Práctica 5: Teoría de categorías I

1. Considerar los siguientes diagramas. En ambos casos, probar que si los dos triángulos conmutan, también conmuta el cuadrado.

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & \bullet \arrow[d] \\ \bullet \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[d] \arrow[dl] \\ \bullet \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd}$$

2. Probar que si $\mathscr{C}$ es una categoría con un único objeto, entonces $\mathscr{C} = \mathscr{C}_M$ para algún monoide $(M, *)$.

3. Sea Rel tal que ob Rel es la clase de conjuntos, mor Rel son las relaciones binarias entre conjuntos y la composición de morfismos es la composición de relaciones. Definir funciones domonio y codominio e identidades adecuadas y probar que Rel es efectivamente una categoría, denominada *categoría de relaciones*.

4. Sea PSet tal que ob PSet son pares (X, x_0) donde X es un conjunto y $x_0 \in X$. El par (X, x_0) se denomina un *conjunto punteado*. Una función entre los conjuntos punteados (X, x_0) e (Y, y_0) es una función $f : X \to Y$ tal que $f(x_0) = y_0$. Probar que si mor PSet son funciones entre conjuntos punteados, con la composición usual de funciones y las identidades usuales, PSet es una categoría.

5. Sean $\mathscr{C}$ una categoría y A un objeto de $\mathscr{C}$. Definimos $\mathscr{C}|A$ como la categoría cuyos objetos son las flechas f de $\mathscr{C}$ tales que $\mathrm{codom}(f) = A$. Una flecha g en $\mathscr{C}|A$ de $f\colon X \to A$ en $h\colon Y \to A$ es una flecha $g\colon X \to Y$ de $\mathscr{C}$ tal que $f = h \circ g$.

a) Expresar las flechas de $\mathscr{C}|A$ en términos de diagramas conmutativos.

b) Verificar que $\mathscr{C}|A$ es una categoría.

c) Si $\mathscr{C}_P$ es la categoría definida por un conjunto ordenado P y $x \in P$, determinar $\mathscr{C}_P|x$.

6. Sean $\mathscr{C}$ una categoría y f, g flechas de $\mathscr{C}$. Probar que

a) Si f y g son monomorfismos, entonces $g \circ f$ también lo es.

b) Si $g \circ f$ es un monomorfismo, f también lo es.

c) Si f y g son epimorfismos, entonces $g \circ f$ también lo es.

d) Si $g \circ f$ es un epimorfismo, g también lo es.

e) Si f^{-1} es la inversa de f y g^{-1} es la inversa de g, entonces $f^{-1} \circ g^{-1}$ es la inversa de $g \circ f$.

7. Probar que en Grp los morfismos mónicos son monomorfismos de grupos, los morfismos épicos son epimorfismos de grupos y los isomorfismos son isomorfismos de grupos.

8. Exhibir un ejemplo de una categoría $\mathscr{C}$ cuyos objetos sean conjuntos y sus morfismos sean funciones entre conjuntos tal que existen morfismos biyectivos que no son isomorfismos.

9. Sea $\mathscr{C}$ una categoría y $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ su categoría dual.

a) Probar que $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$ es un monomorfismo si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^{op}}(B, A)$ es un epimorfismo.

b) Probar que $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$ es un epimorfismo si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^{op}}(B, A)$ es un monomorfismo.

c) Probar que A es un objeto inicial (resp. terminal) en $\mathscr{C}$ si y sólo si A es un objeto terminal (resp. inicial) en $\mathscr{C}^{op}$.

10. Considerar que en el siguiente diagrama los 4 trapecios conmutan

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[rrr] \arrow[ddd] \arrow[dr, "\mathrm{m}"] & & & \bullet \arrow[ddd] \arrow[dl] \\
& \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[d] & \\
& \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[dr, "\mathrm{e}"] & \\
\bullet \arrow[rrr] \arrow[ur] & & & \bullet
\end{tikzcd}$$

Probar que

a) Si el cuadrado interno conmuta, también lo hace el cuadrado externo.

b) Si e es epi y m es mono, entonces si el cuadrado externo conmuta, también lo hace el cuadrado interno.

