Resúmen Matemática Discreta

Bolzani Victorio,
Bosio Nicolás,
Marengo Juan Pablo

Febrero 2020

Contents

1 Capítulo 11

1.1 Definiciones Básicas

1.1.1 Definición grafo

Definición 1.1. *Sea V un conjunto finito no vacío, y sea $E \subseteq V \times V$. El par (V, E) es un grafo dirigido (sobre V), o digrafo (sobre V), donde V es el conjunto de vértices, o nodos y E es su conjunto de aristas. Escribimos $G = (V, E)$ para denotar tal digrafo.*

1.1.2 Definición camino

Definición 1.2. *Sean x, y vértices (no necesariamente distintos) de un grafo no dirigido $G = (V, E)$. Un camino $x - y$ en G es una sucesión alternada finita (sin lazos).*

$$x = x_0, e_1, x_1, e_2, x_2, e_3, ..., e_{n-1}, x_{n-1}, e_n, x_n = y$$

de vértices y aristas de G, que comienza en el vértice x y termina en el vértice y y que contiene las n aristas de $e_i = x_{i-1}, x_i$ donde $1 \leq i \leq n$

1.1.3 Definición camino simple y recorrido

Definición 1.3. *Consideremos un camino $x - y$ en un grafo no dirigido $G = (V, E)$.*

A *Si no se repite ninguna arista en el camino $x - y$, entonces el camino es un recorrido $x - y$. Un recorrido $x - x$ cerrado es un circuito.*

B *Cuando ningún vértice del camino $x - y$ se presenta más de una vez, el camino es un cámino simple $x - y$. El término ciclo se usa para describir un camino simple cerrado $x - x$*

1.1.4 Recorrido a camino simple

Teorema 1.1. *Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido, con $a, b \in V, a \neq b$. Si existe un recorrido (en G) de a a b, entonces existe un camino simple (en G) de a a b.*

Demostración. Como hay al menos un recorrido de a a b, seleccionamos el que tenga la longitud más corta, digamos $\{a, x_1\}, \{x_1, x_2\}, ..., \{x_n, b\}$. Si este recorrido no es un camion simple, tenemos la situación
$\{a, x_1\}, \{x_1, x_2\}, ..., \{x_{k-1}, x_k\}, \{x_k, x_{k+1}\}, ..., \{x_{m-1}, x_m\}, \{x_m, x_{m+1}\}, ..., \{x_n, b\}$, donde $k \leq m$ y $x_k = x_m$ posiblemente con $k = 0$ y $a(= x_0) = x_m$, o $m = n + 1$ y $x_k = b(= x_{n+1})$. Pero entonces $\{a, x_1\}, \{x_1, x_2\}, ..., \{x_{k-1}, x_k\}, \{x_m, x_{m+1}\}, ..., \{x_n, b\}$ es un recorrido simple más corto de a a b. □

1.1.5 Grafo conexo

Definición 1.4. *Sea $G = (V, E)$ es ungrafo no dirigido. Decimos que G es conexo si existe un camino simple entre cualesquiera dos vértices distintos de G. Sea $G = (V, E)$ es un grafo dirigido. Su grafo no dirigido asociado es el grafo obtenido de* *dirigida de un par de vértices distintos de G, entonces sólo uno de estas aristas se dibuja en el grafo no dirigido asociado. Cuando este grafo asociado es conexo, consideramos que G es conexo Un grafo que no es conexo es disconexo*

1.1.6 Componentes

Definición 1.5. *Para cualquier grafo $G = (V, E)$, el número de componentes de G se denota con $\kappa(G)$.*

1.1.7 Multigrafo

Definición 1.6. *Un grafo $G = (V, E)$ es un multigrafo si existen $a, b \in V, a \neq b$, con dos o más aristas de la forma (a)(a, b) (para un grafo dirigido), o (b)a, b (para un grafo no dirigido).*

1.2 Subgrafos, complementos e isomorfismos

1.2.1 Subgrafo

Definición 1.7. *Si $G = (V, E)$ es un grafo (dirigido o no), entonces $G_1 = (V_1, E_1)$ es un subgrafo de G si $\emptyset \neq V_1 \in V$ y $E_1 \subseteq E$, donde cada arista de E_1 es incidente con los vertices de V_1*

1.2.2 Subgrafo recubridor

Definición 1.8. *Dado un grafo (dirigido o no) $G = (V, E)$, sea $G_1 = (V_1, E_1)$ un subgrafo de G. Si $V_1 = V$, entonces G_1 es un subgrafo recubridor de G.*

1.2.3 Subgrafo inducido

Definición 1.9. *Sea $G = (V, E)$ un grafo (dirigido o no). Si $\emptyset \neq U \subseteq V$, el subgrafo G inducido por U es el subgrafo cuyo conjunto de vértices es U y que contiene todas las aristas (de G) de la forma (a)(x, y), para $x, y \in U$ (si G es dirigido), o (b)$\{x, y\}$, para $x, y \in U$ (si G es no dirigido). Denotamos este subgrafo $\langle U \rangle$. Un subgrafo G' de un grafo $G = (V, E)$ es un subgrafo inducido si existe $\emptyset \neq U \subseteq V$ tal $G' = \langle U \rangle$.*

1.2.4 Subgrafo $G - v$

Definición 1.10. *Sea v un vértice en un grafo $G = (V, E)$ (dirigido o no). El subgrafo de G denotado por $G - v$ tiene el cojunto de vértices $V_1 = V - v$ y el conjunto de aristas $E_1 \subseteq E$, tal que E_1 contiene todas las aristas en A excepto las incidentes con el vértices v. (Por lo tanto, $G - v$ es el subgrafo de G inducido por V_1.)*

1.2.5 Grafo completo K_n

Definición 1.11. *Sea V un conjunto de n vétices. El grafo completo sobre V, que se denota con K_n, es un grafo no dirigido sin lazos tal que para todos $a, b \in V, a \neq b$, existe un arista $\{a, b\}$*

1.2.6 Grafo complementario

Definición 1.12. *Sea G un grafo no dirigido sin lazos con n vértices. El complementario de G, que se denota con $\overline{G}$, es el subgrafo de K_n formado por los n vértices de G y todas las aristas que no esan en G. (Si $G = K_n, \overline{G}$ es un grafo con n vértices y ninguna arista. A este grafo se le llama grafo nulo.)*

1.2.7 Isomorfismo de grafos

Definición 1.13. *Sean $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ dos grafos no dirigidos. Una función $f : V_1 \to V_2$ es un isomorfismo de grafos si f es inyectiva y sobre t para todos $a, b \in V_1, \{a, b\} \in E_1$ si y solo si $\{f(a), f(b)\} \in E_2$. Cuando existe tal función, G_1 y G_2 son grafos isomorfismo.*

1.3 Grado de vértice, recorridos y circuitos

1.3.1 Grado de un vértice

Definición 1.14. *Sea G un grafo o multigrafo no dirigido. Para cualquier vértice v de G, el grado de v, que se denota con $grad(v)$, es el número de aristas en G que son incidentes con v. En este caso, un lazo en un vértice v se considera como dos aristas incidentes en v*

1.3.2 $\sum gr(v) = 2 * |E|$

Teorema 1.2. *Si $G = (V, E)$ es un grafo o multigrafo no dirigido, entonces $\sum_{v \in V} gr(v) = 2 * |E|$*

Demostración. Al considerar cada arista $\{a, b\}$ del grafo G, encontramos quie la arista contribuye con una unidad a grado(a) y a grado(b) y, en consecuencia, con dos unidades a $\sum_{v \in V} gr(v)$. Así, $2|E|$ cuenta grado(v), para todo $v \in V$ y $\sum_{v \in V} gr(v) = 2 * |E|$ □

1.3.3 Circuito y recorrido euleriano

Definición 1.15. *Sea $G = (V, E)$ un grafo o multigrafo no dirigido sin vértices aislados. Entonces G tiene un circuito euleriano si existe un circuito en G que recorre cada arista del grafo exactamente una vez. Si existe un recorrido abierto de a a b en G que recorre cada arista de G exactamente una vez, este recorrido se llamará recorrido Euleriano*

1.3.4 Condición necesaria Circuito Euleriano

Teorema 1.3. *Sea $G = (V, E)$ un grafo o multigrafo no dirigido sin vértices aislados. Entonces G tiene un circuito euleriano si y solo si G es conexo y todo vértice de G tiene grado par.*

Demostración. Si G tiene un circuito euleriano, entonces para cualquier $a, b \in V$ existe un recorrido de a a b; a saber, la parte de dicho circuito que comienza en a y termina en b. Por lo tanto, del teorema 11.1 se sigue que G es conexo. Sea c el vértice inicial del circuito euleriano. Para cualquier otro vértice de v en G, cada vez que el circuito llega a v entonces partirá de ese vértice. Así, el circuito pasa por dios aristas (nuevas) incidentes con v o por un lazo (nuevo) en v. En cada caso, se contribuye con dos unidades a grad(v). Como v no es el punto inicial y cada arista incidente a v se recorre una sola vez, obtenemos dos unidades cada vez que el circuito pasa v, de modo que grado(v) es par. Para el vértice inicial c, la primera arista del circuito debe ser distinta de la última, y como cualquier otro paso por c prodxuce dos unidades para grad(c), tenemos que grado(c) es par. □

1.3.5 Cantidad de vértices de grado impar

Corolario 1.1. *Para cualquier grafo o multigrafo no dirigido, el número de vértices de grado impar debe ser par.*

Demostración. Hay que hacerla, deriva facilmente de $\sum gr(v) = 2 * |E|$ □

1.3.6 Condición necesaria y suficiente Recorrido Euleriano

Teorema 1.4. *Si G es un grafo o multigrafo no dirigido sin vértices aislados, entonces podemos construir un recorrido euleriano en G si y solo si G es conexo y tiene exactamente dos vértices de grado impar*

Demostración. Si G es conexo y a y b son los vértices de G de grado impar, añadimos una arista adicional $\{a, b\}$ a G. Ahora tenemos un grafo G_1 conexo tal que todos sus vétices son de grado por ende tiene un circuito euleriano C; cuando eliminamos la arista $\{a, b\}$ de C, obtenemos un recorrido euleriano para G. □

