x_2$

Supongamos g no inyectiva, i.e, $\exists y_1, y_2 \in A, y_1 \neq y_2\ t.q\ g(y_1) = g(y_2)$. Luego, existe una misma imagen para dos elementos distintos del dominio.

Sean $x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2\ t.q\ f(x_1) = y_1 \wedge f(x_2) = y_2$

$g \circ f(x_1) = g(f(x_1) = g(y_1) = g(y_2) = g(f(x_2) = g \circ f(x_2)$ lo que nos indica que $g \circ f$ no es inyectiva, ABS!

Luego, necesariamente g es inyectiva.

e) Si $g \circ f$ es sobreyectiva, entonces f es sobreyectiva.

FALSO. Si $g \circ f$ es sobreyectiva, entonces $\forall y \in C \exists x \in A\ t.q\ (g \circ f)(x) = y$

Sea $A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 2, 3\}\ y\ C = \{1, 2\}$

$f(1) = 1$, $f(2) = 2$ y $f(3) = 2$

$g(x) = x$

Veamos $g \circ f$:

$g \circ f(1) = 1$, $g \circ f(2) = 2$ y $g \circ f(3) = 2$

Luego, $g \circ f$ es sobreyectiva, ya que $Im(g \circ f) = C$

Pero mirando f, vemos que no cubre todo su codominio, ya que $\nexists x \in A\ t.q\ f(x) = 3$.

f) Si $g \circ f$ es sobreyectiva, entonces g es sobreyectiva.

VERDADERO. Si $g \circ f$ es sobreyectiva, entonces $\forall y \in C \exists x \in A\ t.q\ (g \circ f)(x) = y$

Supongamos g no sobreyectiva, i.e, $\exists y \in C, \nexists x \in B\ t.q\ g(x) = y$, pero esto es absurdo debido a que como $g \circ f$ es sobreyectiva, dicho x debe existir.

Luego, g debe ser sobreyectiva.

Ejercicio 3. Sean A, B finitos. R de A en B y S de A en B.

a) $M(R \cup S) = M(R) + M(S)$

$$M(R \cup S)_{ij} = \begin{cases} 1\ si\ M(R)_{ij} = 1 \vee M(S)_{ij} = 1 \\ 0\ caso\ contrario \end{cases}$$

$$M(R)_{ij} + M(S)_{ij} = \begin{cases} 1\ si\ M(R)_{ij} + M(S)_{ij} = 1 \\ 0\ caso\ contrario \end{cases} = \begin{cases} 1\ si\ M(R)_{ij} = 1 \vee M(S)_{ij} = 1 \\ 0\ caso\ contrario \end{cases} = M(R \cup S)_{ij}$$

b) $M(R \cap S) = M(R) * M(S)$. Donde $*$ es el producto componente a componente.

$$M(R \cap S)_{ij} = \begin{cases} 1\ si\ M(R)_{ij} = 1 \wedge M(S)_{ij} = 1 \\ 0\ caso\ contrario \end{cases} = M(R)_{ij} * M(S)_{ij}$$

Ejercicio 4. $M(S \circ R) = M(R)M(S)$

$$M(R \circ S)_{ij} = \begin{cases} 1\ si\ \exists k \mid M(R)ik = 1 \wedge M(S)_{kj} = 1 \\ 0\ caso\ contrario \end{cases}$$

$$(M(R)_{ij}.M(S))_{ij} = \begin{cases} 1\ si\ \sum_{k=1}^{n} M(R)_{ik} M(S)_{kj} = 1 \\ 0\ caso\ contrario \end{cases}$$

Luego, $M(R)_{ik} = 1 \wedge M(S)_{kj} = 1 \implies M(R)_{ik} M(S)_{kj} = 1 \implies M(R)ik = 1 \wedge M(S)_{kj} = 1$

Por lo tanto, $M(S \circ R) = M(R)M(S)$.

Ejercicio 5. Mostrar que hay una correspondencia biyectiva entre las relaciones de A en B y las funciones de A en $P(B)$.

$C = \mathcal{P}(A \times B)$, $D = \{f' : A \to \mathcal{P}(B) : f' \ funcion\}$

$G : C \to D$, $R \mapsto G(R) = f_R$, $f_R(a) = \{b \in B : aRb\}$

$H : D \to C$, $f \mapsto H(f) = R_f$, $aR_f b \ sii \ b \in f(a)$

qpq $G \circ H = id_D \wedge H \circ G = id_C$. Igualdad de funciones, mismo dominio, codominio y ley.

(1) Sea $f : A \to \mathcal{P}(B)$, *qvq* $G(H(f)) = f$

$G(H(f)) = G(R_f) = f_{R_f} =^? f$

$f_{R_f}(a) = \{b \in B : aRf_b\} = \{b \in B : b \in f(a)\} =^? f(a)$

$\subseteq) b \in \{b \in B : b \in f(a)\} \implies b \in f(a)$

$\supseteq) b \in f(a) \implies b \in \{b : B : b \in f(a)\}$

Luego, los conjuntos son iguales.

(2) Sea $R \in \mathcal{P}(B)$

$H(G(R)) = H(f_R) = R_{f_R} =^? f$

$R_{f_R} = aR_{f_R}b \ sii \ b \in f_R(a)$

$\subseteq) aR_{f_R}b \implies b \in \{b \in B \mid aR_{f_R}b\} \implies b \in f_R(a)$

$\supseteq) b \in f_R(a) \implies b \in \{b \in B \mid aR_{f_R}b\} \implies aR_{f_R}b$

Luego, los conjuntos son iguales.

Por **(1)** y **(2)** QED.

