Álgebra Lineal 2020 (LCC- LM- PM)
Cap.2: Espacios vectoriales-3da parte

Graciela Nasini - Yanina Lucarini - Eduardo Martinez

nasini,lucarini, eduardom@fceia.unr.edu.ar

Independencia lineal

Anteriormente trabajamos con la matriz 4×5

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 6 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & 3 & 4 & 6 \\ 2 & 6 & 9 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

y $N(A)$ resultó ser el espacio generado por los siguientes 3 vectores:

$$x^1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad x^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad x^3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -\frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio: verificar que $C(A)$ es el espacio generado por los vectores

$$b^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \frac{5}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad y \quad b^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Independencia lineal

Observemos que para esta matriz 4×5, necesitamos 2 vectores para describir el espacio generado por sus 5 columnas y 3 vectores para describir su espacio nulo.
Queda claro que para una matriz $m \times n$, los números m y n no aportan información relevante respecto a la *dimensión* de sus espacios nulo y columna.
Llevando a A a su forma escalonada obtenemos

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

por lo tanto el rango de A (número de columnas y filas pivots) es $r = 2$.
Vimos que r sí tiene un rol importante en la descripción de $C(A)$ y $N(A)$.
Veamos más detalladamente este rol de r.

Independencia lineal

Nos preguntamos:

¿Cuándo aparece una fila nula en U (o en R)?

Recordemos que las operaciones elementales que realizamos sobre una matriz A para llevarla a su forma escalonada en cada paso reemplazan una de sus filas por una combinación lineal entre esa fila y la fila pivot. Por lo tanto, en todo paso, las filas de las matrices que vamos obteniendo son combinaciones lineales de las filas de A.
Entonces, si U tiene una fila nula, es porque el vector $0 \in \mathbb{R}^n$ es una combinación lineal de las filas de A. O equivalentemente, la fila de A que por operaciones elementales pasó a ser nula es una combinación lineal de filas de A.

Observación 1: El rango r es el número de filas no nulas en U (o en R, su forma reducida). De alguna manera, r cuenta el número de filas de A que son *linealmente independientes*.

Para poder formalizar esta idea, debemos tener una definición matématica de independencia lineal de vectores.

Independencia lineal

Sea $(V, \oplus, \odot)$ un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ y U un conjunto finito de vectores de V, $U = \{v^i : i = 1, \ldots, k\} \subseteq V$.

Si un vector v^j de U puede expresarse como combinación lineal de los restantes, es natural decir que v^j *depende linealmente* de los vectores de $U \setminus \{v^j\}$.
En ese caso, decimos que *los vectores de U son linealmente dependientes*.

¿Cómo definimos entonces la lineal *independencia* de un conjunto U de vectores?

Definir conceptos por la negativa ("son independientes si no son dependientes") suele ser engorroso para trabajarlos matemáticamente.

Nos proponemos caracterizar los conjuntos de vectores que NO SON linealmente dependientes.

Independencia lineal

La siguiente definición nos ayudará en lo que sigue:
Definición: Llamamos *combinación lineal nula* de un conjunto de vectores de un espacio vectorial V sobre $\mathbb{K}$ a la combinación lineal de los mismos donde todos los escalares son $0 \in \mathbb{K}$.
Observación: Existe $0 \neq v \in U$ tal que v puede expresarse como combinación lineal de los otros vectores de U si y sólo si el vector nulo $0 \in V$ puede expresarse como combinación lineal no nula de los vectores de U.

En efecto, sea $U = \{v^j : j = 1, \ldots, n\}$ y sin pérdida de generalidad podemos suponer que es v^1 quien puede expresarse como combinación lineal de v^j con $j = 2, \ldots, k$. Esto es, $v_1 = \sum_{j=2}^{k} \alpha_j v^j$, para ciertos $\alpha_j \in \mathbb{K}$, $j = 2, \ldots, k$. Por lo tanto $0 = v_1 - \sum_{j=2}^{k} \alpha_j v^j$.
Recíprocamente, si $0 \in V$ puede expresarse como una combinación lineal no nula de los vectores en U, tenemos que $0 = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j v^j$, para ciertos $\alpha_j \in \mathbb{K}$, $j = 1, \ldots, k$ y, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\alpha_1 \neq 0$. Entonces, $v_1 = \sum_{j=2}^{k} \frac{-\alpha_j}{\alpha_1} v^j$.

