

# Análisis Matemático I

## Límites:

**Definición** (límite formal).

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \iff \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : 0 < |x - c| < \delta \implies |f(x) - L|$$

**Definición** (límite intuitivo). Decir que  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$  significa que cuando  $x$  está cerca pero diferente de  $c$ , entonces  $f(x)$  está cerca de  $L$ .

**Teorema** (unicidad del límite). Si el límite de una función existe, entonces es único.

*Demostración.* Supongamos que  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$  y  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L'$  siendo  $L$  y  $L'$  □

**Teorema** (del emparedado). Sean  $f$ ,  $g$  y  $h$  funciones que satisfacen  $f(x) \leq g(x) \leq h(x) \forall x$  cercano a  $c$ , excepto posiblemente  $c$ . Si  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} h(x) = L$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = L$ .

*Demostración.* Sea  $\epsilon > 0$ . Elegimos  $\delta_1$  tal que

$$0 < |x - c| < \delta_1 \implies L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon$$

y  $\delta_2$  tal que

$$0 < |x - c| < \delta_2 \implies L - \epsilon < h(x) < L + \epsilon$$

Elegimos  $\delta_3$  de modo que

$$0 < |x - c| < \delta_3 \implies f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

Sea  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ . Entonces

$$0 < |x - c| < \delta \implies L - \epsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \epsilon$$

Concluimos que  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = L$  □

**Definición** (límite infinito). Decimos que  $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \infty$ , si para cada número positivo  $M$  corresponde una  $\delta > 0$  tal que

$$0 < x - c < \delta \implies f(x) > M$$

## Continuidad:

**Definición** (continuidad en un punto). Sea  $f$  definida en un intervalo abierto que contiene a  $c$ . Decimos que  $f$  es continua en  $c$  si

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

**Teorema** (Bolzano). Sea  $f$  una función continua y definida en  $[a, b]$ . Si se cumple que  $f(a) < 0 < f(b)$  o  $f(b) < 0 < f(a)$ , entonces existe al menos un punto  $c \in (a, b)$  tal que  $f(c) = 0$ .

**Teorema** (valor intermedio). Sea  $f$  una función continua y definida en  $[a, b]$  y  $k \in (a, b)$  tal que  $f(a) < k < f(b)$ , entonces existe  $c \in (a, b)$  tal que  $f(c) = k$ .