Ejercicio 6. En cada uno de los siguientes casos, determinar si la relación $\mathcal{R}$ en $\mathcal{Z}$ es reflexiva, simétrica, antisimétrica, o transitiva.

a) $xRy \ sii \ x = y^2$

- R no es reflexiva debido que, por ejemplo, dado $x = 2$, tenemos que $2 = x \neq x^2 = 4$, luego el par $(2, 2) \notin R$.

- R no es simetrica debido que, dados $x = 1$ e $y = -1$, por un lado vale que xRy, pero no vale que yRx, luego, existe un par $(x, y) \in R$ pero no existe su contraparte $(y, x) \in R$.

- R es transitiva si xRy e yRz entonces xRz. Supongamos que R es transitiva, luego, $xRy \implies x = y^2$ y $yRz \implies y = z^2$. Reemplazando tenemos, $x = z^4$, lo cual es valido. Luego, R es transitiva.

- R es antisimétrica si cada vez que $xRy \wedge yRx \implies x = y$. Supongamos R antisimétrica, luego, $xRy \implies x = y^2$ y $yRx \implies y = x^2$. Reemplazando, tenemos $x = x^4$, lo cual es valido solo para 1 y 0, los cuales estan relacionados con si mismos. Luego, R es antisimétrica.

b) $xRy \ sii \ x > y$

- R no es reflexiva debido que, por ejemplo, dado $x = 2$, tenemos que $2 = 2$, no se cumple la relación, luego el par $(2, 2) \notin R$.

- R no es simetrica debido que, dados $x = 1$ e $y = -1$, por un lado vale que $x > y$, pero no vale que $y > x$, luego, existe un par $(x, y) \in R$ pero no existe su contraparte $(y, x) \in R$.

- R es transitiva si xRy e yRz entonces xRz. Supongamos que R es transitiva, luego, $xRy \implies x > y$ y $yRz \implies y > z$. Reemplazando tenemos, $x > y > z \implies x > z \implies xRz$. Luego, R es transitiva.

- R es antisimétrica si cada vez que $xRy \wedge yRx \implies x = y$. Supongamos R antisimétrica, luego, $xRy \implies x > y$ y $yRx \implies y > x$. Reemplazando, tenemos $x > y > x$, lo cual es una contradicción. Luego, R no es antisimétrica.

c) xRy *sii* $x \geq y$

- Supongamos R reflexiva, luego $\forall x \in \mathcal{Z}, xRx \implies x \geq x$, lo cual es valido para todo x, ya que $x = x$ siempre vale. Luego R es reflexiva.

- R no es simetrica debido que, dados $x = 1$ e $y = -1$, por un lado vale que $x \geq y$, pero no vale que $y \geq x$, luego, existe un par $(x, y) \in R$ pero no existe su contraparte $(y, x) \in R$.

- R es transitiva si xRy e yRz entonces xRz. Supongamos que R es transitiva, luego, $xRy \implies x \geq y$ y $yRz \implies y \geq z$. Reemplazando tenemos, $x \geq y \geq z \implies x \geq z \implies xRz$. Luego, R es transitiva.

- R es antisimétrica si cada vez que $xRy \wedge yRx \implies x = y$. Supongamos R antisimétrica, luego, $xRy \implies x \geq y$ y $yRx \implies y \geq x$. Reemplazando, tenemos $x \geq y \geq x \implies x = y$, luego R es antisimétrica.

d) xRy *sii* $x + y$ *es par*

- Supongamos R reflexiva, luego $\forall x \in \mathcal{Z}, xRx \implies x + x\ es\ par$.

  1. Caso x par, $x = 2k$ tq $k \in \mathcal{Z}$
     $xRx \implies x + x = 2k + 2k = 4k = 2(2k)$ par.
  2. Caso x impar, $x = 2k + 1$ tq $k \in \mathcal{Z}$
     $xRx \implies x + x = 2k + 1 + 2k + 1 = 4k + 2 = 2(2k + 1)$ par.

  Luego, por 1 y 2, vemos que siempre vale que xRx.

- R es simetrica debido a la propiedad de conmutatividad en la suma, i.e, si $xRy \Leftrightarrow x+y\ es\ par \Leftrightarrow y + x\ es\ par \Leftrightarrow yRx$.

- R es transitiva si xRy e yRz entonces xRz. Supongamos que R es transitiva, luego, $xRy \implies x + y = 2k, k \in \mathcal{Z}$ y $yRz \implies y + z = 2j, j \in \mathcal{Z}$.

  Tenemos dos casos

  1. x, y, z pares: $x = 2k, y = 2l, z = 2j$ tq $k, l, j \in \mathcal{Z}$
     $x + z = 2k + 2j = 2(k + j)$ par, luego xRz
  2. x, y, z impares: $x = 2k + 1, y = 2l + 1, z = 2j+!$ tq $k, l, j \in \mathcal{Z}$
     $x + z = 2k + 1 + 2j + 1 = 2k + 2j + 2 = 2(k + j + 1)$ par, luego xRz

  Por 1 y 2, vale que R es transitiva.

- R no es antisimétrica debido a que, dados $x = 2$ e $y = 4$, vale que $xRy \wedge yRx$ pero $x \neq y$.

e) xRy *sii* $x - y$ *es impar*

- Supongamos R reflexiva, luego $\forall x \in \mathcal{Z}, xRx \implies x - x\ es\ impar$. R no es reflexiva, debido a que $\forall x \in \mathcal{Z}, x - x = 0$ par.

- Supongamos R simétrica, luego si xRy entonces yRx.

  $xRy \implies x - y\ es\ impar$, i.e, $x - y = 2k + 1, k \in \mathcal{Z}$

  $yRx \implies y - x\ es\ impar$, i.e, $y - x = 2z + 1, z \in \mathcal{Z}$

  $y - x = 2z + 1 \Leftrightarrow y - (2k + 1 + y) = 2z + 1 \Leftrightarrow y - 2k - 1 - y = 2z + 1 \Leftrightarrow -2k - 1 = 2z + 1 \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow -2k = 2z + 2 \Leftrightarrow -2k = 2.(z + 1) \Leftrightarrow -k = z + 1 \Leftrightarrow z = -k - 1$

  Luego, R es simétrica.

