Álgebra Lineal 2020 (LCC - LM - PM)
Cap.3- Ortogonalidad (2da. Parte)[1]

Graciela Nasini - Yanina Lucarini - Eduardo Martinez

{nasini,lucarini,eduardom}@fceia.unr.edu.ar

[1] [1] *Linear Algebra and its applications*, G. Strang.

Repasamos

Nos proponemos extender los conceptos de *ortogonalidad* y *norma* de vectores a cualquier espacio vectorial $\longrightarrow$ dotamos al espacio vectorial de un *producto interno*.

Definición: V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), $\langle ., . \rangle$ es un producto interno sobre V si para todo $\alpha \in \mathbb{K}$, $u, v, w \in V$ se verifica:

(1) $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$ ($\bar{z}$ = conjugado de z):,

(2) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$,

(3) $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$,

(4) y (5) $\langle u, u \rangle \geq 0$, $\langle u, u \rangle = 0 \Longleftrightarrow u = 0$

Para todo $w, v \in V$, w es *perpendicular u ortogonal a* v ($w \perp v$) si $\langle w, v \rangle = 0$. La *norma de* w (inducida por $\langle ., . \rangle$) es $\|w\| = \sqrt{\langle w, w \rangle}$. Equivalentemente, $\|w\|^2 = \langle w, w \rangle$ y $\|u\| \geq 0$. Dados $u, v \in V$, la distancia entre u y v es $\|u - v\|$.

Propiedades de la norma:

(1) y (2) $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

(3) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$

(4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (desigualdad triangular).

(5) $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \, \|y\|$ (desigualdad de Cauchy-Swartz).

Repasamos

Cauchy-Swartz nos permite definir ángulo entre vectores *en cualquier espacio vectorial con producto interno*:

$$x\hat{}y = arccos \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \, \|y\|}.$$

Así, en cualquier espacio vectorial, $\langle x, y \rangle = \|x\| \, \|y\| \, cos(x\hat{}y)$.

Propiedad de los vectores ortogonales: un conjunto de vectores *no nulos y mutuamente ortogonales* es un conjunto de vectores l.i..

Si $\mathcal{B} = \{v^1, \ldots, v^k\}$ es una base de V y sus vectores son (no nulos) y mutuamente ortogonales (*base ortogonal*) entonces, para todo $u \in V$,

$$u = \sum_{i=1}^{k} \frac{\left\langle u, v^i \right\rangle}{\left\|v^i\right\|^2} \, v^i.$$

Si todos los vectores de $\mathcal{B}$ tienen norma 1 (*base ortonormal*), resulta

$$u = \sum_{i=1}^{k} \left\langle u, v^i \right\rangle \, v^i.$$

Convenio: Salvo mención en contrario, cuando trabajamos en $\mathbb{R}^n$, el producto interno que consideramos es $\langle u, v \rangle = u^T v$.

Subespacios ortogonales

La noción de ortogonalidad entre vectores puede ser extendido a ortogonalidad entre subespacios vectoriales.

Definición: Sean un espacio vectorial V con producto interno y dos subespacios W_1 y W_2 de V. Decimos que W_1 y W_2 son ortogonales si, para todo $u \in W_1$ y todo $v \in W_2$, se verifica $u \perp v$.

Observaciones:

- El subespacio nulo es ortogonal a cualquier otro subespacio.
- En $\mathbb{R}^2$, la recta de ecuación $y = x$ y la recta de ecuación $y = -x$ son subespacios ortogonales.
- En $\mathbb{R}^3$, el eje x y el eje z son subespacios ortogonales.
- En $\mathbb{R}^3$, el plano coordenado xy y el eje z son subespacios ortogonales.
- En $\mathbb{R}^3$, los planos coordenados xy e yz, ¿son subespacios ortogonales?. No. Los vectores $u = (1, 1, 0)$ (en el plano xy) y $v = (0, 1, 1)$ (en el plano yz) no son ortogonales. Tampoco lo son $u = (0, 1, 0)$ (en el plano xy) y $v = (0, 1, 0)$ (en el plano yz).

