3. Sea W el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por $v^1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $v^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

   $a)$ Si $y = (3, 1, 5, 1)^T$, escribirlo como la suma de un vector en W y uno en $W^\perp$.

   $b)$ Si $y = (3, -1, 1, 13)^T$, encontrar el punto más cercano a y en W.

   $a)$ Dado que v^1 y v^2 son una base ortogonal de W, podemos calcular el vector correspondiente a W como

   $$proy_{s/W}\ y = \frac{\langle y, v^1 \rangle}{\|v^1\|^2} v^1 + \frac{\langle y, v^2 \rangle}{\|v^2\|^2} v^2$$

   y luego hacer $y - proy_{s/W}\ y$ para obtener el vector en $W^\perp$ (recordar el ejercicio 10 de la práctica anterior).

   $b)$ Decir: encontrar el punto más cercano a y en W es equivalente a pensar en encontrar $proy_{s/W}\ y$. Podríamos haber enunciado, encontrar el vector proyección de y sobre W y el problema sigue siendo equivalente. Al proyectar sobre un subespacio (pasa por el origen), las coordenadas de un punto en el subespacio coinciden con las componentes del vector que tiene por extremos dicho punto y el origen.

   Entonces, lo que pide este apartado es calcular $proy_{s/W}\ y = \dfrac{\langle y, v^1 \rangle}{\|v^1\|^2} v^1 + \dfrac{\langle y, v^2 \rangle}{\|v^2\|^2} v^2$.

5. Sean

   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

   $a)$ Probar que $Ax = b$ es un sistema inconsistente.

   $b)$ Encontrar las ecuaciones normales asociadas al sistema.

   $c)$ Encontrar $\hat{x}$, la solución que minimiza el error $\|b - Ax\|$.

   $d)$ Calcular el error.

   $e)$ Encontrar $\tilde{b}$, la proyección de b sobre el espacio columna de A.

   $a)$ ¿Existe $x = (x_1, x_2)^T$ tal que $Ax = b$?

   A partir del último renglón del sistema podemos concluir que es inconsistente.

   $b)$ Ecuaciones normales asociadas a $Ax = b$:

   $$A^T A x = A^T b.$$

   Haciendo los calculos correspondientes obtenemos $A^T A = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ y $A^T b = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$.

   $c)$ Solución que minimiza el error: $\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T b$.

   Resolviendo por medio de eliminación Gaussiana el sistema:

   $$\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \hat{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

   llegamos a $\hat{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{29} \\ \frac{23}{29} \end{bmatrix}$.

$d), e)$

- $e = \|b - A\hat{x}\|$ (en la práctica Ax en vez de $A\hat{x}$, está mal) y
- $A\hat{x} = \tilde{b}$ donde $\tilde{b} = Pb$ es la proyección de b sobre $C(A)$.

Realizando las cuentas tenemos: $\tilde{b} = \left(\frac{47}{29}, \frac{22}{29}, \frac{2}{29}, 0\right)^T$ y $e = \frac{\sqrt{3190}}{29}$.

8. Sean $u^1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)^T$, $u^2 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)^T$ y $U = [u^1 u^2]$.

   $a)$ Calcular $U^T U$ y UU^T.

   $b)$ Sean $y = (4, 8, 1)^T$ y $W = C(U)$. Calcular $proy_{s/W}\ y$ y $(UU^T)y$.

   $b)$ Para calcular $(UU^T)y$ debemos tener en cuenta:

   - $U = [u^1 u^2] = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$.
   - $U^T = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$.
   - $y = (4, 8, 1)^T$.

   Luego, como

   $$UU^T = \begin{bmatrix} \frac{8}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{2}{9} & \frac{5}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad y = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix},$$

   resulta $(UU^T)y = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$.

   ¿Qué relación existe entre $(UU^T)y$ y $proy_{s/W}\ y$?

14. Sea A una matriz de columnas l.i. y tamaño $k \times n$. Sea Q la matriz que se obtiene ortonormalizando las columnas de A

   $a)$ Probar que $R = Q^T A$ es triangular superior inversible.

   $b)$ Probar que $A = QR$.