- R es transitiva si xRy e yRz entonces xRz. Supongamos que R es transitiva, luego, $xRy \implies x - y = 2k+1, k \in \mathcal{Z}$ y $yRz \implies y - z = 2j+1, j \in \mathcal{Z}$.

  $x - y = 2k+1 \Leftrightarrow -y = 2k+1-x \Leftrightarrow y = -(2k+1)+x$

  $y - z = 2j+1 \Leftrightarrow -(2k+1)+x-z = 2j+1 \Leftrightarrow -2k-1+x-z = 2j+1 \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow x - z = 2j+1+2k+1 \Leftrightarrow x - z = 2k+2j+2 \Leftrightarrow 2(k+j+1)$ par.

  Luego, no vale la transitividad.

- R no es antisimétrica debido a que, dados $x = 3$ e $y = 2$, vale que $xRy \wedge yRx$ pero $x \neq y$.

Ejercicio 7. Sea R y S relaciones en A. Determinar la validez de los siguientes enunciados:
a) Si R y S son reflexivas, entonces:

- **i)** $R \cup S$ es reflexiva.

  Si R es reflexiva, entonces $\forall x \in A, xRx$

  Si S es reflexiva, entonces $\forall x \in A, xSx$

  Luego, $R \cup S = \{(x,y) \mid xRy \vee xSy\}$, como vemos que $\forall x \in A$ vale que $xRx \wedge xSx$, entonces $(x,x) \in R \cup S\ \forall x \in A$. Luego, $R \cup S$ es reflexiva.

- **ii)** $R \cap S$ es reflexiva.

  Si R es reflexiva, entonces $\forall x \in A, xRx$

  Si S es reflexiva, entonces $\forall x \in A, xSx$

  Luego, $R \cap S = \{(x,y) \mid xRy \wedge xSy\}$, como vemos que $\forall x \in A$ vale que $xRx \wedge xSx$, entonces $(x,x) \in R \cap S\ \forall x \in A$. Luego, $R \cap S$ es reflexiva.

- **iii)** $R \circ S$ es reflexiva.

  Si R es reflexiva, entonces $\forall x \in A, xRx$

  Si S es reflexiva, entonces $\forall x \in A, xSx$

  Luego, $R \circ S = \{(x,y) \mid \exists k \in A : xRk \wedge kSy\}$, como vemos que $\forall x \in A$ vale que $xRx \wedge xSx$, tomando $k = x$ vale que $(x,x) \in R \circ S\ \forall x \in A$. Luego, $R \circ S$ es reflexiva.

b) Repetir pero para las propiedades: simétrica, antisimétrica y transitiva.

1. Simétrica

- **i)** $R \cup S$ es simétrica.

  Si R es simétrica, entonces si $xRy \implies yRx$

  Si S es simétrica, entonces $xSy \implies ySx$

  Luego, $R \cup S = \{(x,y) \mid xRy \vee xSy\}$, como vemos que $\forall x, y \in A$ vale que $xRy \implies yRx \wedge xSy \implies ySx$, entonces si $(x,y) \in R \cup S \implies (y,x) \in R \cup S$. Luego, $R \cup S$ es simétrica.

- **ii)** $R \cap S$ es simétrica.

  Si R es simétrica, entonces si $xRy \implies yRx$

  Si S es simétrica, entonces $xSy \implies ySx$

  Luego, $R \cap S = \{(x,y) \mid xRy \wedge xSy\}$, como vemos que $\forall x, y \in A$ vale que $xRy \implies yRx \wedge xSy \implies ySx$, entonces si $(x,y) \in R \cap S \implies (y,x) \in R \cap S$. Luego, $R \cap S$ es simétrica.

- **iii)** $R \circ S$ es simétrica.

  Si R es simétrica, entonces si $xRy \implies yRx$

  Si S es simétrica, entonces $xSy \implies ySx$

  Luego, $R \circ S = \{(x,y) \mid \exists k \in A : xRk \wedge kSy\}$, como vemos que $\forall x, y \in A$ vale que $xRy \implies yRx \ \wedge \ xSy \implies ySx$, entonces tomando $k = x$ vale que $(x,y) \in R \circ S \implies (y,x) \in R \circ S$. Luego, $R \circ S$ es simétrica.

2. Antisimétrica

- **i)** $R \cup S$ es antisimétrica.

  Si R es antisimétrica, entonces si $xRy \wedge yRx \implies x = y$

  Si S es antisimétrica, entonces $xSy \wedge ySx \implies x = y$

  Supongamos $R \cup S$ antisimétrica, luego, $\forall x, y \in R \cup S : x(R \cup S)y \wedge y(R \cup S)x \implies x = y$

  Si $x(R \cup S)y \wedge y(R \cup S)x$ entonces $(xRy \wedge yRx) \vee (xSy \wedge ySx) \implies x = y$, por hipotesis. Luego, $R \cup S$ es antisimétrica.

- **ii)** $R \cap S$ es antisimétrica.

  Si R es antisimétrica, entonces si $xRy \wedge yRx \implies x = y$

  Si S es antisimétrica, entonces $xSy \wedge ySx \implies x = y$

  Supongamos $R \cap S$ antisimétrica, luego, $\forall x, y \in R \cap S : x(R \cap S)y \wedge y(R \cap S)x \implies x = y$

  Si $x(R \cap S)y \wedge y(R \cap S)x$ entonces $(xRy \wedge yRx) \wedge (xSy \wedge ySx) \implies x = y$, por hipotesis. Luego, $R \cap S$ es antisimétrica.

