Práctica 1: Relaciones y funciones

1. Para cada una de las siguientes relaciones $\mathcal{R}_i$, $i = 1, \ldots, 6$, determinar su dominio, su imagen y la relación inversa $\mathcal{R}_i^{-1}$. Decidir si se trata de una relación funcional, y en ese caso si es inyectiva y/o sobreyectiva.

a) $\mathcal{R}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : y = x^2 + 7\}$.

b) $\mathcal{R}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y^2 = x\}$.

c) $\mathcal{R}_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = 3x + 1\}$.

d) $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ y $\mathcal{R}_4$ es la relación de A en B tal que

$$M(\mathcal{R}_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e) $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$, $C = \{u, v, x, y, z\}$ y $\mathcal{R}_5$ es la relación de B en C tal que

$$M(\mathcal{R}_5) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

f) $\mathcal{R}_6 = \mathcal{R}_5 \circ \mathcal{R}_4$.

2. Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ funciones y sea $A' \subseteq A$. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) Si f es inyectiva (resp. sobreyectiva), entonces $f_{|A'}$ es inyectiva (resp. sobreyectiva).

b) Si $f_{|A'}$ es inyectiva (resp. sobreyectiva), entonces f es inyectiva (resp. sobreyectiva).

c) Si $g \circ f$ es inyectiva entonces f es inyectiva.

d) Si $g \circ f$ es inyectiva entonces g es inyectiva.

e) Si $g \circ f$ es sobreyectiva entonces f es sobreyectiva.

f) Si $g \circ f$ es sobreyectiva entonces g es sobreyectiva.

3. Sean A y B conjuntos finitos y $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ dos relaciones de A en B. En el conjunto $\{0, 1\}$ definimos la operación de producto usual (o sea $0.0 = 0,\ 0.1 = 1.0 = 0,\ 1.1 = 1$) y la suma tal que $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1 + 0 = 1$ y $1 + 1 = 1$. Probar que con esta operación:

a) $M(\mathcal{R} \cup \mathcal{S}) = M(\mathcal{R}) + M(\mathcal{S})$, donde la suma de matrices es la usual entrada a entrada.

b) $M(\mathcal{R} \cap \mathcal{S}) = M(\mathcal{R}) * M(\mathcal{S})$, donde $*$ designa el producto entrada a entrada (es decir, si M y N son dos matrices, entonces $(M * N)_{ij} = M_{ij}.N_{ij}$).

4. Sean A, B y C conjuntos finitos y sean $\mathcal{R}$ una relación de A en B y $\mathcal{S}$ una relación de B en C. Probar que $M(\mathcal{S} \circ \mathcal{R}) = M(\mathcal{R}) \cdot M(\mathcal{S})$, donde $\cdot$ es el producto usual de matrices, considerando el producto y la suma en $\{0,1\}$ del ejercicio anterior.

5. Mostrar que hay una correspondencia biyectiva entre las relaciones de A en B y las funciones de A en $\mathcal{P}(B)$.

6. En cada uno de los siguientes casos, determinar si la relación $\mathcal{R}$ en $\mathbb{Z}$ es reflexiva, simétrica, antisimétrica, o transitiva.

a) $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x = y^2$.

b) $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x > y$.

c) $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \geq y$.

d) $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x + y$ es par.

e) $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y$ es impar.

7. Sea $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ relaciones en A. Determinar la validez de los siguientes enunciados:

a) Si $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ son reflexivas, entonces:

i. $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ es reflexiva.
ii. $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}$ es reflexiva.
iii. $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$ es reflexiva.

b) Repetir el ejercicio anterior sustituyendo "reflexiva" por simétrica, antisimétrica, o transitiva.

c) Si $\mathcal{R}$ es reflexiva (resp. simétrica, antisimétrica, transitiva), entonces $\mathcal{R}^{-1}$ también lo es.

8. Sean $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ relaciones en A tal que $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$, y sea $A' \subseteq A$. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) Si $\mathcal{R}$ es reflexiva (resp. simétrica, antisimétrica, o transitiva), entonces $\mathcal{S}$ también lo es.

b) Si $\mathcal{S}$ es reflexiva (resp. simétrica, antisimétrica, o transitiva), entonces $\mathcal{R}$ también lo es.

c) Si $\mathcal{R}$ es reflexiva (resp. simétrica, antisimétrica, o transitiva), entonces $\mathcal{R}_{|A' \times A'}$ también lo es.

9. Sea A un conjunto finito de cardinal n y sea I_n la matriz identidad $n \times n$. Si $M = (M_{ij})$ y $N = (N_{ij})$ son matrices $n \times n$, escribimos $M \leq N$ si $M_{ij} \leq N_{ij}$ para cada $i, j = 1, \ldots, n$. Sea $\mathcal{R}$ una relación en A. Probar que:

a) $\mathcal{R}$ es reflexiva si y sólo si $I_n \leq M(\mathcal{R})$.

b) $\mathcal{R}$ es simétrica si y sólo si $M(\mathcal{R}) = M(\mathcal{R})^T$.

c) $\mathcal{R}$ es transitiva si y sólo si $M(\mathcal{R}) \cdot M(\mathcal{R}) \leq M(\mathcal{R})$.

d) $\mathcal{R}$ es antisimétrica si y sólo si $M(\mathcal{R}) * M(\mathcal{R})^T \leq I_n$.

10. Analizar en cada caso si la relación dada en el conjunto A es de equivalencia. En caso de serlo, describir su conjunto cociente:

a) $A = \mathbb{Z}$, $x \sim y \Leftrightarrow x - y$ es un entero par.

b) $A = \mathbb{R}$, $x \sim y \Leftrightarrow xy > 0$.

c) $A = \mathbb{R}$, $x \sim y \Leftrightarrow xy \geq 0$.

d) $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a + d = c + b$.

11. Dada una función $f : A \to B$, se define una relación $\mathcal{K}_f$ en A como

$$\mathcal{K}_f = \{(a, a') \in A \times A : f(a) = f(a')\}$$

a) Probar que $\mathcal{K}_f$ es de equivalencia.

b) Dar una definición alternativa para $\mathcal{K}_f$ en términos de f, la composición y la inversa de relaciones.

12. Sea `espar` $: \mathbb{N} \to \mathbb{B}$ la función que retorna valor `true` en los pares y valor `false` en los impares. Calcular $\mathbb{N}/_{\mathcal{K}_{\texttt{espar}}}$.

13. Mostrar que toda relación de equivalencia es el kernel de una función.

14. **Teorema de factorización.** Dada una función $f : A \to B$ y una relación de equivalencia $\sim\, \subseteq \mathcal{K}_f$, probar que existe una única función $\tilde{f} : A/{\sim} \to B$ tal que $f = \tilde{f} \circ \pi$, donde $\pi : A \to A/{\sim}$ se define como $\pi(a) = \overline{a}$ para todo $a \in A$. Además, probar que $\tilde{f}$ es inyectiva si $\sim\, = \mathcal{K}_f$.