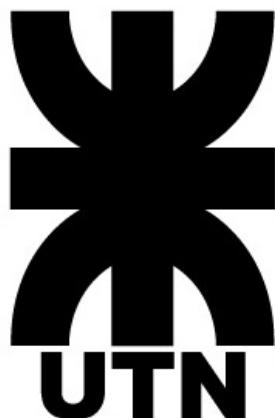


GUÍA DE TRABAJOS PRÁCTICOS

FÍSICA II

Marzo 2023



Dr. Ing. Guillermo BERGUES

Índice general

1. Fundamentos de Termología	4
2. Calorimetría	9
3. Transformaciones en Gases	20
4. 1 ^{er} Principio de la Termodinámica	28
5. 2 ^{do} Principio de la Termodinámica	33
6. Carga Eléctrica y Campo Eléctrico	36
7. Trabajo y Energía Potencial Electrostática	51
8. Dieléctrico - Condensadores	58
9. La Corriente Eléctrica	68
10. Circuitos de Corriente Continua	78
11. Campo de Inducción Magnética	88
12. Inducción Electromagnética	101
13. Corriente Alterna	110
14. Ondas Electromagnéticas y Ecuaciones de Maxwell	118
15. Óptica Ondulatoria	121

Dedicatoria

A todo aquel que hace de su profesión una herramienta de progreso para la sociedad.

Agradecimientos

Este apunte es una extensión de la guía de trabajos prácticos de Física II realizada por los ingenieros Julio Catán, Jorge Odetto y otros, que a través de los años han plasmando sus ideas en los diferentes problemas. Se partió de la última edición compaginada por el Ing. Miguel A. Altamirano y revisada por los ingenieros Gustavo Monardez y Julieta Baggio.

En la actual edición se procedió a desarrollar los ejercicios de tal manera que el alumno pueda seguir en detalle cada uno de los temas principales de la materia y a la vez corrobore las soluciones de todos los problemas.

Agradezco enormemente el aporte realizado por Daniel Prieto, quien fue un excelente aliado en la concreción de esta nueva edición. También fue fundamental el ojo clínico del Ing. Fabián Martín, quién no solo se esforzó grandemente en corregir detalles sino que sumó su visión en el desarrollo de la guía; no tengo más que palabras de agradecimiento.

Por otro lado, el Ing. Javier Musso puso a disposición su liderazgo, tanto para mejorar la guía como para mancomunar un equipo que tire para un mismo lado en la construcción de la materia. Hacen falta más personas como él en las diferentes instituciones.

Sobre todo, agradezco a mi amada esposa, que siempre me inspira a vivir mis sueños y a Dios que me renueva las fuerzas para alcanzarlos.

Capítulo 1

Fundamentos de Termología

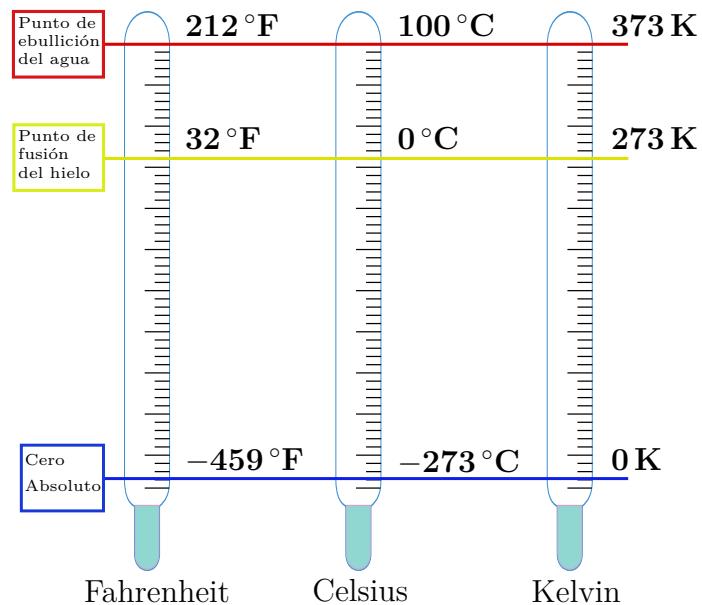


Figura 1.1: Relación entre las diferentes escalas de temperatura.

1. Expresar en °F los siguientes puntos fijos:

- a) Punto de ebullición del Hidrógeno: **-252,78 °C.**

Para pasar de °C → °F se utiliza la siguiente ecuación:

$$T (\text{°F}) = \frac{9}{5} \times T (\text{°C}) + 32 \quad (1.1)$$

Reemplazando el valor a transformar en la Ec. (1.1):

$$T (\text{°F}) = \frac{9}{5} \times (-252,78 \text{ °C}) + 32 = -423 \text{ °F}$$

- b) Punto de ebullición del Nitrógeno: $-195,81 \text{ °C}$. $\mathbf{R = -320,5 \text{ °F}}$
- c) Punto de solidificación del Mercurio: $-38,87 \text{ °C}$. $\mathbf{R = -37,96 \text{ °F}}$
- d) Punto de fusión de la Plata: $960,5 \text{ °C}$. $\mathbf{R = 1760,9 \text{ °F}}$

2. Expresar en °C las siguientes temperaturas dadas en °F:

a) **800 °F.**

Para pasar a °C se utiliza la siguiente ecuación:

$$T (\text{°C}) = \frac{5}{9} \times [T (\text{°F}) - 32] \quad (1.2)$$

Reemplazando el valor a transformar en la Ec. (1.2):

$$T (\text{°C}) = \frac{5}{9} \times (800 \text{°F} - 32) = 426,6 \text{ °C}$$

b) 25 °F. **R = -3,9 °C**

c) -8 °F. **R = -22,2 °C**

d) 258 °F. **R = 125,55 °C**

3. Expresar en grados K las siguientes temperaturas:

a) **50 °C**

La relación entre la escala de Kelvin y Celsius está expresada por la siguiente ecuación:

$$T (\text{K}) = T (\text{°C}) + 273,15 \quad (1.3)$$

Reemplazando el valor a transformar en la Ec. (1.3):

$$T (\text{K}) = 50 \text{ °C} + 273,15 = 323 \text{ K}$$

b) -35 °C. **R = 230 K**

c) 72 °F. **R = 295,2 K**

d) -215 °F. **R = 135,8 K**

4. Calcular a qué temperaturas dan la misma lectura las siguientes escalas:

a) **Celsius y Farenheit:** en base a la Ec. (1.1) y dado que las escalas se unen en un mismo valor, se puede escribir $T (\text{°F}) = T (\text{°C}) = T$:

$$T = \frac{9}{5} \times T + 32$$

Despejando T:

$$T = 32 \times \frac{-5}{4} = -40^\circ$$

b) **Kelvin y Fahrenheit.** Siguiendo un procedimiento similar se trabaja con las ecuaciones (1.2) y (1.3):

$$T (\text{°C}) = T (\text{K}) - 273,15$$

$$\frac{5}{9} \times [T (\text{°F}) - 32] = T (\text{K}) - 273,15$$

$$\frac{5}{9} \times [T - 32] = T - 273,15 \rightarrow T = 575^\circ$$

5. En un laboratorio de prueba de materiales se debe aumentar la temperatura de la muestra en **40°C**. El único termómetro existente mide en °F, siendo la temperatura inicial de la muestra, de **68,2°F**. ¿Qué temperatura deberá tener en °F una vez que se ha producido el aumento requerido?

Una variación $\Delta = 100^{\circ}\text{C}$ en la escala de Celsius corresponde a una variación $\Delta = 180^{\circ}\text{F}$ en la escala Fahrenheit, por lo tanto, para calcular el Δ en °F se plantea:

$${}^{\circ}\text{F} = \frac{180^{\circ}\text{F}}{100^{\circ}\text{C}} \times 40^{\circ}\text{C} = \mathbf{72^{\circ}\text{F}}$$

Finalmente:

$$T_f = 72^{\circ}\text{F} + 68,2^{\circ}\text{F} = \mathbf{140,2^{\circ}\text{F}}$$

6. La relación de presiones de un gas en el punto de fusión del platino y en el punto triple del agua, manteniendo el volumen constante, es **7,476**. ¿A qué temperatura en grados Celsius se funde el platino?

En un termómetro de gas a volumen constante, la función termométrica está dada por:

$$T(p) = 273,16\text{ K} \times \frac{p}{p_{pt}} \quad (1.4)$$

Donde p = presión medida del gas, y p_{pt} presión del gas en el punto triple (en este caso del agua). El enunciado expresa que se está midiendo la temperatura en el punto de fusión del platino $T(fp)$, por lo tanto:

$$T(fp) = 273,16\text{ K} \times 7,476 = 2042,06\text{ K} \rightarrow \mathbf{1769^{\circ}\text{C}}$$

7. Un termómetro de gas registra una presión absoluta correspondiente a **325 mmHg**, estando en contacto con agua en el punto triple. ¿Qué presión indicará en contacto con el agua en el punto de ebullición normal?

Utilizando la Ec. (1.4) y dado que la presión en el punto triple es de 325mmHg:

$$T(p) = 273,15\text{ K} \times \frac{p}{325\text{mmHg}}$$

Despejando “p” para los 100°C correspondientes al punto de ebullición:

$$p = 325\text{mmHg} \times \frac{100 + 273,15\text{ K}}{273,15\text{ K}} = \mathbf{444\text{ mmHg}}$$

8. Los remaches de aluminio en la construcción de un avión se fabrican más grandes que el agujero en donde van colocados y se enfrián con hielo seco (CO_2 sólido). Si el diámetro del agujero es **4,500 mm**, ¿qué diámetro debe tener el remache a **23°C** para que su diámetro sea igual al del agujero a **-78,0°C** (la temperatura del hielo seco)? Suponga que el coeficiente de expansión lineal del aluminio es constante.

A la temperatura $T_1 = -78^{\circ}\text{C}$ el remache posee un diámetro $D_1 = 4,500\text{ mm}$ y su sección está dada por:

$$A_1 = \pi \times \frac{D_1^2}{4}$$

Para una $T_2 = 23^\circ\text{C}$, el remache posee un diámetro D_2 . La relación entre secciones es:

$$A_2 = A_1 \times (1 + 2 \times \alpha_{Al} \times \Delta T) \quad (1.5)$$

Con $\alpha_{Al} = 24 \times 10^{-6} \text{ } 1/\text{ } ^\circ\text{C}$, queda:

$$\begin{aligned} D_2 &= D_1 \times \sqrt{(1 + 2 \times \alpha_{Al} \times \Delta T)} \\ D_2 &= 4,5 \text{ mm} \times \sqrt{1 + 2 \times 24 \times 10^{-6} \times (23 - (-78))} = 4,511 \text{ mm} \end{aligned}$$

9. Un tanque de acero se llena totalmente con **2,80 m³** de etanol; cuando ambos, el tanque y el etanol están a **32 °C**. Una vez que el tanque y el etanol se hayan enfriado a **18 °C**, ¿qué volumen adicional de etanol podrá meterse dentro del tanque?

La ecuación dilatación volumétrica expresa:

$$\Delta V = V_f - V_0 = 3 \times \alpha_L \times V_0 \times \Delta T \quad (1.6)$$

($3\alpha_L$) es el coeficiente de dilatación volumétrico (3 veces el lineal). En el caso planteado: $\alpha_{etanol} = 2,5 \times 10^{-4} \text{ } 1/\text{ } ^\circ\text{C}$ y $\alpha_{Acero} = 1,1 \times 10^{-5} \text{ } 1/\text{ } ^\circ\text{C}$. Los cálculos demuestran que tanto el tanque como el etanol se contraen en su volumen:

$$\begin{aligned} \Delta V_{TANQUE} &= 1,29 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \\ \Delta V_{etanol} &= 0,0294 \text{ m}^3 \end{aligned}$$

Entonces, el volumen adicional es:

$$V_{ad} = \Delta V_{etanol} - \Delta V_{TANQUE} = 0,028 \text{ m}^3 \rightarrow 28 \text{ l}$$

10. Una varilla de latón tiene **185 cm** de longitud y **1,60 cm** de diámetro. ¿Qué fuerza debe aplicarse a cada extremo para impedir que se contraiga al enfriarse de **120 °C** a **10 °C**?

El esfuerzo de tensión F/A necesario para mantener constante la long. de la varilla es:

$$\frac{F}{A} = -Y \times \alpha \times \Delta T \quad (1.7)$$

Siendo "Y" el módulo de Young. Particularmente para el latón:

$$\begin{aligned} Y_L &= 9,47 \times 10^{10} \text{ Pa} \\ \alpha_{laton} &= 1,9 \times 10^{-5} \text{ } 1/\text{ } ^\circ\text{C} \end{aligned}$$

Se despeja $F = 39794,8 \text{ N}$

11. **TAREA** Un alambre de **1,50 m** de longitud está a **20,0 °C**. Este se alarga **1,90 cm** al calentarse y alcanzar los **420 °C**.

a) Calcule su coeficiente medio de expansión lineal para este intervalo de temperatura.

- b) El alambre se tiende sin tensión a **420°C**. Calcule a qué esfuerzo está sometido si se enfriá a **20,0°C** sin permitir que se contraiga. El módulo de Young del alambre es de **2,0 × 10¹¹ Pa**.

R: a) **3,17x10⁻⁵ °C⁻¹** - b) **2,54x10⁹ N/m²**

12. **TAREA** Los rieles de acero de un tren se tienden en segmentos de **12,0 m** de longitud, colocados extremo con extremo en un día de invierno en que la temperatura es de **-2,0 °C**.