- **iii)** $R \circ S$ es antisimétrica.

  Si R es antisimétrica, entonces si $xRy \wedge yRx \implies x = y$

  Si S es antisimétrica, entonces $xSy \wedge ySx \implies x = y$

  Supongamos $R \circ S$ antisimétrica, luego, $\forall x, y \in R \circ S : x(R \circ S)y \wedge y(R \circ S)x \implies x = y$

  Si $x(R \circ S)y \implies \exists k \in A : xRk \wedge kSy$

  Si $y(R \circ S)x \implies \exists k \in A : yRk \wedge kSx$

3. Transitiva

- **i)** $R \cup S$ es transitiva. **(COMPLETAR)**
- **ii)** $R \cap S$ es transitiva. **(COMPLETAR)**
- **iii)** $R \circ S$ es transitiva. **(COMPLETAR)**

c) Si R es reflexiva (resp. simétrica, antisimétrica, transitiva), entonces R^{-1} también.

- Si R reflexiva, entonces $\forall x \in A, xRx$.

  Por definición de R^{-1} vale que si $xRx \Leftrightarrow xR^{-1}x$, luego R^{-1} es reflexiva.

- Si R es simétrica entonces, si $xRy \implies yRx$.

  Por definición de R^{-1} vale que, si $xRy \Leftrightarrow yR^{-1}x$. Luego, vemos que como R es simétrica, entonces $yRx \Leftrightarrow xR^{-1}y$. Luego, vemos que $yR^{-1}x \implies xR^{-1}y$. Por lo que R^{-1} es simétrica.

- Si R es antisimétrica entonces, si $xRy \wedge yRx \implies x = y$.

  Por definición de R^{-1} vale que, $xRy \wedge yRx \implies yR^{-1}x \wedge xR^{-1}y$. Luego, por hipotesis, $x = y$. Por lo que R^{-1} es antisimétrica.

- Si R es transitiva entonces, si $xRy \wedge yRz \implies xRz$.

  Por definición de R^{-1}, $xRy \wedge yRz \implies xRz \Leftrightarrow yR^{-1}x \wedge zR^{-1}y \implies zR^{-1}x$. Vemos que se cumple que R^{-1} es transitiva.

Ejercicio 8. Sean R y S relaciones en A tal que $R \subseteq S$, y sea $A' \subseteq A$. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) Si R es reflexiva (resp. simétrica, antisimétrica, transitiva), entonces S también lo es.

- Sea $A = \{1, 2, 3\}$.

  Sea R la relación dada por:

  $M(R) =$

(COMPLETAR)

b) Si S es reflexiva (resp. simétrica, antisimétrica, transitiva), entonces R también lo es.
(COMPLETAR)

c) Si R es reflexiva (resp. simétrica, antisimétrica, transitiva), entonces $R_{|A' \times A'}$ también lo es.
(COMPLETAR)

Ejercicio 9. Sea A un conjunto finito de cardinal n y sea I_n la matriz identidad $n \times n$. Si $M = (M_{ij})$ y $N = N_{ij}$ son matrices $n \times n$, escribimos $M \leq N$ sii $M_{ij} \leq N_{ij}$ $\forall i, j \in [1, n]$. Sea R una relación en A. Probar que:

a) R es reflexiva sii $I_n \leq M(R)$
$\implies)$
$Hip: \ R \ reflexiva$
$qvq \ I_n \leq M(R) \Leftrightarrow (I_n)_{ij} \leq (M(R))_{ij} \ \forall i, j$
Sean i, j:

Caso 1: $i = j$
Por Hip: $a_i R a_i \implies M(R)_{ij} = 1 \geq 1 = (I_n)_{ij}$

Caso 2: $i \neq j$
$(I_n)ij = 0 \implies 0 \leq (M(R))_{ij}$
Por lo tanto, $(I_n)_{ij} \leq (M(R))_{ij}, \forall i, j$

$\Longleftarrow)$
$Hip: \ I_n \leq M(R) \Leftrightarrow (I_n)_{ij} \leq (M(R))_{ij}, \forall i, j$
$qvq \ R \ reflexiva$
Sea $i \in \{1, ..., n\}$
Por Hip sabemos que $I_{ii} = 1 \leq (M(R))_{ii} \implies (M(R))_{ii} = 1 \ \forall i \implies a_i R a_i$
Por lo tanto, R es reflexiva.

b) R es reflexiva sii $M(R) = M(R)^t$
$\implies)$
$Hip: \ R \ reflexiva$
$qvq \ M(R) = M(R)^t \Leftrightarrow M(R)_{ij} = M(R)_{ji} \ \forall i, j$
Sean i, j:

Caso 1: $i = j$
Por Hip: $a_i R a_i \implies M(R)_{ii} = 1 = (M(R))^t_{ii}$

Caso 2: $i \neq j$

c) R es reflexiva sii $M(R).M(R) \leq M(R)$ **(COMPLETAR)**

d) R es reflexiva sii $M(R) * M(R)^t \leq I_n$ **(COMPLETAR)**

Ejercicio 10. Analizar en cada caso si la relación dada en el conjunto A es de equivalencia. En caso de serlo, describir su conjunto cociente:

a) $A = \mathcal{Z}, x \sim y \ sii \ x - y \ es \ par$ **(COMPLETAR)**

b) $A = \mathcal{R}, x \sim y \ sii \ xy > 0$
No es de equivalencia debido a que no es reflexiva:
$0 \in \mathcal{R}, 0^2 = 0$. Luego, no se cumple que $\forall x \in \mathcal{R}, x \sim x$

c) $A = \mathcal{R}, x \sim y \ sii \ xy \geq 0$
No es de equivalencia debido a que no es transitiva:
Veamos lo siguiente:
1) $1 \sim 0 \implies 1.0 \geq 0$ lo cual vale.
2) $0 \sim (-1) \implies 0.(-1) \geq 0$ lo cual vale.

