Unidad Métodos Numéricos

** Resuelva cada uno de los siguientes problemas numéricos en un script por separado usando algún software de cálculo numérico (Matlab/Octave/Scilab).*
** Responda las preguntas o explique las consignas mediante un comentario (%) en el mismo script. Si necesita hacer cálculos matemáticos manualmente puede hacerlos en una hoja en papel.*
** Suba al campus todos los scripts y funciones usadas, así como también los cálculos escaneados.*

1. Considere la función:

$$g(x) = \frac{sen(x)}{1 - \sqrt{x^2+1}}, \qquad x \neq 0.$$

   (a) Explique por qué evaluando numéricamente $g(x)$ cerca de $x \approx 0$ puede ser inexacto.

   (b) Reescriba $g(x)$ de modo de evitar el error generado en (a).

   (c) Plotee la función $g(x)$ usando las dos expresiones algebraicas en la misma gráfica con distintos colores para los intervalos: $[-1 \times 10^{-5},\ 1 \times 10^{-5}]$, $[-1 \times 10^{-6},\ 1 \times 10^{-6}]$ y $[-1 \times 10^{-7},\ 1 \times 10^{-7}]$. Utilice un tamaño del paso de $h = \frac{b-a}{100}$ para la discretización.

---

2. Considere el sistema de ecuaciones lineales dado en su forma ampliada:

$$\left[\begin{array}{rrrr|c} 16 & -120 & 240 & -140 & \\ -120 & 1200 & -2700 & 1680 & \mathbf{e_i} \\ 240 & -2700 & 6480 & -4200 & \\ -140 & 1680 & -4200 & 2800 & \end{array}\right]$$

   donde $\mathbf{e_i}$ es el versor de la base canónica en $\mathbb{R}^4$.

   (a) Obtenga la factorización LU de la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$. Explique cuál es la ventaja de usar esta descomposición factorial al resolver sistemas lineales.

   (b) Usando la descomposición anterior, resuelva con algoritmos específicos de *sustitución progresiva* y *regresiva* los sistemas de ecuaciones lineales $\mathbf{Ax_i} = \mathbf{e_i}$ para $\mathbf{i = 1, 2, 3, 4}$.

   (c) ¿Qué matriz representa $\mathbf{B} = [\mathbf{x_1}\ \mathbf{x_2}\ \mathbf{x_3}\ \mathbf{x_4}]$ formada por los vectores columnas soluciones de los sistemas lineales anteriores? Compruebe.

---

3. Considere el siguiente PVI:

$$\frac{dy}{dt} = (y - t)^2, \qquad y(0) = 0.$$

   (a) Aproxime la solución en el $[0, 1]$ con un paso $h = 0.1$ por el método de Euler.

   (b) En una nueva función, modifique el esquema de Euler con las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} y^*_{k+1} &= y_k + hf(t_k, y_k), \\ y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{2}\left[f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y^*_{k+1})\right]. \end{aligned}$$

   Este esquema se conoce como el *método de Euler mejorado o método de Heun*.

   (c) Resuelva nuevamente y compare gráficamente las dos aproximaciones anteriores con la solución exacta dada por $y(t) = t - tanh(t)$.