- a) ¿Cuánto espacio debe dejarse entre rieles adyacentes para que apenas se toquen en verano, cuando la temperatura suba a **33,0°C**?
- b) Si los rieles se tienden en contacto, ¿a qué esfuerzo se someten en un día de verano en el que la temperatura sea de **33,0°C**?

R: a) **5,04mm** - b) **8,4x10⁷ Pa**

Capítulo 2

Calorimetría

1. Un estudiante mezcla **1 litro** de agua a **40 °C** con **1 litro** de alcohol etílico a **20 °C**. Suponiendo que no hay pérdidas de calor debido al contacto con el recipiente ni al medio ambiente, indicar cuál es la **temperatura final** de la mezcla.

Se produce una mezcla entre el agua y el alcohol donde:

- * Densidad del Agua: $\delta_{H_2O} = 0,992 \frac{gr}{cm^3}$
- * Densidad del Alcohol: $\delta_{alcohol} = 0,789 \frac{gr}{cm^3}$
- * Calor Específico del Agua: $c_{H_2O} = 1 \frac{cal}{gr.^oC}$
- * Calor Específico del Alcohol: $c_{alcohol} = 0,58 \frac{cal}{gr.^oC}$

La ecuación de Equilibrio de Energía expresa:

$$Q_{cedido} + Q_{absorbido} = 0 \quad (2.1)$$

*Donde **Q** representa el calor de cada elemento y se define por:*

$$Q = m \times c \times \Delta T \quad (2.2)$$

m = masa, c = calor específico. Entonces:

$$m_{H_2O} \times c_{H_2O} \times \Delta T + m_A \times c_A \times \Delta T = 0$$

Para poder solucionar la ecuación anterior hace falta calcular las masas de agua y alcohol. Para esto se utiliza la ecuación de densidad:

$$\delta = \frac{m}{V} \quad (2.3)$$

V = volumen. Siendo 1l → 1000cm³

$$m_A = 789 \text{ gr} \quad y \quad m_{H_2O} = 992 \text{ gr}$$

Luego se reemplazan los valores obtenidos en la Ec. (2.1) y se despeja la T_f:

$$789 \frac{gr}{cm^3} \times 0,58 \frac{cal}{gr.^oC} \times (T_f - 20^oC) + 992 \frac{gr}{cm^3} \times 1 \frac{cal}{gr.^oC} \times (T_f - 40^oC) = 0 \rightarrow T_f = 33,6^oC$$

2. **TAREA** Una taza de café de **m = 0,25 kg** a la temperatura ambiente (**20 °C**) se llena con **250cm³** de café hirviendo (**100 °C**). La taza y el café llegan a un equilibrio térmico de **80 °C**. Si no se ha perdido calor, ¿Cuál es el calor específico de la taza?

$$R = 0,33 \frac{\text{cal}}{\text{gr.}^{\circ}\text{C}}$$

3. Un termómetro de **m = 55 gr** y **c = 0,2 cal/gr · °C** marca **15 °C**. En ese punto se introduce en **300 gr** de agua y alcanza la temperatura final de la misma. Si el termómetro marca **44,4 °C**, calcular la temperatura inicial del agua antes de introducir el termómetro. Despreciar las pérdidas de calor.

Se plantea el problema en base a la Ec. (2.1), en donde el termómetro absorbe calor y el agua cede:

$$55\text{gr} \cdot 0,2 \frac{\text{cal}}{\text{gr.}^{\circ}\text{C}} \times (44,15^{\circ}\text{C} - 15^{\circ}\text{C}) + 300\text{gr} \times 1 \frac{\text{cal}}{\text{gr.}^{\circ}\text{C}} \times (44,15^{\circ}\text{C} - T_f) = 0$$

Despejando → Tf = 45,4 °C

4. Al perforar un agujero en un bloque de latón de **4,45 N** de peso se proporciona potencia a razón de **298 W** durante **2 minutos**. Calcular:

a) **¿Qué cantidad de calor se genera?** De la Ecuación de potencia:

$$P(t) = \frac{\Delta E}{\Delta t} \quad (2.4)$$

Se despeja la energía total que se produce en la perforación:

$$\Delta E = P(t) \times \Delta t = 298 \text{W} \cdot 120 \text{s} = 35760 \text{ Joules}$$

- b) **La elevación de temperatura del latón si el 75 % del calor generado calienta el bloque.** Se debe averiguar el ΔT utilizando la Ec. (2.2). Para esto, primero se calcula el peso:

$$P = m \times g \quad (2.5)$$

$$m = \frac{P}{g} = \frac{4,45 \text{N}}{9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = \frac{4,45 \text{kg} \times \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 0,45 \text{kg}$$

De acuerdo al equivalente mecánico del trabajo: 1cal → 4,186J

$$35760 \text{J} \times \frac{1 \text{cal}}{4,186 \text{J}} = 8542 \text{ cal}$$

Luego, dado que solo el 75 % del calor generado eleva la temperatura:

$$0,75 \times Q = m \times c \times \Delta T, \text{ y siendo } c_{laton} = 0,092 \frac{\text{cal}}{\text{gr.}^{\circ}\text{C}}$$

$$\Delta T = \frac{6407 \text{cal}}{454 \text{gr} \times 0,092 \frac{\text{cal}}{\text{gr.}^{\circ}\text{C}}} = 152^{\circ}\text{C}$$

5. Una bala de plomo que lleva una velocidad de **350 m/s** llega a un blanco y se detiene. Calcular la elevación de la temperatura de la bala si no hubiera pérdidas por el calor que pasa al medio.

El teorema del trabajo y la energía expresa:

$$W = \Delta K \quad (2.6)$$

Siendo $W = \text{trabajo}$ y $\Delta K = \text{variación de energía cinética}$. La variación de energía cinética de la bala nos da el trabajo que esta realiza al penetrar el blanco.

$$W = \frac{1}{2} \times m \times (v_f^2 - v_i^2)$$

Por otro lado, el trabajo se transforma en calor. Descrito a través de ecuaciones:

$$W + Q = 0 \rightarrow Q = m \times c \times \Delta T = -\frac{1}{2} \times m \times (v_f^2 - v_i^2)$$

$$c_{\text{plomo}} = 0,031 \frac{\text{cal}}{\text{gr} \cdot ^\circ \text{C}} \quad y \quad \mathbf{v_f = 0};$$

$$\Delta T = \frac{1}{2} \cdot \frac{v_i^2}{1000 \times 4,186 \times c_{\text{plomo}}} = 472 \text{ } ^\circ \text{C}$$

El módulo 1000 corresponde al pasaje de unidades de [kg] a [gr].:

$$\frac{m_Q}{m_{\Delta V}} = \frac{1}{1000}$$

6. Una pieza de fundición cuyo peso es de **490 N** se saca de un horno que está a una temperatura de **500 °C** y se introduce en un tanque que contiene una masa de **400 kg** de aceite (**c = 0,5 cal/gr · °C**) que está a **25 °C**. Si la temperatura final es de **T_f = 38 °C**, calcular el calor específico de la fundición. Despreciar la capacidad calorífica del tanque y las pérdidas calorimétricas.

Se plantea el problema en base a la Ec. (2.1), en donde el aceite absorbe calor y la pieza cede. La masa se calcula con la Ec. (2.5):

$$400\text{kg} \times 0,5 \frac{\text{kcal}}{\text{kg} \cdot ^\circ \text{C}} \times (38^\circ \text{C} - 25^\circ \text{C}) + 50\text{kg} \times c_p \times (38^\circ \text{C} - 500^\circ \text{C}) = 0$$

$$\text{Despejando} \rightarrow c_p = 0,112 \frac{\text{kcal}}{\text{kg} \cdot ^\circ \text{C}}$$

7. Un calorímetro (ver Fig. 2.1) está compuesto por un recipiente de vidrio de **m = 400 gr**, un agitador de aluminio de **m = 200 gr** y un termómetro de vidrio de **m = 80 gr**. Contiene **1 kg** de agua a **20 °C**. Determinar:

a) **π del calorímetro.** Se plantean los términos de la Ec. (2.1):

$$Q_{\text{recibido}} = (m_{H_2O} \times c_{H_2O} + m_{rec} \times c_{rec} + m_{ter} \times c_{ter} + m_{ag} \times c_{ag}) \times \Delta T$$

$$Q_{\text{cedido}} = m_{\text{material}} \times c_{\text{material}} \times \Delta T$$

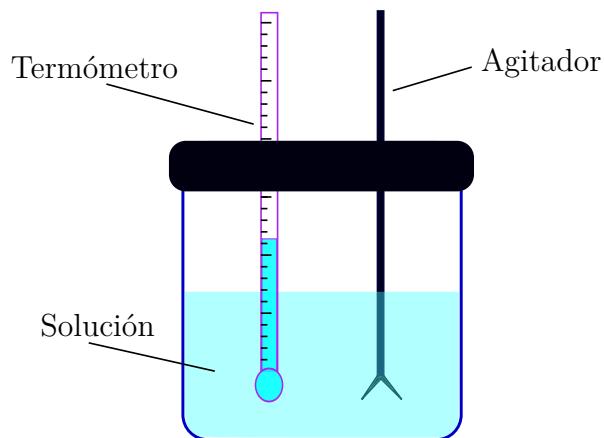


Figura 2.1: Esquema del calorímetro.

El equivalente en masa de agua del calorímetro (π) expresado en gramos es:

$$\pi = \frac{m_{rec} \times c_{rec} + m_{ter} \times c_{ter} + m_{ag} \times c_{ag}}{c_{H_2O}} = 139 \text{ gr}$$

Como el calor específico del agua es $1 \text{ cal/gr} \cdot ^\circ\text{C}$, esto equivale a considerar una masa de " π " gramos de agua, que absorbería (o cedería) la misma cantidad de calor que el calorímetro para la misma variación de temperatura. Por eso a π se le llama equivalente en agua del calorímetro.

- b) El calor específico del latón, si se introducen 800 gr del mismo a una $t = 100^\circ\text{C}$ produciendo que la temperatura del sistema alcance los 25°C .

$$c_{latón} = -\frac{c_{H_2O} \cdot (\pi + m_{H_2O}) \cdot (T_f - T_i)}{m_{latón} \cdot (T_f - T_i)} = 0,095 \frac{\text{cal}}{\text{gr} \cdot ^\circ\text{C}}$$

8. TAREA Un recipiente de aluminio de **500 gr** de masa contiene **117,5 gr** de agua a $t = 20^\circ\text{C}$.

Se deja caer dentro del mismo un bloque de acero de **m = 200 gr** que está a $t = 75^\circ\text{C}$. Calcular la temperatura final considerando que no hay pérdidas de calor hacia el medio ambiente.

$$c_{Al} = 0,217 \frac{\text{cal}}{\text{gr} \cdot ^\circ\text{C}} \quad c_{Acero} = 0,11 \frac{\text{cal}}{\text{gr} \cdot ^\circ\text{C}} \quad R = 25^\circ\text{C}.$$

9. Para la determinación del calor específico de un nuevo material se dispone de un calorímetro.

Si en él se colocan **300 gr** de agua a **20°C** y luego **450 gr** de Bronce a **265°C** se llega a una **$T_f = 40^\circ\text{C}$** . En la nueva experiencia se colocan **500 gr** de agua a **20°C** , luego se agregan **180 gr** del material investigado que está a **200°C** y se mide **$T_f = 25^\circ\text{C}$** . Calcular:

- a) **π del calorímetro.**

Usando Ec. (2.1) y teniendo en cuenta el equivalente en masa de agua (π) se desarrolla el problema.

Siendo $c_{bronze} = 0,092 \frac{\text{cal}}{\text{gr} \cdot ^\circ\text{C}}$:

$$(\pi + m_{H_2O}) \times c_{H_2O} \times (40^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C}) + m_{bronze} \times c_{bronze} \times (40^\circ\text{C} - 265^\circ\text{C}) = 0$$

$$\pi = 165,65 \text{ gr}$$

b) Calor específico del material.

$$(\pi + m_{H_2O}) \times c_{H_2O} \times (25^\circ C - 20^\circ C) + m_{mat} \times c_{mat} \times (25^\circ C - 200^\circ C) = 0$$

$$c_{mat} = 0,104 \frac{\text{cal}}{\text{gr.}^\circ\text{C}}$$

c) Calor cedido por el bloque metálico.

$$m_{mat} \times c_{mat} \times (25^\circ C - 200^\circ C) = 2551 \text{ cal}$$

10. Para medir el calor específico de un líquido se utiliza un **calorímetro de flujo**. Si se agrega calor en forma uniforme y en proporción conocida a un caudal determinado de líquido que pasa por el calorímetro y luego se mide la diferencia de temperatura entre los puntos de entrada y salida de la corriente del líquido, se puede calcular el calor específico. Un líquido de $\delta = 0,85 \text{ gr/cm}^3$ fluye por un calorímetro de flujo a razón de $8 \text{ cm}^3/\text{s}$. Si se agrega calor mediante un calefactor eléctrico que funciona con **25 Watt** y se mide una diferencia de temperatura entre la entrada y salida del líquido de **$15^\circ C$** , calcular el calor específico del mismo.