1.3.7 Grado de un grafo dirigido

Definición 1.16. *Sea $G = (V, E)$ un grafo o multigrafo dirigido. Para cualquier $v \in V$,*

A El grado de entrada de v es el número de aristas de G que llegan a v y se denota $ge(v)$

B El grado de salida de v es el número de aristas de G que parten a v y se denota $gs(v)$

Si el grafo o multigrafo dirigido tiene uno o más lazos, cada lazo de un vértice dado v contribuye con una unidad a $ge(v)$ y a $gs(v)$

1.3.8 Condición necesaria Circuito Euleriano en grafo dirigido

Corolario 1.2. *Sea $G = (V, E)$ un grafo o multigrafo dirigido sin vértices aislados. El grafo G tiene un circuito euleriano dirigido si y sólo si G es conexo y $ge(v) = gs(v)$ para todo $v \in V$*

Demostración. Ejercicio 24 □

1.4 Planaridad de grafos

1.4.1 Grafo plano

Definición 1.17. *Un grafo o multigrafo G es plano si podemos dibujar G en el plano de modo que sus aristas se intersequen solo en los vertices de G. Este dibujo de G se conoce como una inmersión (embedding) de G en el plano.*

1.4.2 Grafo bipartito

Definición 1.18. *Un grafo $G = (V, E)$ es bipartito si $V = V_1 \cup V_2, V_1 \cap V_2 =$ y cada arista de G es de la forma $\{a, b\}$ con $a \in V_1$ y $b \in V_2$. Si cada vértice de V_1 está unido con los vértices de V_2, se tiene un grafo bipartito completo. En este caso, si $|V_1| = m, |V_2| = n$, el grafo se denota con $K_{m,n}$*

1.4.3 Subdivisión elemental y homeomorfismo de grafos

Definición 1.19. *Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido sin lazos, tal que $E \neq$. Una subdivisión elemental de G resulta cuando eliminamos una arista $e = \{u, w\}$ de G y entonces las aristas $\{u, v\}, \{v, w\}$ se añaden a $G - e$. Explicación no formal: se agrega un vértice "en el medio" de una arista, creándose en su lugar dos aristas. Los grafos no dirigidos sin lazos $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ son homeomorfos si son isomorfos o si ambos pueden obtnerse del mismo grafo no dirigidos sin lazos H por una sucesión de subdivisiones elementales.*

1.4.4 Grafo no planar. Teorema de Kuratowski

Teorema 1.5. *Un grafo no es plano si y sólo si contiene un subgrafo que es homeomorfo a K_5 o $K_{3,3}$*

Demostración. No se demuestra □

1.4.5 Propiedad de los grafos planos y región infinita

Teorema 1.6. *Sea $G = (V, E)$ un grafo o multigrafo plano conexo con $|V| = v$ y $|E| = e$. Sea r el número de regiones en el plano determinadas por una representación plana de G; una de estas regiones tiene un área infinita y se conoce como región infinita. Entonces $v - e + r = 2$*

Demostración. Inducción sobre e. Larga pra caralho □

1.4.6 Propiedades de los grafos planos

Corolario 1.3. *Sea $G = (V, E)$ un grafo plano conexo sin lazos con $|V| = v, |E| = e > 2$ y r regiones. Entonces $3r \leq 2e$ y $e \leq 3v - 6$*

Demostración. Como G no tiene lazos ni es un multigrafo, la frontera de cada región contiene al menos tres aristas, por lo tanto, cada región tiene grado ≥ 3. En consecuencia, $2e = 2|E| =$ la suma de los grados de las r regiones determinadas por G y $2e \geq 3r$. Del teorema de Euler, $2 = v - e + r \leq v - e + (2/3)e = v - (1/3)e$, por lo que $6 \leq 3v - e$ o $e \leq 3v - 6$ □

1.5 Caminos y ciclos hamiltonianos

1.5.1 Definición ciclo hamiltoniano

Definición 1.20. *Si $G = (V, E)$es un grafo o multigrafo con $|V| \geq 3$, decimos que G tiene un ciclo hamiltoniano si existe un ciclo en G que contenga cada vértice de V. Un camino hamiltoniano es un camino simple (y no un ciclo) de G que contiene todos los vértices.*

Sugerencias útiles para encontrar un ciclo hamiltoniano en un grafo $G = (V, E)$:

- Si G tiene un ciclo hamiltoniano, entonces para $v \in V$, $grad(v) \geq 2$.
- Si $a \in V$ y $grad(a) = 2$, entonces las dos aristas incidentes con el vértice a deben aparecer en cualquier ciclo hamiltoniano G.
- Si $a \in V$ y $grad(a) > 2$, cuando tratamos de construir un ciclo hamiltoniano, una vez que hemos pasado por el vértice a, dejamos de tener en cuenta las aristas no utilizadas incidentes con a.
- Al construir un ciclo hamiltoniano para G no podemos obtener un ciclo para un subgrafo de G a menos que contenga todos los vértices de G.

1.5.2 Condición suficiente existencia camino hamiltoniano (dirigido)

Teorema 1.7. *Sea K_n^* un grafo dirigido completo; es decir, K_n^* tiene n vértices y para cualquier par de vértices x, y distintos, exactamente una de las aristas (x, y) o (y, x) está en K_n^*. Este grafo (llamado torneo) contiene siempre un camino hamiltoniano (dirigido).*

***Demostración*.**
Sea $m \geq 2$ y p_m un camino simple con las $m-1$ aristas $(v_1, v_2), (v_2, v_3), \ldots, (v_{m-1}, v_m)$. Si $m = n$, hemos terminado. Si no, sea v un vértice que no aparezca en p_m.
Si (v, v_1) es una arista de K_n^*, podemos extender p_m añadiendo esta arista. Si no, entonces (v_1, v) debe serlo. Ahora supongamos que (v, v_2) está en el grafo. Entonces tenemos el camino más grande: $(v_1, v), (v, v_2), (v_2, v_3), \ldots, (v_{m-1}, v_m)$. Si (v, v_2) no es una arista de K_n^* entonces (v_2, v) debe serlo. Al continuar este proceso, sólo tenemos dos posibilidades:

a Para algún $1 \leq k \leq m - q$, las aristas $(v_k, v), (v, v_{k+1})$ están en K_n^* y podemos reemplazar $(v_k, v_k + 1)$ por este par de aristas.

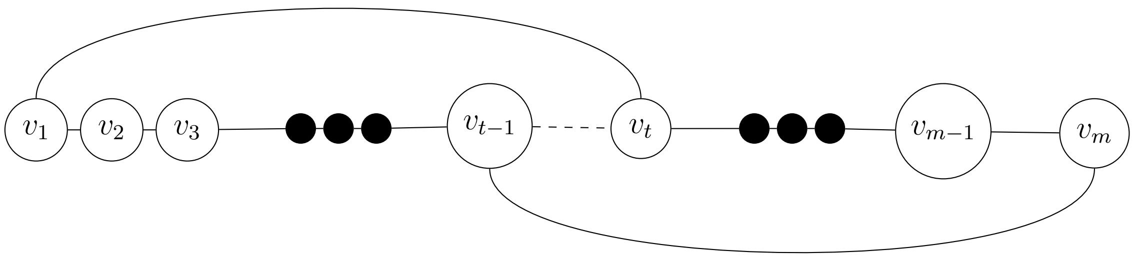
b (v_m, v) está en K_n^* y añadimos esta arista a p_m. En cualquier caso, obtenemos un camino simple p_{m+1} con $m + 1$ vértices y m aristas. Este proceso puede repetirse hasta obtener un camino simple p_n con n vértices.

□

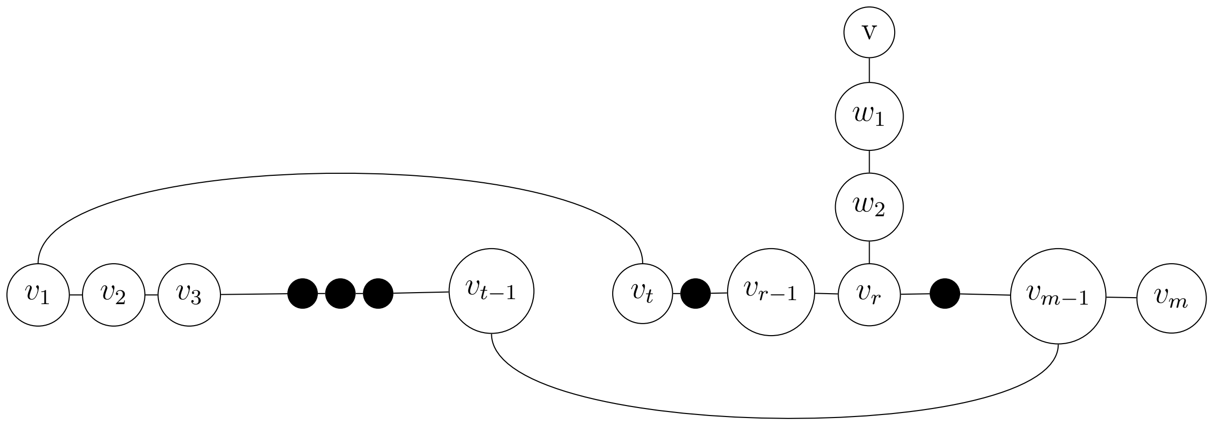
1.5.3 Condición suficiente existencia camino hamiltoniano

