Práctica 3 (*primera parte*): ESPACIOS VECTORIALES

A lo largo de esta práctica $(V, +, \cdot)$ es un espacio vectorial sobre el conjunto de los números reales, salvo que se aclare lo contrario.

1. Analizar si los siguientes conjuntos con las operaciones definidas son espacios vectoriales reales. (obs: cuando no se explicitan las operaciones suma y producto por escalares es porque se consideran las habituales).

   a) El conjunto de los números reales no negativos $\mathbb{R}_+$.

   b) El conjunto de los números reales no negativos $\mathbb{R}_+$, con la suma de dos vectores x, y definida como $x.y$ y el producto por un real c como x^c.

   c) El conjunto de las funciones pares.

   d) El conjunto de las funciones continuas con el producto de una función por un escalar c definido como $(cf)(x) = f(cx)$.

   e) El conjunto de las funciones reales biyectivas con la suma de dos funciones definida como $(f + g)(x) = f(g(x))$.

   f) El conjunto de los polinomios a coeficientes reales de grado a lo sumo 3, incluído el polinomio nulo.

   g) $\mathbb{R}^2$ con la suma de $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ definida como $x + y = (x_1 + y_1 + 1, x_2 + y_2 + 1)$.

   Decir en cada caso que no resulte e.v., cuál es la propiedad que se está violando.

2. Sea $(V, +, \cdot)$ un espacio vectorial. En particular, sabemos que existe $\mathbf{0} \in V$ tal que $\mathbf{0} + x = x$ para todo $x \in V$; y que para todo $x \in V$ existe un vector $\bar{x}$ tal que $x + \bar{x} = \mathbf{0}$.

   Demostrar los siguientes enunciados.

   a) *Unicidad del neutro*: si $\mathbf{0}' \in V$ es tal que $\mathbf{0}' + x = x$ para todo $x \in V$, entonces $\mathbf{0}' = \mathbf{0}$.

   b) *Unicidad del opuesto*: dado $x \in V$, si $\bar{x}' \in V$ es tal que $x + \bar{x}' = \mathbf{0}$, entonces $\bar{x}' = \bar{x}$.

   c) $\bar{x} = (-1) \cdot x$ (a partir de ahora, $-v$ es el opuesto de $v, \forall v \in V$).

   d) *Propiedad cancelativa*: si $z + x = z + y$ entonces $x = y$.

   e) $\alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \ \ \forall \alpha \in \mathbb{K}$.

   f) $0 \cdot v = \mathbf{0} \ \ \forall v \in V$.

   g) $(-\alpha) \cdot v = \alpha \cdot (-v) = -(\alpha \cdot v)$.

   h) Si $\alpha \cdot v = \mathbf{0}$ entonces $\alpha = 0$ o $v = \mathbf{0}$.

3. Mostrar que las dos propiedades que definen un subespacio vectorial (i.e. que la suma sea cerrada en el conjunto y que el producto por escalar también lo sea) son propiedades independientes una de otra. Para ello buscar un conjunto que sea cerrado bajo la suma pero no bajo el producto por escalar y otro conjunto que cumpla lo contrario.

4. Determinar cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ son subespacios.

   a) $\{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = 0\}$.

   b) $\{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = 1\}$.

   c) $\{(x_1, x_2, x_3) : x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 0\}$.

   d) $\{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 - 2x_3 = 4\}$.

   e) $\{\alpha(1, 4, 0) + \beta(2, 2, 2) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

   f) $\{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.

   g) $\{(x_1, x_2, x_3) : x_1 \leq x_2 \leq x_3\}$.

5. Sea **P** el plano de ecuación $x + 2y + z = 6$. ¿Cuál es la ecuación del plano $\mathbf{P}_0$ que pasa por el origen y es paralelo a **P**?. ¿**P** y $\mathbf{P}_0$ son subespacios de $\mathbb{R}^3$?.

6. Para cada uno de los siguientes conjuntos determinar si es un subespacio de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$, donde $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ es el espacio vectorial de las funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, o explique por qué no lo es.

a) $\{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) : f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}\}$.

b) $\{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) : f(0) = 0, \}$.

c) $\{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) : f(2) = 0, \}$.

d) El conjunto de funciones constantes.

e) $\{\alpha + \beta \operatorname{sen} x : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

7. Sea $(V, +, \cdot)$ un espacio vectorial y sean U y W subespacios de V. Probar que

$$U + W = \{u + w \ : \ u \in U, w \in W\}$$

es un subespacio de V.

8. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

a) Describir un subespacio de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ que contenga a A y no a B.

b) Si un subespacio de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ contiene a A y a B, ¿debe contener también a I?

9. Sea V un espacio vectorial y W_1 y W_2 dos subespacios de V. Demostrar que $W_1 \cup W_2$ es un subespacio de V si y sólo si $W_1 \subseteq W_2$ o $W_2 \subseteq W_1$.

10. Considere el espacio vectorial V de todas las funciones con dominio y codominio igual a $\mathbb{R}$ (con la suma y producto por escalar usuales).
Sean $V_I = \{f \in V : \ f$ es una función impar $\}$ y $V_P = \{f \in V : \ f$ es una función par $\}$.
Probar que:

a) V_I y V_P son subespacios de V.

b) $V_I + V_P = V$.

c) $V_I \cap V_P = \{\mathbf{0}\}$.

11. Explicitar el espacio columna y el espacio nulo de las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

12. Determinar una matriz A tal que su espacio nulo consista en:

a) todas las combinaciones lineales de $(2, 2, 1, 0)$ y $(3, 1, 0, 1)$.

b) todos los múltiplos de $(4, 3, 2, 1)$.