Tomando, $x = 1, y = 0 \ y \ z = -1$, vemos que $x \sim y \wedge y \sim z$, pero no vale que $x \sim z$ debido a que $1.(-1) = 1 < 0$.

d) $A = \mathcal{R} \times \mathcal{R}, (a, b) \sim (c, d) \ sii \ a + d = c + b$

Queremos ver que $\sim$ es reflexiva, simetrica y transitiva:

- Sea $x \in \mathcal{R}^2 \ t.q. \ x = (a, b)$

  $a + b = a + b \implies (a, b) \sim (a, b) \implies x \sim x$

- Sean $x, y \in \mathcal{R}^2$ $t.q.$ $x = (a, b)$ e $y = (c, d)$

  $x \sim y \implies (a, b) \sim (c, d) \implies a + d = b + c \implies b + c = a + d \implies (c, d) \sim (a, b) \implies y \sim x$

- Sean $x, y, z \in \mathcal{R}^2$ $t.q.$ $x = (a, b), y = (c, d)$ y $z = (e, f)$

  1) $x \sim y \implies (a, b) \sim (c, d) \implies a + d = b + c$

  2) $y \sim z \implies (c, d) \sim (e, f) \implies c + f = d + e$

  De 2) vemos que $c = d + e - f$, reemplazando en 1) tenemos:

  $a + d = b + c \implies a + d = b + (d + e - f) \implies a = b + e - f \implies a + f = b + e \implies (a, b) \sim (e, f) \implies x \sim z$

Caracterizacion de $\mathcal{R}^2/\sim$:

$$
\begin{aligned}
[(a,b)] = \overline{(a,b)} &= \{(c,d) \in \mathcal{R}^2 \mid (a,b) \sim (c,d)\} = \\
&= \{(c,d) \in \mathcal{R}^2 \mid a + d = c + b\} = \\
&= \{(c,d) \in \mathcal{R}^2 \mid d = c + (b - a)\}
\end{aligned}
$$

Luego, $\mathcal{R}^2/\sim = \{\overline{(a,b)} \mid a, b \in \mathcal{R}\} = \{\{(c,d) \in \mathcal{R}^2 \mid d = c + (b - a)\} \mid (a,b) \in \mathcal{R}^2\}$

Ejercicio 11. Dada una función $f : A \to B$, se define una relación K_f en A como:

$$K_f = \{(a, a') \in A \times A : f(a) = f(a')\}$$

a) Probar que K_f es de equivalencia.
K_f es de equivalencia si es reflexiva, simetrica y transitiva.

- Sea $x \in A$, luego, $f(x) = f(x)$ $(trivial) \implies (x, x) \in K_f$

- Sean $x, y \in A$.

  Si $(x, y) \in K_f \implies f(x) = f(y) \implies f(y) = f(x) \implies (y, x) \in K_f$

- $x, y, z \in A$.

  Si $(x, y) \in K_f \wedge (y, z) \in K_f \implies f(x) = f(y) \wedge f(y) = f(z) \implies f(x) = f(z) \implies (x, z) \in K_f$

b) Dar una definición alternativa para K_f en términos de f, la composición y la inversa de relaciones. **(COMPLETAR)**

Ejercicio 12. Sea $espar : \mathcal{N} \to Boolean$ la función que retorna $true$ en los pares y $false$ en los impares. Calcular $\mathcal{N}/\mathcal{K}_{espar}$.

Caracterizacion de $\mathcal{N}/\mathcal{K}_{espar}$:

$$
\begin{aligned}
[x] = \overline{x} &= \{y \in \mathcal{N} \mid x \sim y\} = \\
&= \{y \in \mathcal{N} \mid espar(x) = espar(y)\}
\end{aligned}
$$

Luego, $\mathcal{N}/\mathcal{K}_{espar} = \{\overline{x} \mid x \in \mathcal{N}\} = \{\{y \in \mathcal{N} \mid espar(x) = espar(y)\} \mid x \in \mathcal{N}\}$

Ejercicio 13. Mostrar que toda relación de equivalencia en un conjunto A cualquiera es $\mathcal{K}_f$ para alguna función $f : A \to B$, para algún conjunto B adecuado.

(COMPLETAR)

Ejercicio 14. Teorema de factorización. Dada una función $f : A \to A$ y una relación de equivalencia $\sim \subseteq \mathcal{K}_f$, probar que existe una única función $f^{\sim} : A/\sim \to B$ tal que $f = f^{\sim} \circ \pi$, donde $\pi : A \to A/\sim$ se define como $\pi(a) = \overline{a}$ para todo $a \in A$. Además, probar que $f^{\sim}$ es inyectiva si $\sim = \mathcal{K}_f$.

(COMPLETAR)

2 Práctica 2

Ejercicio 1 Considerar las relaciones R_1 y R_2 en $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ cuyas matrices asociadas son:

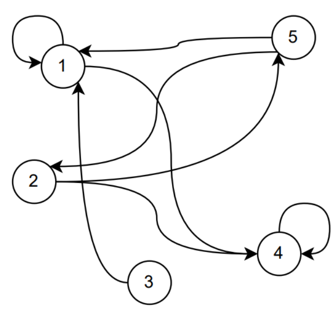
$$M(R_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M(R_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinar los grafos dirigidos asociados a $R1$, $R2$ y a las relaciones $R3 = R1 \cup R2, R4 = R1 \cap R2$ y $R5 = R2 \circ R1$.

$$M(R_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M(R_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

