Graciela Nasini - Yanina Lucarini - Eduardo Martínez
nasini, lucarini, eduardom@fceia.unr.edu.ar

Práctica 1: PRODUCTO DE MATRICES - MATRICES ESPECIALES

1. Dadas las matrices A y B, determinar la veracidad de las siguientes afirmaciones. Justificar.
   a) Si A^2 está definida, entonces A es necesariamente una matriz cuadrada.
   b) Si AB y BA están definidas, entonces A y B son matrices cuadradas.
   c) Si AB y BA están definidas, entonces AB y BA son matrices cuadradas.
   d) Si $AB = B$, entonces $A = I$.
2. ¿Qué matriz o matrices son necesarias multiplicar para encontrar,
   a) la tercera columna de AB?
   b) la primera fila de AB?
   c) el elemento en la fila 3, columna 4 de AB?
   d) la entrada de la fila 1, columna 1 de CDE?
3. Encontrar ejemplos de matrices de orden 2 tales que:
   a) $A^2 = -I$, con A una matriz de entradas reales.
   b) $B^2 = \mathbf{0}$, con $B \neq \mathbf{0}$.
   c) $CD = -DC$, dejando de lado el caso $CD = \mathbf{0}$.
   d) $EF = \mathbf{0}$, donde ninguna entrada de E o F es cero.
4. Determinar la veracidad de las siguientes afirmaciones. Justificar.
   a) Si la primera y la tercera columna de B son iguales, también lo son la primera y la tercera columna de AB.
   b) Si la primera y la tercera fila de B son iguales, también lo son la primera y la tercera fila de AB.
   c) Si la primera y la tercera fila de A son iguales, también lo son la primera y la tercera fila de AB.
   d) $(AB)^2 = A^2B^2$.
5. Sean
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$
   a) La primera fila de AB es una combinación lineal de todas las filas de B. ¿Cuáles son los escalares de esta combinación, y cuál es la primera fila de AB?. ¿Y la segunda fila?.
   b) La primera columna de AB es una combinación lineal de todas las columnas de A. ¿Cuáles son los escalares de esta combinación, y cuál es la primera columna de AB?. ¿Y la segunda columna?.

6. Dada A una matriz $m \times n$ y B una matriz $n \times p$, para todo $i = 1, \ldots, n$ definimos $T_i = A^i B_i$.

   a) ¿Qué dimensión tiene T_i, para todo $i = 1, \ldots, n$?

   b) Probar que

$$AB = \sum_{i=1}^{n} T_i.$$

7. Encontrar las matrices A que satisfacen

$$A \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} A.$$

8. Sea A la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} & & E & & \\ - & - & - & - & - \\ & & & & \\ & & I & & \end{bmatrix},$$

   donde E es una matriz de tamaño $m \times n$ e I es la matriz identidad de tamaño $n \times n$.
   ¿Existe B tal que $AB = I$?.

9. Hallar la inversa de la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -3 & 9 & \frac{1}{3} \\ 6 & 1 & 3 & \frac{1}{9} & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

10. Probar que la inversa de una matriz es única.
    Sugerencia: suponer que existen B y C tales que $AB = I$ y $CA = I$ y utilizar la ley asociativa del producto de matrices para demostrar que $B = C$.

11. Probar que si A conmuta con toda matriz B (es decir, $AB = BA$ para toda B), entonces A es un múltiplo de la identidad.
    Sugerencia: probar por inducción en el tamaño de A.

    Recordamos las siguientes definiciones:

    - una matriz A de tamaño $n \times n$ es *simétrica* (resp. *antisimétrica*) si $a_{ij} = a_{ji}$ (resp. $a_{ij} = -a_{ji}$) para todo $i, j = 1, \ldots, n$.
    - una *matriz diagonal* es una matriz cuadrada con entradas nulas fuera de la diagonal.
    - una *matriz triangular superior (resp. inferior)* es una matriz cuadrada con entradas nulas por debajo (resp. encima) de la diagonal.
      Observación: Si una matriz es tringular inferior y triangular superior, es una matriz diagonal.
    - una *matriz elemental* $E_{ij}(\ell)$, con $i \neq j$ y de tamaño $n \times n$, es la matriz que se obtiene a partir de la matriz identidad de dimensiones $n \times n$ cambiando su entrada nula A_{ij} por ℓ.

- una *matriz de permutación* de tamaño $n \times n$ es una matriz obtenida por permutación de las filas de la matriz identidad $n \times n$. Una matriz de permutación es *simple* si sólo han sido permutadas dos filas de I entre sí.

  Observaciones:

  - El determinante de una matriz de permutación simple es -1.

  - Toda matriz de permutación es producto de matrices de permutación simples.

12. Probar que si A es simétrica de tamaño $n \times n$, entonces $A_i = A^i$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

13. Sea R una matriz $m \times n$. Probar que RR^T y $R^T R$ son simétricas.

    Sugerencia: recordar que $(AB)_{ij} = A_i B^j$.

14. Probar las siguientes proposiciones:

    a) Las matrices diagonales conmutan entre sí, es decir, si D_1 y D_2 son matrices diagonales, entonces $D_1 D_2 = D_2 D_1$.

    b) Si D es una matriz diagonal, con entradas no nulas $d_1, \ldots, d_n$, entonces D^{-1} es una matriz diagonal con entradas $\dfrac{1}{d_1}, \ldots, \dfrac{1}{d_n}$.

