

Repaso de conceptos de teoría (ver bibliografía: Meyer, Ross)

Experimento aleatorio \mathcal{E}

- es posible repetirlo indefinidamente sin cambiar las condiciones
- no se puede predecir un resultado particular
- se puede describir el conjunto de todos los resultados posibles
- repitiéndolo un gran número de veces aparece un modelo definido de regularidad

Espacio muestral S : es el conjunto de todos los resultados posibles imaginables de \mathcal{E} . Puede ser finito, infinito numerable o infinito no numerable.

Definimos como suceso A , respecto de S asociado a \mathcal{E} , a un subconjunto de resultados posibles del experimento.

Recurriremos al análisis combinatorio o conteo para determinar la cantidad de elementos del espacio muestral o los sucesos definidos para un experimento \mathcal{E} .

		orden	
		importa	no importa
\mathcal{E}	sin reemplazo o sustitución	$A_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$	$C_{n,r} = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$
	con reemplazo o sustitución	$A'_{n,r} = n^r$	

Principio de adición: supongamos que un suceso puede ocurrir de n_1 formas y otro suceso puede ocurrir de n_2 formas, y ambos sucesos no pueden ocurrir simultáneamente. Entonces, cualquiera de estos dos sucesos puede ocurrir de n_1+n_2 formas diferentes.

Este principio puede extenderse a casos donde haya más de dos sucesos.

Ejemplo: En una biblioteca hay libros diferentes, 4 matemática y 7 de física. Si selecciono uno de los libros al azar, ¿cuántos resultados diferentes pueden obtenerse? Pueden obtenerse $4 + 7=11$ resultados diferentes.

Principio de multiplicación: supongamos que un experimento puede ser realizado en dos etapas, tal que la primera etapa tiene n_1 resultados posibles y la segunda tiene n_2 resultados posibles. Entonces, el experimento tendrá $n_1 \cdot n_2$ resultados posibles.

Ejemplo: en la biblioteca del ejemplo anterior, ¿de cuántas maneras posibles puedo seleccionar un libro de matemática y uno de física? Pueden seleccionarse de $7 \cdot 4 = 28$ formas posibles.

Algunos ejercicios resueltos

4. En cada uno de los siguientes casos, determinar un espacio muestral (S) asociado a la experiencia y el cardinal del mismo (#S):

b) Extraemos una carta de una baraja española y anotamos el palo.

Primero identificamos los elementos de S:

o: "la carta es oro"

e: "la carta es espada"

b: "la carta es basto"

c: "la carta es copa"

Luego

$S = \{o, e, b, c\}$ y $\#S = 4$

Podemos decir que S es finito.

c) Extraemos sendas cartas de dos barajas españolas distintas y anotamos el palo de cada una.

En este caso, S estará formado por pares ordenados donde el primer elemento corresponde al palo de la carta extraída de la primera baraja, y el segundo elemento corresponde a la segunda baraja.

Luego $S = \{(o,o), (o,e), (o,b), (o,c), (e,o), (e,e), (e,b), (e,c), (b,o), (b,e), (b,b), (b,c), (c,o), (c,e), (c,b), (c,c)\}$

Por inspección directa, $\#S = 16$

Podemos decir que S es finito.

Otra forma de calcular #S es usando el principio de multiplicación. Tenemos 2 grupos de 4 elementos diferentes cada uno, la cantidad de resultados diferentes que pueden obtenerse es $\#S = 4 \cdot 4 = 16$

h) Lanzamos tres monedas distintas y anotamos el número de caras.

$S = \{3, 2, 1, 0\}$ y $\#S = 4$

Podemos decir que S es finito.

i) Lanzamos una moneda sucesivas veces hasta que salga cara. y anotamos el número de lanzamientos que fueron necesarios.

$$S=\{1,2,3,4,\dots\}=\mathbb{N}$$

En este caso S es infinito y numerable.

k) Anotamos el número de llamadas a un teléfono en un intervalo de tiempo $[0; t]$.

Si consideramos que hay un número máximo M de llamadas en ese intervalo, resulta

$$S=\{0,1,2,3,\dots,M\} \text{ y } \#S=M+1.$$

Podemos decir que S es finito.

l) Anotamos el tiempo que media entre dos llamadas a un teléfono.

