FACULTAD DE CS. [redacted]TAS, INGENIERIA Y AGRIMENSURA
ESCUELA DE FORMACIÓN BÁSICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MATEMÁTICA APLICADA (ECA. - ETA.) - 2DO. SEMESTRE 2019

Métodos Numéricos - Examen 03.12.19 - TEMA 2

** Resuelva cada uno de los siguientes ejercicios en un script almacenándolo por separado en el directorio actual de trabajo junto a las demás funciones que use.*
** Responda las preguntas o explique las consignas mediante un comentario (%) en el mismo script.*

1. Considere la función:

$$f(x) = \frac{1 - sen x}{x}, \qquad x \neq 0.$$

(a) Explique por qué evaluando numéricamente $f(x)$ cerca de $x \approx \pi/2$ puede ser inexacto.

(b) Reescriba $f(x)$ de modo de evitar el error generado en (a). → Dorso de la hoja

(c) Plotee la función $f(x)$ usando las dos expresiones algebraicas en la misma gráfica con distintos colores para los intervalos: $[-1 \times 10^{-5}, 1 \times 10^{-5}]$, $[-1 \times 10^{-7}, 1 \times 10^{-7}]$ y $[-1 \times 10^{-9}, 1 \times 10^{-9}]$. Utilice un tamaño del paso de $h = \frac{b-a}{100}$ para la discretización.

---

2. Considere los siguientes SELs que depende de un parámetro M:

$$\begin{cases} 8Mx_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 + 2x_5 = 15 \\ x_1 + 4Mx_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 30 \\ 5x_1 + x_2 + 7Mx_3 + x_5 = 35 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + M9x_4 + 3x_5 = 40 \\ -x_1 + x_3 - 2x_4 + Mx_5 = 45 \end{cases}$$

(a) Para el caso $M = 1$ aproxime la solución utilizando los métodos iterativos de *Jacobi* y *Gauss-Seidel* con tolerancia $tol = 1 \times 10^{-9}$. ¿Qué método converge *"más rápido"*?

(b) Verifique que los vectores calculados son aproximaciones de las soluciones.

(c) ¿Para qué valor de $M > 0$ puede asegurar la convergencia de los métodos? Justifique.

---

3. El *método de Euler* no resulta útil en problemas prácticos debido a que requiere un paso muy chico para lograr una exactitud razonable, sin embargo, el *método de Runge-Kutta* logra mejorar la exactitud sin calcular derivadas. Consideremos el siguiente PVI:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y(t-y)}{t^2}, \qquad y(1) = 2.$$

(a) Aproxime la solución en el $[1, 2.5]$ con $n = 72$ subintervalos por el método de Euler.

(b) Modifique el esquema de `Euler.m` por este otro (en un m-file llamado `RungeKutta4.m`):

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \\ k_1 &= f(t_k, y_k), \\ k_2 &= f(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}k_1), \\ k_3 &= f(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}k_2), \\ k_4 &= f(t_k + h, y_k + hk_3). \end{aligned}$$

Este esquema se conoce como el *método de Runge-Kutta de cuarto orden (RK4)*.

(c) Compare gráficamente los dos resultados con la exacta dada por $y(t) = t\left(\frac{1}{2} + \ln t\right)^{-1}$ y calcule el Error Global Final de ambos métodos.