Práctica 3 (*segunda parte*): ESPACIOS VECTORIALES

1. Reducir A y B a su forma escalonada.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Luego,

a) Encontrar el rango de cada una de las matrices. ¿Cuáles son las variables libres en cada caso?

b) Hallar los vectores que generan $N(A)$ y $N(B)$, estos vectores son soluciones particulares de $Ax = 0$ y $Bx = 0$.

2. Consideramos las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

a) Hallar la forma escalonada U de A, las variables libres y los vectores que generan $N(A)$.

b) Calcular la solución completa de $Ax = b$ de la forma $x = x_P + x_N$.

3. *a*) Encontrar las restricciones sobre b (lado derecho), después de la eliminación, que hacen que la tercera ecuación sea $0 = 0$, para:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

b) Determinar el rango de la matriz y una solución particular del sistema.

4. Encontrar R y los vectores que generan los espacios nulos asociados para cada una de las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} A & A \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} A & A \\ A & 0 \end{bmatrix}$$

5. Dadas las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 4 \\ 2 & 5 & 7 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix},$$

se pide:

a) Reducir $[A\ b]$ a $[U\ c]$ para obtener un sistema triangular $Ux = c$.

b) Encontrar condiciones sobre b_1, b_2 y b_3 para que el sistema tenga solución.

c) Describir el espacio columna de A. ¿Cuál es el plano de $\mathbb{R}^3$ que representa el espacio columna $C(A)$?

d) Describir el espacio nulo de A. ¿Cuál es la matriz de soluciones especiales?

e) Encontrar una solución particular de $Ax = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ y la solución completa $x = x_P + x_N$.

6. Calcular el espacio nulo de las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} I & I \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} I & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{bmatrix} I & I & I \end{bmatrix}.$$

7. La ecuación $x - 3y - z = 0$ determina un plano en $\mathbb{R}^3$.

   a) ¿Cuál es la matriz A asociada a esta ecuación?

   b) ¿Cuáles son las variables libres?

   c) Una de las soluciones especiales es $(3, 1, 0)$, ¿cuál es la otra?

   d) El plano $x - 3y - z = 12$, paralelo al plano dado, contiene al punto particular $(12, 0, 0)$. Escribir la componente que falta para describir la forma que tienen los puntos en este plano:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

8. Construir una matriz cuyo espacio columna contenga a $(1, 1, 5)$ y a $(0, 3, 1)$, cuyo espacio nulo contenga a $(1, 1, 2)$.

9. *a*) Encontrar una matriz de tamaño 1×3 cuyo espacio nulo conste de todos los vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que $x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0$.

   b) Hallar una matriz de tamao 3×3 con el mismo espacio nulo considerado en a).

10. Sean A y B matrices tales que $AB = 0$. Demostrar que el espacio columna de B está contenido en el espacio nulo de A.

11. Dados a, b, c con $a \neq 0$, ¿cómo debe elegirse d para que A tenga rango 1?. Con esta elección, factorizar a A en uv^T donde

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

12. Dar en cada caso una matriz que cumpla con las condiciones dadas o justificar por qué no existe:

    a) Su espacio columna tiene a $(1, 1, 0)$ y $(1, 0, 1)$ pero no a $(1, 1, 1)$.

    b) Su espacio columna contiene a $(1, 2, 1)$, su espacio nulo contiene a $(-1, 0, 1)$ y tiene determinante -1.

EJERCICIOS ADICIONALES

1. Describir las soluciones completas de la forma $x = x_P + x_N$ de los siguientes sistemas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

2. *a*) ¿Cuáles son las condiciones que deben satisfacer b_1 y b_2 (en caso de existir alguna) para que $Ax = b$ tenga solución?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

   b) Encontrar dos vectores en el espacio nulo de A y la solución completa de $Ax = b$.

3. Para cada $c \in \mathbb{R}$ encontrar la matriz reducida R y las soluciones especiales de $Ax = 0$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & c & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1-c & 2 \\ 0 & 2-c \end{bmatrix}.$$

4. Sea $Ax = b$ un sistema con infinitas soluciones. Responder

   a) ¿Por qué es imposible que el sistema $Ax = \bar{b}$ tenga una única solución?

   b) ¿Es posible que el sistema $Ax = \bar{b}$ no tenga solución?

5. Construir una matriz cuyo espacio columna contenga a $(1, 1, 1)$ y cuyo espacio nulo es la recta de múltiplos de $(1, 1, 1, 1)$.