

## Práctica 5: Teoría de categorías I

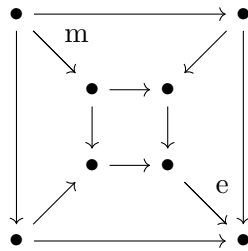
1. Considerar los siguientes diagramas. En ambos casos, probar que si los dos triángulos conmutan, también conmuta el cuadrado.



2. Probar que si  $\mathcal{C}$  es una categoría con un único objeto, entonces  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_M$  para algún monoide  $(M, *)$ .
3. Sea  $\mathbf{Rel}$  tal que  $\mathbf{ob Rel}$  es la clase de conjuntos,  $\mathbf{mor Rel}$  son las relaciones binarias entre conjuntos y la composición de morfismos es la composición de relaciones. Definir funciones dominio y codominio e identidades adecuadas y probar que  $\mathbf{Rel}$  es efectivamente una categoría, denominada *categoría de relaciones*.
4. Sea  $\mathbf{PSet}$  tal que  $\mathbf{ob PSet}$  son pares  $(X, x_0)$  donde  $X$  es un conjunto y  $x_0 \in X$ . El par  $(X, x_0)$  se denomina un *conjunto punteado*. Una función entre los conjuntos punteados  $(X, x_0)$  e  $(Y, y_0)$  es una función  $f : X \rightarrow Y$  tal que  $f(x_0) = y_0$ . Probar que si  $\mathbf{mor PSet}$  son funciones entre conjuntos punteados, con la composición usual de funciones y las identidades usuales,  $\mathbf{PSet}$  es una categoría.
5. Sean  $\mathcal{C}$  una categoría y  $A$  un objeto de  $\mathcal{C}$ . Definimos  $\mathcal{C}|A$  como la categoría cuyos objetos son las flechas  $f$  de  $\mathcal{C}$  tales que  $\text{codom}(f) = A$ . Una flecha  $g$  en  $\mathcal{C}|A$  de  $f : X \rightarrow A$  en  $h : Y \rightarrow A$  es una flecha  $g : X \rightarrow Y$  de  $\mathcal{C}$  tal que  $f = h \circ g$ .
- Expresar las flechas de  $\mathcal{C}|A$  en términos de diagramas conmutativos.
  - Verificar que  $\mathcal{C}|A$  es una categoría.
  - Si  $\mathcal{C}_P$  es la categoría definida por un conjunto ordenado  $P$  y  $x \in P$ , determinar  $\mathcal{C}_P|x$ .
6. Sean  $\mathcal{C}$  una categoría y  $f, g$  flechas de  $\mathcal{C}$ . Probar que
- Si  $f$  y  $g$  son monomorfismos, entonces  $g \circ f$  también lo es.
  - Si  $g \circ f$  es un monomorfismo,  $f$  también lo es.
  - Si  $f$  y  $g$  son epimorfismos, entonces  $g \circ f$  también lo es.
  - Si  $g \circ f$  es un epimorfismo,  $g$  también lo es.
  - Si  $f^{-1}$  es la inversa de  $f$  y  $g^{-1}$  es la inversa de  $g$ , entonces  $f^{-1} \circ g^{-1}$  es la inversa de  $g \circ f$ .
7. Probar que en  $\mathbf{Grp}$  los morfismos mónicos son monomorfismos de grupos, los morfismos épicos son epimorfismos de grupos y los isomorfismos son isomorfismos de grupos.
8. Exhibir un ejemplo de una categoría  $\mathcal{C}$  cuyos objetos sean conjuntos y sus morfismos sean funciones entre conjuntos tal que existen morfismos biyectivos que no son isomorfismos.
9. Sea  $\mathcal{C}$  una categoría y  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  su categoría dual.

- a) Probar que  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  es un monomorfismo si  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(B, A)$  es un epimorfismo.
- b) Probar que  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  es un epimorfismo si  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(B, A)$  es un monomorfismo.
- c) Probar que  $A$  es un objeto inicial (resp. terminal) en  $\mathcal{C}$  si y sólo si  $A$  es un objeto terminal (resp. inicial) en  $\mathcal{C}^{op}$ .

10. Considerar que en el siguiente diagrama los 4 trapecios conmutan



Probar que

- a) Si el cuadrado interno conmuta, también lo hace el cuadrado externo.
- b) Si  $e$  es epi y  $m$  es mono, entonces si el cuadrado externo conmuta, también lo hace el cuadrado interno.