El tiempo t entre dos llamadas consecutivas es un número real, por lo tanto

$$S=\{t/t \geq 0\}=\mathbb{R}_0^+$$

También podríamos decir $S=\{t/t > 0\}=\mathbb{R}^+$

En este caso S es infinito y no numerable.

8. Sean A y B dos sucesos de un espacio muestral S . Determinar si A y B son o no mutuamente excluyentes cuando se cuenta con la siguiente información:

$$P(A \cup B)=2/3; P(A)=1/4; P(B)=1/2$$

Sabemos que dos sucesos A y B son m.e. $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$, es decir, $P(A \cap B)=0$

Calculamos

$$P(A \cap B)=P(A)+P(B)-P(A \cup B)=1/12 \neq 0 \Rightarrow A \text{ y } B \text{ no son m.e.}$$

9. Sean A y B dos sucesos de un espacio muestral S . Sabiendo que $P(A \cup B)=3/4$, $P(\bar{B})=2/3$ y $P(A \cap B)=1/4$; calcular $P(B)$; $P(A)$ y $P(\bar{A} \cap B)$.

$$P(B)=1-P(\bar{B})=...$$

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B) \Rightarrow P(A)=P(A \cup B)+P(A \cap B)-P(B)=...$$

Por propiedades de conjuntos (ver material adjunto en el aula virtual):

$$B=(A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$$

donde los sucesos $(A \cap B)$ y $(\bar{A} \cap B)$ son m.e. porque A y \bar{A} son complementarios.

Luego

$$P(B)=P(A \cap B)+P(\bar{A} \cap B) \Rightarrow P(\bar{A} \cap B)=P(B)-P(A \cap B)=...$$

Explicar por qué

Sugerencia: usar diagramas de Venn para ayudarse a visualizar las operaciones entre conjuntos.

12. Se debe formar una comisión de cuatro personas, elegidas al azar entre las siguientes:

Nombre	Profesión	Edad
Ana	Ingeniera	28
Miguel	Ingeniero	39
Beatriz	Lic. en Letras	42
Carlos	Arquitecto	30
Diana	Arquitecta	33
Pedro	Historiador	53
Juan	Abogado	25
Mónica	Abogada	55

Definimos nuestro experimento \mathcal{E}

\mathcal{E} : "selección de 4 personas de un total de 8 personas"

\mathcal{E} es un experimento sin reposición y no interesa el orden de extracción.

Luego, la cantidad de comisiones posibles que forman el espacio muestral S será

$$\#S = C_{8,4} = \binom{8}{4} = \frac{8!}{(8-4)!4!} = 70$$

a) ¿Cuál es la probabilidad de que los integrantes de la comisión sean todos mayores de 31 años?

Definimos nuestro suceso:

A : "los integrantes seleccionados son todos mayores de 31 años"

Inspeccionando la tabla, vemos que hay 5 integrantes que tienen más de 31 años.

Luego, la cantidad de comisiones posibles que forman A es

$$\#A = C_{5,4} = \binom{5}{4} = \frac{5!}{(5-4)!4!} = 5$$

$$\text{Finalmente } P(A) = \frac{\#A}{\#S} = \frac{5}{70} = \frac{1}{14}$$

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la comisión no incluya arquitectos?

Definimos suceso B : "ningún integrante seleccionado es arquitecto"

Inspeccionando la tabla vemos que 6 integrantes no son arquitectos.

Luego, la cantidad de comisiones posibles que forman B es

$$\#B = C_{6,4} = \binom{6}{4} = \frac{6!}{(6-4)!4!} = 15$$

$$\text{Finalmente } P(B) = \frac{\#B}{\#S} = \frac{15}{70} = \frac{3}{14}$$

Podríamos resolver el apartado b) buscando la probabilidad del suceso complementario \bar{B} . Luego $P(B) = 1 - P(\bar{B})$

Definimos lo sucesos:

C: "arquitecto Carlos está en la comisión y Diana no"

D: "arquitecta Diana está en la comisión y Carlos no"

E: "Carlos y Diana están en la comisión"

Claramente, $P(\bar{B}) = P(C) + P(D) + P(E)$

Explicar por qué

El suceso C estará formado por todas las comisiones posibles formadas por 3 personas que no son arquitectos, porque una persona de la comisión debe ser Carlos. Luego, $\#C = C_{6,3} = \dots$

Análogamente $\#D = C_{6,3} = \dots$ y $\#E = C_{6,2} = \dots$

$$\text{Finalmente } P(B) = 1 - \frac{\#C}{\#S} - \frac{\#D}{\#S} - \frac{\#E}{\#S}$$

13. Se forma una comisión constituida por un presidente, un vicepresidente, un secretario y un tesorero, quienes son elegidos al azar entre las personas de la tabla del ejercicio anterior.