Independencia lineal

Por la observación anterior, los vectores de U son linealmente dependientes si y solo si el vector nulo $0 \in V$ puede expresarse como combinación lineal no nula de los vectores de U.

Entonces, los vectores de U son *linealmente independientes (l.i.)* si la única combinación lineal de vectore de U que da $0 \in V$ es la combinación lineal nula.

Equivalentemente:
Definición: Sea $(V, \oplus, \odot)$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $U = \{v^i : i = 1, \ldots, k\} \subseteq V$.Los vectores de U son *linealmente independientes (l.i.)* si

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v^i = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0,\ i = 1, \ldots, k.$$

Observación: Para todo $U \subset V$, si $0 \in V$ los vectores de U son linealmente dependientes. Justificar.

Independencia lineal

Ejemplos:

1. Las columnas de $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ son linealmente independientes.

   Debemos probar que la única combinación lineal de los vectores columnas que da el vector nulo es la que tiene todos los escalares iguales a cero. Planteamos:

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

   Es fácil ver que la única solución es $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Independencia lineal

Ejemplos:(continuación)

2. Sea V el espacio vectorial de funciones reales definidas en todo $\mathbb{R}$ (con la suma y productor por escalares habituales) y sea $U = \{f_0, f_1, \ldots, f_k\}$ donde, para $j = 0, \ldots, k$, $f_j(x) = x^j$ para todo $x \in \mathbb{R}$. ¿Son l.i. los *vectores* de U?

   En este caso, debemos probar que la única combinación lineal de las funciones en U que da la función constante cero Z es la que tiene todos los escalares iguales a cero. Planteamos:

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j f_j = Z \Rightarrow \sum_{j=0}^{k} \alpha_j f_j(x) = Z(x) \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{j=0}^{k} \alpha_j x^j = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

   La expresión de la izquierda es un polinomio y todo polinomio tiene un número finito de raíces salvo que se trate del *polinomio nulo*. Por lo tanto $\alpha_j = 0$ para todo $j = 1, \ldots, k$.

Independencia lineal

Ejemplos:(continuación)

3. Sea $\mathbb{C}$ el espacio vectorial de los números complejos sobre el campo $\mathbb{C}$. Sean $z_1 = -1 + 2i$ y $z_2 = 3 - 6i$. ¿ Son l.i.?

   Nos planteamos una combinación lineal de z_1 y z_2 que nos de $0 \in \mathbb{C}$:

$$\alpha(-1+2i) + \beta(3-6i) = 0 \Leftrightarrow (-\alpha + 3\beta) + (2\alpha - 6\beta)i = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\alpha + 3\beta = 0 \wedge 2\alpha - 6\beta = 0$$

   O, equivalentemente,

$$\alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \end{bmatrix} = 0.$$

   Observar que la independencia lineal de z_1 y z_2 es equivalente a la de dos vectores en $\mathbb{R}^2$, $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 3 \\ -6 \end{bmatrix}$.

Volvamos a los espacios vectoriales en $\mathbb{R}^n$

Independencia lineal

Dado un conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$, $U = \{v^j : j = 1, \ldots, k\}$, definimos $M(U)$ a la matriz $n \times k$ cuya columna j es v^j, $j = 1, \ldots, k$.

Lema: Sea $U = \{v^j : j = 1, \ldots, k\} \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces, los vectores de U son l.i. si y solo si $N(M(U)) = \{0\}$.

Prueba: Recordar que toda combinación lineal de las columnas de una matriz A $m \times n$ puede expresarse como Ax, con $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces, los vectores de U son l.i. si y solo si

$$M(U)x = 0 \Rightarrow x = 0 \ ,$$

o, equivalentemente, el único elemento del espacio nulo de $M(U)$ es el vector nulo.

Tenemos el siguiente corolario:
Corolario: Sea $U = \{v^j : j = 1, \ldots, n\} \subset \mathbb{R}^n$. Entonces, los vectores de U son l.i. si y solo si $M(U)$ es no singular. Justificar.

