Ej. 1. Sea $\mathcal{R}$ una relación en un conjunto X. Se denomina *clausura transitiva* de $\mathcal{R}$ a la menor relación transitiva en X que contiene a $\mathcal{R}$. Si se define inductivamente

$$\mathcal{R}^1 = \mathcal{R}, \quad \mathcal{R}^{n+1} = \mathcal{R}^n \circ \mathcal{R}, \ n \geq 1$$

a) Probar que la clausura transitiva de $\mathcal{R}$ es $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{R}^n$.

b) Hallar la clausura transitiva de las relaciones $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ cuyas matrices son

$$M(\mathcal{R}_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M(\mathcal{R}_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\mathcal{R} = \{(x,y) : x, y \in X\}$

$\mathcal{R}' = \{(x,y) : (x,y) \in \mathcal{R}$ tq $(x,y) \wedge (y,z) \in \mathcal{R} \Rightarrow (x,z) \in \mathcal{R}\}$

$\mathcal{R}^1 = \mathcal{R}$

$\mathcal{R}^{n+1} = \mathcal{R}^n \circ \mathcal{R}$

a) $\mathcal{R}' = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{R}^n$

- $1 \in \mathbb{N} \Rightarrow \mathcal{R}^1 = \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}'$

- sup $(x,y), (y,z) \in \mathcal{R}'$
  - ↳ sup. $(x,y), (y,z) \in \mathcal{R}^n$
    ↳ $\mathcal{R}^{2n} = \mathcal{R}^n \circ \mathcal{R}^n \Rightarrow (x,z) \in \mathcal{R}^{2n}$
  - ↳ sup. $(x,y) \in \mathcal{R}^n$ y $(y,z) \in \mathcal{R}^m$
    ↳ $\exists\, j = m+n \,/\, \mathcal{R}^{m+n} = \mathcal{R}^m \circ \mathcal{R}^n \Rightarrow (x,z) \in \mathcal{R}^j$

$\therefore \exists\, n \in \mathbb{N}$ tq $(x,z) \in \mathcal{R}^n$

$\therefore (x,y), (y,z) \in \mathcal{R}' \Rightarrow (x,z) \in \mathcal{R}'$

- Sup. que $\exists\, M$ tq M ct de $\mathcal{R}$ y $M \subseteq \mathcal{R}'$

$\mathcal{M}$ ct de $\mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{R} \subseteq \mathcal{M}$

$\forall (x,y), (y,z) \in \mathcal{M} \;\; \exists (x,z) \in \mathcal{M}$

$\mathcal{M} \subsetneq \mathcal{R}' \Rightarrow \exists (a,b) \in \mathcal{R}'$ y $(a,b) \notin \mathcal{M}$

$(a,b) \in \mathcal{R}' \Rightarrow (a,b) \in \mathcal{R}^m$ pa $m \neq 1$

$\Rightarrow \exists c \in X$ tq $(a,c) \in \mathcal{R}^{m-1}$ y $(c,b) \in \mathcal{R}$

$\vdots$ repito $m-2$ veces

$\exists f \in X$ tq $(a,f) \in \mathcal{R}$ y $(f,\dots) \in \mathcal{R}$

luego, $(a,f), (f,\dots), (\dots,b) \in \mathcal{R} \Rightarrow \in \mathcal{M}$

pero $\mathcal{M}$ ct $\Rightarrow (a,b) \in \mathcal{M}$

b) hacer

Ej. 2. Considerar el grupo aditivo $(\mathbb{Q}, +)$ y el subgrupo normal $(\mathbb{Z}, +)$.

a) Probar que $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es un grupo abeliano infinito. → como probar sin item b

b) Probar que todos los elementos de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tienen orden finito.

c) Probar que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un elemento de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ de orden n.

$(\mathbb{Z}, +) \triangleleft (\mathbb{Q}, +)$

$\Rightarrow q\mathbb{Z} = \mathbb{Z}q \quad \forall q \in \mathbb{Q}$

a) $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \{q\mathbb{Z} : q \in \mathbb{Q}\} = \{\mathbb{Z}q : q \in \mathbb{Q}\}$

$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ abel. $\Rightarrow q\mathbb{Z} + j\mathbb{Z} = j\mathbb{Z} + q\mathbb{Z} \quad \forall j, q \in \mathbb{Q}$

Sol 1:

$$\begin{aligned} q\mathbb{Z} + j\mathbb{Z} &= \{qz : z \in \mathbb{Z}\} + \{jz : z \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{qz + jz : z \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{(q+j)z : z \in \mathbb{Z}\} \quad \leftarrow \mathbb{Q} \text{ abel.?} \\ &= \{(j+q)z : z \in \mathbb{Z}\} \\ &= \vdots \\ &= j\mathbb{Z} + q\mathbb{Z} \end{aligned}$$

$\therefore \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ abel.