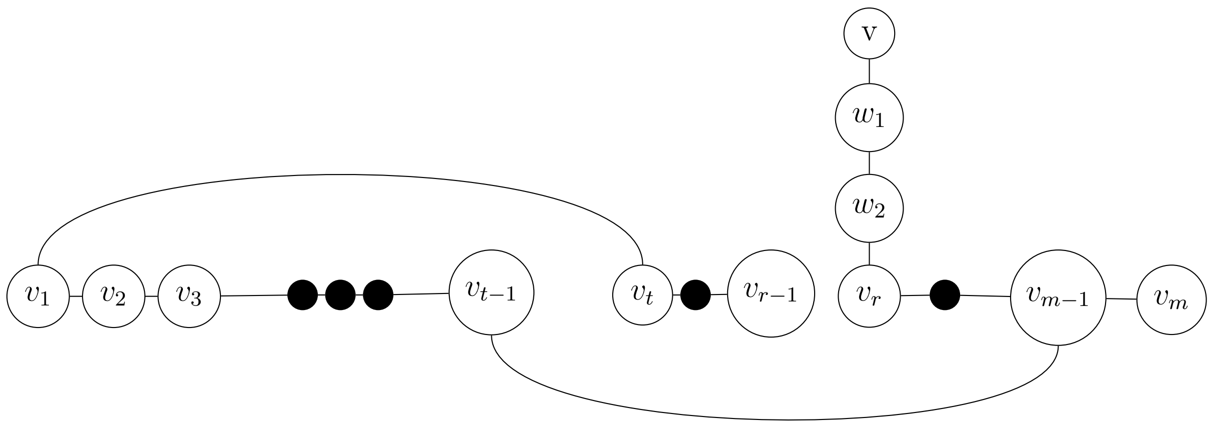
Teorema 1.8. *Sea $G = (V, E)$un grafo sin lazos, $|V| = n \geq 2$.
Si $grad(x) + grad(y) \geq n - 1 \forall x, y \in V, x \neq y$, entonces G tiene un camino hamiltoniano.*

Demostración. Primero demostraremos que G es conexo. En caso contrario, sean C_1, C_2 dos componentes de G tales que $x, y \in V$ y $x \in C_1, y \in C_2$. Supongamos que C_i tiene n_i vértices, $i = 1, 2$. Entonces $grad(x) \leq n_1 - 1$, $grad(y) \leq n_2 - 1$ y $grad(x) + grad(y) \leq (n_1 + n_2) - 2 \leq n - 2$, lo que contradice la condición del teorema. Por lo tanto G es conexo.
Ahora construiremos un camino hamiltoniano para G. Para $m \geq 2$, sea p_m el camino simple $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_{m-1}, v_m\}$ de longitud $m - 1$. Tal camino existe, pues si $m = 2$, sólo necesitamos una arista. Si v_1 es adyacente a otro vértice v distinto de $v_2, v_3, \ldots v_m$, añadimos la arista $\{v, v_1\}$ a p_m para obtener p_{m+1}. Realizamos el mismo proceso si v_m es adyacente a un vértices distinto de $v_1, v_2, \ldots, v_{m-1}$. Si podemos extender p_m hasta p_n de este modo obtenemos un camino hamiltoniano. En caso contrario, el camino simple p_m $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_{m-1}, v_m\}$ cumple que v_1, v_m sólo sean adyacentes a los vértices en p_m hasta $m < n$. Si esto ocurre, afirmamos que G contiene un ciclo en estos vértices. Si v_1 y v_m son adyacentes, entonces el ciclo $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_{m-1}, v_m\}, \{v_m, v_1\}$. Si v_1 y v_m no son adyacentes, entonces v_1 es adyacente a un subconjunto S de los vértices en $\{v_2, v_3, \ldots, v_{m-1}\}$. Si existe un vértice $v_i \in S$ tal que v_m es adyacente a v_{i-1}, entonces podemos obtener el ciclo añadiendo $\{v_1, v_i\}, \{v_{i-1}, v_m\}$ a p_m y eliminando $\{v_{i-1}, v_i\}$ como se muestra en la figura. En caso contrario, sea $|S| = k < m - 1$. Entonces $grad(v_1) = k$ y $grad(v_m) \leq (m - 1) - k$, por lo que obtenemos la contradicción $grad(v_1) + grad(v_m) \leq m - 1 < n - 1$. Por lo tanto, existe un ciclo que une a $v_1, v_2, \ldots, v_m$.



Consideremos ahora un vértice $v \in V$ que no esté en el ciclo. El grafo G es conexo, por lo que existe un camino simple de v a un primer vértice v, en el ciclo, como se muestra en la figura siguiente. Si eliminamos la arista $\{v_{r-1}, v_r\}$ (o $\{v_1, v_t\}$ si $r = t$), obtenemos el camino más simple (más grande que el original p_m) que aparece en la segunda figura. Repetimos el proceso (aplicado a p_m) para el camino simple de la segunda figura y seguimos aumentando la longitud del camino simple hasta incluir todos los vértices de G.





□

1.5.4 Corolario condición suficiente existencia camino hamiltoniano

Corolario 1.4. *Sea $G = (V, E)$un grafo sin lazos con $n(\geq 2)$ vértices. Si $grad(v) \geq (n-1)/2$ para todo $v \in V$ entonces G tiene un camino hamiltoniano.*

Demostración. No está en el libro □

1.5.5 Teorema Condición sufiecente existencia camino hamiltoniano

Teorema 1.9. *Sea $G = (V, E)$un grafo no dirigido sin lazos, con $|V| = n \geq 3$. Si $grad(x) + grad(y) \geq n$, $\forall x, y \in V$ no adyacentes, entonces G tiene un ciclo hamiltoniano.*

Demostración. Supongamos que G no contiene un ciclo hamiltoniano. Añadimos aristas a G hasta obtener un subgrafo H de K_n tal que H no tenga un ciclo hamiltoniano, pero que para cualquier arista e (de K_n) que no está en H, $H + e$ sí tiene un ciclo hamiltoniano.
Como $H \neq K_n$, existen vértices $a, b \in V$ tales que $\{a, b\}$ no es arista de H pero tal que $H + \{a, b\}$ tiene un ciclo hamiltoniano C. El grafo H no tiene dicho ciclo, por lo que la arista $\{a, b\}$ forma parte del ciclo C. Enumeraremos los vértices de H(y G) sobre el ciclo C como sigue:
$a(= v_1) \rightarrow b(= v_2) \rightarrow v_3 \rightarrow v_4 \rightarrow \cdots \rightarrow v_{n-1} \rightarrow v_n$

Para cualquier $3 \leq i \leq n$, si la arista $\{b, v_i\}$ está en el grafo H, entonces afirmamos que la arista $\{a, v_{i-1}\}$ no puede ser una arista de H, ya que si ambas aristas están en H, para algún $3 \leq i \leq n$, obtenemos el ciclo hamiltoniano.

$$b \to v_i \to v_{i+1} \to \cdots \to v_{n-1} \to v_n \to a \to v_{i-1} \to v_{i-2} \to \cdots \to v_4 \to v_3$$

En el grafo H (que no tiene ciclos hamiltonianos). Por lo tanto, para cada $3 \leq i \leq n$, como máximo una de las aristas $\{b, v_i\}, \{a, v_{i-1}\}$ está en H. En consecuencia,

$$grad_H(a) + grad_H(b) < n$$

Donde $grad_H(v)$ denota el grado del vértice v en el grafo H. Para cualquier $v \in V$, $grad_H(v) \geq grad_H(v) = grad(v)$, por lo que tenemos los vértices a, b no adyacentes (en G) que cumplen:

$$grad(a) + grad(b) < n$$

Esto contradice la hipótesis $grad(x) + grad(y) \geq n$, $\forall x, y \in V$ no adyacentes, por lo que rechazamos nuestra suposición y vemos que G contiende un ciclo hamiltoniano.

□

1.5.6 Corolario condición suficiente existencia camino hamiltoniano

Corolario 1.5. *Si $G = (V, E)$es un grafo no dirigido sin lazos, con $|V| = n \geq 3$ y si $grad(v) \geq n/2$, $\forall v \in V$, entonces G tiene un ciclo hamiltoniano.*

Demostración. EJERCICIO □

1.5.7 Corolario condición suficiente existencia camino hamiltoniano

Corolario 1.6. *Si $G = (V, E)$es un grafo no dirigido sin lazos, con $|V| = n \geq 3$ y $|E| \geq \binom{n-1}{2} + 2$, entonces G tiene un ciclo hamiltoniano.*

Demostración. Sean $a, b \in V$ tales que $\{a, b\} \notin E$. [Como a, b no son adyacentes, queremos mostrar que $grad(a) + grad(b) \geq n$.] Eliminamos lo siguiente del grafo G:

1. Todas las aristas de la forma $\{a, x\}$, donde $x \in V$.
2. Todas las aristas $\{y, b\}$ donde $y \in V$.
3. Los vértices a y b.

Sea $H = (V', E')$ el subgrafo resultante. Entonces, $|E| = |E'| + grad(a) + grad(b)$, pues $\{a, b\} \notin E$.
Como $|V'| = n - 2$,H es un subgrafo del grafo completo K_{n-2}, por lo que $|E'| \leq \binom{n-2}{2}$. En consecuencia,

$$\binom{n-1}{2} \leq |E| = |E'| + grad(a) + grad(b) \leq \binom{n-2}{2} + grad(a) + grad(b)$$

y tenemos que:

$$\begin{aligned} grad(a) + grad(b) &\geq \binom{n-1}{2} + 2 - \binom{n-2}{2} \\ &= \frac{1}{2}(n-1)(n-2) + 2 - \frac{1}{2}(n-2)(n-3) \\ &= \frac{1}{2}(n-2)[(n-1)-(n-3)] + 2 \\ &= \frac{1}{2}(n-2)(2) + 2 \\ &= (n-2) + 2 = n \end{aligned}$$

Por lo tanto, el teorema anterior implica que el grafo dado tiene un ciclo hamiltoniano. □

1.6 Coloración de grafos y polinomios cromáticos

1.6.1 Definición coloración propia y número cromático.

Definición 1.21. *Si $G = (V, E)$es un grafo no dirigido, una coloración propia de G ocurre cuando coloreamos los vértices de G de modo que si $\{a, b\}$ es una arista en G, entonces a y b tienen diferentes colores. El número mínimo de colores necesarios para una coloración propia de G es el número cromático de G y se escribe como $\chi(G)$*

1.6.2 Teorema de descomposición para polinomios cromáticos

Teorema 1.10. *Si $G = (V, E)$es un grafo conexo y $e \in E$, entonces:*

$$P(G_e, \lambda) = P(G, \lambda) + P(G'_e, \lambda)$$

Demostración. Sea $e = \{a, b\}$. El número de coloraciones propias de los vértices de G, con (a lo sumo) λ colores es $P(G_e, \lambda)$. Las coloraciones en que a y b tienen diferentes colores son coloraciones propias de G. Las coloraciones de G_e que no son coloraciones propias de G aparecen cuando a y b tienen el mismo color, pero cada una de éstas corresponde a una coloración propia de G'_e. Esta partición de las $P(G_e, \lambda)$ coloraciones propias de G_e en los dos subconjuntos disjuntos descritos produce la ecuación $P(G_e, \lambda) = P(G, \lambda) + P(G'_e, \lambda)$. □