Subespacios ortogonales

Tenemos la siguiente condición necesaria para la ortogonalidad de subespacios:

Lema: Sea V un espacio vectorial con producto interno y W_1, W_2 dos subespacios ortogonales de V. Entonces $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

Prueba: Supongamos que existe $u \in W_1 \cap W_2$, con $u \neq 0$. Como W_1 y W_2 son ortogonales, $v \perp w$ para todo $v \in W_1$ y $w \in W_2$. En particular, tomando $v = u \in W_1$ y $w = u \in W_2$, debe verificarse $u \perp u$. Sin embargo $\langle u, u \rangle = \|u\|^2 \neq 0$, una contradicción. Por lo tanto, $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.
Ejercicio: La condición del lema anterior no es suficiente.

El siguiente lema nos dice que si conocemos los generadores de los subespacios, para decidir sobre la ortogonalidad de los mismos no es necesario chequear la ortogonalidad de todos sus vectores.

Lema: Sea V un espacio vectorial con producto interno, $W_1 = \langle U_1 \rangle$ y $W_2 = \langle U_2 \rangle$ dos subespacios de V. Entonces, W_1 y W_2 son subespacios ortogonales si y solo si $u \perp w$ para todo $u \in U_1$ y todo $w \in U_2$.
Prueba: Ejercicio.

Subespacios ortogonales

El resultado anterior nos ayuda a descubrir que ya conocemos importantes pares de subespacios ortogonales.

Teorema:
Sea A una matriz de tamaño $m \times n$. Entonces:

1. El espacio fila y el espacio nulo de A son subespacios ortogonales de $\mathbb{R}^n$.
2. El espacio columna y el espacio nulo a izquierda de A son subespacios ortogonales de $\mathbb{R}^m$.

Prueba:

1. Sea $v \in N(A)$. Como $Av = 0$, para todo $i = 1, \ldots, m$ resulta $A_i v = 0$. Por lo tanto, para todo $i = 1, \ldots, m$, $A_i \perp v$. Como las filas de A generan al espacio fila, los espacios son ortogonales.
2. Ejercicio.

Nos enfocamos ahora en las dimensiones de subespacios ortogonales. Esto es, si V es un espacio de dimensión n y W_1, W_2 dos subespacios ortogonales de V, ¿qué podemos decir respecto a las dimensiones de W_1 y W_2?

Subespacios ortogonales

Ejemplo: Sea V el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por $v^1 = (1, 0, 0, 0)$ y $v^2 = (1, 1, 0, 0)$ y W, el generado por $w = (0, 0, 4, 5)$. Es fácil ver que V y W son ortogonales.

Observemos que la suma de las dimensiones de V y W es 3. O sea, *queda espacio* en $\mathbb{R}^4$ por fuera del espacio generado por v^1, v^2 y w.

En efecto, tenemos *lugar* para un espacio de dimensión 1, por ejemplo, el espacio L generado por $z = (0, 0, 5, -4)$. Es fácil probar que L es ortogonal a V y a W. (Ejercicio)

Pregunta: ¿Existe algún subespacio de $\mathbb{R}^4$ que sea ortogonal con V, W y L?

Subespacios ortogonales

Veamos primero el siguiente resultado técnico:

Lema: Sea V un espacio vectorial con producto interno y W_1, W_2 dos subespacios ortogonales. Sean U_1 y U_2 conjuntos de vectores l.i de W_1 y W_2, respectivamente. Entonces, $U = U_1 \cup U_2$ es un conjunto de vectores l.i. de V.

Prueba:
Sean $U_1 = \{u_1^i : i = 1, \ldots, k\}$ y $U_2 = \{u_2^j : j = 1, \ldots, t\}$ y consideremos una combinación lineal nula de vectores de $U = U_1 \cup U_2$:

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_1^i + \sum_{j=1}^{t} \beta_j u_2^j = 0.$$

Sea $w = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_1^i = \sum_{j=1}^{t} (-\beta_j) u_2^j$. Observemos que $w \in \langle U_1 \rangle \cap \langle U_2 \rangle$
Por lo tanto (justificar)

$$w = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_1^i = \sum_{j=1}^{t} (-\beta_j) u_2^j = 0.$$

Como los vectores de U_1 y de U_2 son l.i., resulta $\alpha_i = 0$ para todo $i = 1, \ldots, k$ y $\beta_j = 0$ para todo $j = 1, \ldots, t$.