Sol 2:

$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ abeliano $\Rightarrow [q] + [g] = [g] + [q]$

Luego $(\mathbb{Q}, +)$ trivialmente abeliano para la op. $+$ (suma)

$\Rightarrow [q] + [g] = [q + g] = [g + q] = [g] + [q]$

→ $(\mathbb{Q}, +)$ abeliano

+ se induce a $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$

$\therefore \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ abeliano qpq $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ inf. $\qquad \mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \{q\mathbb{Z} : q \in \mathbb{Q}\}$

$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ finito $\overset{T.L}{\Longrightarrow} o(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = n$ pa $n \in \mathbb{N}$

y $o(\bar{q}) \mid n \ \forall \bar{q} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$

$o(\bar{q}) \neq o(\bar{p})$ si $c \neq b$ para $q = \frac{a}{b}$ y $p = \frac{a}{c}$ (item b)

lo cual vale en particular para b y c primos

$\therefore \nexists\, n \in \mathbb{N}$ tq $b \mid n$ y $c \mid n$

$\therefore o(\bar{q}) \nmid n$

$\therefore \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ infinito

b) qpq $[q] = q + \mathbb{Z}$ finito

Sea $q \in \mathbb{Q} \Rightarrow q + \mathbb{Z} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$

$q \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exists\, a, b \in \mathbb{Z}$ tq $q = a/b$

$\therefore \frac{a}{b} + \mathbb{Z} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$

Luego $[q] + [q] = a/b + \mathbb{Z} + a/b + \mathbb{Z}$

$= a/b + a/b + \mathbb{Z}$

b veces

$\underbrace{b[q]}_{\text{notación aditiva}} = b\,(a/b + \mathbb{Z})$

$= b\, a/b + \mathbb{Z}$

$= a + \mathbb{Z}$

$= \mathbb{Z} = e$

y $\mathbb{Z} = [e]$ ya que $[e] = \{e\mathbb{Z}\} = \{\mathbb{Z}\}$

$\therefore b[q] = [e]$ tq $b \neq 0$

$\therefore [q]$ finito $\rightarrow o(\bar{q}) = b$ para $q = a/b$

$\left.\begin{array}{l} \langle a \rangle \text{ inf. sii } a^k = e \text{ sii } k = 0 \\ o(\langle a \rangle) = k \text{ sii } a^k = e,\ k \neq 0 \end{array}\right.$

c) qpq $\exists\, q \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tq $o(q) = n \ \forall n \in \mathbb{N}$

Sea $q = \frac{a}{n}$ para a cualq. $\underset{\text{(item b)}}{\Longrightarrow} o(q) = o(\frac{a}{n}) = n$

Ej. 3. Sea $(M, *)$ un monoide y sea G_M el conjunto de elementos invertibles de M.

a) Probar que $(G_M, *)$ es un grupo.

b) Sea Inc : Grp → Mon tal que $\mathrm{Inc}(G,\cdot) = (G,\cdot)$ para cada grupo $(G,\cdot)$ y $\mathrm{Inc}(f) = f$ para cada homomorfismo de grupos f. Probar que Inc es un funtor covariante.

c) Sea F : Mon → Grp tal que a nivel de objetos $F(M,*) = (G_M,*)$. Extender F a mor Mon y probar que es un funtor covariante.

d) Probar que existe una adjunción entre Inc y F.

a) $G_M = \{a \in M : \exists\, a^{-1} \in M \text{ tq } aa^{-1} = a^{-1}a = e\}$

$ab^{-1} \in G_M \ \forall a,b \in G_M$

qpq $\exists\, (ab^{-1})^{-1} \in G_M$ tq $(ab^{-1})^{-1}ab^{-1} = e$

$(ab^{-1})^{-1} = b^{-1^{-1}}a^{-1} = ba^{-1}$

$\cancel{b}\cancel{a^{-1}}\cancel{a}\cancel{b^{-1}} = e$

∴ $\exists\ ab^{-1} \in G_M \ \forall a,b \in G_M$

b) qpq Inc funtor cov.

