Ej. 1. Sea $\mathcal{R}$ una relación en un conjunto X. Se denomina *clausura transitiva* de $\mathcal{R}$ a la menor relación transitiva en X que contiene a $\mathcal{R}$. Si se define inductivamente

$$\mathcal{R}^1 = \mathcal{R}, \quad \mathcal{R}^{n+1} = \mathcal{R}^n \circ \mathcal{R}, \; n \geq 1$$

probar que la clausura transitiva de $\mathcal{R}$ es $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{R}^n$.

Hecho en final_regular_1

Ej. 2. Sea N un grupo de orden al menos 2. Se puede definir una categoría Nor_N cuyos objetos son los grupos que tienen a N como subgrupo normal y los morfismos son tales que si G, H son objetos de Nor_N, $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Nor}_N}(G,H)$ si y sólo si $\varphi : G \to H$ es un homomorfismo de grupos tal que $\varphi(N) \subset N$.

a) Probar que Nor_N es una subcategoría de Grp.

b) Determinar, si existen, objetos iniciales, terminales y/o nulos en Nor_N.

c) Probar que $\mathrm{Inc} : \mathrm{Nor}_N \to \mathrm{Grp}$ tal que $\mathrm{Inc}(G) = G$ y $\mathrm{Inc}(f) = f$ es un funtor.

d) Definir un funtor $F : \mathrm{Nor}_N \to \mathrm{Grp}$ tal que, a nivel de objetos, $F(G) = G/N$.

e) Probar que $\pi : \mathrm{Inc} \to F$ tal que para cada $G \in \mathrm{ob}\,\mathrm{Nor}_N$, $\pi_G : G \to G/N$ es la proyección al cociente, es una transformación natural de Inc en F.

a) qpq Nor_N subcat. Grp

• $\mathrm{ob}\,\mathrm{Nor}_N \subseteq \mathrm{ob}\,\mathrm{Grp}$

$X \in \mathrm{ob}\,\mathrm{Nor}_N$ sii $N \triangleleft X \Rightarrow X$ grupo $\Rightarrow X \in \mathrm{ob}\,\mathrm{Grp}$

• $\mathrm{mor}\,\mathrm{Nor}_N \subseteq \mathrm{mor}\,\mathrm{Grp}$

$\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Nor}_N}(G,H)$ sii $\varphi: G \to H$ homom. de gr. tq $\varphi(N) \subset N$

$\Rightarrow \varphi \in \mathrm{mor}\,\mathrm{Grp}$

• $\mathrm{dom}_{\mathrm{Nor}_N}(\varphi_{\mathrm{Nor}_N}) = \mathrm{dom}_{\mathrm{Grp}}(\varphi_{\mathrm{Grp}})$

• codom ...

• id_{Grp} es trivialmente homom. de gr. y $id_{\mathrm{Grp}}(N) \subseteq N$

$\therefore$ $id_{\mathrm{Nor}_N} = id_{\mathrm{Grp}}$

• Sean $f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Nor}_N}(B,C)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Nor}_N}(A,B)$

$\Rightarrow f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Grp}}(B,C)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Grp}}(A,B) \Rightarrow f \circ g \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Grp}}(A,C)$

y $f \circ g$ trivialmente hom. gr. y $(f \circ g)(N) \subseteq N$

$\therefore$ $\circ_{\mathrm{Nor}_N} = \circ_{\mathrm{Grp}}$

$\therefore$ Nor_N subcat. de Grp

b) No, no necesariamente tiene inicial, terminal o nulo

?

c) qpq $Inc: Nor_N \to Grp$ es funtor

tq: $Inc(G) = G$

$Inc(f) = f$

Inc funtor si:

- $Inc(id_G) = id_{Inc(G)}$
- $Inc(f \circ g) = Inc(f) \circ Inc(g)$
- $\forall f \in Hom(A,B),\ Inc(f) \in Hom(Inc(A), Inc(B))$

trivial por def. del funtor

d) $F : Nor_N \to Grp$

$F(G) = G/N$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "F"'] & H \arrow[d, "F"] \\ G/N \arrow[r, "F(f)"] & H/N \end{tikzcd}$$

$f : G \to H$

$F(f) : G/N \to H/N$

$F(f) = \overline{f}$ tq $\overline{f}(xN) = f(x)N \ \forall x \in G$

- $\forall f \in Hom_{Nor_N}(A, B)$, $F(f) \in Hom_{Grp}(F(A), F(B))$

Sea $f \in Hom_{Nor_N}(A, B) \Rightarrow F(f) = \overline{f}$

$\overline{f}(A/N) = f(a)N \ \forall a \in A \Rightarrow \overline{f}(A) = \{bN : b \in B\} = B/N$