Subespacios ortogonales

Podemos ahora probar:

Teorema: Sea V un espacio vectorial con producto interno y sean W_1, W_2 subespacios ortogonales de V. Entonces,

$$dim(W_1) + dim(W_2) \leq dim(V).$$

Prueba: Para $i = 1, 2$, sea $\mathcal{B}_i$ una base de W_i. Como son espacios ortogonales, $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$ (justificar). Por el lema anterior, $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ es un conjunto de vectores l.i. Por lo tanto,
$dim(V) \geq |\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2| = |\mathcal{B}_1| + |\mathcal{B}_2| = dim(W_1) + dim(W_2)$

El siguiente resultado nos dice que cuando la suma de las dimensiones de dos subespacios ortogonales coincide con la dimensión del espacio, estos subespacios son *complementarios respecto a la ortogonalidad*.

Lema: Sea V un espacio vectorial de dimensión n, con producto interno, y W_1, W_2 subespacios ortogonales de V. Entonces,

$$dim(W_1) + dim(W_2) = n \Longrightarrow W_2 = \{u \in V : u \perp v \text{ para todo } v \in W_1\}.$$

Subespacios ortogonales

Idea de la prueba: Sea $U = \{u \in V : u \perp v \text{ para todo } v \in W_1\}$.
Queremos probar: $dim(W_1) + dim(W_2) = n \Longrightarrow W_2 = U$.

1. $W_2 \subset U$
2. Suponemos existe $u \in U \setminus W_2$. Entonces, $u \neq 0$. (justificar).
3. de existir u, podemos construir un conjunto de $n+1$ vectores l.i. con él y las bases de W_1 y W_2. (Justificar)

Definición: Dado un espacio vectorial V con producto interno y W un subespacio de V, llamamos *complemento ortogonal de* W, y lo notamos $W^{\perp}$, al subespacio de V determinado por todos los vectores que son ortogonales a todos los vectores de W. Esto es,

$$W^{\perp} = \{u \in V : u \perp v \text{ para todo } v \in W\}$$

Ejercicio: Probar:

1. $W^{\perp}$ es un subespacio vectorial.
2. W y $W^{\perp}$ son espacios ortogonales.
3. $(W^{\perp})^{\perp} = W$

Complementos ortogonales

El lema sobre las dimensiones visto anteriormente puede ser reescrito como:

Lema: Sea V un espacio vectorial con producto interno de dimensión n y W_1, W_2 dos subespacios ortogonales de V. Entonces,

$$dim(W_1) + dim(W_2) = n \Longrightarrow W_2 = W_1^{\perp}.$$

Como un corolario de este resultado obtenemos:

Teorema Fundamental del Álgebra Lineal (Parte II):
Sea A una matriz $m \times n$. Entonces,

1. El espacio fila y el espacio nulo de A son complementos ortogonales en $\mathbb{R}^n$
2. El espacio columna y el espacio nulo a izquierda de A son complementos ortogonales en $\mathbb{R}^m$.

Observación: Veremos más adelante que la recíproca del lema anterior es cierta, Esto es, el siguiente resultado es válido:
Teorema: Sea V un espacio vectorial con producto interno de dimensión n y W_1, W_2 dos subespacios ortogonales de V. Entonces,

$$dim(W_1) + dim(W_2) = n \Longleftrightarrow W_2 = W_1^{\perp}.$$

Complementos ortogonales

Como consecuencia del teorema anterior tenemos que un par de los subespacios complementos ortogonales *descomponen el espacio vectorial* en el siguiente sentido:

Teorema: Sea V un espacio vectorial con producto interno, de dimensión finita, y W un subespacio de V. Entonces, para todo $v \in V$ existen únicos $w \in W$ y $w^{\perp} \in W^{\perp}$ tales que $v = w + w^{\perp}$.
Prueba:
Sea $\{v^1, \ldots, v^k\}$ una base de W y $\{w^1, \ldots, w^{n-k}\}$ una base de $W^{\perp}$.
Por lo tanto, $\{v^1, \ldots, v^k\} \cup \{w^1, \ldots, w^{n-k}\}$ es una base de V (justificar).