1.6.3 •

Teorema 1.11. *Para cualquier grafo G, el término constante en $P(G_e, \lambda)$ es 0.*

Demostración. Para cualquier grafo $G, \chi(G) < 0$, puesto que $V \neq \emptyset$. Si $P(G_e, \lambda)$ tiene término constantes a, entonces $P(G_e, 0) = a \neq 0$. Esto implica que hay a coloraciones propias de G con 0 colores, una contradicción. □

1.6.4 •

Teorema 1.12. *Sea $G = (V, E)$con $|E| < 0$. Entonces, la suma de los coeficientes de $P(G_e, \lambda)$ es 0.*

Demostración. Como $|E| \geq 1$, tenemos que $\chi(G) \geq 2$, por lo que no podemos obtener una coloración propia de G con sólo un color. En consecuencia, $P(G, 1) = 0 =$ la suma de los coeficientes de $P(G, \lambda)$. □

1.6.5 •

Teorema 1.13. *Sea $G = (V, E)$, con $a, b \in V$ pero $\{a, b\} = e \notin E$. Escribimos G_E^+ para el grafo que se obtiene de G al añadir la arista $e = \{ab, b\}$. Al identificar los vértices a y b en G, obtenemos el subgrafo G_e^{++} de G. En estas circunstancias, $P(G_e, \lambda) = P(G_e^+, \lambda) + P(G_e^{++}, \lambda)$*

Demostración. Este resultado se demuestra como el teorema 1.10, puesto que $P(G_e^+, \lambda) = P(G_e, \lambda) - P(G_e^{++}, \lambda)$ □

1.6.6 •

Teorema 1.14. *Sea G un grafo no dirigido con subgrafos G_1, G_2. Si $G = G_1 \cup G_2$ y $G_1 \cap G_2 = K_n$, para algún $n \in \mathbb{Z}^+$, entonces*

$$P(G, \lambda) = [P(G_1, \lambda) \times P(G_2, \lambda)] \div \lambda^{(n)}$$

Demostración. Como $G_1 \cap G_2 = K_n$, se sigue que K_n es un subgrafo tanto de G_1 como de G_2 y que $\chi(G_1), \chi(G_2) \geq n$. Dados λ colores, K_n tiene $\lambda^{(n)}$ coloraciones propias. Para cada una de estas $\lambda^{(n)}$ coloraciones hay $P(G_1, \lambda) \div \lambda^{(n)}$ coloraciones propias de los vértices restantes de G_1. En forma análoga, hay $P(G_2, \lambda) \div \lambda^{(n)}$ coloraciones propias de los vértices restantes de G_2. Por la regla del producto,

$$P(G, \lambda) = P(K_n, \lambda) \times \frac{P(G_1, \lambda)}{\lambda^{(n)}} \times \frac{P(G_2, \lambda)}{\lambda^{(n)}} = \frac{P(G_1, \lambda) \times P(G_2, \lambda)}{\lambda^{(n)}}$$

□

2 Capítulo 12: Árboles

2.1 Definiciones, propiedades, ejemplos

2.1.1 Definición árbol

Definición 2.1. *Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido sin lazos. El grafo G es un árbol si G es conexo y no contiene ciclos.*

2.1.2 Teorema único camino entre dos vértices

Teorema 2.1. *Si a, b son vértices distintos en un árbol $T = (V, E)$, entonces hay un único camino que conecta estos vértices.*

Demostración. Como T es conexo, existe al menos un camino en T que conecta a y b. Si hubiera más caminos de este tipo, por medio de dos de ellos, algunas aristas podrían formas un ciclo, pero T no tiene ciclos. $\square$

2.1.3 Grafo conexo $\iff$ árbol recubridor

Teorema 2.2. *Si $G = (V, E)$ es un grafo no dirigido, entonces G es conexo $\iff$ G tiene un árbol recubridor.*

Demostración.

$\Longrightarrow$) Si G tiene un árbol recubridor T, entonces para cada par a, b de vértices distintos de V, un subconjunto de aristas de T proporciona un (único) camino entre a y b, por lo tanto, G es conexo.

$\Longleftarrow$) Si G es conexo y supongamos G no es un árbol, podemos eliminar todos los ciclos de G. Si el subgrafo resultante G_1 entonces G_1 debe contener un ciclo C_1. Eliminamos una arista e_1 de C_1 y sea $G_2 = G_1 - e_1$. Si G_2 no contiene ciclos, entonces G_2 es un árbol recubridor de G, pues G_2 contiene todos los vértices de G, no tiene lazos y es conexo,. Si G_2 contiene un ciclo C_2 entonces eliminamos una arista e_2 de C_2 y nos ocupamos del subgrafo $G_3 = G_2 - e_2 = G_1 - \{e_1, e_2\}$. De nuevo, si G_3 no tiene ciclos, entonces tenemos un árbol recubridor de G. En caso contrario, continuamos este procedimiento un número finito de veces, hasta obtener un subgrafo recubridor de G, que sea conexo, sin lazos ni ciclos y que, por lo tanto, sea un árbol recubridor de G. $\square$

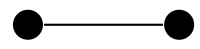
2.1.4 Teorema sobre la cantidad de aristas y vértices en un árbol

Teorema 2.3. *En cualquier árbol $T = (V, E)$, $|V| = |E| + 1$.*

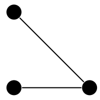
Demostración. Por inducción sobre $|E|$.

- Caso $|E| = 0$
  - $|V| = 1 = 0 + 1 = |E| + 1$

- Caso $|E| = 1$ o 2

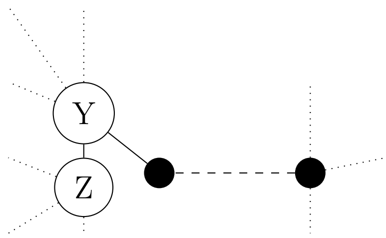


$|V| = 2 = 1 + 1 = |E| + 1$



$|V| = 3 = 2 + 1 = |E| + 1$

- Supongamos que es válido para todo árbol que tenga como máximo k aristas $(0 \leq k)$
Consideremos un árbol $T = (V, E)$como en la siguiente figura



tal que $|E| = k + 1$. Si por ejemplo eliminamos de T la arista con extremos Y, Z, obtenemos dos subárboles $T_1 = (V_1, E_1)$ y $T_2 = (V_2, E_2)$ donde

$$|V| = |V_1| + |V_2|$$
$$|E| = |E_1| + |E_2| + 1$$

como $0 \leq |E_1| \leq k$ y $0 \leq |E_2| \leq k$ por H.I. resulta

$$|V_1| = |E_1| + 1$$
$$|V_2| = |E_2| + 1$$

entonces

$$|V| = |V_1| + |V_2| = (|E_1| + 1) + (|E_2| + 1) = (|E_1| + |E_2| + 1) + 1 = |E| + 1$$

$\square$

2.1.5 Teorema mínima cantidad de hojas

Teorema 2.4. *Para cualquier árbol $T = (V, E)$si $|V| \geq 2$, entonces T tiene al menos dos vértices colgantes.*

Demostración. Sea $|V| = n \geq 2$. Por el teorema anterior, sabemos que $|E| = n+1$. Por lo que, del teorema 11.2 (Poner el numero del teorema según el resúmen), se sigue que

$$2(n-1) = 2|E| = \sum_{v \in V} grad(v)$$

Como T es conexo (por ser árbol) sabemos que $grad(v) \geq 1$ $\forall v \in V$. Supongamos que T tiene menos de dos vértices colgantes, entonces $grad(v) \geq 2$ $\forall v \in V$ o $grad(v^*) = 1$ para un único $v^* \in V$.
En el primer caso,

$$2(n-1) = \sum_{v \in V} grad(v) \geq 2|V| = 2n$$

En el segundo,

$$2(n-1) = \sum_{v \in V} grad(v) \geq 1 + 2(n-1)$$

Absurdo. □

2.1.6 Proposiciones equivalentes grafo no dirigido

Teorema 2.5. *Las siguientes proposiciones son equivalentes para un grafo no dirigido:*

a) *G es un árbol.*

b) *G es conexo, pero si se elimina cualquiera de sus aristas, G quedará desconectado en dos subgrafos que son árboles.*

c) *G no contiene ciclos y $|V| = |E| + 1$.*

d) *G es conexo y $|V| = |E| + 1$.*

e) *G no contiene ciclos y si $a, b \in V$ con $\{a, b\} \notin E$, entonces el grafo que se obtiene de añadir la arista $\{a, b\}$ a G tiene precisamente un ciclo.*

Demostración. Haremos el implica uno a uno.

a $\Longrightarrow$ b) Si G es un árbol, entonces G es conexo. Así sea $e = \{a, b\}$ cualquier arista de G si $G - e$ es conexo, existen al menos dos caminos en G de a a b. Sin embargo, esto contradice el teorema 2.1, por lo tanto, $G - e$ es disconexo y podemos separar sus vértices en dos subconjuntos

(1) el vértice a y todos los que pueden alcanzarse desde a en $G - e$

(2) el vértice b y todos los que pueden alcanzarse desde b en $G - e$

Estas dos componentes conexas son árboles. Puesto que un lazo o ciclo que estuviera en cualquiera de ellos estaría en G.

b $\Longrightarrow$ c) Si G contiene un ciclo, sea $e = \{a, b\}$ una arista de este ciclo, entonces $G - e$ es conexo lo que contradice la hipótesis señalada en b)
Para demostrar que $|V| = |E| + 1$ consideremos dos casos.

- Si $|V| = 1$, entonces $|E| = 0$ pues el grafo no tiene lazos. Así $|V| = 1 = 0 + 1$.