Ejercicio: Si A es una matriz $n \times n$ no singular, sus vectores fila son l.i.. (Ayuda: una combinación lineal de las filas de A puede expresarse como xA, con $x \in \mathbb{R}^n$.)

Independencia lineal

El ejemplo 1. es un caso particular del siguiente resultado:

Corolario: Los vectores columna y los vectores fila de toda matriz triangular $n \times n$ sin ceros en la diagonal son l.i..

Por otro lado, recordemos que si A es una matriz $m \times n$, con $n > m$, $N(A)$ tiene un elemento distinto del vector nulo. Justificar.

Por lo tanto tenemos:

Corolario: En todo conjunto de más de n vectores de $\mathbb{R}^n$ sus elementos son l.d..

Nueva pregunta: si tenemos un conjunto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ de vectores l.d., ¿cuál sería un subconjunto maximal/máximo de U cuyos elementos sean l.i.?

Vemos antes algunos resultados

Independencia lineal

Lema: Sean $\{v^1, \ldots, v^k\} \subset \mathbb{R}^n$, $\{w^1, \ldots, w^k\} \subset \mathbb{R}^p$ y $\{z^1, \ldots, z^k\} \subset \mathbb{R}^{n+p}$ tales que, para todo $j = 1, \ldots, k$, $z^j = \begin{bmatrix} v^j \\ w^j \end{bmatrix}$.

1. Si $v^1, \ldots, v^k$ son vectores l.i. entonces $z^1, \ldots, z^k$ son vectores l.i..
2. Si $w^j = 0$ para todo $j = 1, \ldots, k$, entonces $z^1, \ldots, z^k$ son vectores l.i. si y solo si $v^1, \ldots, v^k$ son vectores l.i..

Prueba: Sólo es necesario observar que

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j z^j = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{k} \alpha_j v^j \\ \sum_{j=1}^{k} \alpha_j w^j \end{bmatrix}.$$

Entonces:

1. Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ tales que $\sum_{j=1}^{k} \alpha_j z^j = 0 \in \mathbb{R}^{n+p}$. Entonces $\sum_{j=1}^{k} \alpha_j v^j = 0 \in \mathbb{R}^n$. Como $v^1, \ldots, v^k$ son vectores l.i., tenemos que $\alpha_j = 0$ para todo $j = 1, \ldots, k$.
   Por lo tanto, $z^1, \ldots, z^k$ son vectores l.i..

Independencia lineal

Prueba: (continuación)

2. En función de lo probado anteriormente, solo falta probar que si $w^j = 0$ para $j = 1, \dots, k$ y $z^1, \dots, z^k$ son vectores l.i., entonces $v^1, \dots, v^k$ son vectores l.i.
   Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ tales que $\sum_{j=1}^k \alpha_j v^j = 0 \in \mathbb{R}^n$. Entonces, si $0 \in \mathbb{R}^p$,
   $$\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^k \alpha_j v^j \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \in \mathbb{R}^{n+p}.$$
   Por lo tanto,
   $$\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^k \alpha_j v^j \\ 0 \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^k \alpha_j \begin{bmatrix} v^j \\ 0 \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^k \alpha_j z^j = 0 \in \mathbb{R}^{n+p}.$$
   Como $z^1, \dots, z^k$ son vectores l.i., tenemos $\alpha_j = 0$ para todo $j = 1, \dots, k$.
   Entonces $v^1, \dots, v^k$ son vectores l.i. .

Independencia lineal

Pensemos ahora en conjunto de vectores que se corresponden con los vectores columna de una matriz escalonada. Recordemos, una matriz escalonada responde a este esquema

$$U = \begin{bmatrix} \odot & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & \odot & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \odot & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \odot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

donde con $\odot$ indicamos las entradas pivots y, por ende, identifican las columnas y filas pivots. Recordemos también que el número de pivots es el rango de la matriz.

Veremos que el rango de la matriz es el número de columnas l.i. y coincide con el número de filas l.i..

Observación 1: Podemos ordenar los vectores columnas de manera que todas las columnas pivots estén al principio y eso no cambia la lineal independencia de los vectores columnas ni de los vectores fila.