Definimos nuestro experimento \mathcal{E}

\mathcal{E} : "selección de 4 personas para los puestos de presidente, vicepresidente, secretario y tesorero de un total de 8 personas"

\mathcal{E} es un experimento sin reposición y donde interesa el orden de extracción.

Luego, la cantidad de comisiones posibles que forman el espacio muestral S será

$$\#S = A_{8,4} = \frac{8!}{(8-4)!} = 1680$$

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el presidente sea mujer?

Definimos el suceso A: "la presidente es mujer"

Sabemos que hay 4 mujeres en la lista. Como una de ellas es presidente, los 3 puestos restantes serán ocupados por algunos de los otros 7 miembros.

Entonces

$$\#A = 4 \cdot A_{7,3} = 4 \cdot \frac{7!}{(7-3)!} = 840 \quad \text{y} \quad P(A) = \frac{\#A}{\#S}$$

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el tesorero sea mayor de 50 años?

Definimos el suceso B: "el tesorero tiene más de 50 años"

Sabemos que hay 2 personas mayores de 50 años. Como una de ellas es tesorera, los 3 puestos restantes serán ocupados por algunos de los otros 7 miembros.

Luego $\#B = \dots$ y $P(B) = \dots$

c) ¿Cuál es la probabilidad de que el secretario sea abogado y el vicepresidente licenciado en letras?

Definimos el suceso

C: "el secretario es abogado y el vicepresidente es licenciado en letras"

Inspeccionando la tabla, vemos que Beatriz siempre debe ser vicepresidente y que hay 2 abogados posibles para ocupar el puesto de secretario. Por lo tanto, los dos puestos restantes serán ocupados por algunos de los otros 6 miembros.

Luego,

$$\#C = 2 \cdot A_{6,2} = 2 \cdot \frac{6!}{(6-2)!} = 60 \quad \text{y} \quad P(C) = \frac{\#C}{\#S}$$

18. Una caja contiene bolas blancas y negras de tal manera que, al extraer dos simultáneamente, la probabilidad de que sean ambas blancas es $1/2$. Determine el número mínimo de bolas que hay en la caja.

Resolveremos este problema haciendo pruebas al azar. Identificaremos cada bola como:

b_i : bola blanca i

n_j : bola negra j

Definimos nuestro experimento \mathcal{E} : "se extraen dos bolas y se anota el color de cada una" y definimos el suceso A: "las dos bolas extraídas son blancas"

a) Supongamos tener 3 bolas: b_1 b_2 n_1

Entonces

$$S = \{(b_1, b_2), (b_1, n_1), (b_2, n_1)\} \quad \#S = 3 \quad \#A = 1$$

$$P(A) = \frac{\#A}{\#S} = \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$$

b) Supongamos tener 4 bolas: b_1 b_2 n_1 n_2

Entonces

$$S = \{(b_1, b_2), (b_1, n_1), (b_1, n_2), (b_2, n_1), (b_2, n_2), (n_1, n_2)\} \quad \#S=6 \quad \#A=1$$

$$P(A) = \frac{\#A}{\#S} = \frac{1}{6} < \frac{1}{2}$$

c) Supongamos tener 4 bolas: b_1 b_2 b_3 n_1

Entonces

$$S = \{(b_1, b_2), (b_1, b_3), (b_1, n_1), (b_2, b_3), (b_2, n_1), (b_3, n_1)\} \quad \#S=6 \quad \#A=3$$

$$P(A) = \frac{\#A}{\#S} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Luego, la mínima cantidad de bolas que debe haber en la caja es 4.

Es posible encontrar otra distribución de bolas blancas y negras que cumplan con la condición pedida para $P(A)$, pero la cantidad total de bolas no será la mínima.

22. En un mazo de cartas se han retirado varias de ellas. Entre las que quedan, se sabe que el 15% son reyes, el 30% son bastos, el 60% ni reyes ni bastos.