$\therefore F(f) \in Hom_{Grp}(A/N, B/N)$

- $F(id_A) = id_{F(A)}$

$F(id_A) = \overline{id_A}$ tq $\overline{id_A}(A/N) = id_A(a)N \ \forall a \in A = A/N$

$\therefore F(id_A) = id_{A/N}$

- $f \in Hom_{Nor_N}(B, C)$, $g \in Hom_{Nor_N}(A, B)$

$F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$

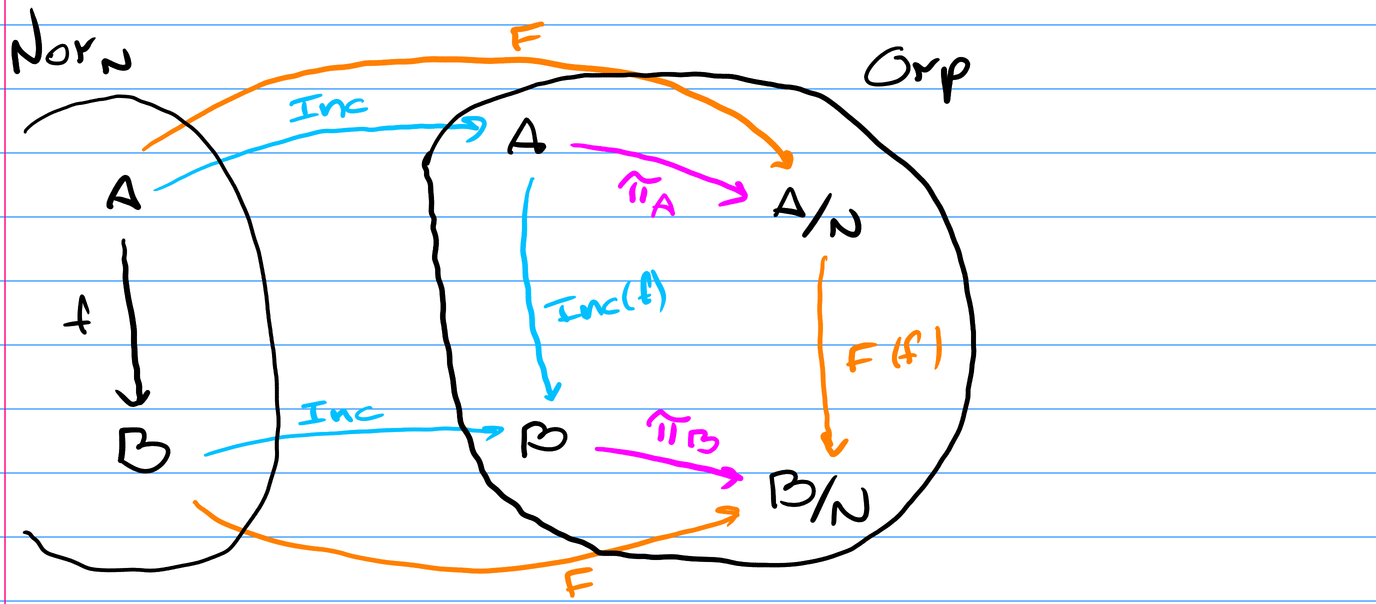
$$\begin{aligned} F(f \circ g) = \overline{(f \circ g)} \text{ tq } \overline{(f \circ g)}(A/N) &= (f \circ g)(a)N \\ &= f(g(a))N \\ &= \overline{f}(\overline{g}(A/N)) \\ &= (\overline{f} \circ \overline{g})(A/N) \end{aligned}$$

$\therefore F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$

$\therefore F$ funtor

e) Probar que $\pi : \mathrm{Inc} \to F$ tal que para cada $G \in \mathrm{ob}\,\mathrm{Nor}_N$, $\pi_G : G \to G/N$ es la proyección al cociente, es una transformación natural de Inc en F.

e) qpq $\pi : Inc \to F$ tq $\forall G \in ob\, Nor_N$, $\pi_G : G \to G/N$ proy. al cociente $\Rightarrow \pi$ en de Inc en F