1. $\forall f \in \mathrm{Hom}(G_1, G_2) \Rightarrow \mathrm{Inc}(f) \in \mathrm{Hom}(\mathrm{Inc}(G_1), \mathrm{Inc}(G_2))$

trivial

2. $\forall G_1 \in \mathrm{Grp}$, $\mathrm{Inc}(id_{G_1}) = id_{(\mathrm{Inc}\, G_1)}$

trivial

3. $\forall G_1, G_2, G_3 \in \mathrm{Grp}$ y $f \in \mathrm{Hom}(G_1,G_2)$, $g \in \mathrm{Hom}(G_2,G_3)$

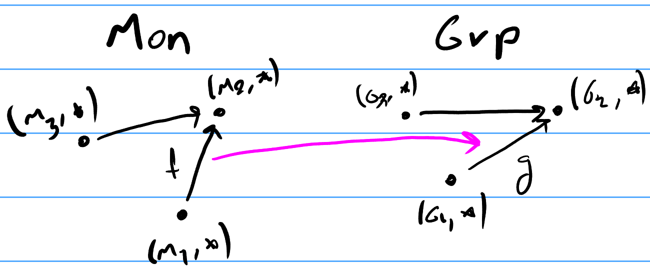
$\mathrm{Inc}(f \circ g) = \mathrm{Inc}(f) \circ \mathrm{Inc}(g)$

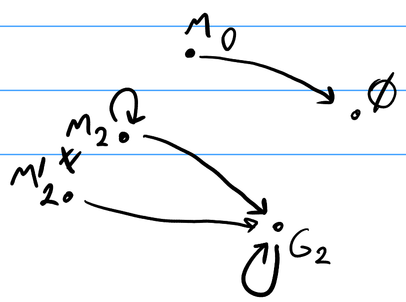
trivial

c) F: Mon → Grp

$F(M,*) = (G_M, *)$

↓ elem. inv. de M





$\nearrow \in$ Mon

Sea $f \in Hom(M_1, M_2)$

I. $F(f) \in Hom(G_{M_1}, G_{M_2})$

II. $F(id_{M_1}) = id_{G_{M_1}}$

III. $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$

1. Sup $f \in Hom(M_1, M_2)$

- Sup $G_{M_1} \neq G_{M_2}$

$\Rightarrow F(f) = f \in Hom(G_{M_1}, G_{M_2})$

- Sup. $G_{M_1} = G_{M_2}$

$\Rightarrow F(f) = f = id_{G_{M_1}} \in Hom(G_{M_1}, G_{M_1}) = Hom(G_{M_1}, G_{M_2})$

II. trivial

III. trivial

d) qpq $\exists$ adj entre Inc y F

$Inc : Grp \to Mon$ $\quad F : Mon \to Grp$ funtor

$Id_{Grp} : Grp \to Grp$ $\quad (F \circ Inc) : Grp \to Grp$

hallar $\eta : Id_{Grp} \to (F \circ Inc)$

I. $\forall G \in Grp$, $\eta_G = \eta(G) \in Hom_{Grp}(Id_{Grp}(G), F \circ Inc(G))$

II. $\forall f \in Hom_{Grp}(G_1, G_2)$ conmuta

$$\begin{tikzcd}
Id_{Grp}(G_1) \arrow[r, "\eta_{G_1}"] \arrow[d, "Id_{Grp}(f)"'] & F \circ Inc(G_1) \arrow[d, "F \circ Inc(f)"] \\
Id_{Grp}(G_2) \arrow[r, "\eta_{G_2}"'] & F \circ Inc(G_2)
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
G_1 \arrow[r, "\eta_{G_1}"] \arrow[d, "f"'] & F \circ Inc(G_1) \arrow[d, "f"] \\
G_2 \arrow[r, "\eta_{G_2}"'] & F \circ Inc(G_2)
\end{tikzcd}$$

tq $f \circ \eta_{G_2} = \eta_{G_1} \circ f$

III. $\forall G_1, G_2 \in Grp$ y $f \in Hom_{Grp}(G_1, F(G_2))$
$\exists ! \, f^{\#} : Inc(G_1) \longrightarrow G_2$ tal que conmuta

$$\begin{tikzcd}
G_1 \arrow[r, "\eta_{G_1}"] \arrow[dr, "f"'] & F \circ Inc(G_1) \arrow[d, dashed, "F(f^{\#})"] \\
& F(G_2)
\end{tikzcd}$$

tq $\eta_{G_1} \circ (F \circ Inc(f^{\#})) = f$

Proponemos: $\eta(G_1) = Id_{G_1}$

I. trivial

II. trivial

III. $\eta_{G_1} \circ F(f^{\#}) =$
$Id_{G_1} \circ (f^{\#}) =$
$f^{\#}$ para $f \in Hom_{Grp}(G_1, F(G_2))$ cualquiera
$\therefore f = f^{\#}$