Definimos nuestro experimento

\mathcal{E} : "se extrae una carta y se anota el valor y el palo"

y los sucesos que nos interesa analizar

R : "la carta es un rey"

B : "la carta es de basto"

Sabemos que:

$P(R)=0,15$ probabilidad de extraer un rey

$P(B)=0,3$ probabilidad de extraer un basto

$P(\bar{R} \cap \bar{B})=0,6$ probabilidad de extraer una carta que no es rey ni basto

Explicar dónde están esos datos

a) ¿Está entre ellas el rey de bastos? ¿Qué probabilidad hay de extraerla?

El problema nos pregunta si es posible extraer un rey de basto, o sea si $P(R \cap B) \neq 0$.

$$P(\bar{R} \cap \bar{B}) = P(\overline{R \cup B}) = 1 - P(R \cup B) = 0,4$$

Justificar

$$P(R \cap B) = P(R) + P(B) - P(R \cup B) = 0,05 = \frac{1}{20} > 0$$

Por lo tanto, podemos decir que hay un rey de basto y la probabilidad de extraerlo es de 0,05.

b) ¿Cuántas cartas quedan en el mazo?

Suponiendo que no hay cartas repetidas, el suceso $R \cap B$ corresponde a una sola carta. Suponiendo que todas las cartas tienen igual probabilidad de ser extraídas, se concluye que en el mazo quedan 20 cartas.

23. En un centro hay 1000 alumnos repartidos del siguiente modo:

	Chicos	Chicas
Usan anteojos	187	113
No usan anteojos	413	287

Se elige al azar uno de ellos.

Definimos nuestro experimento y los sucesos de interés

\mathcal{E} : "se elige un alumno y se anota si es varón o mujer, y si usa o no lentes"

\mathcal{E} es sin reposición.

V: "el alumno es varón"

M: "el alumno es mujer"

A: "el alumno usa lentes"

Lógicamente $V = \bar{M}$

Reescribimos la tabla en función de los sucesos definidos, agregando algunos datos más que podemos deducir.

	V	M	Totales
A	187	113	300
\bar{A}	413	287	700
Totales	600	400	1000

Los totales calculados nos permiten afirmar, por ejemplo, que en el establecimiento hay 1000 alumnos, de los cuales 400 son mujeres y 300 usan lentes.

a) Se sabe que el alumno elegido resultó una chica, ¿cuál es la probabilidad de que use anteojos?

Por definición de probabilidad condicional:

$$P(A/M) = \frac{P(A \cap M)}{P(M)} = \frac{\frac{113}{1000}}{\frac{400}{1000}} = \frac{113}{400}$$

Otra forma es evaluar la proporción de alumnas con lentes en el universo de las mujeres. Es decir

$$P(A/M) = \frac{113}{400}$$

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el alumno elegido resulte una chica, dado que usa anteojos?

Por definición de probabilidad condicional:

$$P(M/A) = \frac{P(A \cap M)}{P(A)} = \frac{\frac{113}{1000}}{\frac{300}{1000}} = \frac{113}{300}$$

De manera similar al punto anterior, podemos calcular esta probabilidad como ...

c) ¿Cuál es la probabilidad de que el alumno elegido resulte un chico, dado que usa anteojos?

Podemos calcular esta probabilidad por definición, como en los puntos anteriores.

Otra forma es, considerando que $V = \bar{M}$,

$$P(V/A) = P(\bar{M}/A) = 1 - P(M/A)$$

Es posible usar esta forma porque estamos calculando la probabilidad sobre el mismo espacio muestral que es A (alumnos que usan lentes).

d) Se sabe que el alumno elegido no usa anteojos, ¿cuál es la probabilidad de que resulte un chico?

Explicar por qué

$$P(V/\bar{A}) = \frac{P(\bar{A} \cap V)}{P(\bar{A})} = \frac{413}{700} \neq 1 - P(V/A)$$

28. Tres empresas A, B y C licitan un contrato para la construcción de un puente. Las probabilidades de que A, B y C obtengan el contrato son respectivamente 0.5, 0.3 y 0.2. Si el contrato es obtenido por A, ésta contratará a su vez a la empresa E con probabilidad 0.8. Si el contrato es obtenido por B, ésta contratará a E con probabilidad 0.4. Si el contrato es obtenido por C, E será contratada con probabilidad 0.1.

