Práctica 5: Lógica de Predicados, Semántica

1. Considere la sentencia ϕ definida como $\forall x \exists y(\neg(x = y) \wedge (R(x, y) \to R(y, x)))$, donde R es un símbolo de predicado de aridad 2.

a) Sea $A = \{a, b, c\}$ y $R^M = \{(b, c), (b, b), (b, a)\}$. Decida si $\mathcal{M} \models \phi$.

b) Sea $A' = \{a, b, c\}$ y $R^{M'} = \{(b, c), (a, b), (c, b)\}$. Decida si $\mathcal{M}' \models \phi$.

Solución:

a) Escribamos a ϕ como $\phi \equiv \forall x \exists y\, (\phi_1 \wedge \phi_2)$ donde $\phi_1 \equiv \neg\, (x \dot{=} y)$ y $\phi_2 \equiv R\,(x, y) \to R\,(y, x)$.

$[\![\phi]\!]_{\mathcal{M},s} = T$ sii para cada $e \in |\mathcal{M}|$ resulta $[\![\exists y\, (\phi_1 \wedge \phi_2)]\!]_{\mathcal{M},s[x\mapsto e]} = T$. En particular, para $e = b$ $[\![\exists y\, (\phi_1 \wedge \phi_2)]\!]_{\mathcal{M},s[x\mapsto b]} = T$ sii para algún $h \in |\mathcal{M}|$ resulta $[\![\phi_1 \wedge \phi_2]\!]_{\mathcal{M},s[x\mapsto b][y\mapsto h]} = T$.

Sea $s' = s\,[x \mapsto b]\,[y \mapsto h]$. Consideremos los tres casos posibles para h:

Caso $h = a$: $[\![\phi_1 \wedge \phi_2]\!]_{\mathcal{M},s'} = \text{mín}\left\{[\![\phi_1]\!]_{\mathcal{M},s'}, [\![\phi_2]\!]_{\mathcal{M},s'}\right\}$

Luego:

$$
\begin{aligned}
& [\![\phi_2]\!]_{\mathcal{M},s'} = F \\
\iff & \langle \text{definición de } \phi_2 \rangle \\
& [\![R\,(x, y) \to R\,(y, x)]\!]_{\mathcal{M},s'} = F \\
\iff & \langle \text{definición de } [\![]\!] \text{ para } \to \rangle \\
& [\![R\,(x, y)]\!]_{\mathcal{M},s'} = T \text{ y } [\![R\,(y, x)]\!]_{\mathcal{M},s'} = F \\
\iff & \langle \text{definición de } [\![]\!] \text{ para predicados} \rangle \\
& \left([\![x]\!]_{\mathcal{M},s'}, [\![y]\!]_{\mathcal{M},s'}\right) \in R_{\mathcal{M}} \text{ y } \left([\![y]\!]_{\mathcal{M},s'}, [\![x]\!]_{\mathcal{M},s'}\right) \notin R_{\mathcal{M}} \\
\iff & \langle \text{definición de } [\![]\!] \text{ para términos} \rangle \\
& (s'\,(x)\,, s'\,(y)) \in R_{\mathcal{M}} \text{ y } (s'\,(y)\,, s'\,(x)) \notin R_{\mathcal{M}} \\
\iff & \langle \text{definición de } s' \rangle \\
& (b, a) \in R_{\mathcal{M}} \text{ y } (a, b) \notin R_{\mathcal{M}} \\
& \text{lo cual vale.}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $[\![\phi_1 \wedge \phi_2]\!]_{\mathcal{M},s'} = \text{mín}\left\{[\![\phi_1]\!]_{\mathcal{M},s'}, F\right\} = F$

Caso $h = c$: análogo.