De la Ec. (2.4) se despeja el valor de energía y se iguala con la Ec. (2.2):

$$m \times c \times \Delta T = P \times \Delta t$$

La masa queda expresada por la Ec. (2.3) y el caudal “q” en un tiempo “t” (cm^3/s):

$$\delta \times q \times \Delta t \times c \times \Delta T = P \times \Delta t$$

$$0,85 \frac{\text{gr}}{\text{cm}^3} \times 8 \frac{\text{cm}^3}{\text{s}} \times \Delta t \times c \times \Delta T = P \times \Delta t$$

$$c = \frac{25 \text{ W}}{6,8 \frac{\text{gr}}{\text{s}} \times 15^\circ \text{C}} = \frac{25 \frac{\text{J}}{\text{s}}}{6,8 \frac{\text{gr}}{\text{s}} \times 15^\circ \text{C}} = 0,245 \frac{\text{J}}{\text{gr.}^\circ\text{C}}$$

$$c = 0,245 \frac{\text{J}}{\text{gr.}^\circ\text{C}} \times \frac{1 \text{ cal}}{4,186 \text{ J}} = 0,0585 \frac{\text{cal}}{\text{gr.}^\circ\text{C}}$$

11. **TAREA** Un calorímetro cuyo equivalente en agua es despreciable, contiene **100 gr** de agua a **$0^\circ C$** . Se introduce en el mismo un bloque de cobre de **m = 1000 gr** y otro de plomo de **m = 800 gr** ambos a **$100^\circ C$** . Despreciando las pérdidas de calor al medio ambiente, calcular la temperatura final del sistema. **R = 54 °C**.
12. Un calorímetro cuyo π es despreciable contiene **500 gr** de agua y **300 gr** de hielo en equilibrio térmico. Se toma un bloque metálico de **m = 1000 gr** de un horno cuya **T = 240 °C** y se deja caer rápidamente dentro del calorímetro. Esto produce la fusión de todo el hielo. Despreciando las pérdidas del calorímetro, ¿Cuál será la T_f del sistema si el bloque hubiera tenido el doble de masa?

En el primer experimento $T'_f = 0^\circ C$ porque el bloque calentado lo único que logra es fundir el hielo (agua a $0^\circ C$). Si se analiza esta situación en la Fig. 2.2, se puede ver que el Q agregado mantiene el sistema en la región “Fusión del Hielo”.

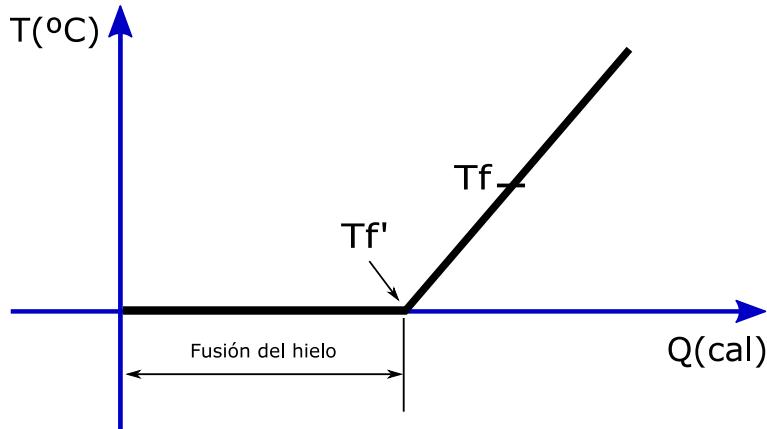


Figura 2.2: Esquema de la transformación del ejercicio 12

Es necesario plantear Ec. (2.1) para poder calcular el c_{bloque} :

$$m_{bloque} \times c_{bloque} \times (0^\circ C - 240^\circ C) + \underbrace{m_{H_2O} \times c_{H_2O} \times (0^\circ C - 0^\circ C)}_{= 0} + m_{hielo} \times L_f = 0$$

Siendo el calor latente de fusión para el agua:

$$L_f = 80 \frac{\text{cal}}{\text{gr}} \quad (2.7)$$

Donde c_{bloque} es:

$$c_{bloque} = 0,1 \frac{\text{cal}}{\text{gr} \cdot ^\circ \text{C}}$$

Ahora se puede calcular la nueva T_f . Se debe agregar el término $m_{hielo \rightarrow \text{agua}}$ correspondiente a la elevación de temperatura luego de la transformación:

$$m_b \times c_b \times (T_f - 240) + m_{H_2O} \times c_{H_2O} \times (T_f - 0) + m_h \times L_f + m_{h \rightarrow H_2O} \times c_{H_2O} \times (T_f - 0) = 0$$

$\mathbf{T_f = 24^\circ C}$

13. Un recipiente aislado de aluminio de $\mathbf{m = 500 \text{ gr}}$ contiene $\mathbf{2000 \text{ gr}}$ de agua y $\mathbf{200 \text{ gr}}$ de hielo en equilibrio térmico. Se introduce en el agua el extremo de un tubo conectado a una caldera en donde hiere agua a presión atmosférica. Calcular cuantos gramos de vapor de agua se deben condensar para que la T_f del sistema sea $\mathbf{20^\circ C}$.

En este caso, el vapor cede calor mientras que el agua y el hielo absorben. La solución se plantea mediante Ec. (2.1):

$$\underbrace{-m_v \times L_v + m_{v \rightarrow H_2O} \times c_{H_2O} \times (20 - 100^\circ C)}_{= \text{vapor}} + \underbrace{m_{H_2O} \times c_{H_2O} \times (20 - 0^\circ C)}_{= H_2O} + \underbrace{m_{hielo} \times L_f + m_{hielo \rightarrow H_2O} \times c_{H_2O} \times (20 - 0^\circ C)}_{= \text{hielo}} + m_{rec} \times c_{Al} \times (20 - 0^\circ C) = 0$$

El vapor cede calor, por eso sus dos miembros son negativos. Despejando, $\mathbf{m_v = 100,2 \text{ gr}}$.

14. Un calorímetro de cobre de **m = 200 gr** posee un termómetro de vidrio de **m = 100 gr** y un agitador de aluminio de **m = 150 gr**. Contiene **300 gr** de agua y **8 gr** de hielo en equilibrio térmico. Se introduce un bloque metálico de **m = 400 gr** que está a **220 °C**. Se mide la cantidad de calor que cede el bloque hasta llegar a la nueva temperatura de equilibrio y se observa que es igual a la que cedería una masa de **15 gr** de vapor de agua a **100 °C** al condensarse y pasar a ser agua a **100 °C**. Calcular:

a) **El equivalente en agua del calorímetro.** *Planteando Ec. (2.1) por sus términos:*

$$Q_{cedido} = m_{mat} \times c_{mat} \times \Delta T = \underbrace{-m_{vapor} \times L_v}_{\text{Negativo porque cede calor}}$$

$$Q_{absorbido} = (m_{H_2O} \times c_{H_2O} + m_{ag} \times c_{ag} + m_{ter} \times c_{ter} + m_{rec} \times c_{rec}) \times (T_f - 0) + m_{hielo} \times L_f + m_{hielo \rightarrow H_2O} \times (T_f - 0)$$

Cálculo del π :

$$\pi = \frac{m_{rec} \times c_{rec} + m_{ter} \times c_{ter} + m_{ag} \times c_{ag}}{c_{H_2O}} = 71,2 \text{ gr}$$

b) **Calor específico del bloque metálico.**

$$(m_{H_2O} + \pi) \times c_{H_2O} \times (T_f - 0) + m_{hielo} \times L_f + m_{hielo \rightarrow H_2O} \times c_{H_2O} \times (T_f - 0) - m_v \times L_v = 0$$

Se despeja T_f y se obtiene un valor de $T_f = 19,7^{\circ}\text{C}$. Entonces:

$$m_{mat} \times c_{mat} \times (19,7 - 220^{\circ}\text{C}) = -m_v \times L_v \rightarrow c_{mat} = 0,101 \frac{\text{cal}}{\text{gr.}^{\circ}\text{C}}$$

15. Un calorímetro de cobre de **m = 300 gr** contiene **500 gr** de agua y **20 gr** de hielo en equilibrio térmico. Se introduce un bloque de aluminio de **m = 200 gr**, el cual, al enfriarse hasta la temperatura final pierde **7000 cal**. Calcular la T_i y T_f del aluminio.

En primer lugar es necesario averiguar si las calorías que cede el bloque alcanzan para elevar la temperatura del sistema o si solo funden el hielo.

$$Q_f = L_f \times m_h = 1600 \text{ cal}$$

Como $7000 > 1600$, el bloque funde el hielo y luego puede elevar la temperatura del sistema. *Planteando Ec. (2.1) por sus términos:*

$$Q_{cedido} = m_b \times c_b \times (T_f - T_{ib}) = -7000 \text{ cal} \quad (2.8)$$

$$Q_{absorbido} = (m_{H_2O} + \pi) \times c_{H_2O} \times \Delta T + m_h \times L_f + m_{h \rightarrow H_2O} \times c_{H_2O} \times \Delta T$$

Para calcular T_f se puede escribir la Ec. (2.1) de la siguiente manera y luego despejar:

$$Q_{absorbido} - 7000 \text{ cal} = 0 \rightarrow T_f = 9,85^{\circ}\text{C}$$

Luego, con la Ec. (2.8) se despeja $T_i = 171,1^{\circ}\text{C}$.

16. Se desea elevar la temperatura de **200 l** de agua desde **10 °C** a **70 °C**. Suponiendo un conjunto de pérdidas del 25 %, calcular:

a) **¿Qué cantidad de calor total se requiere?** *El calor total para este problema está dado como:*

$$Q_T = Q_{H_2O} + Q_{\text{pérdida}} = m_{H_2O} \times c_{H_2O} \times (T_f - T_i) + 0,25 \times Q_T \rightarrow Q_T = \mathbf{16000 \text{ kcal}}$$

b) **Si se calienta con gas de hulla cuyo calor de combustión es de $5600 \frac{\text{kcal}}{\text{m}^3}$, ¿Cuántos m^3 han de quemarse?**

$$Q_T = 5600 \frac{\text{kcal}}{\text{m}^3} \cdot V \rightarrow V = \mathbf{2,857 \text{ m}^3}$$

17. ¿Cuántas calorías se necesitan para fundir **20 gr** de hielo a **-10 °C**, convirtiéndolo en vapor de agua a **100 °C**?

La Fig. 2.3 muestra el comportamiento de la transformación. El calor total se obtiene al sumar las etapas 1-2-3-4.

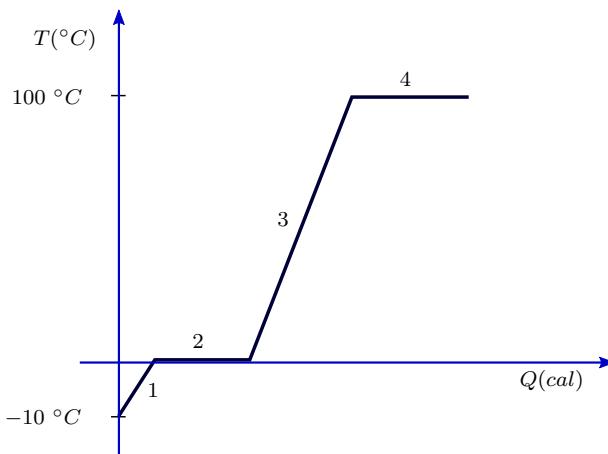


Figura 2.3: Etapas en la transformación del ejercicio 17

a) **Calor para llevar el hielo de $-10^\circ C$ a $0^\circ C$.**

$$Q_1 = m_h \times c_h \times [0 - (-10^\circ C)] = 20 \text{ gr} \times 0,45 \frac{\text{cal}}{\text{gr.}^\circ C} \times 10^\circ C = \mathbf{90 \text{ cal}}$$

b) **Calor para fundir el hielo.**

$$Q_2 = m_h \times L_f = 20 \text{ gr} \times 80 \frac{\text{cal}}{\text{gr.}} = \mathbf{1600 \text{ cal}}$$

c) **Calor para llevar el H_2O de $0^\circ C$ a $100^\circ C$**

$$Q_3 = m_{H_2O} \times c_{H_2O} \times (100 - 0^\circ C) = 20 \text{ gr} \times 1 \frac{\text{cal}}{\text{gr.}^\circ C} \times 100^\circ C = \mathbf{2000 \text{ cal}}$$

d) Calor para la evaporación.

$$Q_4 = m_{H_2O} \times L_v = 20 \text{ gr} \times 540 \frac{\text{cal}}{\text{gr}} = \mathbf{10800 \text{ cal}}$$

Finalmente:

$$Q_T = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = \mathbf{14490 \text{ cal}}$$

18. **TAREA** Un vaso cuya capacidad calorífica es despreciable contiene **500 gr** de agua a **80 °C**. Calcular cuántos **gr** de hielo ($c_{\text{hielo}} = 0,55 \frac{\text{cal}}{\text{gr} \cdot ^\circ\text{C}}$) a **-25 °C** se deben dejar caer en el agua para que la temperatura final del sistema sea **50 °C**. **R = 104,3 gr**
19. **TAREA** Un recipiente aislado contiene **600gr** de agua a **18 °C**. Luego se agregan **250 gr** de hielo a **0 °C**, a) ¿Cuál es la temperatura final de la mezcla. b) ¿Cuánto hielo se funde? Suponga que no se pierde calor. **R: a) 0 °C – b) 136 gr.**
20. Un cubo de hielo de **20 gr** a **0 °C** se calienta hasta que **15 gr** se han convertido en agua a **100 °C** y **5 gr** se han convertido en vapor a **100 °C**. ¿Cuánto calor se necesitó para este proceso?