Independencia lineal

Observación 2: Si U es una matriz escalonada y $\tilde{U}$ es la submatriz de U que se obtiene borrando sus filas nulas, el número de vectores fila l.i. y el número de vectores columna l.i. de U y de $\tilde{U}$ coinciden.
En efecto, por el lema que vimos anteriormente, un conjunto de vectores columnas de U será l.i. si y solo si los vectores que se obtienen borrando las entradas correspondientes a las filas nulas de U lo son.
Por otro lado, sabemos que ningún subconjunto de vectores que incluya al vector nulo es l.i..Por lo tanto, todo conjunto de filas l.i. de U será un subconjunto de las filas no nulas de U.

De acuerdo a la observaciones anteriores, para determinar el número de filas y columnas l.i. de una matriz escalonada U basta determinarlo para la submatriz $\tilde{U}$ de sus r primeras filas y sus columnas ordenadas según el siguiente esquema:

$$\tilde{U} = \begin{bmatrix} \odot & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & \odot & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \odot & * & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \odot & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Independencia lineal

Tenemos entonces:

- **vectores columna**:
  Los vectores columna de $\tilde{U}$ son vectores de $\mathbb{R}^r$. Por lo tanto, sabemos que tendremos a lo sumo r vectores columnas l.i.. Si encontramos r vectores columna de $\tilde{U}$ l.i., r será el número máximo de vectores columnas l.i. de $\tilde{U}$ y, por lo tanto, también de U.
  Sólo basta observar que las r primeras columnas de $\tilde{U}$ son l.i. ya que la submatriz B correspondiente a estas columnas es una matriz triangular sin ceros en la diagonal.
- **vectores fila**:
  Probaremos que los r vectores fila de $\tilde{U}$ son l.i.
  Utilizando el lema demostrado anteriormente, si los vectores filas de B (la submatriz correspondiente a las primeras r columnas) son l.i. también lo serán los vectores filas de $\tilde{U}$. Como B es triangular, sabemos que sus vectores fila son l.i..
  Por lo tanto el número máximo de vectores fila l.i. de $\tilde{U}$ es r y lo mismo sucede para U.

Independencia lineal

Hemos probado:
Lema: Si U es una matriz escalonada, el número máximo de filas l.i. coincide con el número máximo de columnas l.i. y ese número es r, el rango de U.

Veremos que este resultado se extiende a cualquier matriz A.

Para ello necesitamos algunos resultados técnicos más...

Independencia lineal

Lema: Sean $U = \{v^j : j = 1, \ldots, k\} \subset \mathbb{R}^n$, w^1 una combinación lineal de los vectores de U con el coeficiente correspondiente a v^1 no nulo y $W = (U \setminus \{v^1\}) \cup \{w^1\}$.
Entonces, los vectores de U son l.i. si y solo si los vectores de W son l.i..

Prueba:
Sabemos que existen $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, k$, tales que $w^1 = \sum_{j=1}^k \beta_j v^j$, con $\beta_1 \neq 0$.
Consideremos una combinación lineal de los elementos de W que nos dé el vector nulo. Tenemos entonces:

$$0 = \alpha_1 w^1 + \sum_{j=2}^{k} \alpha_j v^j = \alpha_1 \sum_{j=1}^{k} \beta_j v^j + \sum_{j=2}^{k} \alpha_j v^j =$$

$$= \alpha_1 \beta_1 v^1 + \sum_{j=2}^{k} (\alpha_1 \beta_j + \alpha_j) v^j.$$

Si los vectores de U son l.i. entonces $\alpha_1 \beta_1 = 0$ y $\alpha_1 \beta_j + \alpha_j = 0$ para todo $j = 2, \ldots, k$.
Como $\beta_1 \neq 0$, tenemos $\alpha_1 = 0$ y por lo tanto $\alpha_j = 0$ para todo $j = 2, \ldots, k$.

