Álgebra Lineal 2020 (LCC - LM - PM)
Cap.4: Determinantes. [1]

Graciela Nasini - Yanina Lucarini - Eduardo Martinez

{nasini,lucarini,eduardom}@fceia.unr.edu.ar

[1] Linear Algebra and its applications, G. Strang.

Introducción

El determinante de una matriz cuadrada, difinido ya en Álgebra II, puede ser visto como una función de las matrices $n \times n$ en los reales.

Entre otras propiedades, sabemos que el determinante determina la singularidad o no de una matriz ("A es singular si y solo si $det(A) = 0$") así como también nos da una fórmula explícita para las entradas de A^{-1} (A no singular) o la solución de un sistema $Ax = b$.

Sin embargo, la existencia de esas fórmulas no cambia la forma en que calculamos. También para el cálculo del determinante, el método más eficiente será la Eliminación Gaussiana.

La aplicación más importante del determinante es como test de inversibilidad de la matriz $A - \lambda I$ (restamos $\lambda \in \mathbb{R}$ a los elementos de la diagonal de A). Los valores de λ tales que $A - \lambda I$ es singular se denominan *autovalores de* A. La singularidad de $A - \lambda I$ se traduce en "$det(A - \lambda I) = 0$", lo que nos llevará a determinar las raíces de un polinomio de grado n en λ. Por lo tanto, toda matriz $n \times n$ tiene n autovalores (complejos). Este será el tema del próximo capítulo.

Convenio: A partir de ahora, y a lo largo de todo este capítulo, todas las matrices son cuadradas $n \times n$.

Propiedades

Veremos que las siguientes propiedades del determinante son las más importantes ya que permiten *definirlo*:

1. El determinante de la matriz identidad es 1.
2. El determinante cambia su signo cuando intercambiamos dos de sus filas.
3. El determinante es *lineal en la primera fila*.
   Esto es, si A es una matriz cuya primer fila A_1 se escribe como combinación lineal de vectores $u, v \in \mathbb{R}^n$, i.e. $A_1 = \alpha u + \beta v$ y A_u , A_v son las matrices obtenidas a partir de A reemplazando A_1 por u y por v, respectivamente, entonces:

   $$det(A) = \alpha\ det(A_u) + \beta\ det(A_v).$$

   Para $n = 2$, si

   $$A = \begin{bmatrix} \alpha u_1 + \beta v_1 & \alpha u_2 + \beta v_2 \\ b & c \end{bmatrix}$$

   resulta

   $$det(A) = \begin{vmatrix} \alpha u_1 + \beta v_1 & \alpha u_2 + \beta v_2 \\ b & c \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ b & c \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ b & c \end{vmatrix}.$$

Propiedades

Observación importante: La tercer propiedad NO es la linealidad de la función determinante. Esto es, en general,

$$det(\alpha A + \beta B) \neq \alpha \; det(A) + \beta \; det(B).$$

Dicho de otra manera, el determinate NO ES una transformación lineal del espacio de matrices $n \times n$ en $\mathbb{R}$.

Por otro lado, la propiedad 3 establece la *linealidad en la primer fila*. Sin embargo, combinando con la propiedad 2, tenemos que el determinante es lineal en todas sus filas. (Ejercicio).

A partir de esta observación, la propiedad 3. la reescribimos como:

3. El determinante es *lineal en cada una de sus filas*.

Veremos que las tres propiedades presentadas *definen* al determinante. Esto es, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe una única función del conjunto de matrices $n \times n$ en $\mathbb{R}$ que verifica las propiedades 1., 2. y 3..

Probaremos primero muchas de las propiedades del determinante que conocemos y que pueden ser deducida de estas tres.

Propiedades (continuación)

4. Si A tiene dos filas iguales, $det(A) = 0$.

   Esto se deduce de la Propiedad 2: si A tiene dos filas iguales y las intercambio, obtengo la misma matriz. Sin embargo, por Propiedad 2, el determinante cambia de signo. O sea, $det(A) = -det(A)$ lo cual implica $det(A) = 0$.

5. Si a una fila de A le resto un múltiplo de otra de sus filas, el determinante no cambia.

   Esto se deduce de la *linealidad por filas* del determinante y la Propiedad 4.. Ejercicio.