Sea $v \in V$ tal que $v = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v^i + \sum_{j=1}^{n-k} \beta_j w^j$. Si

$$w = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v^i \ \text{ y } \ w^{\perp} = \sum_{j=1}^{n-k} \beta_j w^j$$

tenemos $v = w + w^{\perp}$, $w \in W$ y $w^{\perp} \in W^{\perp}$.
Para probar que w y $w^{\perp}$ son únicos, sean $z \in W$ y $z^{\perp} \in W^{\perp}$ tales que $v = z + z^{\perp} = w + w^{\perp}$.
Entonces, $w - z = z^{\perp} - w^{\perp}$. Como $w - z \in W$ y $z^{\perp} - w^{\perp} \in W^{\perp}$, resulta $w - z = z^{\perp} - w^{\perp} = 0$ y por lo tanto, $z = w$ y $z^{\perp} = w^{\perp}$.

Complementos ortogonales

Corolario: Sea A una matriz $m \times n$. Entonces:

1. Para todo $x \in \mathbb{R}^n$ existen únicos $x_F \in C(A^T)$ y $x_N \in N(A)$ tales que $x = x_F + x_N$.
2. Para todo $y \in \mathbb{R}^m$ existen únicos $y_C \in C(A)$ y $y_I \in N(A^T)$ tales que $y = y_C + y_I$.

Observación 1: En la Práctica 3 (primera parte) definimos suma directa de subespacios vectoriales: dado V un espacio vectorial y U_1, U_2 dos subespacios de V, V es la *suma directa de* U_1 y U_2 y lo notamos $V = U_1 \oplus U_2$. si, para todo $v \in V$, v se escribe de manera única como $v = u_1 + u_2$ con $u_i \in U_i$, $i = 1, 2$.

Así, el teorema *de descomposición de un espacio por subespacios complementos ortogonales* puede ser reformulado como:

Teorema(*de descomposición*) Sea V un espacio vectorial con producto interno y W un subespacio vectorial de V. Entonces $V = W \oplus W^{\perp}$.

Complementos ortogonales

Observación 2: También el corolario anterior puede ser reformulado como:
Corolario: Sea A una matriz $m \times n$. Entonces, $\mathbb{R}^n = C(A^T) \oplus N(A)$ y $\mathbb{R}^m = C(A) \oplus N(A^T)$.

Observación 3: El corolario anterior nos permite conocer mejor *el efecto* sobre los espacios $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ de una tranformación lineal definida por una matriz A, $m \times n$. Sabemos que A *descompone* al dominio $\mathbb{R}^n$ en dos subespacios ortogonales: su espacio fila $C(A^T)$ y su espacio nulo $N(A)$. También el codomio, $\mathbb{R}^m$, queda *descompuesto por* A en sus espacios columna $C(A)$ y nulo a izquierda, $N(A^T)$.

Sea $x \in \mathbb{R}^n$. Sabemos que existen únicos $x_F \in C(A^T)$ y $x_N \in N(A)$ tal que $x = x_F + x_N$. Por lo tanto

$$Ax = Ax_F + Ax_N = Ax_F + 0 = Ax_F \in C(A) \subset \mathbb{R}^m.$$

La tranformación lineal A lleva todo el espacio fila de A en su espacio columna y el espacio nulo, en el $\{0\} \subset \mathbb{R}^m$.

Lema: Para toda matriz, A $m \times n$, A define un isomorfismo entre su espacio fila y su espacio columna.
Prueba: Ejercicio.

Complementos ortogonales

¿Cómo podemos obtener las "componentes" de un vector en cada uno de los espacios complementos ortogonales?

Siguiendo la demostración del teorema de *descomposición*, si W_1 y W_2 son complementos ortogonales en V, consideramos la base $\mathcal{B}$ de V obtenida a partir de la unión de una base de W_1 y una base de W_2. Así, para todo $v \in V$, los vectores en W_1 y W_2 cuya suma da v se obtienen fácilmente a partir de **la representación de** v en $\mathcal{B}$.

Sabemos que, en general, no es fácil obtener la representación de v en $\mathcal{B}$. Salvo que las bases de W_1 y W_2 sean ortogonales.

Observación: Si W_1 y W_2 son complementos ortogonales en V y $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ son bases ortogonales de W_1, W_2 respectivamente, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ es una base ortogonal de V.

