Práctica: CAPÍTULO 5 (PRIMERA PARTE) - AUTOVECTORES Y AUTOVALORES

Salvo que se mencione lo contrario, los espacios vectoriales son considerados con sus operaciones estándares y sus bases canónicas. Dado V un espacio vectorial, denotamos con $\mathcal{L}(V)$ el espacio de las transformaciones lineales de V en sí mismo.

1. Calcular los autovalores y sus autovectores asociados para las siguientes tranformaciones lineales:
   a) $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ tal que $T(u,v) = (v,u)$ para $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.
   b) $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tal que $T(u,v,w) = (2v,0,5w)$ para $(u,v,w) \in \mathbb{R}^3$.
   c) $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tal que
   $$T(x_1,\cdots,x_n) = (x_1+\cdots+x_n,\cdots,x_1+\cdots+x_n), \qquad x_1,\cdots,x_n \in \mathbb{R}.$$

2. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Probar que, para toda $T \in \mathcal{L}(V)$ y para cada autovalor λ de T, el autoespacio asociado a λ es un subespacio vectorial de V.

3. Calcular los autovalores y sus autovectores asociados para las siguientes matrices:
   $$a)\begin{bmatrix}3 & 0\\ 8 & -1\end{bmatrix} \qquad b)\begin{bmatrix}10 & -9\\ 4 & -2\end{bmatrix} \qquad c)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \qquad d)\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

4. En cada caso, hallar el autoespacio de A asociado a λ:
   $$a)A = \begin{bmatrix}4 & -2\\ -3 & 9\end{bmatrix}, \lambda = 10, \qquad b)B = \begin{bmatrix}4 & 2 & 3\\ -1 & 1 & -3\\ 2 & 4 & 9\end{bmatrix}, \lambda = 3.$$

5. Probar que, si A es una matriz diagonal $n \times n$, para todo $i \in \{1,\ldots,n\}$, $x^i = e_i$ es un autovector asociado a $\lambda_i = A_i^i$.

6. Demostrar que los autovalores de una matriz triangular son los elementos de su diagonal.

7. Sean $A = \begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 4\end{bmatrix}$, $w(x) = \begin{bmatrix}u(x)\\ v(x)\end{bmatrix}$ y $w'(x) = \begin{bmatrix}u'(x)\\ v'(x)\end{bmatrix}$. Considerar el sistema de ecuaciones diferenciales lineales:
   $$w'(x) = Aw(x), \quad w(0) = \begin{bmatrix}0\\ 6\end{bmatrix},$$
   y determinar λ, α y β tales que $w(x) = \begin{bmatrix}\alpha e^{\lambda x}\\ \beta e^{\lambda x}\end{bmatrix}$ es solución del sistema dado.

8. Encontrar el polinomio característico y 4 autovectores l.i. de la matriz proyección de $\mathbb{R}^4$ sobre $a = (1,1,0,-1)^T$.

9. *a)* Sea A una matriz $n \times n$ tal que la suma de las entradas de cada una de sus filas es igual a $\beta \in \mathbb{R}$. Mostrar que β es un autovalor de A.
   b) Sea A una matriz $n \times n$ tal que la suma de las entradas de cada una de sus columnas es igual a $\beta \in \mathbb{R}$. Mostrar que β es un autovalor de A.

10. Sea $A = \begin{bmatrix}5 & -2 & 6 & -1\\ 0 & 3 & h & 0\\ 0 & 0 & 5 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$. Calcular h tal que el autoespacio correspondiente a $\lambda = 5$ sea bidimensional.

11. Diagonalizar las siguientes matrices:
    $$a)\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & 1\end{bmatrix}, \qquad b)\begin{bmatrix}4 & 0 & -2\\ 2 & 5 & 4\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}, \qquad c)\begin{bmatrix}-7 & -16 & 4\\ 6 & 13 & -2\\ 12 & 16 & 1\end{bmatrix}, \qquad d)\begin{bmatrix}4 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}.$$

12. En cada uno de los siguientes ítems, siendo $A = S\Lambda S^{-1}$, calcular A^4.

$$a) S = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \Lambda = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad b) S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \Lambda = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}; \quad c) S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \Lambda = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

13. Hallar la matriz cuyos autovalores son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 4$ y cuyos autovectores son $x^1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $x^2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ respectivamente.

14. Si los autovalores de una matriz A de tamaño 3×3 son $1, 1$ y 2, ¿de cuál de las siguientes afirmaciones se tiene la certeza de que son verdaderas?. Justificar la respuesta.

    a) A es inversible.

    b) A es diagonalizable.

    c) A no es diagonalizable.

15. Demostrar cada una de las siguientes afirmaciones:

    a) La matriz diagonalizante S no es única.

    b) Si A es diagonalizable, la matriz diagonal es única (salvo ordenamiento de filas) y los elementos de su diagonal son los n autovalores de A.

    c) Si S diagonaliza a A, entonces la i-ésima columna de S es un autovector de A.

    d) Si S diagonaliza a A entonces S diagonaliza a A^k, para todo $k \in \mathbb{N}$.

16. Sea A una matriz 3×3 con dos autovalores diferentes tales que cada autoespacio es unidimensional. Determinar si A es diagonalizable justificando la respuesta.

17. $a)$ Describir una matriz 2×2 que sea inversible pero no diagonalizable.

    $b)$ Describir una matriz 2×2 distinta de cero que sea diagonalizable pero no inversible.

18. Dado que los números de Fibonacci satisfacen el sistema en diferencias:

$$u_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u_k = Au_k,$$

demostrar que para todo $k \geq 2$, $F_k = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \right]$.

EJERCICIOS ADICIONALES

1. Sea A una matriz $n \times n$. Probar que λ es autovalor de A si y sólo si λ es autovalor de A^T.

2. En cada caso, encontrar los autovalores de la matriz y los autoespacios asociados.

$$a) \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad b) \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 11 \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

    a) Comprobar que la traza de A es igual a la suma de los autovalores y el determinante de A, igual a su producto.

    b) Si consideramos $B = A - 7I$, ¿Cómo se relacionan los autovalores y autovectores asociados de A y B?

4. Sea V un espacio de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$ y sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Sea λ autovalor de T tal que todo $v \in V - \{0\}$ es un autovector asociado a λ. Probar que T debe ser igual a un escalar por la identidad en V.

5. Sea A una matriz 3×3, triangular superior, con valores 1, 2 y 7 en la diagonal.

   a) ¿Por qué es correcto afirmar que A es diagonalizable?

   b) ¿Cuál es la matriz Λ?