15. Demostrar que la matriz $E_{ij}(\ell)A$ es la matriz que se obtiene a partir de A, cambiando la fila A_i por $A_i + \ell A_j$.

    Sugerencia: probar que si e_k es el vector canónico de $\mathbb{R}^n$ con entrada 1 en la componente k y ceros en las demás, entonces $e_k A = A_k$; recordar además que la fila k de $E_{ij}(\ell)A$ es el producto de la fila k de $E_{ij}(\ell)$ por A.

16. Probar que $E_{ij}(\ell)E_{kj}(t) = E_{kj}(t)E_{ij}(\ell)$.

17. Probar que la inversa de la matriz $E_{ij}(\ell)$ es $E_{ij}(-\ell)$.

18. Sea P_{ij} la matriz de permutación simple que se obtiene al intercambiar las filas i y j de I.

    Probar que:

    a) P_{ij} es simétrica.

    b) Si P_{ij} es de tamaño $n \times n$ y A es una matriz de dimensiones $n \times p$, entonces $P_{ij}A$ es la matriz $n \times p$ que se obtiene intercambiando las filas i y j de A.

    Sugerencia: Si e_k es el vector canónico de $\mathbb{R}^n$ con un 1 en la entrada k, probar que $e_k A = A_k$ y recordar que la fila k de $P_{ij}A$ es el producto de la fila k de P_{ij} por A.

    c) $(P_{ij})^{-1} = P_{ij}$.

    d) Para toda matriz de permutación, su inversa es su transpuesta.

    e) El determinante de toda matriz de permutación es ± 1, más aún, es 1 si y sólo si el número de intercambios de filas es par.

19. Probar que si P es una matriz de permutación $n \times n$ y A es una matriz $n \times p$, entonces PA es la matriz $n \times p$ obtenida al permutar las filas de A de la misma manera que se permutan las filas de I para obtener P.

    Sugerencia: usar lo hecho para producto por matrices de permutación simple.

20. Sean A y B matrices triangulares. Probar:

    a) A es invertible si y sólo si ningún elemento de la diagonal es cero.

    b) Si A y B son triangulares inferiores, AB es una matriz triangular inferior, y que si A es invertible, A^{-1} también es triangular inferior.

c) Si A y B son triangulares superiores, AB es una matriz triangular superior, y que si A es invertible, A^{-1} también es triangular superior.

EJERCICIOS ADICIONALES

a) Sean

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 1 \end{bmatrix}.$$

Obtener EF, FE y E^2 utilizando las propiedades de las matrices elementales.

b) Exhibir la matriz M de orden 3 que produce los siguientes pasos de eliminación:

1) M suma 5 veces la fila 1 a la fila 2.
2) M suma -7 veces la fila 2 a la fila 3.
3) P intercambia las filas 1 y 2, y luego las filas 2 y 3.

c) Utilizando las propiedades de las matrices de permutación, obtener los siguientes productos de matrices:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

d) Una matriz "noroeste" tiene ceros por abajo de la antidiagonal que va de $(1, n)$ a $(n, 1)$ mientras que una matriz "sureste" tiene ceros por encima de dicha antidiagonal. Si una *matriz noroeste* A se multiplica por una *matriz sureste* B, ¿qué tipo de matrices son AB y BA?

e) Sean

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Verificar que $Ax = 0$. ¿Existen otros vectores x que verifiquen dicha igualdad?

f) Determinar la única matriz B 3×3 que, para toda matriz A, verifica:

1) $BA = 4A$.
2) $BA = 4B$.
3) BA tiene intercambiadas las columnas 1 y 3 de A y la fila 2 sin cambios.
4) Todas las filas de BA son iguales a la fila 1 de A.

g) Resolver los siguientes problemas:

1) X es dos veces más viejo que Y y la suma de la edad de ambos es igual a 39. Encontrar X e Y.
2) $(x, y) = (2, 5)$ y $(3, 7)$ están en la recta $y = mx + c$. Encontrar m y c.
3) La parábola $y = a + bx + cx^2$ pasa por los puntos $(x, y) = (1, 4)$, $(2, 8)$ and $(3, 14)$. Encontrar (a, b, c).

h) La matriz de rotación del plano x, y en un ángulo θ es

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Sean $v = (1, 5)$, $w = (-2, 3)$ y $u = (5, 7)$

1) Graficar en $\mathbb{R}^2$, $v, w, u, A(\frac{\pi}{2})v, A(\pi)w$ y $A(\frac{\pi}{2})(A(\pi)u)$.
2) Recordando algunas identidades trigonométricas, verificar que $A(\theta_1)A(\theta_2) = A(\theta_1 + \theta_2)$.
3) ¿Qué matriz es $A(\theta)A(-\theta)$?

i) ¿Cuál es la matriz P_1 de 2 por 2 que proyecta el vector (x, y) sobre el eje x para producir $(x, 0)$? ¿Cuál es la matriz P_2 que proyecta el vector (x, y) sobre el eje y para producir $(0, y)$? Si se premultiplica $(5, 7)$ por P_1 y luego se premultiplica por P_2, ¿qué dos vectores se obtienen?