1)

$$TR(a,b,c) = \begin{cases} 1 & \text{si } a^2+b^2=c^2 \text{ o } c^2+a^2=b^2 \text{ o } b^2+c^2=a^2 \\ 0 & \text{si } a^2+b^2\neq c^2 \text{ y } c^2+a^2\neq b^2 \text{ y } b^2+c^2\neq a^2 \end{cases}$$

Pasemos esta función a FRP

Vamos a utilizar las sgtes funciones:

(i) $Exp(y,x) = x^y \longrightarrow Exp(y,x) = R(\Phi(s, c^{(1)}), \Phi(\Pi^{(2)}, p_3^{(3)}, p_2^{(3)}))$

(ii) $E(x,y) = \begin{cases} 1 & x=y \\ 0 & x\neq y \end{cases}$

definida como

$$E(x,y) = \Phi(D_0^{(1)}, \Phi(\Sigma^{(2)}, \Phi(\dot{-}^{(2)}, p_1^{(2)}, p_2^{(2)}), \Phi(\dot{-}^{(2)}, p_2^{(2)}, p_1^{(2)})))$$

Exp es FRP ya que está conformada por dos funciones FRP $\Phi(s, c^{(1)})$ (composición de dos funciones base) y $\Phi(\Pi^{(2)}, p_3^{(3)}, p_2^{(3)})$ (composición entre función FRP y dos funciones base), y están combinadas por el operador R.

E es FRP ya que está definida a partir de la composición de D_0 (FRP) con la composición de Σ (FRP) con la composición de $\dot{-}$ (FRP) y dos funciones base

Luego,

$TR(a,b,c) =$

$$= D_0(D_0(\Sigma(\Sigma(E(\Sigma(Exp(2,a), Exp(2,b)), Exp(2,c)),$$
$$E(\Sigma(Exp(2,c), Exp(2,a)), Exp(2,b))),$$
$$E(\Sigma(Exp(2,b), Exp(2,c)), Exp(2,a)))))$$

escribámosla como FRP

$TR(a,b,c) =$

$= \Phi(D_0^{(1)}, \Phi(D_0^{(1)}, \Phi(\Pi^{(2)}, \Phi(\Pi^{(2)}, \Phi(E^{(2)}, \Phi(\Pi^{(2)}, \Phi(Exp^{(2)}, dos^{(0)}, p_1^{(3)}), \Phi(Exp^{(2)}, dos^{(0)}, p_2^{(3)})), \Phi(Exp^{(2)}, dos^{(0)}, p_3^{(3)})),$

$\Phi(E^{(2)}, \Phi(\Pi^{(2)}, \Phi(Exp^{(2)}, dos^{(0)}, p_3^{(3)}), \Phi(Exp^{(2)}, dos^{(0)}, p_1^{(3)})),$

$\Phi(Exp^{(2)}, dos^{(0)}, p_2^{(3)}))),$

$\Phi(E^{(2)}, \Phi(\Pi^{(2)}, \Phi(Exp^{(2)}, dos^{(0)}, p_2^{(3)}), \Phi(Exp^{(2)}, dos^{(0)}, p_3^{(3)})),$

$\Phi(Exp^{(2)}, dos^{(0)}, p_1^{(3)})))))$

$dos^{(0)} = \Phi(s, \Phi(s, c^{(0)}))$ (claramente FRP)

Luego TR es FRP ya que está formado a partir de composiciones entre funciones FRP (D_0, Π, E, Exp y dos) y funciones base.

2) $A \subseteq \mathbb{N}_0$, $R \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$

xRy si: $x \in A$, $y \in A$, $mod_2(x+y) = 0$

Sea C_R el conjunto asociado a R

$$C_R = \{(x,y) \mid x, y \in A \text{ y } mod_2(x+y) = 0\}$$

R es RRP sii C_R es CRP sii χ_{C_R} es FRP

donde $\chi_{C_R}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in C_R \\ 0 & \text{si } x \notin C_R \end{cases}$ $(x = (y,z) \in C_R)$

Sea $mod_2(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ par} \\ 0 & x \text{ impar} \end{cases}$

definimos a mod_2 como FRP

$mod_2(x) = R(c^{(0)}, \Phi(\tilde{D}, p_2^{(2)}, uno^{(0)}))$

$uno^{(0)} = \Phi(s, c^{(0)})$ (claramente FRP)

Luego mod_2 es FRP ya que está definido a partir de dos funciones FRP $c^{(0)}$ (función base) y $\Phi(\tilde{D}, p_2^{(2)}, uno^{(0)})$ (composición de una FRP con una función base y una FRP), y con el operador R.

Sea $\chi_{C_R}(x) = \Phi(0_0^{(1)}, \Phi(\mathrm{mod}_2^{(1)}, \Phi(\Sigma^{(2)}, \Phi(p_1^{(2)}, p_1^{(1)}), \Phi(p_2^{(2)}, p_1^{(1)}))))$

$(x = (y, z) \in C_R)$

Luego χ_{C_R} es FRP ya que está formado a partir de composiciones entre FRPs (0_0, mod_2, Σ) y funciones base.

Por lo tanto como χ_{C_R} es FRP $\Longrightarrow C_R$ CRP $\Longrightarrow R$ RRP.

3)

$F(x,y) = x^2 \cdot \log_{10}(y)$

$F(x,y) = \mu_t(h(x,y,t) = 0)$

donde $h(x,y,t) = 0 \overset{\langle \text{def } F \rangle}{\iff} t = F(x,y) \iff$

$t = x^2 \cdot \log_{10}(y) \overset{\langle \text{como FR} \rangle}{\iff} E(t, \Pi(Exp(2,x), \log_{10}(y)))$

donde $\log_{10}(y) = \mu_t(g(y,t) = 0)$

$g(y,t) = 0 \iff t = \log_{10}(y) \overset{\langle \text{def } \log \rangle}{\iff} 10^t = y \iff$

$\overset{\langle \text{como FR} \rangle}{\iff} E(Exp(10,t), y)$

Luego, $g(y,t) = \Phi(D_0^{(1)}, \Phi(E^{(2)}, \Phi(Exp^{(2)}, 10, p_2^{(2)}), p_1^{(2)})))$

Luego, $\log_{10}(y)$ es FR ya que está definida a partir del operador minimizador y la composición entre funciones FRP y funciones base.

Ahora definimos $h(x,y,t)$:

$h(x,y,t) = \Phi(D_0^{(1)}, \Phi(E^{(2)}, p_3^{(3)}, \Phi(\Pi^{(2)}, \Phi(Exp^{(2)}, 2, p_1^{(3)}), \Phi(\log_{10}, p_2^{(3)}))))$

Luego, F es FR ya que está definida a partir del operador minimizador y la composición de funciones FRP, una FR ($\log_{10}$) y funciones base.