$\therefore$ Inc adjunto a izq. de F

Ej. 4. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando adecuadamente la respuesta.

a) Sea $(A, \preceq)$ un poset. Para cada $a \in A$ se define

$$A_a \doteq \{x \in A : x \prec a\}.$$

Sea $\mathcal{A} = \{A_a : a \in A\}$, entonces $(\mathcal{A}, \subseteq)$ está totalmente ordenado.

b) Si p y q son primos distintos, existe al menos un homomorfismo no trivial $\varphi : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_q$.

c) Sean $(P, \preceq_P)$ y $(Q, \preceq_Q)$ posets y $\mathscr{C}_P$ y $\mathscr{C}_Q$ sus categorías asociadas. Existe un isomorfismo entre las categorías $\mathscr{C}_P$ y $\mathscr{C}_Q$ si y sólo si existe un isomorfismo de orden entre P y Q.

d) Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ dos categorías. Si $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ es un funtor que define una equivalencia entre $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$, entonces si $g : A \to B$ es un morfismo mónico en $\mathscr{C}$, entonces $F(g) : F(A) \to F(B)$ es un morfismo mónico en $\mathscr{D}$.

a) $(\mathcal{A}, \subseteq)$ ord. tot. sii $X \subseteq Y$ ó $Y \subseteq X$ $\forall X, Y \in \mathcal{A}$

$A_x \subseteq A_y$ ó $A_y \subseteq A_x$ $\forall x, y \in A$

$$x \xrightarrow{<} y \xrightarrow{<} z \qquad f \xrightarrow{<} w$$

$A_w = \{f\}$, $A_z = \{x, y\}$ → no son comparables

∴ Falso

b) $\mathbb{Z}_p = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{p-1}\}$ $\quad \bar{x} = \{y \in \mathbb{Z} : mod(y, p) = x\}$

$\mathbb{Z}_q = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{q-1}\}$

qvq $\exists \varphi : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_q$ tq $\varphi(\bar{x} * \bar{y}) = \varphi(\bar{x}) * \varphi(\bar{y})$

$\varphi(\mathbb{Z}_p) < \mathbb{Z}_q \overset{TL}{\Longrightarrow} o(\varphi(\mathbb{Z}_p)) \mid o(\mathbb{Z}_q) = q \Longrightarrow o(\varphi(\mathbb{Z}_p)) \mid q$

∴ $o(\varphi(\mathbb{Z}_p)) = q$ ó $o(\varphi(\mathbb{Z}_p)) = 1$

Luego, si $o(\varphi(\mathbb{Z}_p)) = q \Longrightarrow \varphi$ es epimorfismo

$$\overset{1TI}{\Longrightarrow} \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_p & \xrightarrow[\text{epi}]{\varphi} & \mathbb{Z}_q \\ \pi \downarrow & \nearrow f \text{ isom} & \\ \mathbb{Z}_p/\ker\varphi & & \end{array} \Longrightarrow \mathbb{Z}_p/\ker\varphi \simeq \mathbb{Z}_q \Longrightarrow o(\mathbb{Z}_p/\ker\varphi) = o(\mathbb{Z}_q)$$

$\Downarrow$

$o(\mathbb{Z}_p/\ker\varphi) \mid o(\mathbb{Z}_p) = p \Longrightarrow o(\mathbb{Z}_q) = q \mid p$ ABS

por ser subgrupo

q, p primos

∴ $o(\varphi(\mathbb{Z}_p)) = 1 \Longrightarrow \varphi$ es trivial $\Longrightarrow$ Falso

c) $(P, \preceq_P) \longrightarrow \mathcal{C}_P$ $\qquad x \preceq_P y \Rightarrow x \bullet\!\longrightarrow\!\bullet\, y$

$(Q, \preceq_Q) \longrightarrow \mathcal{C}_Q$

$F : \mathcal{C}_P \to \mathcal{C}_Q$ isom. $\iff \exists\, f : P \to Q$ isom. de órden

funtor $\quad \exists\, G : \mathcal{C}_Q \to \mathcal{C}_P \,/\, F \circ G = Id_{\mathcal{C}_Q}$ $\qquad$ • $x \preceq_P y \Rightarrow f(x) \preceq_Q f(y)$

$G \circ F = Id_{\mathcal{C}_P}$ $\qquad$ • $\exists\, f^{-1}$ tq f^{-1} morf. órden