El cubo de hielo pasa por los siguientes procesos:

$$Q_1 = m_h \times L_f = 20 \text{ gr} \times 80 \text{ cal/gr} = \mathbf{1600 \text{ cal}}$$

$$Q_2 = m_h \times c_{H_2O} \times (100 - 0^\circ\text{C}) = 20 \text{ gr} \times \frac{\text{cal}}{\text{gr} \cdot ^\circ\text{C}} \times 100^\circ\text{C} = \mathbf{2000 \text{ cal}}$$

$$Q_3 = m_v \times L_v = 5 \text{ gr} \times 540 \text{ cal/gr} = \mathbf{2700 \text{ cal}}$$

$$Q_T = Q_1 + Q_2 + Q_3 = \mathbf{6300 \text{ cal} \rightarrow 26,37 \text{ kJ}}$$

21. Determine el estado final de la mezcla entre **20 gr** de hielo a **0 °C** y **10 gr** de vapor a **100 °C**.

*El vapor puede ceder cierta cantidad de energía al transformarse en agua a **100 °C**:*

$$Q_v = m_v \times L_v = 10 \text{ gr} \times 540 \text{ cal/gr} = \mathbf{5400 \text{ cal}}$$

Con el valor anterior se pueden averiguar los procesos de cambio que sufre el hielo al absorber esa cantidad:

$$Q_{h1} = m_h \times L_f = 20 \text{ gr} \times 80 \text{ cal/gr} = \mathbf{1600 \text{ cal}}$$

$$Q_{h2} = m_{h \rightarrow H_2O} \times c_{H_2O} \times (100 - 0^\circ\text{C}) = \mathbf{2000 \text{ cal}}$$

Sobran 1800 cal, entonces cierta parte del agua pasa a vapor:

$$1800 \text{ cal} = m_{H_2O \rightarrow \text{vapor}} \times L_v \rightarrow \mathbf{m_{H_2O \rightarrow \text{vapor}} = 3,33 \text{ gr}}$$

El estado final incluye los 10 gr de vapor que se transformaron en agua a 100 °C, los (20 - 3,33)gr de hielo que se transformaron en agua a 100 °C y los 3,33 gr de agua que se transformaron en vapor:

$$m_{H_2O} = \mathbf{26,67 \text{ gr} (100^\circ\text{C})}$$

$$m_v = \mathbf{3,33 \text{ gr}}$$

22. **TAREA** ¿Cuántas calorías deben proveerse a **60 gr** de hielo ($c_{\text{hielo}} = 0,50 \frac{\text{cal}}{\text{gr} \cdot ^\circ\text{C}}$) a -20°C para fundirlo y elevar su temperatura a 40°C ? **R = 7800 cal.**
23. **TAREA** Un trozo de **200 gr** de hielo a 0°C se introduce en **500 gr** de agua a 20°C . El recinto tiene una capacidad calorífica despreciable y está aislado del exterior. Calcular: a) ¿Cuál es la temperatura final del sistema? b) ¿Qué cantidad de hielo se funde?
- R:** a) 0°C ; b) **125 gr.**
24. **TAREA** Una vasija bien aislada contiene **150 gr** de hielo a 0°C . Si se introducen en su interior **20 gr** de vapor a 100°C . ¿Cuál es la temperatura final de equilibrio? ¿Queda algo de hielo? **R = 4,9^\circ\text{C}; No.**
25. **TAREA** Calcular la temperatura final de equilibrio cuando **10 gr** de leche a 10°C se agregan a **160 gr** de café a 90°C . Suponer que las capacidades caloríficas de los 2 líquidos son iguales a la del agua y despreciar la capacidad calorífica del recipiente. **R = 85^\circ\text{C}**
26. **TAREA** Un operario necesita conocer la temperatura de un horno. Saca una barra de **m = 2 kg** de hierro del horno y la coloca en un recipiente de Aluminio de **m = 1 kg** que contiene **2 kg** de agua. Si la temperatura del agua sube de 21°C a 50°C , calcular la temperatura del horno. (Despreciar otros intercambios de calor). **R = 334,48^\circ\text{C}**
27. **TAREA** ¿Cuánto calor se requiere para evaporar totalmente **1 kg** de hielo que está a -10°C ? **R = 724,5 kcal**
28. **TAREA** Un recipiente de Aluminio de **m = 250 gr** para hacer cubos de hielo tiene **500 cm³** de agua a 20°C . Se introduce en el congelador de una heladera y llega a los -5°C . ¿Cuánto calor se ha quitado al agua y al recipiente? **R = 52,7 kcal**
29. **TAREA** Un calorímetro está compuesto por un recipiente de Aluminio de **m = 220 gr**, un agitador de bronce de **m = 150 gr** y un termómetro de vidrio de **m = 100 gr**. Se introducen en el mismo **600 gr** de agua y **5 gr** de vapor de agua en equilibrio térmico. Calcular:
 a) π . **R = 81,59 gr**
 b) ¿Qué m_{hielo} a -20°C se deberá agregar para llegar a una $T_f = 60^\circ\text{C}$? **R = 199,72 gr**
 c) ¿Qué cantidad de calor absorbe esa masa, inicialmente de hielo, hasta llegar a la temperatura final? **R = 30,15 kcal**
30. **TAREA** Se dispone de un calorímetro compuesto por un recipiente de Cobre de **m = 200 gr**, un termómetro de vidrio de **m = 250 gr** y un agitador de Aluminio de **m = 200 gr**. Contiene **30 gr** de hielo y **500 gr** de agua en equilibrio térmico. Luego se agrega una masa de vapor de agua a 100°C y se mide que la masa total de agua al final de la experiencia es de **545 gr**. Calcular:
 a) π . **R = 111,75 gr**
 b) Temperatura final. **R = 10,94^\circ\text{C}**
 c) Calor cedido por la masa de vapor hasta llegar a la temperatura final. **R = 9420 cal**
31. **TAREA** Si en el problema **28** se desea obtener el hielo en **15 minutos**, ¿qué potencia debería tener la heladera? (considerando un rendimiento del 50%). **R = 490W (0,66HP)**

32. **TAREA** Un sistema de calefacción doméstico utiliza agua caliente para la transferencia de calor. Esta llega a los radiadores a **60 °C** y sale a **38 °C**. Se desea cambiar el sistema por otro de vapor de agua el cual se condensa en los radiadores y sale a **82 °C**. Calcular cuantos kg de vapor de agua suministrarán igual calor que 1 kg de agua. **R = 0,0394 Kg**
33. En un experimento de Joule una **m = 6 kg** cae desde una altura de **50 m** y hace girar una rueda de aspas que agita una masa de agua de **m = 0,6 kg**. Si el agua está inicialmente a **15 °C**, ¿cuánto se elevará su temperatura?

En este caso, un cambio de energía potencial gravitatoria se traduce a un calentamiento del agua. La expresión de energía potencial gravitatoria es:

$$E_p = m \times g \times h, \quad (2.9)$$

El equilibrio de energía está dado por:

$$\begin{aligned} m_{H_2O} \times c_{H_2O} \times \Delta T &= m \times g \times h \\ 600 \text{ gr} \times 1 \frac{\text{cal}}{\text{gr.}^{\circ}\text{C}} \times \Delta T &= \left[\frac{1 \text{ cal}}{4,186 \text{ J}} \right] \times 6 \text{ kg} \times 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 50 \text{ m} \\ \Delta T &= 1,17^{\circ}\text{C} \end{aligned}$$

34. Un automóvil que pesa **5880 N** posee una velocidad de **180 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$** . Calcular:

- a) **¿Cuántas kcal se producen en los frenos cuando se detiene?** Con el teorema del Trabajo y la energía, Ec. (2.6), se puede calcular el trabajo que realizan los frenos:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \times m \times \Delta v^2 \\ W &= \frac{1}{2} \times \frac{P}{g} \times (0 - 180 \frac{\text{km}}{\text{h}} * \frac{\text{m.h}}{3,6 \text{ s.km}})^2 = -750 \text{ kJ} \\ W &= -750 \text{ kJ} \times \frac{1 \text{ cal}}{4,186 \text{ J}} = 179,16 \text{ kcal} \end{aligned}$$

- b) **TAREA** ¿Qué cantidad de agua podría calentarse desde **20 °C** a **80 °C** con esta cantidad de calor?

$$\mathbf{R = 2,98 \text{ kg}}$$

Capítulo 3

Transformaciones en Gases

1. Expresar la constante universal de los gases $R = 0,08207 \frac{\text{atm}\cdot\text{litro}}{\text{mol}\cdot\text{K}}$ en: $\frac{\text{Joule}}{\text{mol}\cdot\text{K}}$; $\frac{\text{cal}}{\text{mol}\cdot\text{K}}$ y $\frac{\text{kgm}}{\text{mol}\cdot\text{K}}$

a) En $\frac{\text{Joule}}{\text{mol}\cdot\text{K}}$

$$\text{Siendo } 1\text{l} \longrightarrow 1000\text{cm}^3 \text{ y } 1\text{atm} \longrightarrow 1,013 \times 10^5 \text{ Pa } (Pa = \frac{N}{m^2})$$

$$R = 0,08207 \frac{\text{atm}\cdot\text{K}}{\text{mol}\cdot\text{K}} \times \frac{1,013 \times 10^5 \text{ N/m}^2}{1\text{atm}} \times \frac{1 \times 10^{-3} \text{ m}^3}{1\text{L}} = 8,314 \left[\frac{\text{Joule}}{\text{mol}\cdot\text{K}} \right]$$

b) En $\frac{\text{cal}}{\text{mol}\cdot\text{K}}$

$$\text{Siendo } 1\text{ cal} \longrightarrow 4,186 \text{ J}$$

$$R = 8,314 \frac{\text{Joule}}{\text{mol}\cdot\text{K}} \times \frac{1\text{ cal}}{4,186\text{ Joule}} = 1,985 \left[\frac{\text{cal}}{\text{mol}\cdot\text{K}} \right]$$

c) En $\frac{\text{kgm}}{\text{mol}\cdot\text{K}}$

$$\text{Siendo } 1\text{ kgm} \longrightarrow 9,81 \text{ J}$$

$$R = 8,314 \frac{\text{Joule}}{\text{mol}\cdot\text{K}} \times \frac{1\text{ kgm}}{9,81\text{ Joule}} = 0,847 \left[\frac{\text{kgm}}{\text{mol}\cdot\text{K}} \right]$$

2. Un tanque de **30 l** contiene nitrógeno, cuya masa molar es $M_n = 28 \text{ gr/mol}$, a una presión $p = 400 \text{ kPa}$ y a una $T = 20^\circ\text{C}$. Al extraer una parte del nitrógeno del tanque, la presión desciende a **250 kPa**, mientras que la temperatura pasa a **8 °C**. Calcular:

a) **La masa del nitrógeno extraída y la que había inicialmente en el tanque.** La transformación sigue la curva de la Fig. 3.1. Se necesitan las siguientes ecuaciones:

$$p \times V = n \times R \times T, \quad (\text{Ecuación de Estado}) \quad (3.1)$$

$$M_{molar} = \frac{m}{n}, \quad (\text{Masa molar}) \quad (3.2)$$

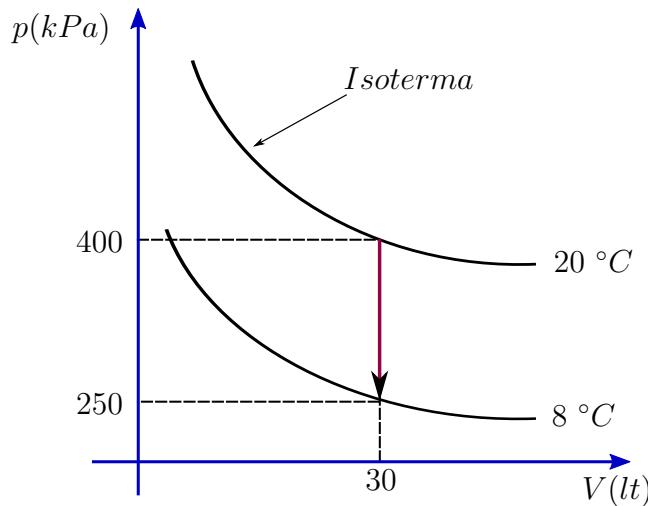


Figura 3.1: Esquema de la transformación del ejercicio 2

En base a las ecuaciones (3.1) y (3.2) se calculan las masas $m_{inicial}$ y m_{final} :

$$m_i = \frac{M_m \cdot p_i \cdot V_i}{R \cdot T_i} \rightarrow m_i = \frac{400 \times 10^3 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} * 30 \times 10^{-3} \text{m}^3 * 28 \frac{\text{gr}}{\text{mol}}}{8,314 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{mol} \cdot \text{K}} * 293,15 \text{K}} = 137,86 \text{ gr}$$

$$m_f = \frac{M_m \cdot p_f \cdot V_f}{R \cdot T_f} \rightarrow m_f = \frac{250 \times 10^3 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} * 30 \times 10^{-3} \text{m}^3 * 28 \frac{\text{gr}}{\text{mol}}}{8,314 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{mol} \cdot \text{K}} * 281,15 \text{K}} = 89,84 \text{ gr}$$

Finalmente $\rightarrow m_{ext} = m_i - m_f = 48,02 \text{ gr}$.