Caso $h = b$: $[\![\phi_1 \land \phi_2]\!]_{\mathcal{M},s'} = \text{mín}\left\{[\![\phi_1]\!]_{\mathcal{M},s'}, [\![\phi_2]\!]_{\mathcal{M},s'}\right\}$

Luego:

$$
\begin{aligned}
& [\![\phi_1]\!]_{\mathcal{M},s'} = F \\
\Longleftrightarrow\ & \langle \text{definición de } \phi_1 \rangle \\
& [\![\neg (x \doteq y)]\!]_{\mathcal{M},s'} = F \\
\Longleftrightarrow\ & \langle \text{definición de } [\![]\!] \text{ para } \neg \rangle \\
& [\![x \doteq y]\!]_{\mathcal{M},s'} = T \\
\Longleftrightarrow\ & \langle \text{definición de } [\![]\!] \text{ para } \doteq \rangle \\
& [\![x]\!]_{\mathcal{M},s'} = [\![y]\!]_{\mathcal{M},s'} \\
\Longleftrightarrow\ & \langle \text{definición de } [\![]\!] \text{ para términos} \rangle \\
& s'(x) = s'(y) \\
\Longleftrightarrow\ & \langle \text{definición de } s' \rangle \\
& b = b \\
& \text{lo cual vale.}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto: $[\![\phi_1 \land \phi_2]\!]_{\mathcal{M},s'} = min\left\{F, [\![\phi_2]\!]_{\mathcal{M},s'}\right\} = F$

En conclusión, hemos visto que para ningún $h \in |\mathcal{M}|$ resulta $[\![\phi_1 \land \phi_2]\!]_{\mathcal{M},s'} = T$, por lo tanto $[\![\exists y\,(\phi_1 \land \phi_2)]\!]_{\mathcal{M},s[x\mapsto b]} = F$. Como dijimos que $[\![\phi]\!]_{\mathcal{M},s} = T$ sii para cada $e \in |\mathcal{M}|$ resulta $[\![\exists y\,(\phi_1 \land \phi_2)]\!]_{\mathcal{M},s[x\mapsto e]} = T$ y vimos que para $e = b$ no vale, podemos concluir que $[\![\phi]\!]_{\mathcal{M},s} = F$.

---

2. Considere la fórmula

$$\phi \equiv \forall x(P(g(x), y) \lor Q(x))$$

donde P es un predicado de aridad 2, Q un predicado de aridad 1 y g una función de aridad 1.

a) Defina un modelo $\mathcal{M}$ y dos entornos s y s' tales que $[\![\phi]\!]_{\mathcal{M},s} = T$ y $[\![\phi]\!]_{\mathcal{M},s'} = F$. Demuéstrelo.

b) Encuentre, si es posible, un modelo $\mathcal{M}'$ tal que $[\![\phi]\!]_{\mathcal{M}',s} = T$ para cualquier s. Demuéstrelo.

Solución:

a) Sea $\phi \equiv \forall x\,(\phi_1 \lor \phi_2)$ donde $\phi_1 \equiv P\,(g\,(x)\,, y)$ y $\phi_2 \equiv Q\,(x)$. Definimos:

- el modelo $\mathcal{M}$ donde:
  - $|\mathcal{M}| = \{1, 2\}$
  - $g_{\mathcal{M}}(\alpha) = 1$
  - $Q_{\mathcal{M}} = \{2\}$
  - $P_{\mathcal{M}} = \{(1, 1)\}$
- el entorno s tal que $s\,(x) = s\,(y) = 1$
- el entorno s' tal que $s'\,(x) = s'\,(y) = 2$

Veamos que $[\![\phi]\!]_{\mathcal{M},s} = T$:

$$
\begin{aligned}
& [\![\phi]\!]_{\mathcal{M},s} = T \\
\iff & \langle \text{definición de } \phi \rangle \\
& [\![\forall x\,(\phi_1 \vee \phi_2)]\!]_{\mathcal{M},s} = T \\
\iff & \langle \text{definición de } [\![]\!] \text{ para } \forall \rangle \\
& \text{mín}\left\{ [\![\phi_1 \vee \phi_2]\!]_{\mathcal{M},s[x\mapsto e]} : e \in |\mathcal{M}| \right\} = T \\
\iff & \langle \text{definición por extensión} \rangle \\
& \text{mín}\left\{ [\![\phi_1 \vee \phi_2]\!]_{\mathcal{M},s[x\mapsto 1]:=s_1}, [\![\phi_1 \vee \phi_2]\!]_{\mathcal{M},s[x\mapsto 2]:=s_2} \right\} = T \\
\iff & \langle \text{definición de } [\![]\!] \text{ para } \vee \rangle \\
& \underbrace{\text{mín}\left\{ \text{máx}\left\{ [\![\phi_1]\!]_{\mathcal{M},s_1}, [\![\phi_2]\!]_{\mathcal{M},s_1} \right\}, \text{máx}\left\{ [\![\phi_1]\!]_{\mathcal{M},s_2}, [\![\phi_2]\!]_{\mathcal{M},s_2} \right\} \right\} = T}_{(*)}
\end{aligned}
$$

Pero

$$
\begin{aligned}
& [\![\phi_1]\!]_{\mathcal{M},s_1} = T \\
\iff & \langle \text{definición de } \phi_1 \rangle \\
& [\![P\,(g\,(x)\,,y)]\!]_{\mathcal{M},s_1} = T \\
\iff & \langle \text{definición de } [\![]\!] \text{ para predicados} \rangle \\
& \left([\![g\,(x)]\!]_{\mathcal{M},s_1}, [\![y]\!]_{\mathcal{M},s_1} \right) \in P_{\mathcal{M}} \\
\iff & \langle \text{definición de } [\![]\!] \text{ para términos} \rangle \\
& \left(g_{\mathcal{M}}\left([\![x]\!]_{\mathcal{M},s_1} \right), s_1\,(y) \right) \in P_{\mathcal{M}} \\
\iff & \langle \text{definición de } [\![]\!] \text{ para términos} \rangle \\
& \left(g_{\mathcal{M}}\,(s_1\,(x))\,, s_1\,(y) \right) \in P_{\mathcal{M}} \\
\iff & \langle \text{definición de } s_1 \rangle \\
& \left(g_{\mathcal{M}}\,(1)\,, 1 \right) \in P_{\mathcal{M}} \\
\iff & \langle \text{definición de } g_{\mathcal{M}} \rangle \\
& (1,1) \in P_{\mathcal{M}} \\
& \text{lo cual vale}
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
& [\![\phi_2]\!]_{\mathcal{M},s_2} = T \\
\iff & \langle \text{definición de } \phi_2 \rangle \\
& [\![Q\,(x)]\!]_{\mathcal{M},s_2} = T \\
\iff & \langle \text{definición de } [\![]\!] \text{ para predicados} \rangle \\
& [\![x]\!]_{\mathcal{M},s_2} \in Q_{\mathcal{M}} \\
\iff & \langle \text{definición de } [\![]\!] \text{ para términos} \rangle \\
& s_2\,(x) \in Q_{\mathcal{M}} \\
\iff & \langle \text{definición de } s_2 \rangle \\
& 2 \in Q_{\mathcal{M}} \\
& \text{lo cual vale,}
\end{aligned}
$$

entonces volviendo a $(*)$

$$\begin{aligned}
& \text{mín}\left\{\text{máx}\left\{[\![\phi_1]\!]_{\mathcal{M},s_1},[\![\phi_2]\!]_{\mathcal{M},s_1}\right\},\text{máx}\left\{[\![\phi_1]\!]_{\mathcal{M},s_2},[\![\phi_2]\!]_{\mathcal{M},s_2}\right\}\right\}=T\\
\iff & \langle\text{lo visto anteriormente}\rangle\\
& \text{mín}\left\{\text{máx}\left\{T,[\![\phi_2]\!]_{\mathcal{M},s_1}\right\},\text{máx}\left\{[\![\phi_1]\!]_{\mathcal{M},s_2},T\right\}\right\}=T\\
\iff & \langle\text{definición de máx}\rangle\\
& \text{mín}\left\{T,T\right\}=T\\
\iff & \langle\text{definición de mín}\rangle\\
& T=T\\
& \text{lo cual vale}
\end{aligned}$$

es decir $[\![\phi]\!]_{\mathcal{M},s}=T$.

b) Consideramos un modelo $\mathcal{M}'$ idéntico a $\mathcal{M}$ salvo por $Q_{\mathcal{M}'}=\{1,2\}$.

