Teoremas y demostraciones

Análisis matemático I

Contenido

Límites:

Definición (límite formal)**.**

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \iff \forall \epsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0 \ : 0 < |x - c| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L|$$

Definición (límite intuitivo)**.** *Decir que* $\lim_{x \to c} f(x) = L$ *significa que cuando* x *está cerca pero diferente de* c*, entonces* $f(x)$ *está cerca de* L*.*

Teorema (unicidad del límite)**.** *Si el límite de una función existe, entonces es único.*

Teorema (del emparedado)**.** *Sean* f*,* g *y* h *funciones que satisfacen* $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) \forall x$ *cercano a* c*, excepto posiblemente* c*. Si* $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L$*, entonces* $\lim_{x \to c} g(x) = L$*.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Elegimos δ_1 tal que

$$0 < |x - c| < \delta_1 \Longrightarrow L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon$$

y δ_2 tal que

$$0 < |x - c| < \delta_2 \Longrightarrow L - \epsilon < h(x) < L + \epsilon$$

Elegimos δ_3 de modo que

$$0 < |x - c| < \delta_3 \Longrightarrow f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$$

Sea $\delta =$mín$\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$. Entonces

$$0 < |x - c| < \delta \Longrightarrow L - \epsilon < f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) < L + \epsilon$$

Concluímos que $\lim_{x \to c} g(x) = L$ $\square$

Continuidad:

Definición (continuidad en un punto)**.** *Sea f definida en un intervalo abierto que contiene a c. Decimos que f es continua en c si*

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

Teorema (Bolzano)**.** *Sea f una función continua y definida en $[a, b]$. Si se cumple que $f(a) < 0 < f(b)$ o $f(b) < 0 < f(a)$, entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.*

Demostración. Sea f una función continua y definida en $[a, b]$ y $f(a) < 0 < f(b)$. Sea C_+ un conjunto tal que

$$C_+ = \{x \in [a, b]/f(x) \geqslant 0\}$$

Sea $c \in [a, b]$ el supremo del conjuto C_+, entonces $\exists[c-\delta, c+\delta] = \textit{signo de } f(c)$ (por teorema de la conservación del signo). Si suponemos que $f(c) < 0$ c deja de ser una mínima cota superior. Si suponemos que $f(c) > 0$ c nuevamente deja de ser mínima cota superior. Entonces la única opción posible es que $f(c) = 0$. □

Teorema (valor intermedio)**.** *Sea f una función continua y definida en $[a, b]$ y $k \in (a, b)$ tal que $f(a) < k < f(b)$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = k$.*

Demostración. Sea f una función continua en $[a, b]$ y $k \in (a, b)$ tal que $f(a) < k < f(b)$. Sea $g(x) = f(x) - k$ entonces

$$g(a) = f(a) - k \Longrightarrow g(a) < 0$$
$$g(b) = f(b) - k \Longrightarrow g(b) > 0$$

Es decir que $g(a) < 0 < g(b)$ y por teorema de Bolzano existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $g(c) = 0$, entonces

$$\begin{aligned} g(c) &= 0 \\ g(c) &= f(c) - k \\ 0 &= f(c) - k \\ f(c) &= k \end{aligned}$$

□

Teorema (Weierstrass — máximos y mínimos)**.** *Sea* f *una función continua y definida en* $[a, b]$ *entonces* $\exists\ x_1, x_2 \in [a, b]$ *tal que* $f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2) \forall x \in [a, b]$.

Derivada:

Definición (derivada)**.** *La derivada de un función f es otra función f' cuyo valor en cualquier x es*

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{dy}{dx}$$

Teorema (diferenciabilidad implica continuidad)**.** *Si $f'(c)$ existe, entonces f es continua en c.*

Demostración. Sea f una función tal que

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x) \\ f(x) &= f(c) + \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \cdot (x - c) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to c} f(x) &= \lim_{x \to c} \left[f(c) + \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \cdot (x - c) \right] \\ &= \lim_{x \to c} f(c) + \lim_{x \to c} \frac{f(x) + f(c)}{x - c} \cdot \lim_{x \to c} x - c \\ &= f(c) + f'(c) \cdot 0 \\ \lim_{x \to c} f(x) &= f(c) \end{aligned}$$

□

Teorema (Fermat)**.** *Sea f una función definida en (a, b), si alcanza un máximo o mínimo local en c, y si $f'(c)$ existe en el punto c, entonces $f'(c) = 0$.*

Demostración. Sea f una función definida en (a, b) y c un máximo local, entonces

$$\exists\ \epsilon > 0 / f(x) \leqslant f(x)\ \forall x \in (a, b) \cap (c - \epsilon, c + \epsilon)$$

Supongamos que $\exists f'(c)$, entonces

$$f'(c) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

siendo

$$f'(c) = \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leqslant 0 \text{ para } \lim_{h \to 0^+} f(c)$$

y

$$f'(c) = \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geqslant 0 \text{ para } \lim_{h \to 0^-} f(c)$$

entonces,

$$f'(c) = 0$$

□

Teorema (Rolle). *Sea f una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Si $f(a) = f(b)$, entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

Teorema (Lagrange).

Teorema (valor medio).

Teorema (L'Hopital).