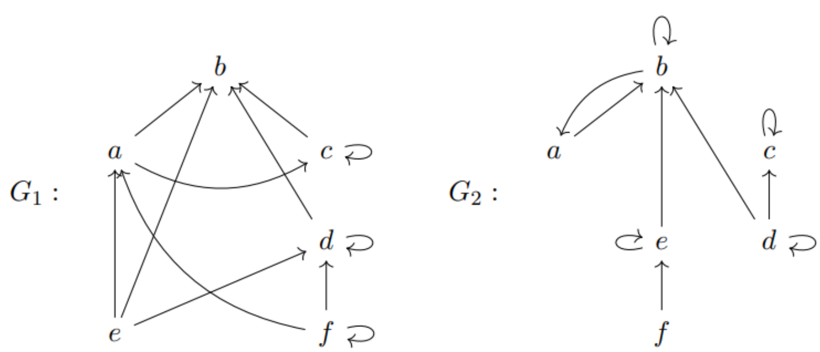
$$M(R_5) = M(R_1).M(R_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- G_1 :



- G_2 :
- G_3 :
- G_4 :
- G_5 :

Ejercicio 2 Considerar las relaciones R_1 y R_2 cuyos grafos dirigidos asociados son los grafos G_1 y G_2 de la siguiente figura:



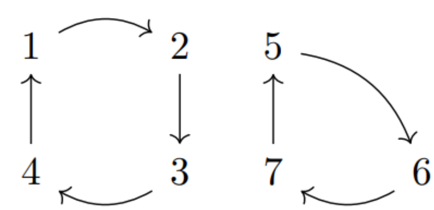
Determinar los grafos dirigidos asociados a las relaciones $R_3 = R_1 \circ R_2$ y $R4 = R_2 \circ R_1$.

$$M(R_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M(R_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M(R_3) = M(R_2).M(R_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M(R_4) = M(R_1).M(R_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3. Sea R la relación sobre $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ cuyo grafo dirigido asociado es:



$$M(R) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Si $R^1 = R$, $R^2 = R \circ R$ y $R^n = R^{n-1} \circ R$ para cada $n \in \mathcal{N}, n \geq 3$, encontrar el $n \geq 2$ más pequeño tal que $R^n = R$.

$n = 13$: (Hacer demostracion)

b) ¿Cuál es el $n \in \mathcal{N}$ más pequeño para el cual el grafo de R^n contiene al menos un lazo?

$n = 3$: (Hacer demostracion)

$$M(R^3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vemos que los nodos 5, 6 y 7 tienen un lazo.

c) ¿Existe $n \in \mathcal{N}$ tal que el grafo de R^n consta sólo de lazos?

$n = 12$: (Hacer demostracion)

Ejercicio 4. Lema de Yoneda. Sea (P, R) un conjunto preordenado. Probar que

$$xRy \Leftrightarrow (\forall z \in P, zRx \implies zRy)$$

R relación preorden en P. R es reflexiva y transitiva.
$\Rightarrow) Hip: xRy$. Sea $z \in P/zRx$
Luego, $xRy \wedge zRx \implies zRy$ por transitividad.
$\Leftarrow) Hip: \forall z \in P, zRx \implies zRy$
Como R es reflexiva, vale que dado $x \in P, xRx \implies xRy$ por Hip.

Ejercicio 5. Sea (A, R) un conjunto preordenado. Probar:
a) Si existe un elemento máximo, entonces todos los maximales son máximos.

I) Si existe un elemento máximo en el conjunto, sea M dicho elemento, entonces $\forall x \in A,\ xRM$.

II) Un elemento b es maximal si para cada $x \in A$ tal que bRx, entonces xRb.

Sea m maximal, en particular, por **I**, mRM, luego por **II**, como m es maximal, MRm, luego por transitividad y por **I** vale que $\forall x \in A, xRm$, luego m es maximo.

b) Sea $B \subseteq A$. Si $a \in B$ es cota superior de B, entonces a es un elemento maximal de B. ¿Vale la recíproca?

qvq si a es un elemento maximal de B entonces a es cota superior de B.

Tenemos a elemento maximal de B, luego para cada $x \in B$ tal que aRx entonces xRa.

Contraejemplo

Ejercicio 6. Decimos que un conjunto preordenado (A, R) satisface el **axioma del supremo** si todo subconjunto no vacio de A acotado superiormente tiene un supremo.

a) Mostrar que $(P(X), \subseteq)$ satisface el axioma del supremo.

Sea $S \subseteq P(X)$ no vacio, acotado superiormente.

Sea $sup(S) = \bigcup_{S_i \in S} S_i$

O. Probar que $sup(S) \in P(X)$
I. Probar que $sup(S)$ es cota superior de S.
II. Probar que $sup(s)$ es la minima cota superior de S.

0. Queremos ver que $sup(S) \subseteq X$
$sup(S) = \bigcup_{S_i \in S} S_i$
Sabemos que $\forall S_i, S_i \in S \implies S_i \subseteq X \implies sup(S) \subseteq X$
I. Sea $s \in S$, queremos ver que $s \subseteq sup(S)$
Sea $s \in S$, luego por definicion de $sup(S)$ vale que $s \subseteq sup(S)$

II. Supongamos que existe B cota superior de S, queremos ver que $sup(S) \subseteq B$.
Si B es cota superior de S, luego $\forall S_i \in S \implies S_i \subseteq B$.
Tomemos un elemento $s_i \in sup(S)$, luego dicho elemento pertence a algun $S_i \in S$, por hip. sabemos que $\forall S_i \in S, s \subseteq B$, luego, $s_i \in B$, por lo que $sup(S) \subseteq B$.

Luego, se verifica que $sup(S)$ es supremo.

b) ¿El axioma del supremo es una propiedad hereditaria? Es decir, si (A, R) es un conjunto preordenado que satisface el axioma del supremo y $B \subseteq A$, ¿$(B, R_{|B \times B})$ tambien lo satisface?