Veamos que $[\![\phi]\!]_{\mathcal{M},s'}=F$:

$$[\![\phi]\!]_{\mathcal{M},s}=\text{mín}\left\{\text{máx}\left\{[\![\phi_1]\!]_{\mathcal{M},s'_1},[\![\phi_2]\!]_{\mathcal{M},s'_1}\right\},\text{máx}\left\{[\![\phi_1]\!]_{\mathcal{M},s'_2},[\![\phi_2]\!]_{\mathcal{M},s'_2}\right\}\right\}\qquad(**)$$

Pero

$$\begin{aligned}
& [\![\phi_2]\!]_{\mathcal{M},s'_1}=F\\
\iff & \langle\text{definición de }\phi_2\rangle\\
& [\![Q(x)]\!]_{\mathcal{M},s'_1}=F\\
\iff & \langle\text{definición de }[\![]\!]\text{ para predicados}\rangle\\
& [\![x]\!]_{\mathcal{M},s'_1}\notin Q_{\mathcal{M}}\\
\iff & \langle\text{definición de }[\![]\!]\text{ para términos}\rangle\\
& s'_1(x)\notin Q_{\mathcal{M}}\\
\iff & \langle\text{definición de }s'_1\rangle\\
& 1\notin Q_{\mathcal{M}}\\
& \text{lo cual vale}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
& [\![\phi_1]\!]_{\mathcal{M},s'_1}=F\\
\iff & \langle\text{análogamente al ítem anterior}\rangle\\
& (g_{\mathcal{M}}(s'_1(x)),s'_1(y))\notin P_{\mathcal{M}}\\
\iff & \langle\text{definición de }s'_1\rangle\\
& (g_{\mathcal{M}}(1),2)\notin P_{\mathcal{M}}\\
\iff & \langle\text{definición de }g_{\mathcal{M}}\rangle\\
& (1,2)\notin P_{\mathcal{M}}\\
& \text{lo cual vale,}
\end{aligned}$$

entonces volviendo a $(**)$

$$[\![\phi]\!]_{\mathcal{M},s}=\text{mín}\left\{\text{máx}\left\{F,F\right\},\text{máx}\left\{[\![\phi_1]\!]_{\mathcal{M},s'_2},[\![\phi_2]\!]_{\mathcal{M},s'_2}\right\}\right\}=F$$

es decir $[\![\phi]\!]_{\mathcal{M},s'} = F$.

Veamos que $[\![\phi]\!]_{\mathcal{M}',t} = T$ independientemente del entorno:

$$[\![\phi]\!]_{\mathcal{M}',t} = \text{mín}\left\{\text{máx}\left\{[\![\phi_1]\!]_{\mathcal{M}',t_1}, [\![\phi_2]\!]_{\mathcal{M}',t_1}\right\}, \text{máx}\left\{[\![\phi_1]\!]_{\mathcal{M}',t_2}, [\![\phi_2]\!]_{\mathcal{M}',t_2}\right\}\right\} \qquad (***)$$

Pero

$$\begin{aligned} & [\![\phi_2]\!]_{\mathcal{M}',t_1} = T \\ \iff & \langle \text{definición de } \phi_2 \rangle \\ & [\![Q\,(x)]\!]_{\mathcal{M}',t_1} = T \\ \iff & \langle \text{definición de } [\![]\!] \text{ para predicados} \rangle \\ & [\![x]\!]_{\mathcal{M}',t_1} \in Q_{\mathcal{M}'} \\ \iff & \langle \text{definición de } [\![]\!] \text{ para términos} \rangle \\ & t_1\,(x) \in Q_{\mathcal{M}'} \\ \iff & \langle \text{definición de } t_1 \rangle \\ & 1 \in Q_{\mathcal{M}} \\ & \text{lo cual vale} \end{aligned}$$

