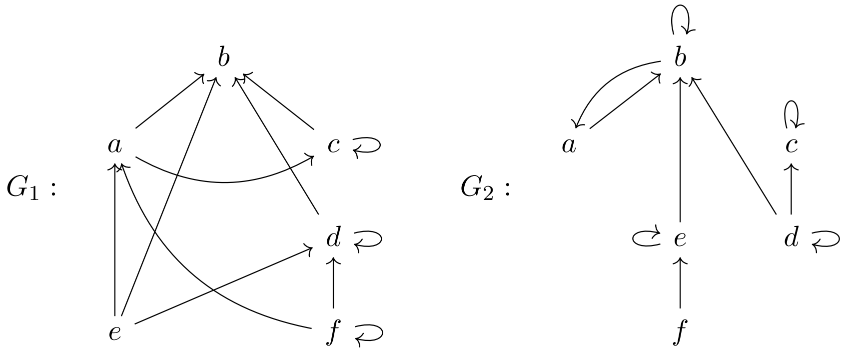
Práctica 2: Conjuntos ordenados

1. Considerar las relaciones $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ en $A = \{1,2,3,4,5\}$ cuyas matrices asociadas son

$$M(\mathcal{R}_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M(\mathcal{R}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

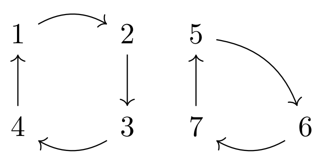
Determinar los grafos dirigidos asociados a $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ y a las relaciones $\mathcal{R}_3 = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$, $\mathcal{R}_4 = \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ y $\mathcal{R}_5 = \mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1$.

2. Considerar las relaciones $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ cuyos grafos dirigidos asociados son los grafos G_1 y G_2 de la siguiente figura:



Determinar los grafos dirigidos asociados a las relaciones $\mathcal{R}_3 = \mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2$ y $\mathcal{R}_4 = \mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1$.

3. Sea $\mathcal{R}$ la relación sobre $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ cuyo grafo dirigido asociado es



a) Si $\mathcal{R}^1 = \mathcal{R}$, $\mathcal{R}^2 = \mathcal{R} \circ \mathcal{R}$ y $\mathcal{R}^n = \mathcal{R}^{n-1} \circ \mathcal{R}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, encontrar el número natural $n \geq 2$ más pequeño tal que $\mathcal{R}^n = \mathcal{R}$.

b) ¿Cuál es el $n \in \mathbb{N}$ más pequeño para el cual el grafo de $\mathcal{R}^n$ contiene al menos un lazo?

c) ¿Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que el grafo de $\mathcal{R}^n$ consta sólo de lazos?

4. Lema de Yoneda. Sea $(P, \mathcal{R})$ un conjunto preordenado. Probar que

$$(x \,\mathcal{R}\, y) \iff (\forall z \in P,\ (z \,\mathcal{R}\, x) \Rightarrow (z \,\mathcal{R}\, y))$$

5. Sea $(A, \mathcal{R})$ un conjunto preordenado. Probar:

a) Si existe un elemento máximo, entonces todos los maximales son máximos.

b) Sea $B \subseteq A$. Si $a \in B$ es cota superior de B, entonces a es un elemento maximal de B. ¿Vale la recíproca?

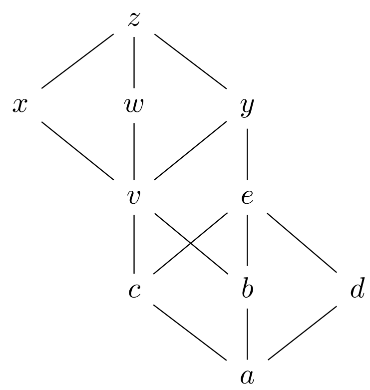
6. Decimos que un conjunto preordenado $(A, \mathcal{R})$ satisface el **axioma del supremo** si todo subconjunto no vacío de A acotado superiormente tiene un supremo.

a) Mostrar que $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ satisface el axioma del supremo.