- b) Si la masa del nitrógeno extraída se pasa a otro tanque de $V = 15 \text{ l}$, ¿Qué presión tendrá a 12°C ?

$$p = \frac{(m_{ext}/M_m) \cdot R \cdot T}{V} = \frac{48,02 \text{ gr} * 8,314 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{mol} \cdot \text{K}} * 285,15 \text{K}}{28 \frac{\text{gr}}{\text{mol}} * 15 \times 10^{-3} \text{m}^3} = 271,05 \text{ kPa}$$

3. **TAREA** Un recipiente con tapa de $V = 20 \text{ l}$ contiene nitrógeno ($M_n = 28 \frac{\text{gr}}{\text{mol}}$) a 10°C y $p_1 = 2 \text{ atm}$. Se abre la tapa dejando escapar $0,25 \text{ mol}$ de nitrógeno y se mide una nueva presión $p_2 = 1,5 \text{ atm}$. Calcular:

- a) Masa inicial y final del nitrógeno. $\mathbf{R : m_i = 48,2 \text{ gr} \text{ y } m_f = 41,2 \text{ gr}}$
 - b) Temperatura final. $\mathbf{R = 248,6 \text{ K}}$
 - c) Si a la masa de gas que queda en el recipiente se la lleva nuevamente a 10°C , ¿Cuál será el nuevo valor de la presión? $\mathbf{R = 1,7 \text{ atm}}$
4. Un recipiente cuyo volumen es de 40 l contiene nitrógeno a una presión de $1,5 \frac{\text{kgr}}{\text{cm}^2}$ a una temperatura de 5°C . Determinar:
- a) ¿Cuál será la presión de esta misma masa si se la pasa a un recipiente cuyo volumen es de 400 l que se mantiene a 225°C ?

En este caso no varían los números de moles en la transformación. Para el estado inicial y final:

$$n_i = \frac{p_i \cdot V_i}{R \cdot T_i} \quad y, \quad p_f = \frac{n_i \cdot R \cdot T_f}{V_f}$$

Combinando ambas:

$$p_f = \frac{\frac{p_i \cdot V_i}{R \cdot T_i} \cdot R \cdot T_f}{V_f} = \frac{p_i \cdot V_i \cdot T_f}{T_i \cdot V_f} = \frac{1,5 \frac{kgm}{cm^2} * 40 \times 10^{-3} m^3 * 498,15 K}{278,15 K * 400 \times 10^{-3} m^3} = 0,269 \frac{kgm}{cm^2}$$

b) La masa del nitrógeno.

$$m_N = n_i * M_m = \frac{p_i \cdot V_i}{R \cdot T_i} * M_m, \quad (3.3)$$

Se hace el pasaje de unidades y luego se calcula m_N con la Ec. (3.3):

$$p_i = 1,5 \frac{kgm}{cm^2} * \frac{1 cm^2}{1 \times 10^{-4} m^2} * \frac{9,81 N}{1 kgm} = 147150 \frac{N}{m^2}$$

$$m_N = 71,3 \text{ gr},$$

5. Un recipiente de **21** provisto de una llave contiene oxígeno ($M_o = 28 \frac{\text{gr}}{\text{mol}}$) a **300 K** y a una presión de **1 atm**. Se calienta el sistema hasta que alcanza una temperatura de **400 K**. En ese momento se abre la llave hasta que la presión se estabiliza con la atmosférica y luego se vuelve a cerrar, tras lo cual se deja enfriar el sistema hasta su temperatura inicial:

a) ¿Cuál es la presión final del oxígeno del recipiente?

Tabla 3.1: Etapas (1-4).

Estado inicial (1)	Se calienta (2)	Se estabiliza y pierde gas (3)	Se enfriá (4)
$p_i \cdot V_i = n_i \cdot R \cdot T_i$	$p_c \cdot V_i = n_i \cdot R \cdot T_c$	$p_i \cdot V_i = n_f \cdot R \cdot T_c$	$p_f \cdot V_i = n_f \cdot R \cdot T_i$

Introduciendo (3) en (4) se puede despejar la p_f :

$$p_f = \frac{n_f \cdot R \cdot T_i}{V_i} = \frac{\left(\frac{p_i \cdot V_i}{R \cdot T_e} \right) \cdot R \cdot T_i}{V_i} = \frac{p_i \cdot T_i}{T_e} = \frac{1 atm * 300 K}{400 K} = 0,75 \text{ atm}$$

b) ¿Cuántos gramos de oxígeno quedaron en el recipiente y cuántos había inicialmente?

$$m_f = n_f \cdot M_m = \left(\frac{p_f \cdot V_i}{R \cdot T_i} \right) \cdot M_m$$

$$m_f = \left(\frac{0,75 atm * 2 lt}{8,314 \frac{N.m}{mol.K} * 300 K} \right) * 32 \frac{gr}{mol} * \left(\frac{1,013 \times 10^5 \frac{N}{m^2}}{1 atm} \right) * \left(\frac{1 \times 10^{-3} m^3}{1 lt} \right) = 1,95 \text{ gr}$$

Siguiendo un procedimiento similar: $\mathbf{m_i = 2,60 \text{ gr}}$.

6. Una burbuja de aire se eleva desde el fondo de un lago en donde la presión es de **3,5 atm** y la **T = 7 °C** hasta la superficie, en donde la presión es **1 atm** y la **T = 27 °C**. Calcule la razón del tamaño, es decir, el volumen de la burbuja cuando alcanza la superficie en relación al tamaño de la misma en el fondo del lago.

La razón de volúmenes está dada por:

$$\frac{V_f}{V_i} = \frac{\rho_i \times R \times T_f}{\rho_i \times R \times T_i} \times \frac{p_i}{p_f} = \frac{T_f \times p_i}{T_i \times p_f} = \frac{300,15 \text{ K} \times 3,5 \text{ atm}}{280,15 \text{ K} \times 1 \text{ atm}} = 3,75$$

7. **TAREA** El volumen de un tanque de oxígeno es **50 l**. Cuando se saca oxígeno, la indicación de un manómetro desciende de **20,5 atm** a **6,8 atm** y la temperatura del gas que queda en el tanque baja de **30 °C** a **10 °C**. Calcular:

- a) ¿Cuántos kg de oxígeno había inicialmente en el tanque? **R = 1,32 kg**
- b) ¿Cuántos kg se han extraído? **R = 0,85 kg**
- c) ¿Qué vol. ocupará el gas extraído del tanque a **p = 1 atm** y **t = 20 °C**? **R = 638,71**

8. Un gas ideal está encerrado en un cilindro que posee un émbolo móvil en su parte superior. Este émbolo tiene una **m = 800 gr**, un área de **5 cm²** y es libre de moverse hacia arriba o hacia abajo manteniendo constante la presión del gas. ¿Cuánto trabajo se hace si la temperatura de **0,2 moles** de gas se eleva de **20 °C** a **300 °C**?

Planteando la Ec. (3.1) para ambos estados (que son Isobáricos):

$$p_i \times V_i = n \times R \times T_i \quad (A)$$

$$p_i \times V_f = n \times R \times T_f \quad (B)$$

Restando miembro a miembro las ecuaciones, (B) – (A):

$$\begin{aligned} p_i \times V_f - p_i \times V_i &= n \times R \times T_f - n \times R \times T_i \\ p_i \times (V_f - V_i) &= n \times R \times \Delta T \end{aligned} \quad (C)$$

El trabajo en una transformación Isobárica está dado por la siguiente ecuación:

$$W = \int_{V_i}^{V_f} p \cdot dV = p \cdot \int_{V_i}^{V_f} dV = p \times (V_f - V_i) \quad (3.4)$$

NOTA: La ecuación corresponde al trabajo realizado por el GAS **sobre** el émbolo. Si el trabajo se realiza sobre el gas, se acompaña la Ec. (3.4) con un signo menos.

Relacionando la Ec. (C) y la Ec. (3.4):

$$W = n \times R \times \Delta T = 0,2 \text{ mol} \times 8,314 \frac{J}{mol \cdot K} \times (573,15 \text{ K} - 293,15 \text{ K}) = 465,36 \text{ J}$$

9. **Un mol** de gas ideal se lleva a través del ciclo mostrado en la Fig. 3.2. Este consta de 3 partes; una expansión isotérmica $a \rightarrow b$, una compresión isobárica $b \rightarrow c$ y un aumento de la presión a volumen constante $c \rightarrow a$. Si $T = 300\text{ K}$, $p_a = 5\text{ atm}$ y $p_b = p_c = 1\text{ atm}$, determine el trabajo realizado por el gas durante el ciclo.

El trabajo en una expansión isotérmica está dado por:

$$W = \int_{V_i}^{V_f} p \times dV = \int_{V_i}^{V_f} \frac{n.R.T}{V} \times dV = n.R.T \times \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V} = n.R.T \times \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) \quad (3.5)$$

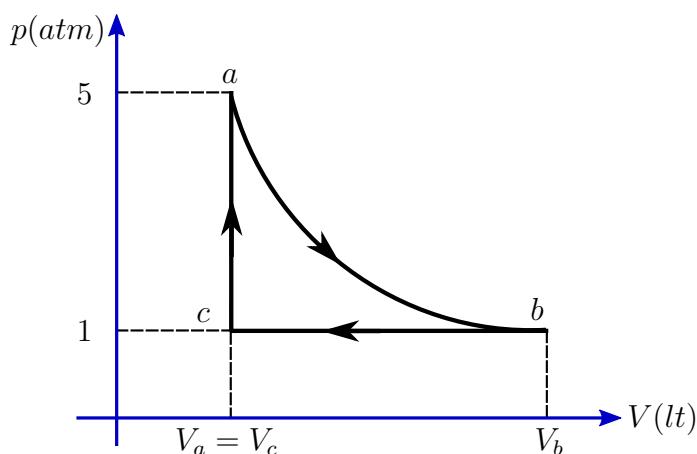


Figura 3.2: Esquema de la transformación del ejercicio 9

Aplicando la Ec. (3.5):

$$W_{ab} = n.R.T \times \ln\left(\frac{V_b}{V_a}\right) = n.R.T \times \ln\left(\frac{\frac{n.R.T_b}{p_b}}{\frac{n.R.T_a}{p_a}}\right) = 1\text{mol} \times 8,314 \frac{J}{mol.K} \times 300\text{K} \times \ln\left(\frac{5\text{atm}}{1\text{atm}}\right)$$

W_{ab} = 4012,33 J

Para el cálculo del trabajo en la compresión isobárica W_{bc} , se aplica la Ec. (3.4):

$$W_{bc} = p_c \cdot (V_c - V_b) = 1\text{atm} \cdot \left[\underbrace{\frac{n.R.T_a}{p_a}}_{V_c=V_a} - \frac{n.R.T_b}{p_b} \right] = -1994,4\text{ J}$$

El $W_{ca} = 0$ (isocórica) $\rightarrow \mathbf{W_{CICLO} = W_{ab} + W_{bc} + W_{ca} = 2017,93\text{ J}}$

10. **TAREA** Una muestra de **un mol** de gas ideal hace un trabajo de **3000 J** sobre el medio ambiente al expandirse isotérmicamente a una presión final de **1 atm** y un volumen final de **25 l**. Determine el volumen inicial y la temperatura del gas.

R: 7,65 l y 305 K

11. Se calientan **2 moles** de oxígeno de **300 K** a **320 K** ¿Cuánto calor se transfirió al gas si el proceso ocurre a:

a) **Volumen constante:** La capacidad calorífica a volumen constante está dada por:

$$Q = n \times c_V \times \Delta T \quad (3.6)$$

Entonces:

$$Q = 2 \text{ mol} \times 21,1 \frac{\text{J}}{\text{mol}\cdot\text{K}} \times (320\text{K} - 300\text{K}) = 844 \text{ J}$$

b) **Presión constante:** La capacidad calorífica a presión constante está dada por:

$$Q = n \times c_p \times \Delta T \quad (3.7)$$

Entonces:

$$Q = 2 \text{ mol} \times 29,4 \frac{\text{J}}{\text{mol}\cdot\text{K}} \times (320\text{K} - 300\text{K}) = 1176 \text{ J}$$

12. Un mol de hidrógeno se calienta a presión constante de **300 K** a **420 K**. Calcule:

a) **Calor transferido al gas.** Con la Ec. (3.7):

$$Q = 1 \text{ mol} \times 29 \frac{\text{J}}{\text{mol}\cdot\text{K}} \times (420\text{K} - 300\text{K}) = 3480 \text{ J}$$

b) **Trabajo realizado por el gas.** Con la Ec. (3.4):

$$W = p \times (V_f - V_i) = p \times \left[\frac{n.R.T_f}{p} - \frac{n.R.T_i}{p} \right] = n.R.\Delta T = 1 \text{ kJ}$$

c) **Aumento en la energía interna del gas.** El primer principio de la Termodinámica expresa:

$$Q = \Delta E_{int} + W, \quad (3.8)$$

NOTA: nuevamente, esta ecuación expresa el Trabajo realizado por el Gas. Entonces:

$$\Delta E_{int} = Q - W = 2,48 \text{ kJ},$$

13. **TAREA** En un cilindro de **1000 litros** de capacidad hay **1293 gr** de aire a **1 atm** y **0 °C** (en condiciones normales la densidad del aire es $\delta = 1,293 \text{ gr/l}$). Calcular:

- a) Calor que hay que entregar a volumen cte. para que la temperatura aumente **10 °C**. **R = 2224,5 cal**
- b) Calor que hay que entregar a presión constante para que la temperatura aumente **10 °C**. **R = 3111,6 cal**
- c) Trabajo realizado para el punto (b). **R = 378,4 kgm**
- d) Comparar el resultado de c con el W que resulta de aplicar el 1^{er} Prin. **R = 378,8 kgm**

Tomar $C_p = 4,99 \frac{\text{cal}}{\text{mol}\cdot\text{K}}$, $R = 1,99 \frac{\text{cal}}{\text{mol}\cdot\text{K}}$ y $M_{\text{aire}} = 29 \frac{\text{gr}}{\text{mol}}$.