NO, encontrar contraejemplo.

c) Sea (A, R) un conjunto preordenado. Decimos que (A, R) satisface el axioma del infimo si todo subconjunto no vacio de A acotado inferiormente tiene infimo. Probar que (A, R) satisface el axioma del supremo si y solo si (A, R) satisface el axioma del infimo.

$\Rightarrow)$ $Hip: (A, R)$ satisface el axioma del supremo.
Queremos ver que (A, R) satisface el axioma del infimo.
Sea $B \subseteq A$ t.q $B \neq \emptyset$ y B acotado inferiormente. Queremos ver que B tiene infimo.
Sea $C = \{c \in A : c\ cota\ inferior\ de\ B\}$
Queremos ver que C tiene maximo.
Notar que:
i. $C \neq \emptyset$ por Hip
ii. Cualquier elemento de B es una cota superior de C

Sea $c \in C, cRb$ dado que c es cota inferior de B

iii. C esta acotado superiormente.

Por Hip $B \neq \emptyset$, i.e, existe $b \in B$ y por **ii** $c \leq b, \forall c \in C$, por lo tanto, b es cota superior de C.

Por Hip, **i** y **iii** existe $s \in A$ t.q. s supremo de C.
Es decir, s es una cota superior de C, y es la minima.

Queremos ver que s es infimo de B.

iv. Tenemos que ver que s es cota inferior de B.

Sea $b \in B$, queremos ver que sRb.

Por **ii** b es cota superior de $C \implies sRb$ (s supremo)

v. Tenemos que ver que s es un maximo en C (cotas inferiores de B).

Sea $c \in C$, es decir, c es cota inferior de B.

Queremos ver que cRs

Como $c \in C \implies cRs$ (s supremo de C)

$\Leftarrow$) $Hip : (A, R)$ satisface el axioma del infimo. (Analogo)

Ejericio 7. Trivial

Ejercicio 8. ¿Cuantas relaciones posibles hay en $A = \{a, b, c\}$? Responder la misma pregunta para: preordenes, ordenes parciales, ordenes totales, y relaciones de equivalencia. ¿Y para un conjunto finito de n elementos?

Ejercicio 9 Sea $(A, \preceq)$ un poset. Un subconjunto $B \subset A$ se denomina una anticadena si para cada $x, y \in B$ se verifica que:

$$x \preceq y \implies x = y$$

Probar que el conjunto de todos los elementos maximales(resp. minimales) de un conjunto ordenado, es una anticadena.

Supongamos que $(A, \preceq)$ es un conjunto ordenado, es decir, es reflexivo, transitivo y antisimetrico. Ademas, para cada $x, y \in A$ vale que $x \preceq y \vee y \preceq x$ (Si se cumplen las dos vale que $x = y$ por antisimetria).

Tomemos el conjunto de los elementos maximales de $(A, \preceq)$, estos son:

$$M = \{a \in A : \forall y \in A \ si \ a \preceq y \implies y \preceq a\}$$

Sea $x \in M$, luego, $\forall y \in A \ si \ x \preceq y \implies y \preceq x$, pero esto implica que $x = y$ por la antisimetria, luego $M \subset A$ es una anticadena.

Minimales analogo.

Ejercicio 10. Sean $(A, \preceq_1)$ y $(A, \preceq_2)$ posets. Determinar si las siguientes relaciones determinan un orden parcial en A:

a) $\preceq_1 \cup \preceq_2$ **b)** $\preceq_1 \cap \preceq_2$ **c)** $\preceq_1 \circ \preceq_2$

Ejercicio 11. Sean $(A, \preceq_A)$ y $(B, \preceq_B)$ posets. Probar que los siguientes conjuntos son posets:

a) $(A \times B, \preceq_{prod})$ Trivial

b) $(A \times B, \preceq_{lex})$

Es un poset si es reflexivo, transitivo y antisimetrico.

$(A \times B, \preceq_{lex}) = (a, b) \preceq_{lex} (c, d) \ si \ a \prec_A c \vee (a = c \wedge b \preceq_B d)$

1. Reflexividad: Sea $x = (a, b)$. Vale que $x \preceq_{lex} x$?

   $(a, b) \preceq_{lex} (a, b) \implies a \prec_A a \vee (a = a \wedge b \preceq_B b) \implies$

   $\implies a = a \wedge b \preceq_B b$

   (Trivial que $a = a$, y la segunda condicion vale porque $\preceq_B$ es reflexiva)

2. Transitividad: Sean $x = (a, b), y = (c, d)$ y $z = (e, f)$.

   Supongamos $x \preceq_{lex} y \wedge y \preceq_{lex} z$

   i. $x \preceq_{lex} y \implies a \prec_A c \vee (a = c \wedge b \preceq_B d)$

   ii. $y \preceq_{lex} z \implies c \prec_A e \vee (c = e \wedge e \preceq_B f)$

   - Si en **i** y **ii** vale la primer condicion, entonces $a \prec_A c \wedge c \prec_A e \implies a \prec_A e \implies x \preceq_{lex} z$ (Por transitividad de $\prec_A$)
   - Si en **i** vale la primer condicion y en **ii** vale la segunda, entonces $a \prec_A c \wedge c = e \implies a \prec_A e \implies x \preceq_{lex} z$
   - Si en **i** vale la segunda condicion y en **ii** vale la primera, entonces $a = c \wedge c \prec_A e \implies a \prec_A e \implies x \preceq_{lex} z$
   - Si en **i** y **ii** vale la segunda condicion, entonces $a = c \wedge c = e \implies a = e \implies x \preceq_{lex} z$ (Por transitividad de $=$)

   Luego, vemos que en todos los casos posibles vale que $x \preceq_{lex} z$.