- Si $|V| > 1$, entonces $|E| \geq 1$ puesto que el grafo es conexo. Sea $e \in E$ y consideremos el subgrafo $G - e$ de G. De la parte b) sabemos que $G - e = T_1 \bigcup T_2$ donde T_1 y T_2 son árboles. Si $T_1 = (V_1, E_1)$ y $T_2 = (V_2, E_2)$ entonces $|V_1| + |V_2| = |V|$ y $|E_1| + |E_2| = |E| - 1$ del teorema 2.3 $|V_1| = |E_1| + 1$ y $|V_2| = |E_2| + 1$ con lo cual:

$$|V| = |V_1| + |V_2| = (|E_1| + 1) + (|E_2| + 1) = |E| - 1 + 1 + 1 = |E| + 1$$

c $\Longrightarrow$ d) Sea $k(G) = r$ y sean $G_1, G_2, ..., G_r$ las componentes de G. Para $1 \leq i \leq r$ $v_i \in G_i$ y añadimos las $r - 1$ aristas $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, ..., \{v_{r-1}, v_r\}$ a G para formar el grafo $G' = (V', E')$ que es un árbol. Puesto que G' es un árbol $|V| = |E| + 1$ por 2.3 pero de c) $|V| = |V'| = |E'| + 1$ por lo que $|E| = |E'|$ y $r - 1 = 0$ con $r = 1$ se sigue G es conexo.

d $\Longrightarrow$ e) Probemos que G no tiene ciclos . Como G es conexo, existe T árbol recubridor y

$$\begin{array}{ll}
|V_T| = |E_T| + 1 & \\
|V| = |E_T| + 1 & \text{Por ser árbol recubridor} \\
|E| + 1 = |E_T| + 1 & \\
|E| = |E_T| & \\
E = E_T & E_T \leq E
\end{array}$$

$\therefore G$ no tiene ciclos.
Ahora veamos que si $\{a, b\} \notin E$, $G' = g + \{a, b\}$ tiene exactamente un ciclo. Sabemos que G es conexo y sea $\{a, b\} \notin E$ (podemos asegurar que G es árbol). Entonces existe único camino entre a y b, sea $a - v_1 - ... - v_k - b$ por ser árbol y sea $G' = G + \{a, b\}$. Entonces $\exists c$ ciclo $a - v_1 - ... - v_k - b - a$ y es único porque G no tenía ciclos.

e $\Longrightarrow$ a)

$$G \text{ es simple y sin lazos por hipótesis inicial} \tag{1}$$
$$G \text{ no tiene ciclos por hipótesis de e)} \tag{2}$$

Como G' tiene un ciclo, entonces hay dos maneras de llegar de a a b. Por $\{a, b\}$ y por $a - v_1 - ... - v_k - b$. Si eliminamos la arista $\{a, b\}$ hay una única manera de llegar de a a b. Esto sucede $\forall a, b \mid \{a, b\} \notin E$.

$$\text{Entonces } G \text{ es conexo.} \tag{3}$$

De (1), (2) y (3) y la definición de árbol, G es árbol.

□

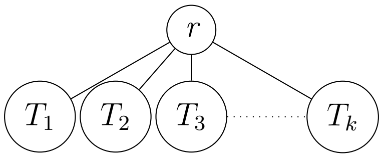
2.2 Árboles con raíz

2.2.1 Definición árbol dirigido

Definición 2.2. *Si G es un grafo dirigido, entonces G es un árbol dirigido si el grafo no dirigido asociado con G es un árbol. Si G es un árbol dirigido, G es un árbol con raíz, si existe un único vértice r en G, llamado raíz, tal que el grado de entrada de $r = g_e(r) = 0$ y para todos los demás vértices v, el grado de entrada de $v = g_e(v) = 1$.*
En general, si v_1 y v_2 son vértices de un árbol con raíz y v_1 tiene un número de nivel más pequeño, entonces v_1 es un ascendiente de v_2(o v_2 es un descendiente de v_1) si existe un camino de v_1 a v_2. Dos vértices con un padre común son hermanos.

2.2.2 Definición recorrido en orden previo y posterior

Definición 2.3. *Sea $T = (V, E)$ un árbol con raíz r*



a) *El recorrido en orden previo de T visita primero r y después recorre los vértices de T_1 en orden previo, después los vértices de T_2 en orden previo y así sucesivamente, hasta recorrer los vértices de T_k en orden previo.*

b) *El recorrido en orden posterior de T recorre en orden posterior los vértices de los subárboles $T_1, T_2, ..., T_k$ para después llegar a la raíz.*

2.2.3 Definición recorrido en orden simétrico

Definición 2.4. *Sea $T = (V, E)$ un árbol binario con raíz r.*

1. *Si $|V| = 1$, entonces el vértice r es el recorrido en orden simétrico de T*

2. *Si $|V| > 1$, sean T_I y T_D los subárboles izquierda y derecha, respectivamente, de T. El recorrido en orden simétrico de T recorre primero los vértices de T_I en orden simétrico, después visita la raíz r y luego recorre, en el orden simétrico, los vértices de T_D.*

2.2.4 Algoritmo búsqueda en profundidad

Definición 2.5. *A continuación se enuncia el algoritmo de búsqueda en profundidad.*

1. *Se asigna v_1 a la variable v y se inicializa T como el árbol que consta solamente de este vértices (v_1 será la raíz del árbol recubridor que se va a desarrollar).*

2. *Seleccionamos el subíndice más pequeño* i*,* $2 \leq i \leq n$*, tal que* $\{v, v_i\} \in E$ *y* v_i *no ha sido visitado todavía.*
   Si no se encuentra tal subíndice se pasa a 3, caso contrario se hace lo siguiente:
   - *Añadimos la arista* $\{v, v_i\}$ *al árbol* T
   - *Asignamos* v_i *a* v
   - *Regresamos a 2*
3. *Si* $v = v_1$ *el árbol* T *es recubridor.*
4. *Si* $v \neq v_1$*, retrocedemos desde* v*. Si* u *es el padre del vértice asignado a* v *en* T*, entonces asignamos* u *a* v *y regresamos a 2.*

2.2.5 Algoritmo búsqueda en anchura

Definición 2.6. *A continuación se enuncia el algoritmo de búsqueda en anchura.*

1. *Insertamos el vértice* v_1 *en la cola* Q *e inicializamos* T *como el árbol formado por este único vértice* v_1 *(la raíz de la versión final de* T*)*
2. *Eliminamos los vértices del frente de* Q*. Al eliminar un vértice* v*, consideramos* v_i *para cada* $2 = i = n$*. Si la arista* $\{v, v_i\} \in E$ *y* v_i *no ha sido visitado, agregamos la aristas a* T*. Si examinamos todos los vértices que ya estaban en* Q *y no obtenemos aristas nuevas, el árbol* T *(generado hasta ese momento) es el árbol recubridor (ordenado con raíz) del orden dado.*
3. *Insertamos los vértices adyacentes a cada* v *(del paso 2) en el final de la cola* Q*, según el orden en que fueron visitados por primera vez. Después regresamos a 2.*

2.2.6 Definición árbol m-ario

Definición 2.7. *Sea* $T = (V, E)$ *un árbol con raíz y sea* $m \in \mathbb{Z}^+$
T es un árbol m-ario si $g_s(v) \leq m \forall v \in V$*. Si* $m = 2$*, el árbol es un árbol binario. Si* $g_s(v) = 0 \vee m \forall v \in V$*,* T *es un árbol m-ario completo.*

2.2.7 Teorema de cantidad de vértices internos y hojas en árboles completos

Teorema 2.6. *Sea* $T = (V, E)$ *un árbol m-ario completo con* $|V| = n$*. Si* T *tiene* h *hojas e* i *vértices internos, entonces:*

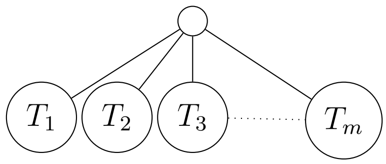
1. $n = mi + 1$
2. $h = (m - 1)i + 1$
3. $i = (h - 1) \div (m - 1) = (n - 1) \div m$

Demostración.

1. Por inducción sobre i

    - Si $i = 0$
$$n = 1 = 0 + 1 = mi + 1$$
    - Si $i = 1$
$$n = m + 1 = mi + 1$$

    Supongamos válido para todo $'i$ tal que $2 \leq i' \leq i$ y probemos para i



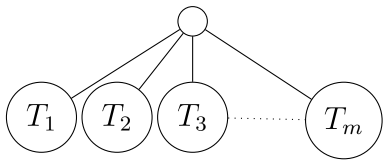
    Donde:
$$T_1 = (V_1, E_1) \text{ y como } i_1 < i \text{ vale } n_1 = mi_1 + 1$$
$$T_2 = (V_2, E_2) \text{ y como } i_2 < i \text{ vale } n_2 = mi_2 + 1$$
$$...$$
$$T_m = (V_m, E_m) \text{ y como } i_m < i \text{ vale } n_m = mi_m + 1$$

    Utilizando la hipótesis inductiva podemos concluir:
$$n = n_1 + n_2 + ... + n_m + 1 =$$
$$= (mi_1 + 1) + (mi_2 + 1) + ... + (mi_m + 1) + 1 =$$
$$= mi_1 + mi_2 + ... + mi_m + m + 1 =$$
$$= m(i_1 + i_2 + ... + i_m + 1) + 1 = mi + 1$$

2. Por inducción sobre i

    - Si $i = 0$
$$h = 1 = 0 + 1 = (m - 1)i + 1$$
    - Si $i = 1$
$$h = 2 = 1 + 1 = 1 \times 1 + 1 = (m - 1)i + 1$$

    Supongamos válido para todo i' tal que $2 \leq i' \leq i$ y probemos para i



Donde:

$$T_1 = (V_1, E_1) \text{ y como } i_1 < i \text{ vale } h_1 = (m-1)i_1 + 1$$
$$T_2 = (V_2, E_2) \text{ y como } i_2 < i \text{ vale } h_2 = (m-1)i_2 + 1$$
$$...$$
$$T_m = (V_m, E_m) \text{ y como } i_m < i \text{ vale } h_m = (m-1)i_m + 1$$

Utilizando la hipótesis inductiva podemos concluir:

$$h = h_1 + h_2 + ... + h_m =$$
$$= ((m-1)i_1 + 1) + ((m-1)i_2 + 1) + ... + ((m-1)i_m + 1) =$$
$$= (m-1)(i_1 + i_2 + ... + i_m) + m =$$
$$= (m-1)(i_1 + i_2 + ... + i_m + 1) + 1 = (m-1)i + 1$$

3.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Por 2: } h = (m-1)i + 1 \iff \frac{h-1}{m-1} = i \\ \text{Por 1: } n = mi + 1 \iff \frac{n-1}{m} = i \end{array}\right\} \implies i = \frac{h-1}{m-1} = \frac{n-1}{m}$$

□

2.2.8 Definición altura y árbol equilibrado

Definición 2.8. *Si $T = (V, E)$ es un árbol con raíz y a es el número de nivel máximo de una hoja de T, T tiene altura a. Un árbol con raíz T de altura a es equilibrado si el número de nivel de cada hoja de T es $(a-1)$ o a.*

2.2.9 Teorema sobre la altura y cantidad de hojas de un árbol m-ario completo

Teorema 2.7. *Sea $T = (V, E)$ un árbol m-ario completo de altura a y h hojas. Entonces*

1. $h \leq m^a$
2. $a \geq \lceil \log_m h \rceil$

Demostración.