14. **TAREA** Calcular la variación de energía interna de **100 gr** de oxígeno ($M_{O_2} = 32 \frac{gr}{mol}$) cuando se lo calienta de cualquier manera de **80 °C** a **100 °C** ($C_v = 5,03 \frac{cal}{mol \cdot K}$).

$$R = 1315,9 \text{ J}$$

15. Un recipiente contiene **10 gr** de hidrógeno a **2 atm** y **7 °C**. Se lo calienta a volumen constante hasta **27 °C**. Calcular:

- a) **Cantidad de calor que se entregó.** *Primero se calcula el n° de moles:*

$$n = \frac{m}{M_m} = \frac{10 \text{ gr}}{2,01 \frac{\text{gr}}{\text{mol}}} = 4,97 \text{ mol}$$

Mediante la Ec. (3.6) se calcula el calor a V=cte:

$$Q = n \times c_V \times \Delta T = 4,97 \times 20,5 \frac{J}{mol \cdot K} \times 20 K = 2040 \text{ J} \rightarrow 487,29 \text{ cal}$$

- b) **Trabajo realizado por el gas.**

Como se realiza a V=cte, el trabajo es 0

- c) **Variación de la energía interna.** *A través del primer principio, Ec. (3.8):*

$$\Delta E_{int} = Q - W = 487,29 \text{ cal} - 0 = 487,29 \text{ cal},$$

- d) **Presión final.** *Con la ecuación de estado y sabiendo que los moles y el volumen se mantienen constantes se obtiene la presión:*

$$\frac{p_i}{T_i} = \frac{p_f}{T_f} \rightarrow p_f = \frac{p_i \times T_f}{T_i} = \frac{2 \text{ atm} \times 300,15 \text{ K}}{280,15 \text{ K}} = 2,14 \text{ atm}$$

16. **Dos moles** de gas ideal ($\gamma = 1,40$) se expanden cuasiestáticamente y adiabáticamente desde una presión de **5 atm** y un volumen **12 l** a un volumen final de **30 l**. Calcular:

- a) **¿Cuál es la presión final del gas?** *En un proceso Adiabático se cumple:*

$$p_i \times V_i^\gamma = p_f \times V_f^\gamma \quad (3.9)$$

γ : razón e calores específicos.

Utilizando la Ec. (3.9) y despejando la p_f :

$$p_f = p_i \times \left(\frac{V_i}{V_f} \right)^\gamma = 5 \text{ atm} \times \left(\frac{12 \text{ lt}}{30 \text{ lt}} \right)^{1,4} = 1,39 \text{ atm}$$

- b) **¿Cuáles son las temperaturas inicial y final?** *Para calcular las temperaturas se aplica la Ec. (3.1) en ambos estados:*

$$T_i = \frac{p_i \times V_i}{n \times R} = \frac{5 \text{ atm} * 1,013 \times 10^5 \text{ Pa} * 12 \times 10^{-3} \text{ m}^3}{2 \text{ mol} * 8,314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}} = 366 \text{ K}$$

$$T_f = \frac{p_f \times V_f}{n \times R} = 254 \text{ K}$$

17. Un gas ideal ($\gamma = 1,40$) se expande cuasiestáticamente y adiabáticamente. Si la temperatura final es $\frac{1}{3}$ de la inicial, calcular:

a) **¿En qué factor cambia el volumen?** En un proceso Adiabático se cumple:

$$T_i \times V_i^{\gamma-1} = T_f \times V_f^{\gamma-1} \quad (3.10)$$

Despejando el factor V_f/V_i :

$$\frac{V_f}{V_i} = \sqrt[\gamma-1]{\frac{T_i}{T_f}} = 15,6$$

b) **¿En qué factor cambia la presión?** De la Ec. (3.9) se despeja el factor p_f/p_i :

$$\frac{p_f}{p_i} = \left(\frac{V_i}{V_f} \right)^{(\gamma-1)} = 0,0214$$

18. Un cilindro de un motor Diesel al comenzar la carrera de compresión contiene aire a **1 atm** y **20 °C**. Calcular la temperatura y presión al final de la carrera sabiendo que la compresión es de **15 : 1**. Suponer que el aire se comporta como un gas ideal y que la compresión es adiabática.

Como el gas se comprime, se cumple $V_i > V_f$ y $p_f > p_i$. En base a esto, se calcula la p_f :

$$p_f = p_i \times \left(\frac{V_i}{V_f} \right)^\gamma = 1 \text{ atm} \times 15^{1,4} = 44,3 \text{ atm}$$

Luego:

$$T_f = T_i \times \left(\frac{V_i}{V_f} \right)^{\gamma-1} = 293,15 \text{ K} \times 15^{0,4} = \mathbf{T_f = 866 \text{ K}}$$

Capítulo 4

1^{er} Principio de la Termodinámica

- En un proceso se suministra a un sistema **500 cal** y al mismo tiempo se realiza sobre el sistema un trabajo de **100 J**. Calcule el incremento de energía interna.

Se utiliza la Ec. (3.8). Como se realiza un trabajo sobre el sistema, el signo del mismo es negativo:

$$\Delta E_{int} = Q - W = 500 \text{ cal} - (-100 \text{ J} * \frac{1 \text{ cal}}{4,186 \text{ J}}) = 523,89 \text{ cal} \rightarrow 2193 \text{ J}$$

- Cinco moles de un gas ideal se expanden isotérmicamente a **127°C** hasta **4** veces su volumen inicial. Calcular:

- Trabajo realizado por el gas.** De acuerdo a la Ec. (3.5), con $V_f = 4 \cdot V_i$:

$$W = n \times R \times T \times \ln \frac{V_f}{V_i} = 5 \text{ mol} \times 8,314 \frac{\text{J}}{\text{mol.K}} \times 400,15 \text{ K} \times \ln \frac{4 \cdot V_i}{V_i} = 23,1 \text{ kJ}$$

- Flujo total de calor hacia el sistema, ambos en joule.** Utilizando la Ec. (3.8):

$$Q = W + \underbrace{\Delta E_{int}}_0 = W = 23,1 \text{ kJ}$$

La energía interna en una expansión isotérmica es cero porque no hay variación de temperatura.

- TAREA** Un gas ideal inicialmente a **300 K** se expande en forma isobárica a una presión de **2,5 kPa**. Si el volumen aumenta de **1 m³** a **3 m³** y se agregan **12,5 kJ** de calor al sistema, calcular:

- El cambio en la energía interna del gas. **R = 7,5 kJ**
- Su temperatura final. **R = 900 K**

- Una sustancia experimenta una serie de procesos al cabo de los cuales vuelve al estado inicial. En este ciclo la sustancia absorbe una cantidad de calor **Q₁ = 1500 cal** y se desprende una cantidad **Q₂ = 650 cal**. ¿Cuál es el trabajo neto realizado?

Mediante la Ec. (3.8) se plantean las etapas donde la sustancia absorbe y desprende calor:

$$\begin{array}{ll} Q_1 = \Delta E_{int1} + W_1 & \text{Absorbe Calor} \\ Q_2 = \Delta E_{int2} + W_2 & \text{Desprende Calor} \end{array}$$

El Trabajo neto es la suma de ambas:

$$W_{NETO} = W_1 + W_2 = Q_1 + Q_2 - \underbrace{(\Delta E_{int1} + \Delta E_{int2})}_{=0}$$

El término ΔE_{int} es 0 porque se vuelve al mismo punto (no hay variación de temperatura).

$$W_{NETO} = Q_1 + Q_2 = 3558 \text{ J}$$

5. Un sistema experimenta una transformación isobárica desde un punto 1 en donde $\mathbf{p}_1 = 6,5 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ y $\mathbf{V}_1 = 21$ hasta un punto 2 de $\mathbf{V}_2 = 5000 \text{ cm}^3$ y calor absorbido **2000 cal**. Luego experimenta una transformación isocórica hasta un punto 3. Si la $\Delta U_{TOTAL} = 7350 \text{ J}$, calcule la cantidad de calor durante la segunda transformación.

Para la transformación Isobárica:

$$Q_1 = \Delta E_{int1} + W_1 = \Delta E_{int1} + p_1 \times (V_2 - V_1) \quad (1)$$

Para la transformación Isocórica:

$$Q_2 = \Delta E_{int2} + \underbrace{W_2}_{=0} = \Delta E_{int2} \quad (2)$$

Sumando (1) y (2) y despejando Q_2 :

$$\begin{aligned} Q_2 &= \Delta E_{int1} + \Delta E_{int2} + p_1 \times (V_2 - V_1) - Q_1 = \Delta E_{intTOTAL} + p_1 \times (V_2 - V_1) - Q_1 \\ Q_2 &= 7350 \text{ J} + 6,5 \frac{\text{kgm}}{\text{cm}^2} * \frac{9,8 \text{ N}}{1\text{kgm}} * \frac{1\text{cm}^2}{1 \times 10^{-4}\text{m}^2} * 3 \times 10^{-3} \text{ m}^3 - 2000 \text{ cal} = 212,37 \text{ cal} \end{aligned}$$

6. Un gas se expande desde **I** hasta **F** por 3 posibles caminos como se indica en la Fig. 4.1. Calcular en Joule el trabajo realizado por el gas a lo largo de todas las trayectorias **IAF**, **IF**, **IBF**.

a) Trayectoria IAF

$$\begin{aligned} (IA) \quad W_{IA} &= \int_{V_I}^{V_A} p_{IA} \times dV = p_{IA} \times (V_A - V_I) = 810,9 \text{ J} \\ (AF) \quad W_{AF} &= 0 \quad (V = cte.) \rightarrow \mathbf{W}_{IAF} = 810,9 \text{ J} \end{aligned}$$

b) Trayectoria IF: Es necesario determinar la recta entre F e I:

$$p_{IF}(V) = -\frac{3}{2} \times V + \beta = -1,5 \times V + \beta$$

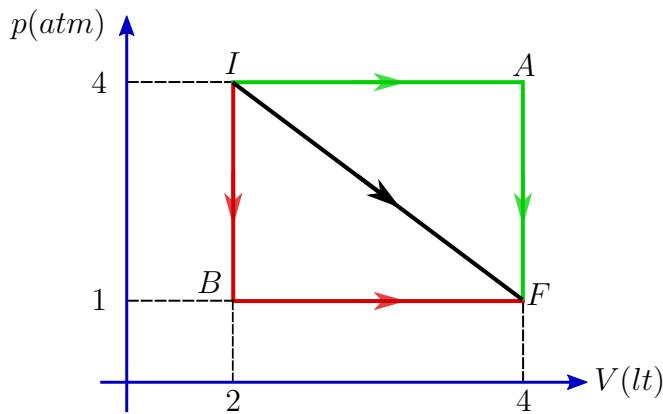


Figura 4.1: Esquema de la transformación del ejercicio 6

Valuando en el punto (2 lts, 4 atm) y despejando β :

$$4 \text{ atm} = -1,5 \frac{\text{atm}}{\text{lts}} \times (2 \text{lts}) + \beta \rightarrow \beta = 7 \text{ atm}$$

Cálculo del trabajo:

$$\begin{aligned} W_{IF} &= \int_{V_I}^{V_F} p_{IF} \times dV = \int_2^4 \left(-1,5 \frac{\text{atm}}{\text{lts}} \times (2 \text{lts}) + 7 \text{ atm} \right) \times dV \\ W_{IF} &= \left[-1,5 \frac{\text{atm}}{\text{lts}} \times \frac{V^2}{2} + 7 \text{ atm} \times V \right]_{2 \text{lts}}^{4 \text{lts}} = 506,5 \text{ J} \end{aligned}$$

c) Trayectoria IBF

$$(IB) \quad W_{IB} = 0 \quad (V = cte.)$$

$$(BF) \quad W_{BF} = \int_{V_B}^{V_F} p_{BF} \times dV = p_{BF} \times (V_F - V_B) = 202,6 \text{ J} \rightarrow \mathbf{W_{IBF} = 202,6 \text{ J}}$$

7. **TAREA** Un gas está en un recipiente a una presión de **1,5 atm** y posee un volumen de **4 m³**. Calcule el trabajo realizado por el gas cuando:

- a) Se expande a presión constante hasta el doble de su volumen inicial. **R = 607,8 kJ**
- b) Se comprime a presión constante hasta un cuarto de su volumen inicial. **R = -455,85 kJ**

8. **TAREA** Se comprime un gas a una presión constante de **0,8 atm**. Pasa de un volumen de **9 lts** a **2 lts**. En el proceso se escapan del gas **400 J** de energía calorífica. Calcular:

- a) El trabajo realizado por el gas. **R = -567,3 J**
- b) El cambio en la energía interna del gas. **R = 167,3 J**

9. **TAREA** Un gas se lleva a través del ciclo indicado en la Fig. 4.2. Calcular:

- a) El calor neto transferido al sistema durante el ciclo completo. **R = 12 kJ**
- b) Si el ciclo se invierte, esto es, el proceso va por el camino ACBA, ¿cuál es el calor neto transferido por el ciclo? **R = -12 kJ**