3. Antisimetria: Sean $x = (a, b)$ e $y = (c, d)$, luego si $x \preceq_{lex} y \wedge y \preceq_{lex} x \implies x = y$

   $x \preceq_{lex} y \wedge y \preceq_{lex} x \implies ((a \prec_A c \vee (a = c \wedge b \preceq_B d) \wedge (c \prec_A a \vee (c = a \wedge d \preceq_B b))$

   Para que esto tenga sentido, solo pueden valer las condiciones:

   $(a = c \wedge b \preceq_B d) \wedge (c = a \wedge d \preceq_B b) \implies a = c \wedge b \preceq_B d \wedge d \preceq_B b \implies a = c \wedge b = d \implies x = y$ (Por antisimetria de $\preceq_B$)

Vimos que la relacion es reflexiva, transitiva y antisimetrica, por lo que es un poset.

c) Si $(A, \preceq_1)$ y $(A, \preceq_2)$ son totalmente ordenados, lo son tambien los conjuntos de **a)** y **b)**?

d) Para cada uno de los siguientes posets $(A, \preceq_1)$ y $(A, \preceq_2)$, construir los diagramas de Hasse de $(A, \preceq_1)$, $(A, \preceq_2)$, $(A \times B, \preceq_{prod})$ y $(A \times B, \preceq_{lex})$. Encontrar en cada caso los elementos maximales, minimales, maximos y minimos si los hubiera.

i. $A = P(\{0\})$, $\preceq_A = \subseteq$ y $B = P(\{1, 2\}), \preceq_B = \subseteq$

ii. $A = B = \{1, 2, 4, 6\}, \preceq_A = \preceq_B = |_{|A \times A}$

e) Mostrar que $(P(\{0\}) \times P(\{1, ..., n\}), \preceq_{prod}) \simeq (P(\{0, ..., n\}), \subseteq)$

$f : P(\{0\}) \times P(\{1, ..., n\}) \to P(\{0, ..., n\})$

$f((A, B)) = A \cup B$

Ver que f es biyectiva y que vale que dados $(A, B), (C, D)$ t.q $(A, B) \preceq_{prod} (C, D) \Leftrightarrow f((A, B)) \subseteq f((C, D))$

1.

2.

3. $(A, B) \preceq_{prod} (C, D) \Rightarrow f((A, B)) \subseteq f((C, D))$

$(A, B) \preceq_{prod} (C, D) \implies A \subseteq C \wedge B \subseteq D \implies A \cup B \subseteq C \cup D \implies f((A, B)) \subseteq f((C, D))$

4. $(A, B) \preceq_{prod} (C, D) \Leftarrow f((A, B)) \subseteq f((C, D))$

$f((A, B)) \subseteq f((C, D)) \implies A \cup B \subseteq C \cup D \implies$

Ejercicio 12. (P, R) conjunto preordenado.

a) $a \sim b$ sii $aRb \wedge bRa$. Probar que $\sim$ es de equivalencia.

Ver que $\sim$ es reflexiva, simetrica y transitiva.

b) Construir un poset $(P|_\sim, \preceq)$ tal que la proyeccion al cociente $x : P \to P|_\sim$ (dada por $x(p) = [p]$) sea un morfismo de orden.

c)

Ejercicio 14.

Sea $(A, \preceq)$ poset. $\forall a \in A$, $A_a = \{x \in A : x \preceq a\}$.

Sea $A' = \{A_a : a \in A\}$ quiero ver que $(A', \subseteq) \simeq (A, \subseteq)$, i.e, que son isomorfos.

$f : (A', \subseteq) \to (A, \preceq)$ donde $f(A_a) = a \; \forall a \in A$

Debemos ver que f es biyectiva y que es un morfismo de orden, i.e, dados $A_a, A_b \in A'$, $A_a \subseteq A_b \Leftrightarrow f(A_a) \preceq f(A_b)$

1. f inyectiva. Sean $A_a, A_b \in A'$

$f(A_a) = f(A_b) \implies a = b \implies \{x \in A : x \preceq a\} = \{x \in A : x \preceq b = a\} \implies A_a = A_b$

2. f sobreyectiva. $\forall a \in A, \exists A_x \in A'\ t.q\ f(A_x) = a$

Basta con considerar $A_a\ \forall a \in A$.

3. $A_a \subseteq A_b \Rightarrow f(A_a) \preceq f(A_b)$

$A_a \subseteq A_b \implies \{x \in A : x \preceq a\} \subseteq \{x \in A : x \preceq b\} \implies x \preceq a \to x \preceq b$

En el caso particular de $x = a$ entonces $a \preceq a \to a \preceq b$ y por reflexiva $a \preceq b$

4. $A_a \subseteq A_b \Leftarrow f(A_a) \preceq f(A_b)$

$f(A_a) \preceq f(A_b) \implies a \preceq b \implies (Yoneda)\forall x \in A, x \preceq a \to x \preceq b \implies \{x \in A : x \preceq a\} \subseteq \{x \in A : x \preceq b\} \impliedby A_a \subseteq A_b$

Ejercicio 15. Definir un morfismo de orden biyectivo entre $(\mathcal{N}, |)$ y $(\mathcal{N}, \leq)$. Son posets isomorfos?

Para ver lo primero necesitamos una funcion $f : (\mathcal{N}, |) \to (\mathcal{N}, \leq)$ biyectiva y morfismo de orden.

Sea $f : (\mathcal{N},\ |) \to (\mathcal{N}, \leq)\ t.q\ f(x) = x$

Trivial que es biyectiva.

Veamos si vale que dados $x, y \in \mathcal{N}, x \mid y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$

$x \mid y \implies \exists k \in \mathcal{N}\ t.q\ y = kx \implies x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$

NO son posets isomorfos, debido a que por ejemplo, dados $x = 2, y = 3$, vale que $x \leq y$ pero no vale que $x \mid y$

3 Práctica 3