Análisis Matemático I

Límites:

Definición (límite formal)**.**

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \iff \forall \epsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0 \ : 0 < |x-c| < \delta \implies |f(x) - L|$$

Definición (límite intuitivo)**.** *Decir que* $\lim_{x\to c} f(x) = L$ *significa que cuando* x *está cerca pero diferente de* c*, entonces* $f(x)$ *está cerca de* L*.*

Teorema (unicidad del límite)**.** *Si el límite de una función existe, entonces es único.*

Demostración. Supongamos que $\lim_{x\to c} f(x) = L$ y $\lim_{x\to c} f(x) = L'$ siendo L y L' □

Teorema (del emparedado)**.** *Sean* f*,* g *y* h *funciones que satisfacen* $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) \forall x$ *cercano a* c*, excepto posiblemente* c*. Si* $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L$*, entonces* $\lim_{x\to c} g(x) = L$*.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Elegimos δ_1 tal que

$$0 < |x-c| < \delta_1 \implies L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon$$

y δ_2 tal que

$$0 < |x-c| < \delta_2 \implies L - \epsilon < h(x) < L + \epsilon$$

Elegimos δ_3 de modo que

$$0 < |x-c| < \delta_3 \implies f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$$

Sea $\delta =$mín$\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$. Entonces

$$0 < |x-c| < \delta \implies L - \epsilon < f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) < L + \epsilon$$

Concluímos que $\lim_{x\to c} g(x) = L$ □

Continuidad:

Definición (continuidad en un punto)**.** *Sea f definida en un intervalo abierto que contiene a c. Decimos que f es continua en c si*

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

Teorema (Bolzano)**.** *Sea f una función continua y definida en $[a, b]$. Si se cumple que $f(a) < 0 < f(b)$ o $f(b) < 0 < f(a)$, entonces existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.*

Demostración. Sea f una función continua y definida en $[a, b]$ y $f(a) < 0 < f(b)$. Sea C_+ un conjunto tal que

$$C_+ = \{x \in [a, b] / f(x) \geqslant 0\}$$

Sea $c \in [a, b]$ el supremo del conjuto C_+, entonces $\exists [c - \delta, c + \delta] =$ *signo de* $f(c)$ (por teorema de la conservación del signo). Entonces $f(c)$ debe ser igual a $\square$

Teorema (valor intermedio)**.** *Sea f una función continua y definida en $[a, b]$ y $k \in (a, b)$ tal que $f(a) < k < f(b)$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = k$.*

Teorema (máximos y mínimos)**.**