$\Rightarrow$) $F : \mathcal{C}_P \to \mathcal{C}_Q$ tq $\exists\, G : \mathcal{C}_Q \to \mathcal{C}_P \,/\, F \circ G = Id_{\mathcal{C}_Q} \wedge G \circ F = Id_{\mathcal{C}_P}$

Luego, propongo $f : P \to Q$ tq $f(x) = F(x)$

$x \in P$ $\qquad x \in ob\, \mathcal{C}_P$

P $\qquad$ Q $\qquad$ def $\mathcal{C}_Q$

• sea $x \preceq_P y \Rightarrow f(x) \preceq_Q f(y)$ sii $\exists\, g' \in mor\, \mathcal{C}_Q$ tq

$g' \in Hom(F(x), F(y))$

$F(x) = f(x)$

pero $x \preceq_P y \Rightarrow \exists\, g \in Hom(x, y)$ en $\mathcal{C}_P$

$\Rightarrow \exists\, g' \in Hom(F(x), F(y))$

def F

$\Rightarrow f(x) \preceq_Q f(y)$

def $\mathcal{C}_Q$

• propongo $f^{-1}(y) = G(y)$ tq $F \circ G = Id_{\mathcal{C}_Q} \wedge G \circ F = Id_{\mathcal{C}_P}$

$f^{-1} : Q \to P$ $\qquad G : \mathcal{C}_Q \to \mathcal{C}_P$

• qvq $x' \preceq_Q y' \Rightarrow f^{-1}(x') \preceq_P f^{-1}(y')$ análogo al anterior

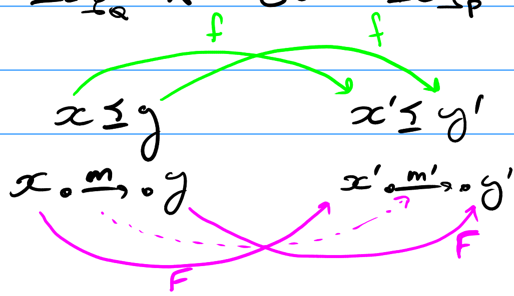
• qpq $F \circ G = Id_{\mathcal{C}_Q} \Rightarrow f \circ g = id_Q$ sale fácil con suscit. y paso anterior

$\Leftarrow$) $\exists\, f : P \to Q$ / • $x \preceq_P y \Rightarrow f(x) \preceq_Q f(y)$

• $\exists\, f^{-1} : Q \to P$ tq morf. órd.

qvq $\exists\, F : \mathcal{C}_P \to \mathcal{C}_Q$ tq $\exists\, G : \mathcal{C}_Q \to \mathcal{C}_P \,/\, F \circ G = Id_{\mathcal{C}_Q} \wedge G \circ F = Id_{\mathcal{C}_P}$

$f(x) = y$, $x \preceq y \Rightarrow f(x) \preceq f(y)$



propongo

$F(x) = f(x) = y$

$F(m) = m'$ tq $m' \in Hom(F(x), F(y))$

↳ $\exists!\, m'$ por def. $\mathcal{C}_Q$ para Q poset

$G(y) = f^{-1}(y) = x$

$G(m') = m$ tq $m \in Hom(G(x), G(y))$

resto sale fácil • ob, $F \circ G = f \circ f^{-1}$

• mor, $\underset{Hom(x,y)}{G \circ F(m)} = \underset{Hom(F(x),F(y))}{G(m')} = m$ → $Hom(G \circ F(x), G \circ F(y)) = Hom(x, y)$

$\therefore$ Verdadero

$\therefore G \circ F = Id_{\mathcal{C}_P}$

↳ unicidad de m en $\mathcal{C}_P$ → poset

d) $f: A \to B$ mónico sii $f \circ \underset{g: C \to A}{g} = f \circ \underset{h: C \to A}{h} \Rightarrow g = h$

Como F define equiv. entre $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ ⟹ F es full y fiel

F full $\Rightarrow Hom_{\mathcal{C}}(A, B) \longrightarrow Hom_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$ sobrey.

F fiel $\Rightarrow$ // iny.

pvq $F(f) \circ F(g) = F(f) \circ F(h) \Rightarrow F(g) = F(h)$

$F(f) \circ F(g) \underset{\text{def. de functor}}{=} F(f \circ g) = F(f \circ h) = F(f) \circ F(h)$

y como F biy. $g = h \Rightarrow F(g) = F(h)$

$\therefore F(f)$ mónico

$\therefore$ Verdadero