I. $\forall A \in Nor_N$, $\pi(A) = \pi_A \in Hom_{Grp}(Inc(A), F(A))$

Sea $A \in Nor_N \Rightarrow N \triangleleft A \Rightarrow \exists\ A/N$ en Grp
y $A \in Grp$

Luego, por def. de π, $\exists\ \pi_A : A \to A/N$ proy. al coc.
$\forall A \in Nor_N$

II. π tq conmuta $\forall f \in Hom_{Nor_N}(A, B)$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\pi_A"] \arrow[d, "Inc(f)"'] & A/N \arrow[d, "F(f)"] \\
B \arrow[r, "\pi_B"] & B/N
\end{tikzcd}$$

$\therefore F(f) \circ \pi_A = \pi_B \circ Inc(f)$

$$
\begin{aligned}
(F(f) \circ \pi_A)(A) &= F(f)(\pi_A(A)) && \langle \circ \rangle \\
&= F(f)(A/N) && \langle \text{def } \pi_A \rangle \\
&= \bar{f}(A/N) = f(a)N \ \forall a \in A && \langle \text{def } F(f) \rangle \\
&= B/N && \langle f(A) = B \rangle \\
&= \pi_B(B) && \langle \text{def } \pi_B \rangle \\
&= \pi_B(Inc(f)(B)) && \langle Inc(f)(B) = B \rangle \\
&= (\pi_B \circ Inc(f))(B) && \langle \circ \rangle
\end{aligned}
$$

$\therefore \pi : Inc \longrightarrow F$ tn.

Ej. 3. Sea $(S,\cdot)$ un semigrupo y sea $M_S = S \sqcup \{e_S\}$ la unión disjunta de S con un elemento abstracto e_S. En M_S se define la operación $\star$ dada por

$$x \star y = x \cdot y \text{ si } x,y \in S, \quad e_S \star x = x \star e_S = x,\ \forall x \in S, \quad e_S \star e_S = e_S.$$

a) Probar que M_S es un monoide.

b) Definir un funtor $F : \mathrm{Sgrp} \to \mathrm{Mon}$ tal que, a nivel de objetos, $F(S) = M_S$.

c) Considerar el funtor $\mathrm{Inc} : \mathrm{Mon} \to \mathrm{Sgrp}$ tal que $\mathrm{Inc}(M) = M$ y $\mathrm{Inc}(f) = f$. Probar que existe una adjunción entre F y Inc.

a) $(M_S, *)$ monoide $\Rightarrow$ • $*$ asoc.

• $\exists\, e$ neutro para $*$

I. $*$ asoc.

sean $x,y,z \in S \Rightarrow$ sale trivial por $(S,\cdot)$ semigrupo

sean $x,y \in S$ y $e_S \Rightarrow$ sale trivial por regla 2

II. Trivial por def. de e_S

b) $F : \mathrm{Sgrp} \to \mathrm{Mon}$ tq $F(S) = M_S$

Propongo $F(f) = \bar{f}$ tq

Sgrp $(x,\cdot) \to (y,*)$

sea $f : A \to B$

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ e_B & \text{si } x = e_A \end{cases}$$

• sea $f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sgrp}}(A,B) \Rightarrow F(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mon}}(F(A), F(B))$

$F(A) = (M_A, *) \quad F(B) = (M_B, *)$

luego, sea $f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sgrp}}(A,B)$, $\exists\, \bar{f} \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mon}}(M_A, M_B)$
y $F(f) = \bar{f}$

$\cdot\ F(id_A) = id_{F(A)} \quad \forall A \in ob\,Sgrp$

$$F(id_A)(x) = \begin{cases} id_A(x), & \text{si } x \in A \\ e_A, & \text{si } x = e_A \end{cases} \implies F(id_A) = id_{\wedge A}$$

$\cdot$ sean $f \in Hom_{Sgrp}(B,C)$ y $g \in Hom_{Sgrp}(A,B)$

$$F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$$

$a \in A \Rightarrow \overbrace{g(a)}^{b} \in B$

$$F(f) \circ F(g) = F(f)(F(g)(a)) = \begin{cases} F(f)(ga), & \text{si } a \in A \\ F(f)\, e_B, & \text{si } a = e_A \end{cases}$$

$$= \begin{cases} f(ga), & \text{si } a \in A \\ e_C, & \text{si } a = e_A \end{cases}$$

$$= \dots$$

$$= F(f \circ g)$$

c) $Inc : Mon \to Sgrp$

qpq $\exists\ Inc \dashv F$

qpq $\exists\ \eta : Id_{Sgrp} \to (Inc \circ F)$ tq

$\cdot\ \eta$ tq $\eta_A = \eta(A) \in Hom_{Sgrp}(A, Inc \circ F(A)) \ \forall A \in Sgrp$