13. Sean $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$. Probar que el espacio columna de AB está contenido en el espacio columna de A. Dar un ejemplo donde dicha contención sea estricta.

Definición: Sea V un espacio vectorial y U_1, U_2 subespacios vectoriales de V. Supongamos que cada $v \in V$ se escribe de manera única como $v = u_1 + u_2$ con $u_1 \in U_1$ y $u_2 \in U_2$. Luego, se dice que V es suma directa de U_1 y U_2 y se nota:

$$V = U_1 \oplus U_2.$$

14. Probar el siguiente enunciado: Sean $U_1, U_2 \subset V$ subespacios. Luego $V = U_1 \oplus U_2$ si y sólo si se verifican las siguientes condiciones:
$i)$ $V = U_1 + U_2$.
$ii)$ $U_1 \cap U_2 = \{0\}$.
Encontrar un contraejemplo para demostrar que este resultado no puede extenderse a m subespacios.

15. Sea $\mathbb{R}[x]$ el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$, y sea U el subespacio de $\mathbb{R}[x]$ dado por

$$U = \{ax^2 + bx^5 : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Encontrar un subespacio W de $\mathbb{R}[x]$ tal que $\mathbb{R}[x] = U \oplus W$.

16. En el espacio vectorial de las matrices reales de orden 3, describir el subespacio generado por cada uno de los siguientes conjuntos:

a) $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

b) $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \right\}$

c) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

17. Recordar que, dado V un espacio vectorial y $S \subset V$, $\langle S \rangle$ denota el subespacio de V generado por S. Demostrar las siguientes proposiciones:

   a) Si $S \subseteq T \subseteq V$, entonces $\langle S \rangle \subseteq \langle T \rangle$.

   b) $S \subseteq \langle S \rangle$.

   c) Si $S \subseteq T$ y T es un subespacio de V, entonces $\langle S \rangle \subseteq T$. Observar que a partir de esta propiedad sabemos que $\langle S \rangle$ es el menor subespacio de V que contiene a S.

   d) S es un subespacio de V si y sólo si $\langle S \rangle = S$.

   e) Si $\langle S \rangle = U$, entonces $\langle U \rangle = U$.

   f) Sea $W \subseteq V$. Entonces:

      1) $\langle S \cap W \rangle \subset \langle S \rangle \cap \langle W \rangle$.

      2) $\langle S \cup W \rangle \subset \langle S \rangle + \langle W \rangle$.

   g) ¿Valen las contenciones inversas en los items a) y f)?

18. Describir el menor subespacio vectorial de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ que contenga a:

   a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

   b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

   c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

19. Considere el espacio vectorial V de los polinomios en $\mathbb{R}[x]$ de grado menor o igual a 3 (junto al polinomio nulo). Sean $p_i \in V$, $i = 1, \ldots, 5$ dados por:

$$p_1(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4, \quad p_2(x) = 2x^3 + 5x^2 + 11x + 8, \quad p_3(x) = x^2 + 5x$$

$$p_4(x) = 3x^3 + 6x^2 + 9x + 12 \quad \text{y} \quad p_5(x) = x^3 + 3x^2 + 8x + 3.$$

Para $j \in \{4, 5\}$, determine si $p_j \in \langle \{p_1, p_2, p_3\} \rangle$.

EJERCICIOS ADICIONALES

1. Determinar cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios de las matrices $n \times n$.

   a) El conjunto de las matrices triangulares.

   b) El conjunto de las matrices singulares.

   c) El conjunto de las matrices simétricas.

2. Dar un ejemplo de subespacio no vacío de $U \subset \mathbb{R}^2$ tal que U sea cerrado bajo la multiplicación por escalares, pero que no sea un subespacio de $\mathbb{R}^2$.

3. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios de $\mathbb{R}^\infty$?

   a) $\{x \in \mathbb{R}^\infty : |\{i \in \mathbb{N} : x_i \neq 0\}|$ es finito $\}$.

   b) $\{x \in \mathbb{R}^\infty : \exists\, i_0 \in \mathbb{N} / x_i = 0\ \forall\, i \geq i_0\}$.

   c) $\{x \in \mathbb{R}^\infty : x_i \geq x_{i+1}\ \forall\, i \in \mathbb{N}\}$ (sucesiones decrecientes).

   d) $\{x \in \mathbb{R}^\infty : \exists \lim\limits_{i \to \infty} x_i\}$ (sucesiones convergentes).

   e) $\{x \in \mathbb{R}^\infty : \exists\, c \in \mathbb{R} \ /\ x_{i+1} = c + x_i\ \forall\, i \in \mathbb{N}\}$ (progresiones aritméticas).

   f) $\{x \in \mathbb{R}^\infty : \exists\, c \in \mathbb{R} \ /\ x_{i+1} = c x_i\ \forall\, i \in \mathbb{N}\}$ (progresiones geométricas).

4. Determinar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas, dar un contraejemplo si es falsa.

   a) Los vectores b que no están en el espacio columna $C(A)$ constituyen un subespacio.

   b) Si $C(A)$ contiene sólo al vector cero, entonces A es la matriz cero.

   c) El espacio columna de $2A$ es igual al espacio columna de A.

   d) El espacio columna de $A - I$ es igual al espacio columna de A.

5. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, y sean W_1, W_2, W_3 son subespacios de V. Determinar si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones

   $i)$ Si $W_1 + W_3 = W_2 + W_3$ luego $W_1 = W_2$.

   $ii)$ Si $W_1 \oplus W_3 = W_2 \oplus W_3$ luego $W_1 = W_2$.