11. Determinar, si existen, los objetos iniciales, terminales y nulos en las siguientes categorías:

a) $\mathrm{Set} \times \mathrm{Set}$. **b)** $\mathrm{Set}^{\to}$. **c)** PSet. **d)** Grp. **e)** Ab. **f)** Rel.

12. Dar una categoría sin objetos iniciales. Dar una sin objetos finales. Dar una donde los objetos finales e iniciales coincidan.

13. Sean A y B objetos en una categoría $\mathscr{C}$. Un A, B-*pairing* se define como una terna (P, p_1, p_2) donde P es un objeto de $\mathscr{C}$ y $p_1 : P \to A$ y $p_2 : P \to B$ son morfismos de $\mathscr{C}$. Un morfismo de A, B-pairings

$$f : (P, p_1, p_2) \to (Q, q_1, q_2)$$

es cualquier morfismo f de $\mathscr{C}$ tal que $q_1 \circ f = p_1$ y $q_2 \circ f = p_2$, es decir, el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p_1"'] \arrow[dr, bend left, "p_2" near end] & Q \arrow[d, "q_2"] \arrow[dl, bend right, "q_1"' near end] \\
A & B
\end{tikzcd}$$

a) Probar que los A, B-pairings y sus morfismos forman una categoría $\mathrm{Pair}(A, B)$.

b) Siendo 0 un objeto inicial de $\mathscr{C}$, mostrar que

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[dl, "!_A"'] \arrow[dr, "!_B"] & \\ A & & B \end{tikzcd}$$

es un objeto inicial de $\mathrm{Pair}(A, B)$.

14. Dar una categoría donde algún par de objetos carecen de producto.

15. Mostrar las siguientes identidades:

a) $\langle \pi_1, \pi_2 \rangle = id$

b) $\langle f \circ h, g \circ h \rangle = \langle f, g \rangle \circ h$

c) $(f \times h) \circ \langle g, k \rangle = \langle f \circ g, h \circ k \rangle$

d) $(f \times h) \circ (g \times k) = (f \circ g) \times (h \circ k)$

e) $\langle [f, g], [h, k] \rangle = [\langle f, h \rangle, \langle g, k \rangle]$

16. Probar los siguientes isomorfismos:

a) $A \times B \cong B \times A$

b) $A \times 1 \cong A$

c) $A \times (B \times C) \cong (A \times B) \times C$

¿Cuáles son los enunciados duales?

17. Probar que en una categoría $\mathscr{C}$ todo ecualizador e es monomorfismo. Mostrar que si además e es epimorfismo, entonces se tiene un isomorfismo.

18. Encontrar el pull-back en `Set`.

19. Sea $\mathcal{C}$ una categoría con exponenciales,

a) Probar $curry(eval_{A,B}) = id_{B^A}$.

b) Dado un morfismo $f : B \to C$, construir un morfismo $B^A \to C^A$.

c) Dado un morfismo $f : A \to C^B$, construir un morfismo $uncurry(f) : A \times B \to C$.

d) Probar $uncurry(curry(f)) = f$ y $curry(uncurry(f)) = f$.

20. Sea $\mathcal{C}$ una CCC y sean A, B objetos de $\mathcal{C}$. Probar:

a) B^A es único salvo isomorfismo.

b) $1^A \cong 1$.

c) $B^1 \cong B$.

21. En una categoría con coproductos y objeto final, podemos definir los booleanos como el objeto $Bool = 1 + 1$. En este caso, a i_1 le llamamos $true$ y a i_2 le llamamos $false$. Escribir un morfismo $not : Bool \to Bool$ tal que

$$\begin{aligned} not \circ true &= false \\ not \circ false &= true \end{aligned}$$

Suponiendo que la categoría tiene exponenciales, ¿puede escribir un morfismo and : $Bool \times Bool \to Bool$ que se comporte como la conjunción?

22. Una categoría se dice distributiva si tiene productos finitos, coproductos finitos, y para todos objetos A, B, C, los morfismos

$$\begin{aligned} &!`_{0\times A} : 0 \to 0 \times A \\ &[\iota_1 \times id_C, \iota_2 \times id_C] : A \times C + B \times C \to (A + B) \times C \end{aligned}$$

son isomorfismos.
Probar que toda CCC con coproductos finitos es distributiva.