$Inc \circ F(A) = Inc(M_A) = M_A$

propongo $\eta_A = id_A \in Hom_{Sgrp}(A, Inc \circ F(A)) \ \forall A \in Sgrp$

• η es en $\Rightarrow$ η conmuta a:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "f"'] & Inc(F(A)) \arrow[d, "Inc(F(f))"] \\ B \arrow[r, "\eta_B"] & Inc(F(B)) \end{tikzcd}$$

$$Inc(F(f)) \circ \eta_A = \eta_B \circ f$$

$$\begin{aligned} Inc(F(f)) \circ \eta_A &= Inc(F(f)) \circ id_A \\ &= Inc(\bar{f}) \circ id_A \\ &= \bar{f} \circ id_A \\ &= f \\ &= id_B \circ f \\ &= \eta_B \circ f \end{aligned}$$

$$\bar{f} = \begin{cases} f, & \text{en } A \\ e_B, & \text{en } e_A \end{cases} \leftarrow$$

$\therefore$ η es en

• $\forall f \in Hom_{Sgrp}(X, Inc(Y)), \exists! f^\# \in Hom_{Mon}(F(X), Y)$ tq conmuta

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[dr, "f"'] & Inc(F(X)) \arrow[d, dashed, "! Inc(f^\#)"] \\ & Inc(Y) \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} f &= Inc(f^\#) \circ \eta_X \\ &= Inc(f^\#) \circ id_X \\ &= f^\# \circ id_X \\ &= f^\# \end{aligned}$$

$\therefore$ vale para $f^\# = f$

Ej. 4. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando adecuadamente la respuesta.

a) Sea $(A, \preceq)$ un poset. Para cada $a \in A$ se define

$$A_a \doteq \{x \in A : x \prec a\}.$$

Sea $\mathcal{A} = \{A_a : a \in A\}$, entonces $(\mathcal{A}, \subseteq)$ está totalmente ordenado.

b) Si p y q son primos distintos, existe un homomorfismo no trivial $\varphi : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_q$.

c) Sea $(P, \preceq)$ un poset y P^* su poset dual (es decir, $P^* = (P, \succeq)$). Entonces $\mathscr{C}_{P^*}$ es una categoría isomorfa a $\mathscr{C}_P^{op}$.

d) Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ dos categorías. Si $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ es un funtor que define una equivalencia entre $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$, entonces si 1 es un objeto terminal en $\mathscr{C}$, $F(1)$ es un objeto terminal en $\mathscr{D}$.

a) hecha en final_regular_2023-1

b) 〃

c) $(P, \preceq)$ poset

$(P, \succeq) = P^*$ dual

qpq $\mathscr{C}_{P^*} \simeq \mathscr{C}_P^{op} \Rightarrow \exists$ equivalencia entre $\mathscr{C}_{P^*}$ y $\mathscr{C}_P^{op}$

Es trivial probar que esto vale para los funtores $F : \mathscr{C}_{P^*} \to \mathscr{C}_P^{op}$ y $G : \mathscr{C}_P^{op} \to \mathscr{C}_{P^*}$ tq

$F(x) = x$ $\qquad$ $G(y) = y$

$F(f) = f$ $\qquad$ $G(g) = g$

y las tn $\eta_{P^*} : Id_{\mathscr{C}_{P^*}} \to (G \circ F)$, $\eta_P : Id_{\mathscr{C}_P^{op}} \to (F \circ G)$ tq

$\eta_{P^*}(x) = id_x$ en $\mathscr{C}_{P^*}$ $\qquad$ $\eta_P(x) = id_x$ en $\mathscr{C}_P^{op}$

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "\eta_{P^*}(x)"] \arrow[d, "f"'] & G(F(x)) \arrow[d, "G(F(f))"] \\
y \arrow[r, "\eta_{P^*}(y)"'] & G(F(y))
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "\eta_P(x)"] \arrow[d, "f"'] & F(G(y)) \arrow[d, "F(G(f))"] \\
y \arrow[r, "\eta_P(y)"'] & F(G(y))
\end{tikzcd}$$

$\therefore$ Verdadero

d) Verdadero, si F define una equivalencia $\Rightarrow$ preserva estructuras, en particular, la pu. del objeto terminal)