Actividad N°5: Solución numérica de EDO

El método de Euler:

1. Utilice la función `CampoDirec.m` para hallar el campo de direcciones de las siguientes EDOs en el rectángulo $R = \{(t,y) : 0 \le t \le 4,\ 0 \le y \le 4\}$. En las mismas figuras, grafique además las respectivas soluciones para las constantes de integración indicadas:

   (a) EDO: $y' = \frac{t-y}{2}$ Solución Exacta: $\phi(t) = ce^{-t/2} + t - 2$ para $c = -3, -2, -1, 0$.

   (b) EDO: $y' = 1 - e^{-t}$ Solución Exacta: $\phi(t) = e^{-t} + t + c$ para $c = -1, 0, 1, 2$.

2. Usando la función `Euler.m`, resuelva los siguientes PVI. En una misma figura, grafique las aproximaciones para distintos pasos y las soluciones exactas:

   (a) $\begin{cases} y' = -ty, & t \in [0,5] \\ y(0) = 1 \end{cases}$ Solución Exacta: $\phi(t) = e^{-t^2/2}$.

   (b) $\begin{cases} y' = \frac{1}{1+t^2} - 2y^2, & t \in [0,10] \\ y(0) = 0 \end{cases}$ Solución Exacta: $\phi(t) = \frac{t}{1+t^2}$.

   (c) $\begin{cases} y' = \frac{1}{4}y\left(1 - \frac{1}{20}y\right), & t \in [0,20] \\ y(0) = 1 \end{cases}$ Solución Exacta: $\phi(t) = \frac{20}{1+19e^{-t/4}}$.

3. Usando el método de Euler, resolver el PVI siguiente:

$$\begin{cases} y' = x^2 - y, & x \in [0,4] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

   para los siguientes tamaño del paso $h = 1, 0.5, 0.25, 0.125, 0.0625$. Para cada valor de h:

   (a) Grafique la poligonal que determinan los puntos $\{(t_j, y_j)\}_{j=0,\dots,n}$, y en la misma figura grafique la solución exacta del PVI dada por: $\phi(x) = x^2 - 2x + 2 - e^{-x}$ para $x \in [0,4]$.

   (b) Calcule el *error global final*, es decir:

$$E = |\phi(4) - y_n|$$

   siendo y_n el último valor de la aproximación de Euler.

   (c) Según lo que observa numéricamente, ¿en la medida que reduce el tamaño del paso a la mitad, en cuanto se reduce este error?

4. *Un PVI con dos soluciones.*
   Consideremos el siguiente PVI:

$$\begin{cases} y' = \frac{3}{2}y^{1/3}, & t \in [0,1] \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

   (a) Verifique a mano que $\phi(t) = 0$ es una solución del PVI.

   (b) Verifique a mano que $\phi(t) = t^{3/2}$ es otra solución del PVI.

   (c) ¿Contradice esto el Teorema de existencia y unicidad visto?

   (d) Utilice la función `Euler.m` para resolver este PVI. ¿Qué solución devuelve? Explique.