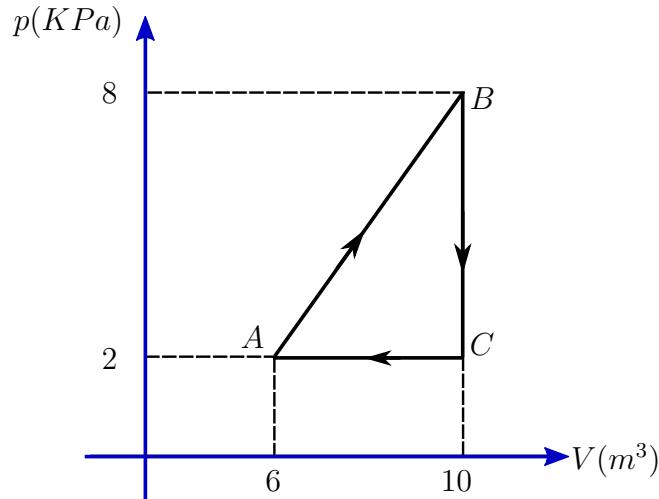


Figura 4.2: Esquema de la transformación del ejercicio 9

10. Un sistema cuyo diagrama p-V se indica en la Fig. 4.3, pasa del punto 1 al 3 siguiendo la trayectoria 1-4-3 y se mide $\Delta U_{1-4} = 2450 \text{ J}$ y $Q_{4-3} = -1000 \text{ cal}$. Si se recorre la trayectoria 1-2-3, se mide $Q_{1-2-3} = 200 \text{ cal}$. Calcular:

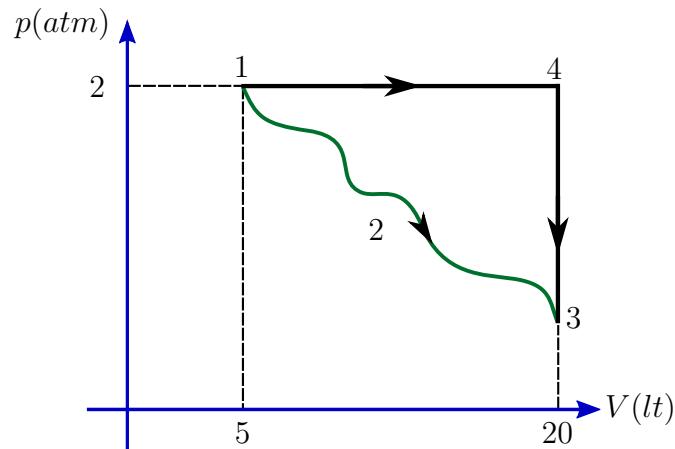


Figura 4.3: Esquema de la transformación del ejercicio 10

- a) Q_{1-4} . Utilizando la Ec. (3.8):

$$Q_{14} = \Delta E_{int14} + W_{14} = 2450 \text{ J} + 2 \text{ atm} * \left(\frac{1,013 \times 10^5 \text{ Pa}}{1 \text{ atm}} \right) * (20 - 5) * 1 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$Q_{14} = 1311,28 \text{ cal}$$

- b) ΔU_{TOTAL}

$$\Delta E_{intT} = \Delta E_{int14} + \Delta E_{int43} = 2450 \text{ J} + \underbrace{Q_{43} - W_{43}}_{W_{43}=0} = -1736 \text{ J}$$

- c) W_{1-2-3} .

$$Q_{123} = \Delta E_{int123} + W_{123}$$

$$Q_{143} = \Delta E_{int143} + W_{143}$$

La energía interna es igual para cualquier trayectoria, por lo cual $\Delta E_{int123} = \Delta E_{int143}$:

$$\begin{aligned} Q_{123} - W_{123} &= Q_{143} - W_{143}, \\ W_{123} &= Q_{123} - Q_{143} + Q_{143} = 200 \text{ cal} - Q_{14} - Q_{43} + W_{14} + W_{43}, \\ W_{123} &= 837,2 \text{ J} - 5489 \text{ J} - (-4186 \text{ J}) + 3039 \text{ J} = \mathbf{2573,2 \text{ J}} \end{aligned}$$

11. Un sistema experimenta la transformación 1-2-3-4 tal como muestra la Fig. 4.4, en donde la 3-4 es adiabática ($\gamma = 1,4$). Se mide $\mathbf{Q_{1-2} = 1100 \text{ cal}}$ y $\mathbf{\Delta U_{2-3} = -1325 \text{ J}}$. Calcular:

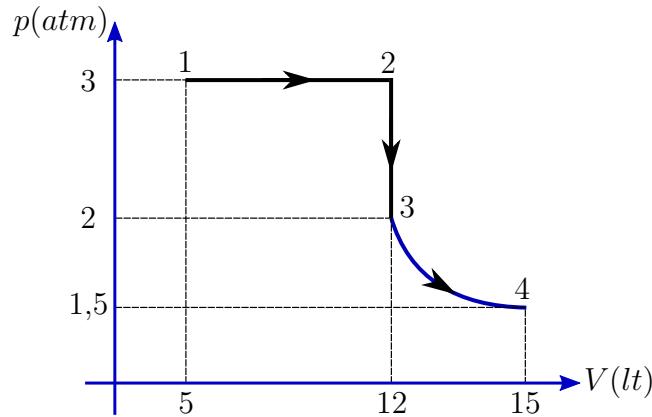


Figura 4.4: Esquema de la transformación del ejercicio 11

a) $\mathbf{W_{TOTAL}}$.

$$\begin{aligned} W_T &= W_{12} + \cancel{W_{23}}^0 + W_{34} = 3 \text{ atm} \times (12 \text{ lt} - 5 \text{ lt}) + \frac{1}{1-\gamma} \times (p_4 \cdot V_4 - p_3 \cdot V_3) \\ W_T &= 2127,3 \text{ J} + 370,6 \text{ J} = \mathbf{2497,9 \text{ J}} \end{aligned}$$

b) $\mathbf{\Delta U_{1-2}}$.

$$\Delta E_{int12} = Q_{12} - W_{12} = 1100 \text{ cal} \times \frac{4,186 \text{ J}}{\text{cal}} - 2127,3 \text{ J} = \mathbf{2477,3 \text{ J}}$$

c) $\mathbf{Q_{TOTAL}}$.

$$Q_T = Q_{12} + Q_{23} = Q_{12} + \Delta E_{int23} + \cancel{W_{23}}^0 = \mathbf{783,5 \text{ cal}}$$

d) $\mathbf{\Delta U_{TOTAL}}$

$$\Delta E_{intT} = \Delta E_{int12} + \Delta E_{int23} + \Delta E_{int34} = (Q_{12} - W_{12}) + \Delta E_{int23} + (\underbrace{Q_{34} - W_{34}}_{=0}) = \mathbf{781,6 \text{ J}}$$

Capítulo 5

2^{do} Principio de la Termodinámica

1. Una máquina térmica ideal de gas opera en un ciclo de Carnot (ver Fig. 5.1) entre los **227°C** y **127°C**. Absorbe **6x10⁴ cal** a la temperatura superior. ¿Qué cantidad de trabajo por ciclo es capaz de ejecutar esta máquina?

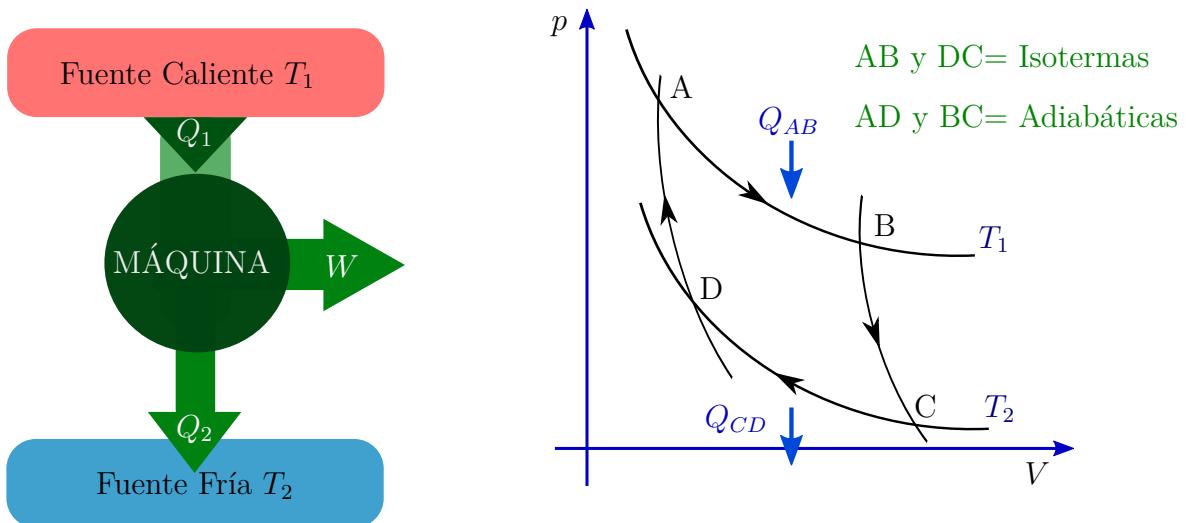


Figura 5.1: Ciclo de Carnot: Al calor de entrada se lo llama $Q_1 = Q_{AB}$ (a la temperatura T_1). El calor de salida (pérdida) está denotado por $Q_2 = Q_{CD}$ (T_2). El trabajo generado es W .

La Eficiencia e en un ciclo de Carnot está dada por:

$$e = \frac{W_{CICLO}}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \quad (5.1)$$

Despejando el trabajo del ciclo:

$$W_{CICLO} = 60 \times 10^3 \text{ eal} \times \frac{4,186 \text{ J}}{1 \text{ eal}} \times \frac{500,15 \text{ K} - 400,15 \text{ K}}{500,15 \text{ K}} = 50,3 \text{ kJ}$$

2. En un ciclo de Carnot la dilatación isotérmica del gas ocurre a **400 K** y la compresión isotérmica a **300 K**. Durante la dilatación se comunican **500 cal** de energía calorífica al gas. Determinar:

- a) **Trabajo efectuado por el gas durante la dilatación isotérmica ($W_1 = W_{AB}$).**
Por la Ec. (3.8) y sabiendo que la curva AB es una isotérmica:

$$Q_1 = \underbrace{\Delta E_{intAB}}_{=0} + W_{AB} \rightarrow W_{AB} = Q_1 = 2093 \text{ J}$$

Como no hay variación de temperatura, no hay variación de Energía interna.

- b) **Cantidad de calor expulsado por el gas durante la compresión isotérmica.**
Observando la Fig. 5.1 se concluye que el $W_{CICLO} = Q_1 - Q_2$ (la diferencia de calores) y trabajando con la Ec. (5.1):

$$W_{CICLO} = Q_1 - Q_2 = Q_1 \times \frac{T_1 - T_2}{T_1} \rightarrow Q_2 = Q_1 - Q_1 \times \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 375 \text{ cal}$$

- c) **Trabajo efectuado sobre el gas durante la compresión isotérmica ($W_2 = W_{CD}$).**
Procediendo en forma similar al punto (a):

$$Q_2 = \underbrace{\Delta E_{intCD}}_{=0} + W_{CD} \rightarrow W_{CD} = Q_1 = 1569,75 \text{ J}$$

3. En un refrigerador mecánico de Carnot (ver Fig. 5.2) los serpentines de baja temperatura se encuentran a -13°C y el gas comprimido en el condensador alcanza una temperatura de 27°C . Calcular el coeficiente de rendimiento.

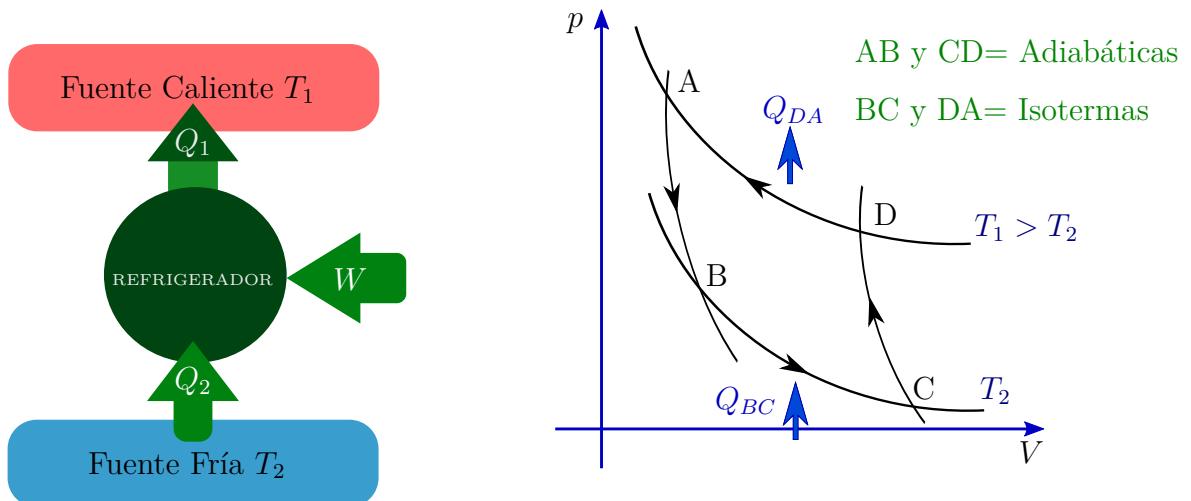


Figura 5.2: Ciclo de Refrigeración Carnot.

El Rendimiento η de un refrigerador está dado por:

$$\eta = \frac{Q_{BC}}{|W_{CICLO}|} = \frac{T_2}{|T_2 - T_1|} \quad (5.2)$$

Aplicando la Ec. (5.2) al ejercicio:

$$\eta = \frac{T_2}{|T_2 - T_1|} = \frac{260,15 \text{ K}}{|260,15 \text{ K} - 300,15 \text{ K}|} = 6,5$$

4. Un motor de Carnot cuyo depósito frío está a 7°C tiene una eficiencia $e = 40\%$; si se la desea aumentar al 50% . ¿Cuál será la temperatura del foco caliente en cada caso?