6. Si A tiene una fila nula, $det(A) = 0$.

   La prueba se basa en las Propiedades 5. y 4.. Ejercicio.

7. Si A es una matriz diagonal, su determinante es el producto de las entradas de A en la diagonal. Esto es, $det(A) = A_1^1 A_2^2 \dots A_n^n$.

   La prueba se basa en las Propiedades 1., 3. y 6. Ejercicio.

Definición de determinante

Estamos en condiciones de probar:

Teorema: Para todo $n \in \mathbb{N}$, existe una única función del conjunto de matrices $n \times n$ en $\mathbb{R}$ que verifica las propiedades 1., 2. y 3..

Prueba:
Sea $n \in \mathbb{N}$ y f una función del conjunto de matrices $n \times n$ en $\mathbb{R}$ que verifica las propiedades 1., 2. y 3..

Sea A una matriz $n \times n$ y apliquemos el método de Eliminación de Gauss hasta obtener la matriz diagonal D.

Notemos con $A^{(k)}$ la matriz que se obtiene en el paso k del proceso de eliminación de Gauss. Entonces, $A^{(0)} = A$ y sea $p \in \mathbb{N}$ tal que $A^{(p)} = D$.

Para $k = 1, \ldots, p$ vale lo siguiente:

1. Por Propiedad 5., si $A^{(k)}$ se obtuvo en un paso de eliminación, $f(A^{(k)}) = f(A^{(k-1)})$.
2. Por Propiedad 2., si $A^{(k)}$ se obtuvo en un paso de permutación de filas, $f(A^{(k)}) = -f(A^{(k-1)})$.

Definición de determinante

Prueba (continuación):

Por lo tanto, $f(A) = f(D)$ si el número de pasos de permutación de filas es par y $f(A) = -f(D)$ en caso contrario.

Por propiedad 7., $f(D)$ está unívocamente determinado y es el producto de las entradas de su diagonal. Por lo tanto, el valor de $f(A)$ también queda unívocamente determinado.

El teorema anterior nos permite realizar a siguiente definición:

Definición: Dado $n \in \mathbb{N}$, llamamos *determinante* a la función *det* del conjunto de matrices $n \times n$ en $\mathbb{R}$ que verifica las propiedades 1.,2. y 3..

A continuación, seguiremos verificando la validez a partir de esta definición de otras propiedades ya conocidas del determinante.

Propiedades (continuación)

8. Si A es una matriz triangular, $det(A)$ es el producto de las entradas de A en su diagonal. Esto es, $det(A) = A^1_1 A^2_2 \dots A^n_n$.

   Prueba: Aplicando Eliminación Gaussiana podemos llegar desde A a la matriz diagonal D con las mismas entradas en la diagonal, sin realizar permutaciones. Por lo tanto,

$$det(A) = det(D) = A^1_1 A^2_2 \dots A^n_n.$$

Además de proveernos el método de cálculo de los determinantes, la propiedad 8. es la llave para obtener el *test de singularidad*.

9. Test de singularidad:

$$det(A) = 0 \text{ si y solo si } A \text{ es singular.}$$

   Prueba: Ejercicio.

10. $det(A.B) = det(A)\, det(B)$.

    Prueba:
    Sabemos que si B es singular, $A.B$ también lo es, para toda A. (Ejercicio).

    Por lo tanto, si B es singular, por Prop. 9., $det(AB) = det(B) = 0$ y vale $det(AB) = det(A)\, det(B)$.

Propiedades

10. **Prueba**:(continuación)

    Sea entonces B una matriz $n \times n$ no singular. Debemos probar que, para toda matriz A, $det(AB) = det(A)\,det(B)$.

    Para esto, vamos a hacer uso de la *unicidad* en las funciones que satisfacen las propiedades 1., 2. y 3..

    Definimos una función f del conjunto de matrices $n \times n$ en $\mathbb{R}$ tal que, para toda A matriz $n \times n$, $f(A) = \frac{det(AB)}{det(B)}$.

    La estrategia de la demostración es probar que f satisface las propiedades 1., 2. y 3.. En tal caso, tendremos que $f = det$, esto es, para toda matriz A, $f(A) = \frac{det(AB)}{det(B)} = det(A)$ y la tesis quedaría demostrada .

