FACULTAD DE CS. EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA
Escuela de Formación Básica
Departamento de Matemática
Matemática Aplicada (Eca - Eta) - 2do. Semestre 2021

Actividad Nº2: Errores en los Métodos Numéricos

Errores en los Métodos Numéricos:

1. Considere la función:

$$f(x) = \frac{1}{1+2x} - \frac{1-x}{1+x}$$

   a) Explique por qué evaluando numéricamente $f(x)$ cerca de $x \approx 0$ puede ser inexacto.

   b) Reescriba $f(x)$ de modo de evitar el error generado en a).

   c) Plotee la función $f(x)$ usando las 2 expresiones en la misma gráfica para los intervalos $[-1 \times 10^{-1}, 1 \times 10^{-1}]$, $[-1 \times 10^{-7}, 1 \times 10^{-7}]$ y $[-1 \times 10^{-8}, 1 \times 10^{-8}]$. Utilice un paso de `paso=1e-10` para la discretización. *Sugerencia:* Use el comando `subplot`.

2. *a*) Modifique el script `ZoomPoli.m` para que plotee el polinomio de sexto grado de la siguiente manera algebraicamente equivalente a la ya implementada:

$$p(x) = (x-1)^6$$

   ¿Observa el mismo fenómeno numérico de oscilación que aparecía originalmente?

   b) Modifique el script `ZoomPoli.m` para que plotee el polinomio cúbico de las siguientes dos maneras algebraicamente equivalentes:

$$p(x) = (x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

   ¿Observa el mismo fenómeno numérico que en el item a)?

   c) Teniendo en cuenta a) y b), explique el fenómeno numérico de oscilación original.

3. *Fórmula Mejorada para la Resolución de la Ecuación General de Segundo Grado.*
   Considere la ecuación $x^2 - 40x + 0{,}25 = 0$.

   a) Halle a mano las raíces de la ecuación con la *resolvente* utilizando aritmética de 4 dígitos y redondeo por truncamiento.

   b) Demuestre que las raíces de una ecuación general de 2do. grado $ax^2 + bx + c = 0$ pueden obtenerse a través de las siguientes fórmulas:

$$x_1 = \frac{-2c}{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}, \qquad x_2 = \frac{-2c}{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}.$$

   c) Halle a mano las raíces de la ecuación con las fórmulas presentadas en el apartado anterior, utilizando aritmética de 4 dígitos y redondeo por truncamiento.

   d) Compare errores relativos porcentuales de los resultados en los apartados a) y c). ¿Por qué se producen estas diferencias? Calcule valores exactos con el software usado.

4. Considere la ecuación $x^2 - 1000000{,}000001x + 1 = 0$.

   a) Utilice la función `cuad.m` de la **Actividad 1** para hallar sus raíces.

   b) Usando las fórmulas mejoradas del Ejercicio 2, implemente la función `cuad_mejor.m` para calcular raíces.

   c) Compare los resultados obtenidos en a) y b) y obtenga conclusiones.

5. *a*) Modifique el script `TaylorExp.m` para transformarlo en una función *m-file* para aproximar la función exponencial e^x mediante su polinomio de Taylor centrado en $a = 0$:
$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!},$$
recibiendo como parámetros de entrada x y n (número de términos de la suma).
   b) Modifique la función anterior para que imprima en columnas el valor de las sumas parciales, el término que se está sumando y el error absoluto cometido. Use la función intrínseca `exp` de MATLAB/Octave/Scilab para calcular el error.
   c) Corra los casos $x = 1, 10, 100$ cada uno para $n = 10, 15, 20$. Analice el error cometido.

6. *a*) Calcule en forma exacta $\operatorname{sen}(\pi/2 + 2\pi 10^j)$, con j entero positivo.
   b) Calcule en el software que usa la misma expresión, para $j = 1, 10, 20, 50, 100, 1000$.
   c) Intente dar una explicación a los resultados obtenidos.

7. Analice la función `SerieSeno` y las salidas por *Ventana de Comandos* en respuesta de:
   a) `SerieSeno(pi/4,5e-10)`,
   b) `SerieSeno(pi,5e-10)`,
   c) `SerieSeno(5*pi,5e-10)`.

8. *a*) Usando la función `SerieSeno.m`, grafique el error total cometido para $x \in [0, \pi/2]$ usando 6 y 15 términos no nulos del polinomio de Taylor del $sen(x)$ respectivamente. Considere la función intrínseca `sin` de MATLAB/Octave/Scilab como valor exacto. ¿Qué controla el error total en cada caso? *Sugerencia:* Vea las transparencias.
   b) Implemente la función `SerieCoseno.m` que aproxime la función *coseno* por su respectivo polinomio de Taylor centrado en $a = 0$ y repita el ejercicio anterior.

Representación en aritmética de punto flotante:

9. Usando la máquina virtual que aparece en el ejemplo 6.3.12 con mantisa binaria de 4 bits, 8 posibles exponentes y redondeo simétrico (si x_1 y x_2 son los números de la Tabla más próximos al número x que quiero representar, entonces x redondea a x_1 sólo si $x < \frac{x_1+x_2}{2}$, caso contrario se redondea a x_2), evalúe las siguientes expresiones:
   a) 1.1
   b) `eps`
   c) 20
   d) $8 + 5 *$ `eps`
   e) $(8 + 3 *$ `eps` $) + 3 *$ `eps`

   Ejemplo: $(5 + 3 * \texttt{eps}) - 4 * \texttt{eps} = (5 + 0{,}375) - 0{,}5 = \mathbf{5{,}375} - 0{,}5 \xrightarrow{redondeo} 5{,}5 - 0{,}5 = 5.$
   ¿Cuanto vale el epsilon máquina en nuestro caso?

10. Anticipe los resultados de evaluar las siguientes expresiones. Luego verifique en MATLAB.
   a) 1 + `eps` /3 + `eps` /3 + `eps` /3
   b) 1 + (`eps` /3 + `eps` /3) == 1
   c) 1e-16 + 1 - 1e-16 == 1e-16 - 1e-16 + 1
   d) 1 + `eps` /2 - 1 (¿hay redondeo simétrico?)