Independencia lineal

Prueba:(continuación)
Recíprocamente, sean $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, k$, tales que $\sum_{j=1}^{k} \alpha_j v^j = 0$.
Como $w^1 = \sum_{j=1}^{k} \beta_j v^j$, con $\beta_1 \neq 0$,

$$v_1 = \frac{1}{\beta_1}(w^1 - \sum_{j=2}^{k} \beta_j v^j).$$

Entonces:

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j v^j = \alpha_1 v^1 + \sum_{j=2}^{k} \alpha_j v^j = \frac{\alpha_1}{\beta_1}(w^1 - \sum_{j=2}^{k} \beta_j v^j) + \sum_{j=2}^{k} \alpha_j v^j =$$

$$= \frac{\alpha_1}{\beta_1} w^1 + \sum_{j=2}^{k}(\alpha_j - \frac{\alpha_1 \beta_j}{\beta_1}) v^j = 0.$$

Si los vectores en W son l.i., $\frac{\alpha_1}{\beta_1} = 0$ y $\alpha_j - \frac{\alpha_1 \beta_j}{\beta_1} = 0$ para todo $j = 2, \ldots, k$. Entonces, $\alpha_j = 0$ para todo $j = 1, \ldots, k$, resultando los vectores de U l.i..

Independencia lineal

El lema anterior nos dice que si en un conjunto de vectores cambiamos uno de sus elementos por una combinación lineal de ellos, donde el vector a sustituir participe con coeficiente no nulo, el *tipo de dependencia* entre los elementos del conjunto no se modifica.

En el proceso de reducción que se realiza para llevar a una matriz a su forma escalonada, los vectores fila son modificados por una combinación lineal de vectores filas donde participan con coeficiente no nulo (o son cambiados de lugar en la matriz). Por lo tanto, todo conjunto de filas l.i. en la matriz reducida es l.i. en la matriz original.

Por lo visto anteriormente, el número máximo de filas l.i. de cualquier matriz A es su rango. Más aún, las r filas pivots de A son l.i..

Analicemos la lineal independencia de vectores columnas. Sea T cualquier submatriz por columnas de A. Sabemos que los vectores columnas de T serán l.i. si y sólo $N(T) = \{0\}$ o, equivalentemente, si el sistema $Tx = 0$ tiene como única solución al vector nulo.

Analicemos la forma escalonada T' de T.

Independencia lineal

Sea E la matriz de operaciones elementales que lleva a A a su forma escalonada U, o sea, $EA = U$.
Sea $T' = ET$. Claramente, las filas que son nulas en U también son filas nulas de T' y las columnas pivots de A que estén en T serán columnas pivots de T'.
Recordemos que el espacio nulo de una matriz tiene como único elemento al vector nulo si y sólo todas sus columnas son columnas pivots.
Por lo tanto, los vectores columna de T son l.i. si y solo si todos ellos son columnas pivots de A. O sea, un conjunto de columnas de A es l.i. si es un subconjunto de sus columnas pivots. Así, A tiene a lo sumo r vectores columna l.i..

Por lo tanto, las r columnas pivots de A son l.i. y r es el número máximo de columnas l.i. de A.

Independencia lineal

Hemos probado un importante teorema del Álgebra Lineal:

Teorema: En toda matriz, el número máximo de vectores columna coincide con el número máximo de filas. Más aún, ese número es el rango de la matriz.

Observación: Dado un conjunto $U = \{v^1, \ldots, v^k\} \subset \mathbb{R}^n$, determinar el número máximo de vectores l.i. en U es equivalente a calcular el rango de una matriz $M(U)$ (aquella que tiene por columnas a los vectores de U) o el rango de $M(U)^T$. Justificar.

Independencia lineal

Veamos algunas propiedades más de la lineal independencia en cualquier espacio vectorial que serán de utilidad en las definiciones siguientes:

Ejercicio: Sea $(V, \oplus, \odot)$ un espacio vectorial y U, un conjunto de vectores l.i. de V, de cardinal k, Entonces el número máximo de vectores l.i. en $< U >$ es k.

Lema: Sea $(V, \oplus, \odot)$ un espacio vectorial. Sea $U = \{v^1, \ldots, v^k\}$ un conjunto de vectores l.i. de V. Entonces:

1. Para todo $U' \subset U$, los vectores de U' son l.i..
2. Sea $W = \{w^1, \ldots, w^p\}$ un conjunto de vectores l.i. de V, con $p > k$. Entonces, existe $j \in \{1, \ldots, p\}$ tal que $U \cup \{w^j\}$ es un conjunto de vectores l.i..