Definimos nuestro experimento \mathcal{E} y los sucesos de interés

\mathcal{E} : "empresa gana un contrato de trabajo"

A: "empresa A gana el contrato"

B: "empresa B gana el contrato"

C: "empresa C gana el contrato"

E: "empresa E es subcontratada"

Como al contrato solo lo puede ganar la empresa A, la B o la C exclusivamente, los sucesos A, B y C forman una partición del espacio muestral S.

Por lo tanto:

- A, B y C son mutuamente excluyentes entre si y $P(A)+P(B)+P(C)=1$.
- E puede descomponerse como la unión de sucesos mutuamente excluyentes

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la empresa E obtenga un subcontrato en la construcción del puente?

$$\begin{aligned} P(E) &= P(E \cap A) + P(E \cap B) + P(E \cap C) = \\ &= P(E/A) \cdot P(A) + P(E/B) \cdot P(B) + P(E/C) \cdot P(C) \end{aligned}$$

b) ¿Cuál es la probabilidad que la empresa A haya ganado el contrato dado que la empresa E fue subcontratada?

$$\text{Sabemos que} \quad P(E \cap A) = P(E/A) \cdot P(A) = P(A/E) \cdot P(E)$$

Luego

$$P(A/E) = \frac{P(E/A) \cdot P(A)}{P(E)} = \frac{P(E/A) \cdot P(A)}{P(E/A) \cdot P(A) + P(E/B) \cdot P(B) + P(E/C) \cdot P(C)}$$

Otra forma: Como habíamos dicho, A, B y C forman una partición del espacio muestral.

Siendo E un suceso asociado al mismo espacio muestral, puedo usar el teorema de Bayes para calcular

$$P(A/E) = \frac{P(E/A) \cdot P(A)}{P(E/A) \cdot P(A) + P(E/B) \cdot P(B) + P(E/C) \cdot P(C)}$$

34. Pruebe que, si A y B son sucesos independientes de un mismo espacio muestral S, entonces

a) A y \bar{B} son independientes,

Por propiedades de conjuntos: $A \cap \bar{B} = A - B = A - (A \cap B)$

Luego

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A) \cdot P(B) = P(A) \cdot (1 - P(B)) = P(A) \cdot P(\bar{B})$$

Justificar

Como $P(A \cap \bar{B}) = P(A) \cdot P(\bar{B})$, podemos afirmar que A y \bar{B} son independientes

b) \bar{A} y B son independientes,

Por propiedades de conjuntos: $\bar{A} \cap B = B - A = B - (A \cap B)$

Terminar demostración.

c) \bar{A} y \bar{B} son independientes.

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = \dots \quad \text{Terminar demostración}$$

Justificar

37. Un número binario está formado por n dígitos. La probabilidad de que aparezca un dígito incorrecto es p. Si los errores en dígitos diferentes son independientes uno de otro, ¿cuál es la probabilidad de formar un número incorrecto?

Definimos nuestro experimento \mathcal{E} y los sucesos de interés

\mathcal{E} : "se seleccionan n dígitos de un conjunto de 2 dígitos binarios para formar un número"

\mathcal{E} es un experimento con reposición donde importa el orden.

La cantidad total de números que se pueden formar con n dígitos es:

$$\#S = A'_{2,n} = 2^n$$

Definimos el suceso

D_i : "dígito i correcto" $i=1, \dots, n$

$$P(D_i) = 1 - p$$

De las hipótesis del enunciado

D_i y D_j son independientes para todo $i \neq j$ con $i, j = \overline{1, n}$

$\overline{1, n}$ significa que se recorre el **rango completo** de valores entre 1 y n.

Un número será incorrecto si al menos uno de sus dígitos binarios es incorrecto. Definimos el suceso E: "número incorrecto", y podemos decir

Justificar

$$E = \bar{D}_1 \cup \bar{D}_2 \cup \bar{D}_3 \cup \dots \cup \bar{D}_n = \bigcup_{i=1}^n \bar{D}_i = \overline{\bigcap_{i=1}^n D_i}$$

Luego

Justificar

$$P(E) = P\left(\overline{\bigcap_{i=1}^n D_i}\right) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^n D_i\right) = 1 - (1 - p)^n$$