y análogamente $\quad [\![\phi_2]\!]_{\mathcal{M}',t_2} = T$,

entonces volviendo a $(***)$:

$$[\![\phi]\!]_{\mathcal{M}',t} = \text{mín}\left\{\text{máx}\left\{[\![\phi_1]\!]_{\mathcal{M}',t_1}, T\right\}, \text{máx}\left\{[\![\phi_1]\!]_{\mathcal{M}',t_2}, T\right\}\right\} = T$$

es decir $[\![\phi]\!]_{\mathcal{M}',t} = T$, por lo tanto $\mathcal{M}'$ es un modelo para ϕ $(\mathcal{M}' \vDash \phi)$.

---

5. Normalmente, los problemas de formalización en lógica de predicados se nos presentan de una forma diferente a la planteada en el ejercicio anterior. En general uno tiene un problema concreto, que puede representar mediante un modelo $\mathcal{M}$ sobre una determinada signatura $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$.
A partir de esta signatura, expresa determinadas propiedades que su modelo cumple como fórmulas sobre $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$. Llamemos Γ a este conjunto de propiedades. Luego, usando estos hechos, intenta deducir nuevas propiedades que necesariamente tienen que cumplirse a partir de Γ. Es decir, busca fórmulas ϕ tales que $\Gamma \models \phi$.
Consideremos el caso de la aritmética de los números naturales tal como la describió Peano. En este caso, el modelo $\mathcal{M}$ tiene como universo a $\mathbb{N}$ y como funciones a $\{s, +, \times, 0\}$. No utilizaremos relaciones aparte de la igualdad.

a) Defina una signatura $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ tal que el modelo anterior sea un modelo para esta signatura.

b) Exprese en $\text{FORM}_{(\mathcal{F},\mathcal{P})}$ los axiomas de Peano (si no los conoce, pregunte). A este conjunto de axiomas lo llamamos $\Gamma_{\mathbb{N}}$.

c) Exprese en $\text{FORM}_{(\mathcal{F},\mathcal{P})}$ la siguiente propiedad ϕ: *"cero es distinto de dos"*.

d) Demuestre que $\Gamma_{\mathbb{N}} \models \phi$. Observe que su demostración es independiente de los números naturales. Es decir, cualquier otro conjunto que cumpla con los axiomas de Peano cumplirá esta propiedad, no sólo $\mathbb{N}$.

e) Exprese las siguientes propiedades: *“la suma es conmutativa”*, *“el producto distribuye a derecha respecto a la suma”*.

Una forma de definir predicados unarios sobre los números naturales sin alterar la signatura, es dar una fórmula ϕ que tenga una única variable libre (digamos x). A esta fórmula convenimos en llamarla $P(x)$. Por ejemplo,

$$P(x) := \exists y(x = y \bar{+} y)$$

Observemos que esta fórmula es cierta para un entorno s si y sólo si $s(x)$ es par.
Esta idea puede generalizarse a relaciones R de cualquier aridad n, expresando fórmulas con n variables libres que sean verdaderas en un determinado modelo sólo cuando la propiedad se cumple. Usando esta idea, defina fórmulas para las siguientes relaciones sobre $\mathcal{M}$:

- $x \leq y$
- $x < y$
- $Primo(x)$, que representa que x es un número primo

Solución:

a) $|\mathcal{M}| = \mathbb{N}$
$\mathcal{F} = \{s, +, \times, 0\}$ donde $\text{ar}(s) = 1$, $\text{ar}(+) = 2$, $\text{ar}(\times) = 2$, $\text{ar}(0) = 0$
$\mathcal{P} = \{=\}$ donde $\text{ar}(=) = 2$

b) Axiomas de Peano: $\Gamma_{\mathbb{N}}$ es el siguiente conjunto de fórmulas:

1- $\phi_1 \equiv \forall x \neg(s(x) = 0)$

2- $\phi_2 \equiv \forall x \forall y(s(x) = s(y) \to x = y)$

3- $\phi_{3a} \equiv \forall x(x + 0 = x)$
$\phi_{3b} \equiv \forall x(0 + x = x)$