Prueba:

1. Ejercicio.
2. Observar que, para cualquier $j \in \{1, \ldots, p\}$ tal que los vectores de $U \cup \{w^j\}$ son l.d. tenemos que w^j puede escribirse como combinación lineal de vectores de U y por lo tanto, $w^j \in < U >$. Además, sabemos que el número máximo de vectores l.i. que puede haber en $< U >$ es k. Como $|W| = p > k$, no es posible entonces que todos los vectores de W sean elementos de $< U >$.

Conjuntos generadores de espacios vectoriales.

2. (continuación)
   Equivalentemente, no es posible que para todo $j \in \{1, \ldots, p\}$, los vectores de $U \cup \{w^j\}$ sean l.d..
   Por lo tanto, existe $j \in \{1, \ldots, p\}$ tal que los vectores de $U \cup \{w^j\}$ son l.i..

Definición: Dado un espacio vectorial $(V, \oplus, \odot)$ sobre $\mathbb{K}$ y un subconjunto U de V, decimos que U es un *conjunto generador de V* si $< U >= V$.

Nos preguntamos ahora qué condiciones deben darse para que un conjunto generador U de V sea un *generador minimal*, esto es, para que no exista un subconjunto propio U' de U tal que $< U' >= V$.

La independencia lineal juega un rol importante. No es dificil probar:

Lema: Sea un espacio vectorial $(V, \oplus, \odot)$ sobre $\mathbb{K}$ y un subconjunto U de V tal que sus vectores son l.d. Entonces, existe $u \in U$ tal que $< U \setminus \{u\} >=< U >$. **Prueba**: Ejercicio.

Corolario: Dado un espacio vectorial $(V, \oplus, \odot)$ sobre $\mathbb{K}$, todo conjunto generador minimal de V es un conjunto de vectores l.i..

Conjuntos generadores de espacios vectoriales.

Además tenemos que vale la recíproca:

Ejercicio: Dado un espacio vectorial $(V, \oplus, \odot)$ sobre $\mathbb{K}$, todo conjunto generador de V cuyos elementos son l.i. es un conjunto generador minimal.

Tenemos la siguiente definición:

Definición: Dado un espacio vectorial $(V, \oplus, \odot)$ sobre $\mathbb{K}$, una *base de V* es un conjunto generador de V cuyos vectores son l.i..

Tenemos entonces que todas las bases de un espacio vectorial son conjuntos generadores minimales.

Ejemplos:

1. $\mathbb{R}^n$ los vectores canónicos e_k, con $k = 1, \ldots, n$ son una base de $\mathbb{R}^n$. Pero no es la única...

   Dada cualquier matriz no singular $n \times n$, sus vectores columna constituyen una base de $\mathbb{R}^n$. Justificar.

Conjuntos generadores de espacios vectoriales.

Ejemplos: (continuación)

2. Sea $U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

   Por definición, los vectores columna de U son un espacio generador de su espacio columna, $C(U)$. Sin embargo, no son base ya que no son l.i. Justificar.

3. Es fácil ver que las funciones $f^{(k)} = x^k$ con $k = 1, \ldots, n$ definen una base del espacio vectorial
   $\{$*polinomios de grado a lo sumo n*$\} \cup \{$polinomio nulo$\}$.

¿Las bases son siempre conjuntos finitos?

4. Si pensamos en el espacio vectorial de todos los polinomios a coeficientes reales (sin acotar el grado de los mismos) necesitaremos todas las potencias no negativas para generarlo.
   En efecto, si para todo $k \in \mathbb{Z}_+$, $f^{(k)}(x) = x^k$ para todo $x \in \mathbb{R}$,
   $B = \{f^k : k \in \mathbb{Z}_+\}$ es una base del espacio vectorial de las funciones polinómicas.

Bases de espacios vectoriales

Tenemos los siguientes resultados:

Lema: Sea V un espacio vectorial de dimensión n y U es un subconjunto de k elementos de V. Entonces:

1. Si los elementos de U son l.i. y $k = n$ entonces U es una base de V.
2. Si los elementos de U son l.i. y $k < n$ entonces existe una base B de V tal que $U \subset B$.
3. Si U es un conjunto generador de V y $k > n$ entonces existe una base B de V tal que $B \subset U$.

Prueba: Ejercicio.