1. Por inducción sobre a
   - Si $a = 1$ donde $h = m = m^a$.
   - Supongamos válido para cualquier árbol de altura menor que a y consideremos un árbol T con altura a y h hojas. Las h hojas de T también son el total de hojas h de los m subárboles T_i. $1 \leq i \leq m$ de T con raíz en cada uno de los hijos de la raíz. Para $1 \leq i \leq m$, sea h_i el número de hojas en el subárbol T_i (si coinciden la hoja y la raíz $h_i = 1$ pero como $m > 1$ y $a - 1 \geq 0$, tenemos $m^{a-1} \geq 1 = h_i$) Por HI $h_i \leq m^{a_{T_i}} \leq m^{a-1} = m^a$.
2. Si $h_m \leq m^a$, vemos que $\log_m h \leq \log_m(m^a) = a$ y como $a \in \mathbb{Z}^+$ $a \geq \lceil \log_m h \rceil$

□

2.2.10 Corolario sobre la altura de un árbol m-ario completo equilibrado

Corolario 2.1. *Sea T un árbol m-ario completo equilibrado con h hojas, la altura de T es $\lceil \log_m h \rceil$.*

Demostración. Sea T un árbol m-ario completo equilibrado.
Por inducción sobre a.

- Si $a = 1$ donde $h = m$, $\lceil \log_m h \rceil = 1 = a$.
- Supongamos válido para cualquier árbol de altura menor que a y consideremos un árbol T con altura a y h hojas. Las h hojas de T son el total de hojas h_i de los subárboles T_i $1 \leq i \leq m$ de T con raíz en cada uno de los hijos de la raíz para $1 \leq i \leq m$. Sea h_i el número de hojas en el subárbol T_i (si coinciden la hoja y la raíz $h_i = 1$ y entonces $\lceil \log_m h \rceil = \lceil \log_m 1 \rceil = 0 = a$) Por HI $a_i = \lceil \log_m h_i$ donde a_i es la altura del subárbol T_i, entonces:

$$a = max(a_1, ..., a_m) + 1 \qquad \text{Donde cada } a_i \text{puede ser } (a-1)\text{o}(a-2) \text{ por ser equilibrado pero tiene que existir al menos un subárbol de altura } (a-1).$$

$$a = (a-1) + 1 = a$$

□

2.3 Árboles y ordenaciones

2.3.1 Lema cantidad máxima de comparaciones para intercalar dos listas ordenadas

2.3.2 Algoritmo ordenación por inserción

Definición 2.9.

2.4 Árboles ponderados y códigos prefijo

2.4.1 Definición código prefijo

Definición 2.10.

2.4.2 Definición árbol binario total

Definición 2.11.

2.4.3 Lema condición suficiente existencia árbol óptimo

2.4.4 Teorema insertar un árbol binario completo en un árbol óptimo resulta en un árbol óptimo

2.5 Componentes biconexas y puntos de articulación

2.5.1 Definición de punto de articulación

Definición 2.12.

2.5.2 Lema sobre los nodos en un grafo conexo no dirigido (ascendientes, descendientes)

3 Capítulo 13: Optimización y emparejamiento

3.0.1 Algoritmo de Kruskal

Definición 3.1.

1. *Hacemos el contador* $i = 0$ *y seleccionamos una arista* e_1 *en* G*, tal que* $p(e_1)$ *sea lo mas pequenio posible.*

2. *Para* $1 \leq i \leq n-2$*, si hemos seleccionado las aristas* $e_1, e_2, \cdots, e_i$*, entonces seleccionamos la arista* e_{i+1} *de las aristantes restantes en* G *de modo que*

   (a) $p(e_{i+1})$ *sea lo mas pequenio posible.*

   (b) *el subgrafo de* G *determinado por las aristas* $e_1, e_2, \cdots, e_i, e_{i+1}$ *(y los vertices incidentes) no contenga ciclos.*

3. *Reemplazamos* i *con* $i+1$*. Si* $i = n-1$ *el subgrafo de* G *determinado por las aristas* $e_1, e_2, \cdots, e_{n-1}$ *es conexo, con* n *vertices y* $n-1$ *aristas, y es un arbol recubridos optimo para* G*. Si* $i < n-1$*, regresamos a (2).*

Teorema 3.1. *Sea* $G = (V, E)$ *un grafo ponderado no dirigido, conexo y sin lazos. Cualquier arbol recubridor de* G *obtenido mediante el algoritmo de Kruskal es optimo.*

Demostración. Sea $|V| = n$ y sea T un arbol recubridor de G obtenido mediante el algoritmo de Kruskal. Etiquetamos las aristas de T como $e_1, e_2, \cdots, e_{n-1}$ de acuerdo con el orden en que son generadas mediante el algoritmo. Para cualquier arbol optimo T' de G, definimos $d(T') = k$ si k es el minimo entero positivo tal que T y T' contengan ambos a $e_1, e_2, \cdots, e_{k-1}$, pero que $e_k \notin T'$. Sea T_1 un arbol optimo para el que $d(T_1) = r$ sea maximal. Si $r = n$, entonces $T = T_1$ y obtenemos el resultado. En caso contrario, $r \leq n-1$ y al aniadir la arista e'_r (de T) a T_1 obtenemos el ciclo C, donde existe una arista e'_r de C que esta en T_1 pero no en T. Partimos del arbol T_1. Al aniadir e_r a T_1 y eliminar e'_r, obtenemos un grafo conexo con n vertices y $n-1$ aristas. Este grafo es un arbol T_2. Los pesos de T_1 y T_2 satisfacen la relacion $p(T2) = p(T_1) + p(e_r) - p(e'_r)$. Si seguimos la forma de seleccion de $e_1, e_2, \cdots, e_{r-1}$ en el algoritmo de Kruskal, elegimos la arista e_r de modo que $p(e_r)$ sea minimal y no obtengamos ciclo alguno al aniadir e_r al subgrafo H de G determinado por $e_1, e_2, \cdots, e_{r-1}$. Como e'_r no produce un ciclo al ser aniadido al subgrafo H, la minimalidad de $p(e_r)$ implica que $p(e'_r) \geq p(e_r)$. Por lo tanto $p(e_r) - p(e'_r) \leq 0$, por lo que T_2 es optimo. El arbol T_2 es optimo y tiene las aristas $e_1, e_2, \cdots, e_{r-1}$ en comun con T, por lo que $d(T_2) \geq r+1 > r = d(T_1)$ lo que contradice la eleccion de T_1. En consecuencia, $T_1 = T$ y el arbol T producido por el algoritmo de Kruskal es optimo. □

3.0.2 Algoritmo de Prim

Definición 3.2.

1. *Hacemos el contador* $i = 1$ *y colocamos un vertice arbitrario* $v_1 \in V$ *en el conjunto* P*. Definimos* $N = V - \{v_1\}$ *y* $T = \emptyset$*.*

2. *Para $1 \leq i \leq n-1$, donde $|V| = n$, sean $P = \{v_1, v_2, \cdots, v_i\}$, $T = \{e_1, e_2, \cdots, e_{i-1}\}$, y $N = V - P$. Aniadimos a T la arista mas corta (la arista de peso minimal) de G que conecta un vertice x en P con un vertice y $(= v_{i+1})$ en N. Colocamos y en P y lo eliminamos de N.*

3. *Incrementamos el contador en 1. Si $i = n$, el subgrafo de G determinado por las aristas $e_1, e_2, \cdots, e_{n-1}$ es conexo, con n vertices y $n-1$ aristas y es un arbol optimo para G. Si $i < n$, regresamos a (2).*

Teorema 3.2. *Sea $G = (V, E)$ un grafo ponderado no dirigido, conexo y sin lazos. Cualquier arbol recubridor de G obtenido mediante el algoritmo de Prim es optimo.*

Demostración. Sea $|V| = n$ y sea T un arbol recubridor de G obtenido mediante el algoritmo de Prim. Sea T_1 el arbol recubridor minimo de G. Si $T_1 = T$ entonces T es el arbol recubridor minimo de G. Sino, sea e la primera arista agregada durante la construccion de T que no esta en T_1 y sea V el conjunto de nodos conectados por las aristas agregadas antes que e. Entonces un extremo de e esta en V y el otro no. Ya que T_1 es el arbol recubridor minimo de G, hay un camino en T_1 que une los dos extremos. Mientras que uno se mueve por el camino, se debe encontrar una arista f uniendo un nodo en V a uno que no esta en V. En la iteracion que e se agrega a T, f tambien se podria haber agregado y se hubiese agregado en vez de e si su peso fuera menor que el de e. Ya que f no se agrego, se concluye $p(f) \geq p(e)$. Sea T_2 el grafo obtenido de remover f y agregando $e \in T_1$. Es facil mostrar que T_2 conexo, tiene la misma cantidad de aristas que T_1, y el peso total no es mayor que el de T_1, entonces tambien es un arbol recubridor minimo de G y contiene a e y todas las aristas agregadas anteriormente durante la construccion de V. Si se repite este proceso, eventualmente se obtendra el arbol recubridor minimo de G que es igual a T. □

3.1 Redes de transporte: flujo máximo y mínimo

3.1.1 Red de transporte

Definición 3.3. *Sea $N = (V, E)$ un grafo dirigido conexo sin lazos. Entonces N es una red, o red de transporte, si se cumplen las siguientes condiciones:*