4- $\phi_4 \equiv \forall x \forall y(x + s(y) = s(x + y))$

5- $\phi_{5a} \equiv \forall x(x \times 0 = 0)$
$\phi_{5b} \equiv \forall x(0 \times x = 0)$

6- $\phi_{6a} \equiv \forall x(x \times s(0) = x)$
$\phi_{6b} \equiv \forall x(s(0) \times x = x)$

7- El producto entre un natural y el sucesor de otro es igual a la suma del último y el producto de dichos naturales
$\phi_7 \equiv \forall x \forall y(x \cdot s(y) = y + (x \cdot y))$

c) Puede definirse de la siguiente manera:

$$\phi \equiv \neg(0 = s(s(0)))$$

d) Veamos que $\Gamma_{\mathbb{N}} \models \phi$.

Debemos probar que para todo modelo $\mathcal{M}$ y entorno t tales que $[\![\Gamma_{\mathbb{N}}]\!]_{\mathcal{M},t} = T$ vale también $[\![\phi]\!]_{\mathcal{M},t} = T$.

Sean entonces un modelo $\mathcal{M}$ y un entorno t tales que $[\![\Gamma_{\mathbb{N}}]\!]_{\mathcal{M},t} = T$.
En particular $[\![\phi_1]\!]_{\mathcal{M},t} = T$, luego:

$$
\begin{aligned}
& [\![\phi_1]\!]_{\mathcal{M},t} = T \\
\iff & \langle \text{definición de } \phi_1 \rangle \\
& [\![\forall x\, (\neg\, (s\,(x) = 0))]\!]_{\mathcal{M},t} = T \\
\iff & \langle \text{definición de } [\![]\!] \text{ para } \forall \rangle \\
& \text{para cada } e \in |\mathcal{M}|\,, [\![\neg\, (s\,(x) = 0)]\!]_{\mathcal{M},t[x\mapsto e]} = T \\
\iff & \langle \text{definición de } [\![]\!] \text{ para } \neg \rangle \\
& \text{para cada } e \in |\mathcal{M}|\,, [\![(s\,(x) = 0)]\!]_{\mathcal{M},t[x\mapsto e]} = F \\
\iff & \langle \text{definición de } [\![]\!] \text{ para } = \rangle \\
& \text{para cada } e \in |\mathcal{M}|\,, [\![(s\,(x))]\!]_{\mathcal{M},t[x\mapsto e]} \neq [\![0]\!]_{\mathcal{M},t[x\mapsto e]} \\
\iff & \langle \text{definición de } [\![]\!] \text{ para términos} \rangle \\
& \underbrace{\text{para cada } e \in |\mathcal{M}|\,, s_{\mathcal{M}}\,(e) \neq 0_{\mathcal{M}}}_{(*)}
\end{aligned}
$$

entonces

$$
\begin{aligned}
& [\![\phi]\!]_{\mathcal{M},t} = T \\
\iff & \langle \text{definición de } \phi \rangle \\
& [\![\neg\, (0 = s\,(s\,(0)))]\!]_{\mathcal{M},t} = T \\
\iff & \langle \text{definición de } [\![]\!] \text{ para } \neg \rangle \\
& [\![(0 = s\,(s\,(0)))]\!]_{\mathcal{M},t} = F \\
\iff & \langle \text{definición de } [\![]\!] \text{ para } = \rangle \\
& [\![0]\!]_{\mathcal{M},t} \neq [\![s\,(s\,(0))]\!]_{\mathcal{M},t} \\
\iff & \langle \text{definición de } [\![]\!] \text{ para términos} \rangle \\
& 0_{\mathcal{M}} \neq s_{\mathcal{M}}\left([\![s\,(0)]\!]_{\mathcal{M},t}\right) \\
& \text{lo cual vale tomando } e = [\![s\,(0)]\!]_{\mathcal{M},t} \text{ en } (*)
\end{aligned}
$$