b) ¿El axioma del supremo es una propiedad hereditaria? Es decir, si $(A, \mathcal{R})$ es un conjunto preordenado que satisface el axioma del supremo y $B \subseteq A$, ¿$(B, \mathcal{R}_{|B\times B})$ también lo satisface?

c) Sea $(A, \mathcal{R})$ un conjunto preordenado. Decimos que $(A, \mathcal{R})$ satisface el **axioma del ínfimo** si todo subconjunto no vacío de A acotado inferiormente tiene ínfimo. Probar que $(A, \mathcal{R})$ satisface el axioma del supremo si y solo si $(A, \mathcal{R})$ satisface el axioma del ínfimo.

7. Sea $A = \{a, b, c, d, e, v, w, x, y, z\}$ y sea $\preceq$ el orden parcial en A cuyo diagrama de Hasse es el siguiente:



Determinar, si existen,

a) $\inf\{b, c\}$

b) $\inf\{b, w\}$

c) $\inf\{e, x\}$

d) $\inf\{b, e\}$

e) $\sup\{c, b\}$

f) $\sup\{d, x\}$

g) $\sup\{c, e\}$

h) $\sup\{a, v\}$

8. ¿Cuántas relaciones posibles hay en $A = \{a, b, c\}$? Responder la misma pregunta para: preórdenes, órdenes parciales, órdenes totales, y relaciones de equivalencia. ¿Y para un conjunto finito de n elementos?

9. Sea $(A, \preceq)$ un poset. Un subconjunto $B \subset A$ se denomina una **anticadena** si para cada $x, y \in B$ se verifica que

$$x \preceq y \implies x = y.$$

Probar que el conjunto de todos los elementos maximales (resp. minimales) de un conjunto ordenado, es una anticadena.

10. Sean $(A, \preceq_1)$ y $(A, \preceq_2)$ posets. Determinar si las siguientes relaciones determinan un orden parcial en A:

a) $\preceq_1 \cup \preceq_2$. **b)** $\preceq_1 \cap \preceq_2$. **c)** $\preceq_1 \circ \preceq_2$

11. Sean $(A, \preceq_A)$ y $(B, \preceq_B)$ posets. Probar que los siguientes conjuntos son posets:

a) $(A \times B, \preceq_{prod})$ donde:
$$(a, b) \preceq_{prod} (a', b') \iff (a \preceq_A a' \wedge b \preceq_B b').$$

b) $(A \times B, \preceq_{lex})$, donde
$$(a, b) \preceq_{lex} (a', b') \iff (a \prec_A a' \vee (a = a' \wedge b \preceq_B b')).$$

c) Si además $(A, \preceq_A)$ y $(B, \preceq_B)$ son conjuntos totalmente ordenados, ¿lo son también $(A \times B, \preceq_{prod})$ y $(A \times B, \preceq_{lex})$?

d) Para cada uno de los siguientes posets $(A, \preceq_A)$ y $(B, \preceq_B)$, construir los diagramas de Hasse de $(A, \preceq_A)$, $(B, \preceq_B)$, $(A \times B, \preceq_{prod})$ y $(A \times B, \preceq_{lex})$. Encontrar en cada caso los elementos maximales, minimales, máximos y mínimos si los hubiera.

i. $A = \mathcal{P}(\{0\})$, $\preceq_A = \subseteq$ y $B = \mathcal{P}(\{1, 2\})$, $\preceq_B = \subseteq$.
ii. $A = B = \{1, 2, 4, 6\}$, $\preceq_A = \preceq_B = |_{|A \times A}$

e) Mostrar que $(\mathcal{P}(\{0\}) \times \mathcal{P}(\{1, \ldots, n\}), \preceq_{prod}) \simeq (\mathcal{P}(\{0, \ldots, n\}), \subseteq)$.