1. *Existe un unico vértice $a \in V$ tal que $ge(a)$, el grado de entrada de a, es igual a 0. Este vértice es la fuente.*

2. *Existe un unico vértice $z \in V$ tal que $gs(z)$, el grado de salida de z, es igual a 0. Este vértice es el sumidero.*

3. *El grafo N es ponderado, por lo que existe una función de E, en el conjunto de enteros no negativos que asigna a cada arista $e = (v, w) \in E$ una capacidad que se denota con $c(e) = c(v, w)$*

3.1.2 Flujo

Definición 3.4. *Si $N = (V, E)$ es una red de transporte, una función f de E a los enteros no negativos es un fijo de N si*

1. *$f(e) \leq c(e)$ para toda arista $e \in E$, y*

2. *para cualquier $v \in V$ distinto de la fuente a o del sumidero z, $\sum_{w\in V} f(w,v) = \sum_{w\in V} f(v,w)$. (Si no existe una arista $(v,w), f(v,w) = 0$)*

3.1.3 Arista saturda y valor de flujo

Definición 3.5. *Sea f un flujo para una red de transporte $N = (V,E)$.*

1. *Una arista e de la red está saturada si $f(e) = c(e)$. Cuando $f(e) \leq c(e)$, la arista es no saturada.*

2. *Si a es la fuente de N, entonces $val(f) = \sum_{v\in V} f(a,v)$ es el valor del flujo*

3.1.4 Conjunto de corte

Definición 3.6. *Si $N = (V,E)$ es una red de transporte y C es un conjunto de corte para el grafo no dirigido asociado con N, entonces C es un corte, o corte $a - z$, si la eliminación de las aristas de C de la red produce la separación de a y z*

3.1.5 Propiedad de conjunto de corte

Teorema 3.3. *Sea f un flujo en una red $N = (V,E)$. Si $C(P,\overline{P})$ es cualquier corte en N, entonces $val(f)$ no puede exceder a $c = (P,\overline{P})$*

Demostración. Sea el vértice a la fuente de N y el vértice z su sumidero. Como $g_e(a) = 0$,se sigue que para cualquier $w \in V, f(w,a) = 0$.En consecuencia,

$$val(f) = \sum_{v\in V} f(a,v) = \sum_{v\in V} f(a,v) - \sum_{w\in V} f(w,a)$$

Por la condición (b) en la definición de un flujo, para cualquier
$x \in P, x \neq a, \sum_{v\in V} f(x,v) - \sum_{w\in V} f(w,x) = 0$ Si sumamos los resultados de las ecuaciones anteriores obtenemos.

$$\begin{aligned}
val(f) &= \left[\sum_{v\in V} f(a,v) - \sum_{w\in V} f(w,a)\right] + \sum_{\substack{x\in P\\ x\neq a}} \left[\sum_{v\in V} f(x,v) - \sum_{w\in V} f(w,x)\right] \\
&= \sum_{\substack{x\in P\\ v\in V}} f(x,v) - \sum_{\substack{x\in P\\ w\in V}} f(w,x) \\
&= \left[\sum_{\substack{x\in P\\ v\in P}} f(x,v) + \sum_{\substack{x\in P\\ v\in \overline{P}}} f(x,v)\right] - \left[\sum_{\substack{x\in P\\ w\in P}} f(w,x) + \sum_{\substack{x\in P\\ w\in \overline{P}}} f(w,x)\right]
\end{aligned}$$

Como sumamos

$$\sum_{\substack{x\in P\\ w\in P}} f(w,x) \qquad y \qquad \sum_{\substack{x\in P\\ w\in P}} f(w,x)$$

sobre el mismo conjunto de todos los pares ordenados de $P \times P$, estas sumas son iguales.
En consecuencia,

$$val(f) = \sum_{\substack{x \in P \\ v \in \overline{P}}} f(x,v) - \sum_{\substack{x \in P \\ w \in \overline{P}}} f(w,x)$$

Para todos $x, w \in V, f(w,x) \geq 0$, por lo que

$$\sum_{\substack{x \in P \\ w \in \overline{P}}} f(w,x) \geq 0 \qquad y \qquad val(f) \leq \sum_{\substack{x \in P \\ v \in \overline{P}}} f(x,v) \geq \sum_{\substack{x \in P \\ v \in \overline{P}}} c(x,v) = c(P, \overline{P})$$

□

3.1.6 Conservación del flujo

Corolario 3.1. *Si f es un flujo en una red de transporte $N = (V, E)$, entonces el valor del flujo desde la fuente es igual al valor del flujo hacia el sumidero.*

Demostración. Sean $P = \{a\}$, $\overline{P} = V - \{a\}$ y $S = V - \{z\}$, $\overline{Q} = \{z\}$. De la observación anterior,

$$\sum_{\substack{x \in P \\ v \in \overline{P}}} f(x,v) - \sum_{\substack{x \in P \\ w \in \overline{P}}} f(w,x) = val(f) = \sum_{\substack{y \in Q \\ v \in \overline{Q}}} f(y,v) - \sum_{\substack{y \in Q \\ w \in \overline{Q}}} f(w,y)$$

Con $P = \{a\}$ y $g_e(a) = 0$, tenemos que $\sum_{\substack{x \in P \\ w \in \overline{P}}} f(w,x) = \sum_{w \in \overline{P}} f(w,a) = 0$. En forma análoga, para $\overline{Q} = \{z\}$ y $g_s(z) = 0$, se sigue que $\sum_{\substack{y \in Q \\ w \in \overline{Q}}} f(w,y) = \sum_{y \in Q} f(<, y) = 0$. En consecuencia,

$$\sum_{\substack{x \in P \\ v \in \overline{P}}} f(x,v) = \sum_{v \in \overline{P}} f(a,v) = val(f) = \sum_{\substack{y \in Q \\ v \in \overline{Q}}} f(y,v) = \sum_{y \in Q} f(y,z)$$

lo que establece el corolario. □

3.1.7 Teorema del flujo máximo y corte mínimo

Teorema 3.4. *Para una red de transporte, el flujo máximo que se puede obtener es igual a la capacidad mínima sobre todos los cortes de la red.*

Demostración. Por el teorema 13.3, si $(P, \overline{P})$ es un corte de capacidad mínima en N, entonces el valor de cualquier flujo en N satisface $val(f) \leq c(P, \overline{P})$. Para verificar la existencia de un flujno f para el que $val(f) = c(P, \overline{P})$, utilizamos un algoritmo iterativo de etiquetado llamado procedimiento de etiquetado.

1. Dada una red N, definimos un flujo inicial f en N como $f(e) = 0$ para cada e de E. (Esta función f satisface las condiciones de la definición de un flujo)

2. Etiquetamos la fuente a con $(-,\infty)$. (Esta etiqueta indica que podemos disponer en la fuente a de todo el material necesario para obtener un flujo máximo)

3. Para cualquier vértice x adyacente a a, etiquetamos x como sigue:

   (a) Si $c(a,x)-f(a,x)>0$, definimos $\Delta(x)=c(a,x)-f(a,x)$ y etiquetamos el vértice x con $(a^+,\Delta(x))$.

   (b) Si $c(a,x)-f(a,x)=0$, dejamos el vértice x sin etiquetar.

   [La etiqueta $(a^+,\Delta(x))$ indica que el flujo presente de a a x puede incrementarse mediante la cantidad $\Delta(x)$, con $\Delta(x)$ unidades adicionales proporcionadas desde la fuente a.]

4. Mientras exista $x(\neq a)\in V$ tal que x esté etiquetado y exista una arista (x,y) tal que y no esté etiquetado, etiquetamos el vértice y como sigue:

   (a) Si $c(x,y)-f(x,y)>0$, definimos $\Delta(y)=\min\{\Delta(x),c(x,y)-f(x,y)\}$ y etiquetamos el vértice y como $(x^+,\Delta(y))$.

   (b) Si $c(x,y)-f(x,y)=0$, dejamos el vértice y sin etiquetar.

   [La etiqueta $(x^+,\Delta(y))$ indica que el flujo presente en el vértice y puede incrementarse mediante la cantidad $\Delta(y)$ tomada del vértice x]

5. De forma análoga, mientras exista un vértice $x\neq a$ tal que x esté etiquetado y exista una arista (y,x) tal que y no esté etiquetado, etiquetamos el vértice y como sigue:

   (a) Si $f(y,x)>0$, etiquetamos el vértice y como $(x^-,\Delta(y))$, donde $\Delta(y)=\min\{\Delta(x),f(y,x)\}$.

   (b) Si $f(y,x)=0$, dejamos el vértice y sin etiquetar.

   [La etiqueta $(x^-,\Delta(y))$, indica que al disminuir el flujo de y a x, el total del flujo que sale de y a los vértices etiquetados puede ser disminuido en $\Delta(y)$. Estas $\Delta(y)$ unidades puede utilizarse entonces para aumentar el flujo total de y a los vértices no etiquedatos]

Puesto que un vértice y podría ser adyacente a, o de, más de un vértice etiquetado, los resultados de este procedimiento podrían no ser únicos. Además, si x está etiquetado, la red podría incluir ambas aristas (x,y) y (y,x), lo que tal vez produciría dos etiquetas para y. Pero el procedimiento está diseñado para crear un flujo máximo, y podría haber más de un flujo de este tipo. No obstante, si un vértice puede ser etiquetado en más de una forma, podemos hacer una elección arbitraria. Al aplicar el procedimiento de etiquetado a los vértices de la red dada, repetimos los pasos 4 y 5 mientras sea posible respecto del conjunto actual (aunque modificable) de vértices etiquetados. En cada iteración debemos considerar dos casos:

1. Si el sumidero z se etiqueta como $(x^+, \Delta(z))$, entonces el flujo en la arista (x, z) puede aumentarse de $f(x, z)$ a $f(x, z) + \Delta(z)$, según lo indique la etiqueta.
   El vértice x puede etiquetarse como $(v^+, \Delta(x))$, donde $\Delta(x) \geq \Delta(z)$. Para la etiqueta $(v^+, \Delta(x))$, podemos considerar el vértice v como la fuente para aumentar el flujo en la arista (x, z) en la cantidad $\Delta(z)$. En este caso, incrementamos de forma análoga el flujo presente en la arista (v, x), de $f(v, x)$ a $f(v, x) + \Delta(z)$ (no a $f(v, x) + \Delta(x)$). Si x tiene la etiqueta $(v^-, \Delta(x))$, entonces el flujo en la arista (x, v) cambia de $f(x, v)$ a $f(x, v) - \Delta(z)$ para proporcionar el flujo adicional de $\Delta(z)$ unidades de x a z.
   Conforme continúa este proceso de regreso hasta a, cada arista dirigida a lo largo de un camino a a z ve aumentando o disminuido su flujo [para un vértice (que quede en el camino) con una etiqueta negativa] en Δz unidades. Al hacer esto, eliminamos todas las etiquetas de los vértices, excepto $(-, \infty)$ para la fuente; el proceso se repite para ver si es posible incrementar el flujo aún más.