Conclusión Hemos visto que dados un modelo $\mathcal{M}$ y un entorno t tales que $[\![\Gamma_{\mathbb{N}}]\!]_{\mathcal{M},t} = T$ también resulta $[\![\phi]\!]_{\mathcal{M},t} = T$. Por lo tanto, $\Gamma_{\mathbb{N}} \vDash \phi$.

e) $\forall x \forall y(x + y = y + x)$
$\forall x \forall y \forall z(x \times (y + z) = x \times y + x \times z)$

- $\leq (x, y) = \exists z(y = x + z)$
- $< (x, y) = (\neg(z = 0) \wedge (y = x + z))$
- $Primo(x) = \forall y \forall z(\neg(y = s(0)) \wedge \neg(z = s(0)) \wedge \neg(y \times z = x) \wedge \neg(z \times y = x))$

6. Considere una signatura sin símbolos de función y con un único símbolo de predicado R de aridad 2. En clase vimos que un grafo dirigido $G = (V, E)$ era un modelo de esta signatura, donde V es el universo del modelo y $R^{\mathcal{M}} = E$. Decíamos que un modelo de esta signatura es un grafo simple si $R^{\mathcal{M}}$ es una relación simétrica y antireflexiva.
En este ejercicio estamos interesados en representar grafos simples **bipartitos**. Es decir, grafos en donde se puede particionar el conjunto de vértices en dos conjuntos no vacíos U y W tales que cada arista del grafo une un vértice de U con uno de W o viceversa. Para esto, agregamos a nuestra signatura dos símbolos de predicados U y W de aridad 1, con la intención de representar los dos conjuntos de vértices. Por lo tanto, definimos la siguiente signatura:

$$\mathcal{F} = \emptyset, \mathcal{P} = \{R, U, W\}$$

con $ar(R) = 2$, $ar(U) = ar(W) = 1$.
Observe que no cualquier modelo de esta signatura es un grafo simple bipartito.

a) Dé un modelo $\mathcal{M}$ de $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ que no sea un grafo simple.

b) Dé un modelo $\mathcal{M}'$ de $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ que sea un grafo simple pero no bipartito.

c) Dé un modelo $\mathcal{M}''$ de $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ que sea un grafo simple bipartito.

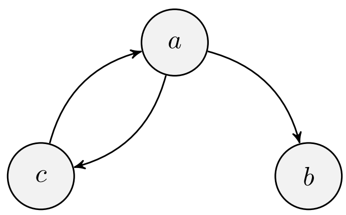
Para que un modelo $\mathcal{M} = \langle V, R^{\mathcal{M}}, U^{\mathcal{M}}, W^{\mathcal{M}} \rangle$ de $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ sea un grafo simple bipartito, debe cumplir algunas propiedades, las cuales expresaremos como fórmulas de la lógica de predicados. Por ejemplo, sabemos que $R^{\mathcal{M}}$ debe ser antireflexiva, es decir, nuestra primera restricción es:

$$\forall x \neg R(x, x)$$

d) Exprese en lenguaje natural y como fórmulas de FORM las otras propiedades que debe cumplir un modelo $\mathcal{M}$ para ser un grafo bipartito.

Solución:

a) Un modelo $\mathcal{M}$ que no es grafo simple es el siguiente:

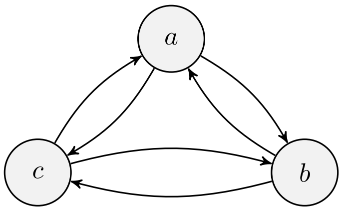


- $|\mathcal{M}| = \{a, b, c\}$
- $R^{\mathcal{M}} = \{(a, b), (a, c), (c, a)\}$
- $U^{\mathcal{M}} = \{a\}$
- $W^{\mathcal{M}} = \{b, c\}$

$R^{\mathcal{M}}$ no es simétrica, ya que $(b, a) \notin R^{\mathcal{M}}$

$$\therefore \mathcal{M} \text{ no es grafo simple}$$

b) Un modelo $\mathcal{M}'$ que es grafo simple pero no bipartito es el siguiente:

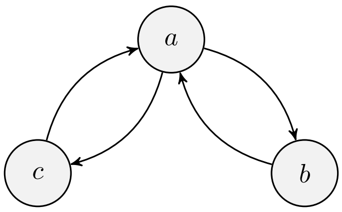


- $|\mathcal{M}| = \{a, b, c\}$
- $R^{\mathcal{M}} = \{(a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (c, a), (c, b)\}$

No podemos particionar el conjunto $|\mathcal{M}|$ en dos subconjuntos $U^{\mathcal{M}}$ y $W^{\mathcal{M}}$ tales que cada arista del grafo una un vértice de U con uno de W o viceversa. Vamos a demostrarlo. Asumimos que sí podemos dividir el conjunto de dicha manera. Si quisiéramos hacerlo y agregáramos el vértice a a un conjunto, al estar relacionado dicho vértice con los vértices b y c a través de las aristas (a, b) y (a, c) respectivamente, los vértices b y c deberían estar ambos en el otro conjunto. Pero como existe la arista (c, b), estos dos vértices no podrían pertenecer a un mismo conjunto. Absurdo!

$$\therefore \mathcal{M}' \text{ no es grafo bipartito}$$

c) Un modelo $\mathcal{M}''$ que es grafo simple bipartito:



- $|\mathcal{M}| = \{a, b, c\}$
- $R^{\mathcal{M}} = \{(a, b), (a, c), (b, a), (c, a)\}$
- $U^{\mathcal{M}} = \{a\}$
- $W^{\mathcal{M}} = \{b, c\}$

d) 1. $R^{\mathcal{M}}$ debe ser simétrica (para ser grafo simple)

$$\forall x \forall y R(x, y) \to R(y, x)$$

2. Se puede particionar el conjunto de vértices en dos conjuntos no vacíos $U^{\mathcal{M}}$ y $W^{\mathcal{M}}$ tales que cada arista del grafo une un vértice de $U^{\mathcal{M}}$ con uno de $W^{\mathcal{M}}$ (para ser grafo bipartito)

$$\forall x \forall y R(x, y) \to (U(x) \land W(y)) \lor (W(x) \land U(y))$$

7. Demuestre:

a) $\exists x \forall y \phi \models \forall y \exists x \phi$

Solución:

a) Sean $\mathcal{M}, s$ tales que $[\![\exists x \forall y \phi]\!]_{\mathcal{M},s} = T$. Resultará entonces:

$$[\![\exists x \forall y \phi]\!]_{\mathcal{M},s} = T$$

$$\iff$$

$$\text{para algún } c \in |\mathcal{M}|\,, [\![\forall y \phi]\!]_{\mathcal{M},s[x\mapsto c]} = T$$

$$\iff$$

$$\text{para algún } c \in |\mathcal{M}| \text{ y para cualquier } d \in |\mathcal{M}|\,, [\![\phi]\!]_{\mathcal{M},s[x\mapsto c][y\mapsto d]} = T$$

Ahora:

$$[\![\forall y \exists x \phi]\!]_{\mathcal{M},s} = T$$

$$\iff$$

$$\text{para cualquier } a \in |\mathcal{M}|\,, [\![\exists x \phi]\!]_{\mathcal{M},s[y\mapsto c]} = T$$

$$\iff$$

$$\text{para cualquier } a \in |\mathcal{M}| \text{ y para algún } b \in |\mathcal{M}|\,, [\![\phi]\!]_{\mathcal{M},s[y\mapsto a][x\mapsto b]} = T$$

Sea entonces $a \in |\mathcal{M}|$. Queremos verificar que para algún $b \in |\mathcal{M}|\,, [\![\phi]\!]_{\mathcal{M},s[y\mapsto a][x\mapsto b]} = T$. Tomando $d = a$ resultará por hipótesis que para $b := c$, $[\![\phi]\!]_{\mathcal{M},s[x\mapsto c][y\mapsto d]} = T$, es decir: $[\![\phi]\!]_{\mathcal{M},s[x\mapsto b][y\mapsto a]} = T \iff [\![\phi]\!]_{\mathcal{M},s[y\mapsto a][x\mapsto b]} = T$.