De los resultados anteriores podemos concluir que las bases de un espacio vectorial son *conjuntos indepedientes maximales* y a su vez *conjuntos generadores minimales*.

Bases de espacios vectoriales

Hemos visto que un espacio vectorial puede tener más de una base. Más aún, si $\mathbb{K}$ es infinito, a partir de una base de V podemos construir infinitas bases de V.

Lema: Sea B una base del espacio vectorial $(V, \oplus, \odot)$ sobre $\mathbb{K}$ y $v \in B$. Sea w una combinación lineal de vectores de B en los que el coeficiente asociado a v es no nulo. Entonces $(B \setminus \{v\}) \cup \{w\}$ es una base de V.
Prueba: Ejercicio.

Observemos que todas las bases construidas usando el lema anterior tienen el mismo cardinal. Nos preguntamos:

¿Todas las bases de un espacio vectorial tienen el mismo cardinal?

Veremos que si un espacio vectorial tiene una base finita, todas sus bases tienen el mismo cardinal, como lo establece el próximo resultado:

Bases de espacios vectoriales

Lema: Si $U = \{v^i : i = 1, \ldots, n\}$ y $W = \{w^j : j = 1, \ldots, m\}$ son bases de un espacio vectorial $(V, \oplus, \odot)$ sobre $\mathbb{R}$ entonces $m = n$.

Prueba: Sin pérdida de generalidad supongamos que $m \leq n$. Como W es un conjunto generador de V, para todo $i = 1, \ldots, n$ existen $a^i_j \in \mathbb{R}$ con $j = 1, \ldots, m$, tales que

$$v^i = \sum_{j=1}^{m} a^i_j w^j.$$

Como los vectores de U son l.i. tenemos:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v^i = 0 \Leftrightarrow \alpha_i = 0 \ \forall i = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Además,

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v^i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=1}^{m} a^i_j w^j = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a^i_j \right) w^j. \tag{2}$$

Bases de espacios vectoriales

Prueba: (continuación)
Como los vectores de W son l.i., usando 2, resulta

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v^i = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_j^i = 0 \ \forall j = 1, \ldots, m. \tag{3}$$

Juntando las condiciones (1) y (3) tenemos

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_j^i = 0 \ \forall j = 1, \ldots, m \Leftrightarrow \alpha_i = 0 \ \forall i = 1, \ldots, n. \tag{4}$$

La condición 4 nos dice que el sistema de ecuaciones

$$\sum_{i=1}^{n} a_j^i \alpha_i = 0 \ j = 1, \ldots, m$$

tienen como única solución $\alpha_i = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$

Es fácil ver que la matriz A de coeficientes del sistema en (4) es la matriz $m \times n$ tal que, para todo $i = 1, \ldots, n$, su vector columna A^i es $(a_1^i, \ldots, a_m^i)^T$. La condición (4) es equivalente a afirmar $N(A) = \{0\}$ y hemos visto que para ello es necesario que $n \leq m$. Por lo tanto, $n = m$.

Dimensión de espacios vectoriales

Definición: Llamamos *dimensión* de un espacio vectorial al cardinal de sus bases.

Dada una matriz A a coeficientes reales $m \times n$ definimos los espacios vectoriales $C(A) \subset \mathbb{R}^m$ y $N(A) \subset \mathbb{R}^n$. Así como el espacio $C(A)$ es el generado por los vectores columna de A, resulta natural definir el *espacio fila* de A como el generado por sus vectores filas.
Observación: el *espacio fila* de A no es más que $C(A^T) \subset \mathbb{R}^n$, el espacio columna de A^T.

Para completar los *cuatro espacios fundamentales* asociados a una matriz A, definimos el *espacio nulo a izquierda* de A como $N(A^T) \subset \mathbb{R}^m$.

Observación $y \in N(A^T) \Longleftrightarrow A^T y = 0 \Longleftrightarrow y^T A = 0$

Ya hemos conversado *informalmente* acerca de la *dimensión* de $C(A)$ y $N(A)$. Ahora estamos en condiciones de hacer el análisis formal de la dimensión de estos dos espacios y también de los asociados a su traspuesta.

