FACULTAD DE CS. EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA
Escuela de Formación Básica
Departamento de Matemática
Matemática Aplicada (Eca - Eta) - 2do. Semestre 2021

Actividad N°4: Raíces de ecuaciones y SENL

El método de Newton-Raphson (Caso 1D)

1. Considere la función $f(x) = e^x - 3x$ para $x \in [0, 4]$.

   (a) Determine gráficamente la cantidad de soluciones de la ecuación $f(x) = 0$.

   (b) Halle la o las raíces aproximadas utilizando la función `NewtonRapshon.m`.

   (c) ¿Puede garantizar la convergencia local o globalmente? Justifique.

2. Considere el polinomio cúbico $p(x) = 816x^3 - 3835x^2 + 6000x - 3125$.

   (a) Plotee dicho polinomio en el intervalo $[1, 2]$. ¿Cuantas raíces observa?

   (b) Plotee dicho polinomio en el intervalo $[1.4, 1.7]$. ¿Y ahora?

   (c) Aproxime dichas raíces utilizando `NewtonRapshon.m` y compare los errores absolutos.

   Sugerencia: Considere raíces exactas las obtenidas con `roots` de MATLAB/Octave/Scilab.

3. Considere la función $s(x) = sign(x - 2)\sqrt{|x - 2|}$ para $x \in [0.4]$.

   (a) Muestre que en $x = 2$ hay una raíz simple.

   (b) Utilice `NewtonRapshonDeriv.m` para hallar esta raíz tomando como aproximación inicial $x_0 = 2.5$.

   (c) ¿Converge el esquema iterativo? Explique qué fenómeno numérico se está dando.

   Sugerencia: Para la función signo utilice el comando `sign` de MATLAB/Octave/Scilab.

4. Resuelva las siguientes ecuaciones no lineales a través de un estudio gráfico y numérico:
   a) $3x^3 + 1 = 0$, *b*) $sen(x + 2) = 2 + x$, *c*) $x^2 = \tan(x)$.

5. Se sabe que la función $f(x) = x^3 - 3x + 2$ tiene una raíz doble en $r = 1$.

   (a) Modifique `NewtonRaphson.m` para que imprima otra columna con el cociente $\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|}$ siendo $e_n = x_n - r$ el error absoluto cometido en el paso n-ésimo, y aproxime esta raíz tomando $x_0 = 1,2$ y $tol = 1 \times 10^{-5}$. ¿A qué valor tienden esos cocientes?

   (b) Se sabe que el esquema de N-R tiene *orden de convergencia lineal* para raíces múltiples, pero puede recuperar el *orden de convergencia cuadrático* modificando el esquema así:
   $$x_{n+1} = x_n - \alpha \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad n \geq 0,$$
   donde α es la multiplicidad de la raíz . Modifique el esquema iterativo en su caso.

   (c) Vuelva a aproximar la raíz en las mismas condiciones que en el item a) pero ahora mostrando en la columna agregada $\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^\alpha}$. ¿Qué fenómeno numérico observa?

Raíces de SENL: El método de Punto Fijo (Caso 2D)

6. Determine <u>analíticamente</u> las *raíces* de cada una de las siguientes funciones $F = (f_1, f_2)$ y evalúe la matriz Jacobiana de cada sistema en el cero correspondiente:

$$a)\left\{\begin{array}{l} f_1(x,y) = 3x^2 + 2y - 4, \\ f_2(x,y) = 2x + 2y - 3. \end{array}\right. \qquad b)\left\{\begin{array}{l} f_1(x,y,z) = x^2 + y^2 - z, \\ f_2(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1, \\ f_3(x,y,z) = x + y. \end{array}\right.$$

7. Determine <u>analíticamente</u> los *puntos fijos* de cada una de las siguientes generatrices:

$$a)\left\{\begin{array}{l} g_1(x,y) = x - y^2, \\ g_2(x,y) = -x + 6y. \end{array}\right. \quad b)\left\{\begin{array}{l} g_1(x,y) = sen(y), \\ g_2(x,y) = -6x + y. \end{array}\right. \quad c)\left\{\begin{array}{l} g_1(x,y,z) = 9 - 3y - 2z, \\ g_2(x,y,z) = 2 - x + z, \\ g_3(x,y,z) = -9 + 3x + 4y - z. \end{array}\right.$$

8. Dado el siguiente SENL:

$$\left\{\begin{array}{l} x = g_1(x,y) = (8x - 4x^2 + y^2 + 1)/8, \\ y = g_2(x,y) = (2x - x^2 + 4y - y^2 + 3)/4. \end{array}\right.$$

   (a) Grafique las curvas involucradas en el plano $z = 0$.

   (b) Usando la aproximación inicial $(p_0, q_0) = (1.1, 2.0)$, calcule dos iteraciones a mano mediante el esquema iterativo de Punto Fijo.

   (c) Aproxime la o las raíces utilizando la implementación de `PuntoFijo.m`.

9. Dado los siguientes SENL:

$$a)\left\{\begin{array}{l} x = (y - x^3 + 3x^2 + 3x)/7, \\ y = (y^2 + 2y - x - 2)/2. \end{array}\right. \qquad b)\left\{\begin{array}{l} x^2 - y^2 - 4x - 3 = 0, \\ x - 2y + 1 = 0. \end{array}\right.$$

   (a) Grafique las curvas involucradas en el plano $z = 0$.

   (b) Analice las condiciones de convergencia para Punto Fijo y determine una región del plano xy tal que la iteración de PF aplicada al SENL sea connvergente para cualquier punto inicial (p_0, q_0).

   (c) Halle las soluciones con `PuntoFijo.m`.En caso de no hallar todas raíces, proponga otras generatrices distintas.

10. Considere el siguiente SENL:

$$\left\{\begin{array}{l} x^2 - y = 0.2, \\ y^2 - x = 0.3. \end{array}\right.$$

   (a) Grafique las curvas en el plano $z = 0$.

   (b) Utilice el método de Punto Fijo comenzando en el punto inicial $(p_0, q_0) = (1.2, 1.2)$ para aproximar una raíz.

   (c) Repita lo mismo anterior pero comenzando en $(p_0, q_0) = (-0.2, -0.2)$.

   (d) ¿Qué fenómeno observa? ¿Puede garantizar la convergencia en este caso?