11. Determinar, si existen, los objetos iniciales, terminales y nulos en las siguientes categorías:

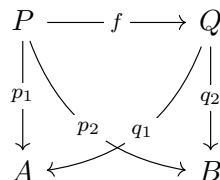
- a)  $\text{Set} \times \text{Set}$ .      b)  $\text{Set}^{\rightarrow}$ .      c)  $\text{PSet}$ .      d)  $\text{Grp}$ .      e)  $\text{Ab}$ .      f)  $\text{Rel}$ .

12. Dar una categoría sin objetos iniciales. Dar una sin objetos finales. Dar una donde los objetos finales e iniciales coincidan.

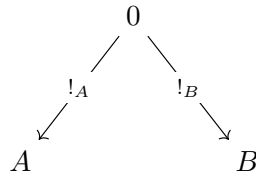
13. Sean  $A$  y  $B$  objetos en una categoría  $\mathcal{C}$ . Un  $A, B$ -pairing se define como una terna  $(P, p_1, p_2)$  donde  $P$  es un objeto de  $\mathcal{C}$  y  $p_1 : P \rightarrow A$  y  $p_2 : P \rightarrow B$  son morfismos de  $\mathcal{C}$ . Un morfismo de  $A, B$ -pairings

$$f : (P, p_1, p_2) \rightarrow (Q, q_1, q_2)$$

es cualquier morfismo  $f$  de  $\mathcal{C}$  tal que  $q_1 \circ f = p_1$  y  $q_2 \circ f = p_2$ , es decir, el siguiente diagrama conmuta.



- a) Probar que los  $A, B$ -pairings y sus morfismos forman una categoría  $\text{Pair}(A, B)$ .
- b) Siendo  $0$  un objeto inicial de  $\mathcal{C}$ , mostrar que



es un objeto inicial de  $\text{Pair}(A, B)$ .

14. Dar una categoría donde algún par de objetos carecen de producto.

15. Mostrar las siguientes identidades:

- a)  $\langle \pi_1, \pi_2 \rangle = id$
- b)  $\langle f \circ h, g \circ h \rangle = \langle f, g \rangle \circ h$
- c)  $\langle f \times h \rangle \circ \langle g, k \rangle = \langle f \circ g, h \circ k \rangle$
- d)  $(f \times h) \circ (g \times k) = (f \circ g) \times (h \circ k)$
- e)  $\langle [f, g], [h, k] \rangle = [\langle f, h \rangle, \langle g, k \rangle]$

16. Probar los siguientes isomorfismos:

- a)  $A \times B \cong B \times A$
- b)  $A \times 1 \cong A$
- c)  $A \times (B \times C) \cong (A \times B) \times C$

¿Cuáles son los enunciados duales?

17. Probar que en una categoría  $\mathcal{C}$  todo ecualizador  $e$  es monomorfismo. Mostrar que si además  $e$  es epimorfismo, entonces se tiene un isomorfismo.

18. Encontrar el pull-back en  $\text{Set}$ .

19. Sea  $\mathcal{C}$  una categoría con exponenciales,

- a) Probar  $\text{curry}(\text{eval}_{A,B}) = id_{B^A}$ .
- b) Dado un morfismo  $f : B \rightarrow C$ , construir un morfismo  $B^A \rightarrow C^A$ .
- c) Dado un morfismo  $f : A \rightarrow C^B$ , construir un morfismo  $\text{uncurry}(f) : A \times B \rightarrow C$ .
- d) Probar  $\text{uncurry}(\text{curry}(f)) = f$  y  $\text{curry}(\text{uncurry}(f)) = f$ .

20. Sea  $\mathcal{C}$  una CCC y sean  $A, B$  objetos de  $\mathcal{C}$ . Probar:

- a)  $B^A$  es único salvo isomorfismo.
- b)  $1^A \cong 1$ .
- c)  $B^1 \cong B$ .

**21.** En una categoría con coproductos y objeto final, podemos definir los booleanos como el objeto  $Bool = 1 + 1$ . En este caso, a  $i_1$  le llamamos *true* y a  $i_2$  le llamamos *false*. Escribir un morfismo  $not : Bool \rightarrow Bool$  tal que

$$\begin{aligned}not \circ true &= false \\not \circ false &= true\end{aligned}$$

Suponiendo que la categoría tiene exponenciales, ¿puede escribir un morfismo  $and : Bool \times Bool \rightarrow Bool$  que se comporte como la conjunción?

**22.** Una categoría se dice distributiva si tiene productos finitos, coproductos finitos, y para todos objetos  $A, B, C$ , los morfismos

$$\begin{aligned}\iota_{0 \times A} : 0 \rightarrow 0 \times A \\[\iota_1 \times id_C, \iota_2 \times id_C] : A \times C + B \times C \rightarrow (A + B) \times C\end{aligned}$$

son isomorfismos.

Probar que toda CCC con coproductos finitos es distributiva.