12. Sea $(P, \mathcal{R})$ un conjunto preordenado.

a) Probar que la relación $\sim$ en P dada por
$$x \sim y \iff (x \,\mathcal{R}\, y \wedge y \,\mathcal{R}\, x)$$
es una relación de equivalencia en P.

b) Construir un poset $(P/\!\sim, \preceq)$ tal que la proyección al cociente $\pi : P \to P/\!\sim$ (dada por $\pi(p) = [p]$) sea un morfismo de orden.

c) Aplicar esta construcción a los siguientes conjuntos preordenados:

i. Una relación de equivalencia $\sim$ en un conjunto X vista como preorden.
ii. $(\mathbb{Z} - \{0\}, |)$. Mostrar que la construcción es isomorfa a $(\mathbb{N}, |)$.
iii. $(\texttt{Prop}, D)$, donde `Prop` son las fórmulas del cálculo proposicional y $\phi D \psi \Leftrightarrow \{\phi\} \vdash \psi$. Para este caso particular, la construcción se llama álgebra de Lindenbaum-Tarski.

13. Sean $(X, \preceq_X)$ y $(Y, \preceq_Y)$ posets. Probar que son equivalentes:

a) $(X, \preceq_X) \simeq (Y, \preceq_Y)$.

b) Existe $f : (X, \preceq_X) \to (Y, \preceq_Y)$ morfismo de orden sobreyectivo tal que
$$f(a) \preceq_Y f(b) \Rightarrow a \preceq_X b.$$

c) Existen $f : (X, \preceq_X) \to (Y, \preceq_Y)$ y $g : (Y, \preceq_Y) \to (X, \preceq_X)$ morfismos de orden tales que $f \circ g = id_Y$ y $g \circ f = id_X$, es decir, $g = f^{-1}$.

14. Sea $(A, \preceq)$ poset. Para todo $a \in A$ se define:

$$A_a \doteq \{x \in A : x \leq a\}$$

Sea $\mathcal{A} = \{A_a : a \in A\}$, mostrar que $(\mathcal{A}, \subseteq) \simeq (A, \preceq)$.

15. Definir un morfismo de orden biyectivo entre $(\mathbb{N}, |)$ y $(\mathbb{N}, \leq)$. ¿Son posets isomorfos?

16. ¿Existe algún conjunto con dos órdenes totales distintos (salvo isomorfismo)? Ayuda: pensar en $(\mathbb{N}, \leq)$ y $(\mathbb{N}, \geq)$. ¿Existe un orden total diferente a $\leq$ y $\geq$ para $\mathbb{N}$? ¿Cuántos órdenes totales hay en $\mathbb{N}$?

17. Sean $(X, \preceq_X)$ y $(Y, \preceq_Y)$ posets. Una conexión de Galois es un par de funciones (f, g) con $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ tales que:

$$f(x) \preceq_Y y \iff x \preceq_X g(y) \quad \forall\, x \in X, y \in Y.$$

a) Probar que todo isomorfismo de orden f induce una conexión de Galois (f, f^{-1}).

b) Dada una función $f : A \to B$, probar que se puede construir una conexión de Galois entre $\mathcal{P}(A)$ y $\mathcal{P}(B)$ utilizando los operadores que calculan la imagen de f sobre un subconjunto de A y la imagen inversa de f sobre un subconjunto de B.

c) Encontrar una conexión de Galois (id, g) entre $(\mathbb{N}, \leq)$ y $(\mathbb{Q}_0^+, \leq)$, donde id es la inclusión.

d) Dada una conexión de Galois (f, g) entre $(X, \preceq_X)$ y $(Y, \preceq_Y)$, probar que

$$x \preceq_X g(f(x)) \;\text{ y }\; f(g(y)) \preceq_Y y$$

para todo $x \in X, y \in Y$.

e) Dada una conexión de Galois (f, g) entre $(X, \preceq_X)$ y $(Y, \preceq_Y)$, probar que f y g son morfismos de orden.

18. Determinar si los siguientes posets están bien ordenados:

a) $(\mathbb{Z}, \leq)$.

b) $(\mathbb{N}, \geq)$.

c) $(\mathbb{R}, \leq)$.

d) $(\mathbb{R}_0^+, \leq)$.

e) $(\mathbb{N}, |)$.

f) $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$, $X \neq \emptyset$.