    Sólo resta entonces probar que f satisface las propiedades 1., 2. y 3..

    - Prop. 1: ¿$f(I) = 1$? Es fácil chequear que si.
    - Prop. 2: Sea A' una matriz que se obtiene intercambiando las filas i y j de A. Debemos probar que $f(A') = \frac{det(A'B)}{det(B)} = -f(A)$.

      Como $A'B$ se obtiene intercambiando las filas i y j de AB, por Prop.2 de la función det sabemos que $det(A'B) = -det(AB)$. Por lo tanto $f(A') = -f(A)$.

Propiedades

10. **Prueba**(continuación):
    - Prop. 3: Sea A una matriz cuya primer fila A_1 se escribe como combinación lineal de vectores $u, v \in \mathbb{R}^n$, i.e. $A_1 = \alpha u + \beta v$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Sean $A[u]$ y $A[v]$ las matrices obtenidas a partir de A, reemplazando A_1 por u y por v, respectivamente. Debemos probar que

      $$f(A) = \alpha\, f(A[u]) + \beta\, f(A[v]).$$

      Observemos que la primer fila de AB será $\alpha(uB) + \beta(vB)$. Llamamos $AB[uB]$ y $AB[vB]$ a las matrices obtenidas a partir de AB reemplazando su primer fila, respectivamente, por uB y por vB. Por propiedad 3. de *det* tenemos que

      $$det(AB) = \alpha\, det(AB[uB]) + \beta\, det(AB[vB]).$$

      Solo resta observar que $AB[uB] = A[u]B$ y $AB[vB] = A[v]B$. Por lo tanto,

      $$f(A) = \frac{det(AB)}{det(B)} = \alpha \frac{det(A[u]B)}{det(B)} + \beta \frac{det(A[v]B)}{det(B)} = \alpha f(A[u]) + \beta f(A[v]).$$

Observación: el método de eliminación de Gauss provee una prueba alternativa de la Prop. 10. (ver Strang).

Propiedades

11. $det(A^T) = det(A)$.

    Prueba: Si A es singular, A^T también lo es y por lo tanto ambas matrices tienen determinante nulo.

    Sea A una matriz no singular. Consideremos la descomposición LDV de A, esto es $PA = LDV$. Tenemos entonces $det(PA) = det(LDV)$. Por Propiedad 10.,

    $$det(P)det(A) = det(L)det(D)det(V).$$

    Por otro lado, $A^T P^T = (PA)^T = (LDV)^T = V^T D^T L^T$ y por lo tanto

    $$det(A^T)det(P^T) = det(V^T)det(D^T)det(L^T).$$

    Como L, L^T, U y U^T son matrices triangulares con 1's en la diagonal, por la Propiedad 8. sus determinantes son iguales a 1. Además, D es matriz diagonal, por lo tanto $D = D^T$.

    Tenemos entonces:

    $$det(P)det(A) = det(D) = det(A^T)det(P^T).$$

Propiedades

11. (continuación)
    Llegamos a
    $$det(P)det(A) = det(A^T)det(P^T).$$
    Por Propiedad 2., los determinates de P y P^T son 1 o -1. Como P y P^T son matrices inversas (ejercicio), tenemos que $PP^T = I$ y por lo tanto, $det(P)det(P^T) = 1$. Por lo tanto, ambos determinantes deben tener el mismo signo y $det(P) = det(P^T)$, quedando probado que $det(A) = det(A^T)$.

Observación importante: La Propiedad 11. permite extender a las columnas todas las propiedades asociadas a filas: el determinante cambia de signo por intercambio de columnas, si hay dos columnas iguales o una columna nula el determinante es cero, el determinante depende linealmente en cada columna.

Fórmulas para el determinante

Ya hemos visto una forma de calcular el determinate de una matriz a través de la Eliminación Gaussiana y esa será la forma más sencilla de obtener su valor.

Nos concentramos ahora en obtener fórmulas que refieran a la relación entre el valor del determinante y las entradas originales de la matriz.

Para matrices 2×2 y 3×3 conocemos fórmulas sencillas:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \quad ; \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + dhc - ceg - bdi - fha$$

Estas dos fórmulas pueden ser fácilmente deducidas de las propiedades 1., 2. y 3. Mostramos la idea para el caso $n = 3$.