Dimensión de los 4 espacios fundamentales

Ya hemos probado que, en toda matriz A, el número máximo de vectores columna y de vectores fila l.i. es el rango r de A.
Como $C(A)$ y $C(A^T)$ son los espacios generados por los vectores columna y los vectores fila, respectivamente, los r vectores columnas l.i. y los r vectores fila l.i. son conjuntos generadores minimales de $C(A)$ y $C(A^T)$ y por lo tanto, son bases de estos espacios. Tenemos que la dimensión de $C(A)$ y de $C(A^T)$ es r.

Observación importante: Si bien $C(A)$ y $C(A^T)$ son dos espacios vectoriales de la misma dimensión, ambos *viven* en espacios diferentes. Recordar que su A es $m \times n$.

Ejemplo: Si A es una matriz 3×5 de rango 2, $C(A)$ es un espacio de dimensión 2 en $\mathbb{R}^5$ mientras que $C(A^T)$ es un plano en $\mathbb{R}^3$.

Si analizamos ahora a $N(A)$, vimos que las soluciones especiales del sistema $Ax = 0$ son l.i. y generan a $N(A)$. Por lo tanto, $N(A)$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ de dimensión $n - r$.

Dimensión de los 4 espaciosfundamentales

Por lo tanto:
Lema Dada una matriz A $m \times n$, la suma de las dimensiones de los espacios $C(A)$ y $N(A)$ es n, el número de columnas de A.

Si aplicamos el lema anterior a A^T (con A matriz $m \times n$), como el rango de A^T coincide con el de A, tenemos que el espacio nulo a izquierda de A, $N(A^T)$, tiene dimensión $m - r$.

Observación: Si A una matriz no singular $n \times n$, sabemos que el rango de A es n. Justificar.

Consistentemente, la dimensión de $C(A)$ es n, esto es, los n vectores columnas son l.i. y la dimensión de $N(A)$ es cero (el sistema $Ax = 0$ tiene como unica soución a $0 \in \mathbb{R}^n$).

Bases de espacios vectoriales

Veremos que la *representación* de cada elemento de un espacio vectorial en una base dada es única. Esto es:

Lema: Sea $B = \{w^1, w^2, \ldots, w^k\}$ una base del espacio vectorial $(V, \oplus, \odot)$ y $v \in V$. Entonces, para todo $v \in V$ existe una única combinación lineal de elementos de B que generan a v.

Para simplificar redacción notamos $\alpha v = \alpha \odot v$ para todo $\alpha \in \mathbb{K}$ y $v \in V$, y $v_1 + v_2 = v_1 \oplus v_2$ para todo $v_1, v_2 \in V$.

Prueba: Sean $\alpha_i, \beta_i, i = 1, \ldots, k$ tales que

$$v = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i w^i = \sum_{i=1}^{k} \beta_i w^i.$$

Debemos probar que $\alpha_i = \beta_i, i = 1, \ldots, k$. Como

$$\sum_{i=1}^{k} (\alpha_i - \beta_i) w^i = 0$$

y los elementos de B son l.i., entonces $\alpha_i - \beta_i = 0$ para todo $i = 1, \ldots, k$.

Bases de espacios vectoriales

Sea $(V, \oplus, \odot)$ un espacio sobre $\mathbb{K}$ de dimensión n.
Hemos visto que, dada una base $B = \{w^1, w^2, \ldots, w^n\}$, todo elemento de V tiene asociada una única n-upla $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ de valores de $\mathbb{K}$ tal que $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w^i$.
Recíprocamente, por cada n-upla $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ de valores de $\mathbb{K}$ tenemos un único vector de V asociado, $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w^i$.
Esto es, existe una correspondencia $1 - 1$ entre los elementos de V y el conjunto $\mathbb{K}^n$ de n-uplas de $\mathbb{K}$.

Así, dado un espacio vectorial de dimensión n, una base B y un vector $v \in V$, llamamos *representación de v en B* a la única n-upla de escalares que permite obtener a v como combinación lineal de elementos de la base B.

Más adelante, nos ocuparemos de la representación de un mismo vector en distintas bases de un espacio vectorial. Esto es, si B^1 y B^2 son bases de un espacio vectorial V de dimensión n y $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ es la representación de $v \in V$ en B^1, ¿cómo podemos obtener la representación de v en la base B^2?