2. Si el procedimiento de etiquetado se realiza hasta donde sea posible y el sumidero z no está etiquetado, entonces se ha logrado el flujo máximo. Sea P el conjunto de vértices de V que están etiquetados y $\overline{P} = V - P$. Puesto que los vértices de $\overline{P}$ no están etiquetados, los flujos de las aristas (x, y), donde $x \in P$ e $y \in \overline{P}$, satisfacen $f(x, y) = c(x, y)$. Además, para cualquier arista (w, v) tal que $w \in \overline{P}$ y $v \in P$, tenemos $f(w, v) = 0$. En consecuencia, existe un flujo para la red dada, tal que el valor del flujo es igual a la capacidad del corte $(P, \overline{P})$. Por el teorema 3.1, tenemos que este flujo es un máximo.

□

3.1.8 Existencia del flujo máximo

Corolario 3.2. *Sea $N = (V, E)$ una red de transporte tal que para cada $e \in E, c(e)$ es un entero postiivo. Entonces existe un flujo máximo f para N, donde $f(e)$ es un entero no negativo para cada arista e.*

Demostración. HACER □

3.2 Teoría de emparejamiento

3.2.1 Emparejamiento

Definición 3.7. *Sea $G = (V, E)$ un grafo un emparejamiento M en G es un conjunto de aristas no adyacentes, esto es, que ninguna de estas aristas comparte un vértice.*

3.2.2 Vértice saturado

Definición 3.8. *Se dice que un vértice está saturado (o "matcheado") si es incidido por una de las aristas dentro del emparejamiento. Si no lo está, es llamado no saturado.*

3.2.3 Emparejamiento maximal

Definición 3.9. *Un emparejamiento maximal es un emparejamiento M de un grafo G con la propiedad de que si cualquier arista es incluida en M, este deja de ser un emparejamiento. M es un emparejamiento maximal si no es un subconjunto de otro emparejamiento de G, o dicho en otras palabras, si todas las aristas de M tienen intersección no vacía con el resto de aristas de G.*

3.2.4 Emparejamiento maximo

Definición 3.10. *Un emparejamiento maximo es aquel que contiene el número máximo de aristas. Pueden existir varios emparejamientos máximos. El valor de emparejamiento $\nu(G)$ es el tamaño de un emparejamiento máximo. Todo emparejamiento máximo es también maximal, pero no vale el recíproco.*

3.2.5 Emparejamiento perfecto o completo

Definición 3.11. *Un emparejamiento perfecto (o completo) es aquel que satura todos los vértices del grafo. Todo emparejamiento perfecto es máximo y por ende maximal. Un emparejamiento perfecto solo puede ser posible cuando el grafo tiene un número par de vértices.*

3.2.6 Camino M-Aumentante y M-Alternante

Definición 3.12. *Dado un matching M de G:*

1. *un camino M-Alternante es un camino que comienza en vértice no saturado y las aristas que recorre alternan entre contenidas y no contenidas en M*
2. *un camino M-Aumentante es un camino M-Alternante que comienza y termina en vértices no saturados*

3.2.7 Teorema de Hall o del matrimonio

Teorema 3.5. *Sea G un grafo bipartito finito con conjuntos bipartitos X e Y. Para un conjunto de vértices $W \subseteq X$ sea $N_G(W)$ (el conjunto de todos los vértices en Y adyacentes a algún elemento de W). El teorema del matrimonio establece que hay un emparejamiento que abarca completamente a X sí y solo sí para cada $W \subseteq X, |W| \leq |N_G(W)|$. En otras palabras cada subconjunto W de X tiene suficientes vértices adyacentes a Y. En el caso de que $|X| = |Y|$ este teorema proporciona una condición necesaria y suficiente para la existencia de un emparejamiento perfecto.*

Demostración. Un X-emparejamiento saturado es un emparejamiento que cubre cada vértice en X. Primero demostramos: Si un grafo bipartito $G = (X + Y, E) = G(X, Y)$ tiene un X-emparejamiento saturado, entonces $|N_G(W)| \geq |W|$ para todo $W \subseteq X$. Supongamos que M es un emparejamiento que satura cada vértice de X. Sea el conjunto de todos los vértices Y emparejado por M con un W denotado como $M(W)$. Por lo tanto, $|M(W)| = |W|$, por la definición de emparejamiento. Pero $M(W) \subseteq NG(W)$, ya que todos los elementos de $M(W)$ son vecinos de W.

Así, $|N_G(W)| \geq |M(W)|$ y por lo tanto, $|NG(W)| \geq |W|$. Ahora probamos: Si $|N_G(W)| \geq |W|$ para todo $W \subseteq X$, entonces $G(X,Y)$ tiene un emparejamiento que satura cada vértice en X. Supongamos que $G(X,Y)$ es un grafo bipartito que no tiene un emparejamiento que satura todo los vértices de X. Sea M un emparejamiento máximo, y u un vértice no saturado por M. Considere todos los caminos alternativos (es decir, caminos en G que alterna entre aristas hacia afuera y hacia adentro en M) comenzando desde u. Sea T el conjunto de todos los puntos de Y conectados a u por estos caminos alternativos, y W el conjunto de todos los puntos en X conectados a u por estos caminos alternativos (incluyendo u). Un camino alternativo no maximal puede terminar en un vértice en Y, para que no sea un camino aumentativo, para que pudiéramos aumentar M a un emparejamiento estrictamente mayor. Así cada vértice en T es emparejado por M con un vértice en $W \setminus u$. Por el contrario, cada vértice v en $W \setminus u$ es emparejado por M a un vértice en T (es decir, el vértice precedente v en un camino alternativo que termina en v). Por lo tanto, M proporciona una biyección de $W \setminus u$ y T, lo que implica que $|W| = |T| + 1$. Por otra parte, $N_G(W) \subseteq T$: deje v en Y se conecte a un vértice w in W. Si la arista (w, v) está en M, entonces v esta en T por la parte anterior de la demostración, por otra parte podemos tomar un camino alternativo que acaba en w y extenderlo con v, obteniendo un camino aumentativo y mostrando que v esta en T. Por lo tanto, $|N_G(W)| = |T| = |W| - 1$, una contradicción. □

3.2.8 Teorema de König

Teorema 3.6. *En cualquier grafo bipartito, el número de aristas en un emparejamiento máximo es igual al número de vértices en una cubrimiento de vértices mínimo.*

Demostración. El teorema de König puede ser probado en una manera que proporciona información útil adicional además de solo su verdad: la prueba proporciona una manera de construir un cubrimiento de vértice mínimo de un máximo emparejamiento. Sea $G = (V, E)$ ser un grafo bipartito, y el conjunto de vértices V sea particionado en un conjunto izquierdo L y un conjunto derecho R. Supongamos que M es un emparejamiento máximo para G. Ningún vértice en una cubrimiento de vértice puede cubrir más de una arista de M, así que si un cubrimiento con $|M|$ vértice puede ser construida, tiene que ser una cubrimiento mínimo. Para construir tal cubrimiento, sea U el conjunto de vértices no macheados en L(posiblemente vacío), y sea Z el conjunto de vértices que está en U o está conectado a U por caminos alternos (caminos que alterna entre aristas que están en el emparejamiento y aristas que no están en el emparejamiento). Sea

$$K = (L \setminus Z) \cup (R \cap Z)$$

. Cada arista e en E o pertenece a un camino alterno (y tiene un final derecho en K), o tiene un final izquierdo en K. Luego, si e está emparejado pero no en un camino alterno, entonces su final izquierdo no puede estar en un camino alterno (para tal camino podría sólo finalizar en e) y así pertenecer a $L \setminus Z$. Alternativamente, si e está sin emparejar pero no en un camino alterno, entonces su final izquierdo no puede estar en un camino alterno, para tal camino podría ser extendido al añadir e a él. Así Kforma un cubrimiento de vértice Además, cada vértice en K es un final de una arista emparejada. Luego, cada vértice en $L \setminus Z$ está emparejado porque Z es un superconjunto de U, el conjunto de vértices izquierdos sin emparejar.Y cada vértice en $R \cap Z$ también tiene que ser emparejado, luego si allí existió un camino alterno a un vértice sin emparejar entonces cambiando el emparejamiento removiendo las aristas emparejadas de este camino y añadiendo el las aristas no emparejadas en su lugar incrementaremos el tamaño del emparejamiento. Aun así, ninguna arista emparejada puede tener ambos de su finales en K Así, K es un cubrimiento de vértices de cardinalidad igual a M, y tiene que ser un cubrimiento de vértices mínimo. □

3.2.9 Condición suficiente emparejamiento perfecto

Corolario 3.3. *Sea $G = (V, E)$ un grafo bipartito con V dividido como $X \cup Y$. Existe un emparejamiento completo de X en Y si, para algún $k \in Z_+, grado(x) \geq k \geq grado(y)$ para todos los vértices $x \in X, y \in Y$*

Demostración. Ejercicio. □

3.2.10 Deficiencia de un grafo

Definición 3.13. *Sea $G = (V, E)$ es un grafo bipartito con V divido como $X \cup Y$. Si $A \subseteq X$, entonces $\delta(A) = |A| - |R(A)|$ es la deficiencia de A. La deficiencia del grafo G, que se denota como $\delta(G)$, está dada por $\delta(G) = max\{\delta(A), A \subseteq X\}$*