La idea es pensar a la primer fila como $(a, 0, 0) + (0, b, 0) + (0, 0, c)$ y a la segunda, como $(d, 0, 0) + (0, d, 0) + (0, 0, f)$ y la tercera como $(g, 0, 0) + (0, h, 0) + (0, 0, i)$.

Fórmulas para el determinante

Aplicando la Propiedad 3 en la primer fila, tenemos que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b & 0 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}.$$

Veamos ahora el desarrollo por la segunda fila de

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f \\ g & h & i \end{vmatrix}.$$

Desarrollemos ahora por la tercer fila a

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 \\ g & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{vmatrix} = 0$$

En cambio, si desarrollamos a $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ g & h & i \end{vmatrix}$ tendremos:

Fórmulas para el determinante

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ g & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & h & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{vmatrix}$$

Similarmente, si desarrollamos $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ llegaremos a $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f \\ 0 & h & 0 \end{vmatrix}$.

Por lo tanto,

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f \\ 0 & h & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= aei\, det(I) + afh\, det(P_{23}) = aei - afh.$$

Fórmulas para el determinante

Teníamos

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b & 0 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

y obtuvimos

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei - afh.$$

Procediendo en forma similar con los otros dos sumandos, tenemos:

$$\begin{vmatrix} 0 & b & 0 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -bdi + bfg \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = cdh - ceg$$

llegando a la fórmula conocida.

Fórmulas para el determinante

Si miramos un poco más en detalle lo que hicimos, tenemos

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b & 0 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} =$$

$$= (aei - afh) + (-1)(bdi - bfg) + (cdh - ceg) =$$

$$= a\,(ei - fh) + b\,(-1)\,(di - fg) + c\,(dh - eg).$$

Si realizamos el mismo trabajo en una matriz $n \times n$, desarrollando su determinante por la primer fila, éste quedará expresado como suma de n determinantes de matrices que reemplazan la primer fila en A por $A_1^j e^j$, para $j = 1, \ldots, n$.
Cada uno de esos determinantes resultará igual al producto de A_1^j por una expresión que no depende de las entradas de la columna A^j. O sea, el determinante asociado a A_1^j dependerá de la información de una submatriz M_{1j} de A que se obtiene borrando la fila 1 y la columna j.

Fórmulas para el determinante

Más aún, sabemos que la expresión por la cual multiplicamos a A_1^j es lo que llamamos *cofactor* $C_{1j} = (-1)^{1+j} det(M_{1j})$.

El mismo tratamiento podría haber sido hecho comenzando el desarrollo del determinante por cualquiera de sus filas.

Para todo $i, j = 1, \dots, n$, definiendo M_{ij} como la submatriz de A obtenida por borrado de su fila i su columna j y el cofactor $C_{ij} = (-1)^{i+j} det(M_{ij})$, tenemos la fórmula recursiva del determinante:

Teorema: Para todo $i = 1, \dots, n$,

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} A_i^j \, C_{ij}.$$

La demostración formal de este resultado es demasiado técnica y no la vamos a mostrar en esta oportunidad.

Para quien le interese: Una posible línea de prueba es definir la función f_n de matrices $n \times n$ en $\mathbb{R}$ tal que $f_n(A) = \sum_{j=1}^{n} A_1^j \, C_{1j}$ y probar que la misma verifica las propiedades 1., 2. y 3..

Fórmulas usando determinantes

Dada una matriz A llamamos *matriz adjunta de* A a la matriz C cuyas entradas son los cofactores de A.

Lema: Sea A una matriz inversible. Entonces,

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} C^T.$$

Prueba: Ejercicio.

Ayuda: Probar que $AC^T = det(A)I$.

Como consecuencia de este resultado obtenemos la *Regla de Cramer* para la solución de un sistema no singular:

Regla de Cramer: Sea A es una matriz no singular y $b \in \mathbb{R}^n$. Para $j = 1, \ldots n$, sea B_j la matriz que se obtiene reemplazando la columna j-ésima de A por b. Entonces, la solución $\hat{x}$ del sistema $Ax = b$ verifica

$$\hat{x}_j = \frac{det(B_j)}{det(A)}$$

para $j = 1, \ldots, n$.

Prueba: Ejercicio.

Ayuda: Probar que $C^j b = det(B_j)$.