   $a)$ Considerando $Q = [q_1, \ldots, q_n]$ y $A = [a_1, \ldots, a_n]$, planteamos el producto $Q^T A$:

   $$Q^T A = \begin{bmatrix} q_1^T \\ q_2^T \\ \vdots \\ q_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1^T a_1 & q_1^T a_2 & \ldots & q_1^T a_n \\ q_2^T a_1 & q_2^T a_2 & \ldots & q_2^T a_n \\ q_3^T a_1 & q_3^T a_2 & \ldots & q_3^T a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_n^T a_1 & q_n^T a_2 & \ldots & q_n^T a_n \end{bmatrix}$$

   Observamos que en la demostración de correctitud del proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt probamos que, **si los vectores de entrada son li** (hipótesis del ejercicio 14), para todo $i = 1, \ldots, n$ resulta que:

   (1) $q_i \perp q_j$ para todo j tal que $1 \le j \le i - 1$.

(2) q_i es una combinación lineal de a_j con $1 \leq j \leq i$.
(3) $q_i \neq 0$.

Si combinamos las dos primeras proposiciones tenemos que para todo $i = 1, \ldots, n$:

$$q_i \overset{(1)}{\perp} \langle \{q_1, \ldots, q_{i-1}\} \rangle \overset{(2)}{=} \langle \{a_1, \ldots, a_{i-1}\} \rangle$$

lo cual implica que

$$0 = \langle q_i, a_j \rangle = q_i^T a_j \qquad \text{para } 1 \leq j \leq i-1,$$

y por lo tanto la matriz R resulta triangular superior:

$$R = Q^T A = \begin{bmatrix} q_1^T a_1 & q_1^T a_2 & \ldots & q_1^T a_n \\ 0 & q_2^T a_2 & \ldots & q_2^T a_n \\ 0 & 0 & \ldots & q_3^T a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & q_n^T a_n \end{bmatrix}$$

Para ver que R es invertible tenemos que demostrar que $q_i^T a_i = \langle q_i, a_i \rangle \neq 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$:

$$q_i \overset{(2)}{=} \sum_{j=1}^{i} c_j a_j \implies \langle q_i, q_i \rangle = \sum_{j=1}^{i} c_j \langle a_j, q_i \rangle = c_i \langle a_i, q_i \rangle, \qquad \text{para ciertos } c_j \in \mathbb{R}.$$

Por (3), resulta que $\langle q_i, q_i \rangle \neq 0$, lo cual implica que $\langle a_i, q_i \rangle \neq 0$ y por lo tanto R es invertible.

Observación: en este apartado no se usó la hipótesis de que los vectores q_i tienen norma 1, esa hipótesis va a ser necesaria para la parte b).

b) Teniendo la precaución de que esta matriz Q no necesariamente es cuadrada, el ejercicio sale con ideas similares a las del ejercicio 17)b).

17. Sea Q una matriz ortogonal $n \times n$. Probar que:

a) $Q^T = Q^{-1}$.
b) Para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $\|Qx\| = \|x\|$.

a) Considerando $Q = [q_1, \ldots, q_n]$, planteamos el producto $Q^T Q$:

$$Q^T Q = \begin{bmatrix} q_1^T \\ q_2^T \\ \vdots \\ q_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1^T q_1 & q_1^T q_2 & \ldots & q_1^T q_n \\ q_2^T q_1 & q_2^T q_2 & \ldots & q_2^T q_n \\ q_3^T q_1 & q_3^T q_2 & \ldots & q_3^T q_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_n^T q_1 & q_n^T q_2 & \ldots & q_n^T q_n \end{bmatrix}$$

Recordando la definición de matriz ortonormal (y de vectores ortonormales) resulta que:

$$\begin{aligned} q_i^T q_j &=< q_i, q_j >= 0 && \text{para } i, j = 1, 2, \ldots, n \text{ tal que } i \neq j \\ q_i^T q_i &=< q_i, q_i >= \|q_i\|^2 = 1 && \text{para } i = 1, 2, \ldots, n \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$Q^T Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} = I_n.$$

b) Dado que la norma es no negativa podemos decir que:

$$\|Qx\| = \|x\| \iff \|Qx\|^2 = \|x\|^2$$

Trabajamos sobre la expresión $\|Qx\|^2$:

$$\|Qx\|^2 = \langle Qx, Qx \rangle = (Qx)^T (Qx) = (x^T Q^T)(Qx) = x^T (Q^T Q) x \overset{a)}{=} x^T x = \langle x, x \rangle = \|x\|^2$$