Complementos ortogonales

Ejercicio: Sean W_1 y W_2 complementos ortogonales en V, $\mathcal{B}_1 = \{w^i : i = 1, \ldots, p\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{z^i : i = 1, \ldots, k\}$ bases ortonormales de W_1 y W_2, respectivamente. Entonces, para todo $v \in V$, $v = v_1 + v_2$ con

$$v_1 = \sum_{i=1}^{p} \left\langle v, w^i \right\rangle w^i \quad \text{y} \quad v_2 = \sum_{i=1}^{k} \left\langle v, z^i \right\rangle z^i.$$

Recordemos que dados dos vectores $x, y \in V$ definimos el *coseno de ángulo que forman* como

$$cos(x\hat{}y) = \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\| \, \|y\|}$$

Entonces, v_1 y v_2 pueden reescribirse como

$$v_1 = \sum_{i=1}^{p} \|v\| \, cos(v\hat{\ }w^i)\, w^i \quad \text{y} \quad v_2 = \sum_{i=1}^{k} \|v\| \, cos(v\hat{\ }z^i)\, z^i.$$

Tratemos de entender geométricamente los resultados que tenemos, pensando en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, donde podemos *ver* los subespacios.

Proyección sobre subespacios

En $\mathbb{R}^2$, *el eje* x y *el eje* y son subespacios ortogonales y $\mathcal{B}_1 = \{e^1\}$ $\mathcal{B}_2 = \{e^2\}$ son bases ortonormales de cada uno de ellos, respectivamente.

El teorema de *descomposición* dice que cualquier vector $v \in \mathbb{R}^2$ puede expresarse como

$$v = v_1 + v_2 = \|v\|\, cos(v\hat{\ }e^1)\, e^1 + \|v\|\, cos(v\hat{\ }e^2)\, e^2$$

.
Observar que

$$v_1 = \|v\|\, cos(v\hat{\ }e^1)\, e^1$$

no es otra cosa que el *vector proyección de* v sobre el eje x, o sea, sobre W_1. Y $v_2 = \|v\|\, cos(v\hat{\ }e^2)\, e^2$ es el *vector proyección de* v sobre el eje y, W_2.

(ver dibujo en archivo ProyeccionR2 o hacer uno más lindo.)

Proyección sobre subespacios

Pensemos ahora en $\mathbb{R}^3$, W_1 el subespacio vectorial correspondiente al plano xy con base ortonormal $\mathcal{B}_1 = \{e^1, e^2\}$ y W_2, el correspondiente al eje z, con base ortonormal $\mathcal{B}_1 = \{e^3\}$.

Tenemos que $W_2 = W_1^\perp$ y el teorema de *descomposición* nos dice que cualquier vector $v \in \mathbb{R}^3$, $v = v_1 + v_2$ con

$$v_1 = \|v\| \, cos(v \hat{\ } e^1) \, e^1 + \|v\| \, cos(v \hat{\ } e^2) e^2 \qquad v_2 = \|v\| \, cos(v \hat{\ } e^3) \, e^3.$$

¿Quiénes son v_1 y v_2? Son las proyecciones de v sobre W_1 y W_2, respectivamente.

(ver dibujo en el archivo ProyeccionR3 o hacer uno más lindo.)

Resulta natural la siguiente definición:

Definición: Sea V un espacio vectorial con producto interno y W un subespacio de W con base ortonormal $\{w^1, \ldots, w^p\}$. Para todo $v \in V$, *el vector proyección de v sobre W* es el vector

$$proy_{s/W} \, v = \sum_{i=1}^{p} \|v\| \, cos(v \hat{\ } w^i) \, w^i = \sum_{i=1}^{p} \frac{\langle v, w^i \rangle}{\|w^i\|} \, w^i.$$

Proyección sobre subespacios

Así, V es espacio vectorial con producto interno y W es un subespacio de V, la descomposición de $v \in V$ resulta:

$$v = proy_{s/W}\, v + proy_{s/W^{\perp}}\, v.$$

Proyecciones y aproximaciones:
Las proyecciones juegan un rol fundamental en las aplicaciones.

Dado un subespacio W de V y $v \notin W$, nos interesa conocer *la mejor aproximación de v en W*. Esto es, buscamos $w \in W$ tal que la distancia $\|v - w\|$ sea mínima.

Teorema: Sea V un espacio vectorial con producto interno, W un subespacio vectorial y $v \in V \setminus W$. Entonces, la mejor aproximación de v en W es $w = proy_{s/W}\, v$.

Prueba: Próxima clase.