De la Ec. (5.1) se despeja la T_1 :

$$e = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \rightarrow T_1 = 466,92 \text{ K} \rightarrow 193,77^{\circ}\text{C}$$

Luego, para el caso de $e = 0,5$:

$$e = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \rightarrow T_1 = 287,15^{\circ}\text{C}$$

5. Una máquina frigorífica de Carnot debe tomar el calor de **100 kg** de agua que están a **0°C** , cediendo el calor a la habitación que se encuentra a **27°C** . Calcular:

- a) **¿Cuántas calorías son cedidas a la habitación?** Para obtener 100 kg de hielo a 0°C es necesario calcular cuántas calorías se producen en la transformación:

$$Q_f = L_f \times m_{H_2O} = 80 \frac{\text{cal}}{\text{gr}} * 100 \times 10^3 \text{ gr} = 8 \times 10^6 \text{ cal} = Q_{BC}$$

En un ciclo de refrigeración se cumple (ver Fig. 5.2):

$$|W_{CICLO}| = Q_{DA} - Q_{BC} \rightarrow Q_{DA} = Q_{BC} + Q_{BC} \times \frac{|T_2 - T_1|}{T_2} = 8791 \text{ kcal}$$

- b) **¿Qué trabajo se requiere?** Se tiene:

$$W_{CICLO} = Q_{BC} \times \frac{|T_2 - T_1|}{T_2} = 3,31 \times 10^6 \text{ J}$$

- c) **¿Qué potencia deberá entregar el motor de la máquina si el trabajo lo realiza en 5 horas?** Con la Ec. (2.4):

$$P = \frac{W_{CICLO}}{\Delta t} = \frac{3,31 \times 10^6 \text{ J}}{18 \times 10^3 \text{ s}} = 183,89 \text{ W}$$

Siendo **1 kgm $\rightarrow 9,81 \text{ J}$** se obtiene **P = 18,76 kgm/s**

Siendo **1 W $\rightarrow 1,36 \times 10^{-3} \text{ CV}$** se obtiene **P = 0,25 CV**

6. Una de las máquinas más eficientes que jamás se ha construido opera entre **430°C** y **1870°C** . Su eficiencia actual es de **42%**. Calcular:

- a) **¿Cuál es su eficiencia teórica máxima?** Mediante Ec. (5.1):

$$e = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 0,672 \rightarrow e_{teórica} = 67,2\%$$

- b) **¿Cuál es su potencia de salida si absorbe $1,4 \times 10^5 \text{ J}$ de energía calorífica cada segundo?** Dada la Ec. (2.4):

$$P = \frac{W_{CICLO}}{\Delta t} = \frac{Q_{AB} \times e}{1s} = \frac{1,4 \times 10^5 \text{ J} \times 0,42}{1s} = 58,8 \text{ kW}$$

Capítulo 6

Carga Eléctrica y Campo Eléctrico

- Una carga $q_1 = 1,3 \mu\text{C}$ se coloca sobre el eje x en la posición $x = -0,5 \text{ m}$; otra carga $q_2 = 3,2 \mu\text{C}$ se coloca sobre el eje y en $y = 1,5 \text{ m}$ y una $q_3 = 2,5 \mu\text{C}$ se posiciona en el origen del sistema de coordenadas (ver Fig. 6.1, izquierda). Calcular la fuerza neta sobre q_3 .

En la Fig. 6.1 (derecha) se puede ver un esquema de las fuerzas aplicadas sobre q_3 :

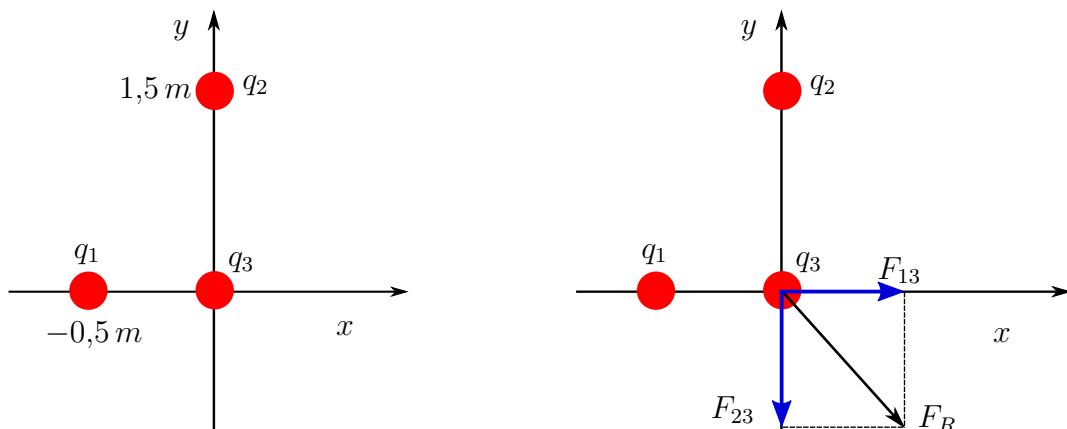


Figura 6.1: Esquema del ejercicio 1

La Ley de Coulomb utilizada para calcular la magnitud de la fuerza eléctrica expresa:

$$|F| = k \times \frac{|q_1 \times q_2|}{r^2}, \quad k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \quad (6.1)$$

Se aplica esta ecuación para calcular los módulos de las fuerzas F_{13} y F_{23} :

$$|F_{13}| = |F_{31}| = 9 \times 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} * \frac{1,3 \times 10^{-6} \text{C} * 2,5 \times 10^{-6} \text{C}}{(0,5 \text{ m})^2} = 0,117 \text{ [N]}$$

$$|F_{23}| = |F_{32}| = 0,032 \text{ [N]}$$

De acuerdo a la referencia de la Fig. 6.1 la fuerza resultante es: $(0,117 \hat{i} - 0,032 \hat{j}) \text{ [N]}$

- TAREA** Tres cargas puntuales de $2 \mu\text{C}$, $7 \mu\text{C}$ y $-4 \mu\text{C}$ se colocan en los vértices de un triángulo equilátero como se indica en la Fig. 6.2. Calcular la fuerza eléctrica neta sobre la carga de $7 \mu\text{C}$.

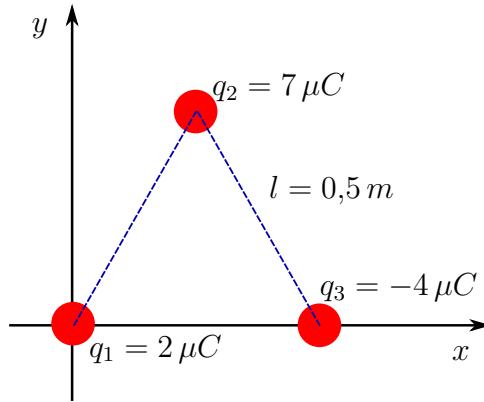


Figura 6.2: Esquema del ejercicio 2

3. Calcular el valor de la carga \mathbf{q}_4 para que el vector resultante de fuerzas sobre la carga \mathbf{q}_1 sea igual al vector nulo (ver Fig. 6.3, izquierda). $\mathbf{q}_1 = 2 \mu\text{C}$, $\mathbf{q}_2 = \mathbf{q}_3 = -3 \mu\text{C}$ y $\theta = 30^\circ$.

Se seguirá el esquema de solución de la Fig. 6.3, derecha. Con la Ec. (6.1) se calcula:

$$|F_{21}| = |F_{31}| = 9 \times 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \times \frac{3 \times 10^{-6}\text{C} * 2 \times 10^{-6}\text{C}}{(0,1\text{ m})^2} = 5,4 \text{ [N]}$$

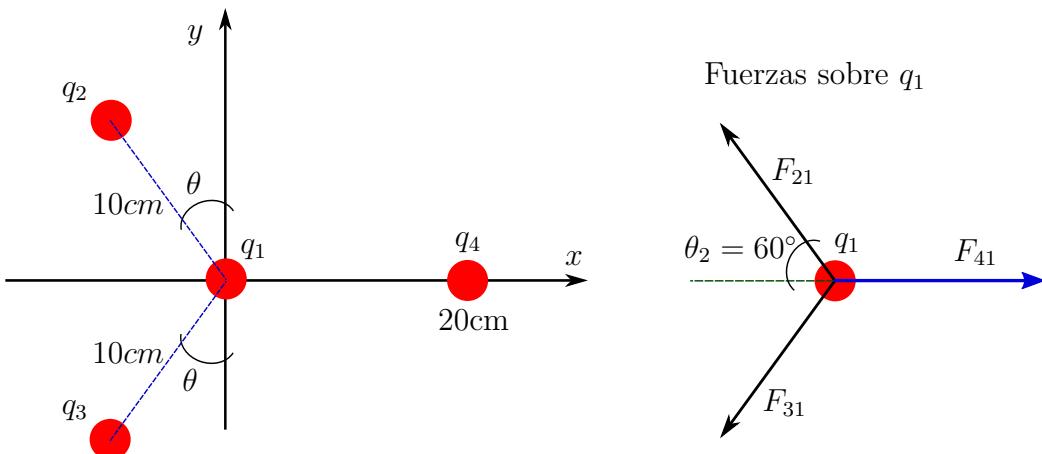


Figura 6.3: Esquema del ejercicio 3

Y de acuerdo a la disposición de las fuerzas:

$$\sum F_x = F_{41} - (F_{21} \times \cos 60^\circ) \times 2 = 0 \rightarrow \mathbf{F}_{41} = 5,4 \text{ [N]}$$

Finalmente:

$$F_{41} = k \times \frac{|q_4 \times q_1|}{r^2} \rightarrow q_4 = 12 \mu\text{C} \quad \rightarrow \mathbf{q}_4 = -12 \mu\text{C}$$

IMPORTANTE: La carga tiene que ser negativa para que se cumpla el equilibrio de fuerzas.

4. Tres cargas puntuales están alineadas sobre el eje y . Una carga $\mathbf{q}_1 = -9 \mu\text{C}$ está en $y = 6 \text{ cm}$ y una carga $\mathbf{q}_2 = -8 \mu\text{C}$ está en $y = -4 \text{ cm}$ (Fig. 6.4 izquierda). ¿Dónde debe ser colocada la tercera carga q_3 para que la fuerza sobre ésta sea cero?

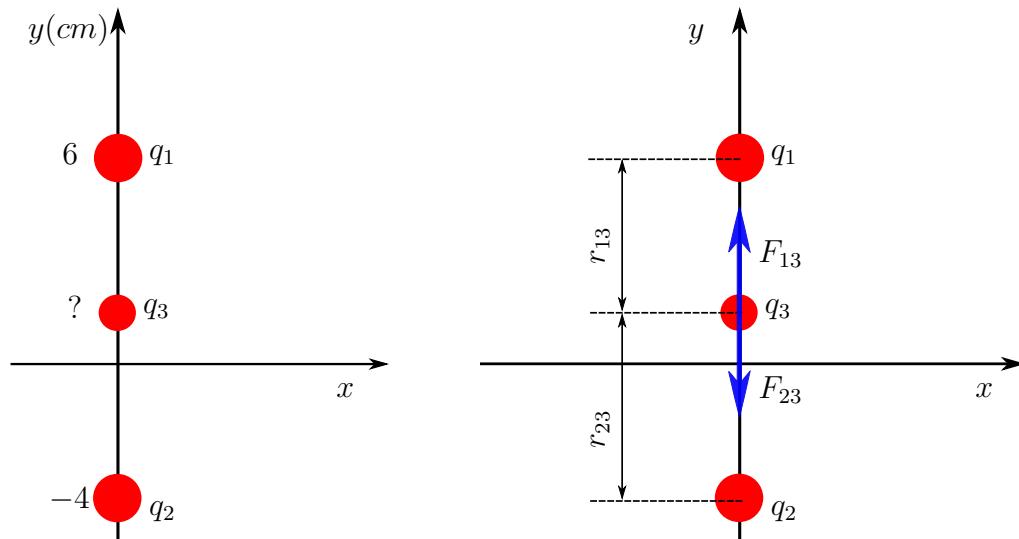


Figura 6.4: Esquema del ejercicio 4

Se presenta la situación de la Fig. 6.4 (derecha), por lo cual, en q_3 se cumple $|F_{13}| = |F_{23}|$:

$$\kappa \times \frac{|q_1 \times q_3|}{r_{13}^2} = \kappa \times \frac{|q_2 \times q_3|}{r_{23}^2}$$

$$\frac{|q_1|}{r_{13}^2} = \frac{|q_2|}{r_{23}^2}, \quad \text{siendo } r_{13} + r_{23} = 10 \text{ cm}$$

Despejando r_{13} :

$$r_{13} = \frac{10 \text{ cm}}{1 + \sqrt{q_2/q_1}} = 5,15 \text{ cm} \text{ desde } q_1$$

5. Dos esferas de radios y pesos iguales están suspendidas de dos hilos de tal manera que sus superficies se tocan. Después de comunicarles una carga de $q = 0,4 \mu\text{C}$ se han repelido y distanciado formando los hilos un ángulo de 60° . Hallar el peso de las esferas si la distancia desde la suspensión hasta el centro de la esfera es igual a **20 cm**. Ver Fig. 6.5, izquierda.

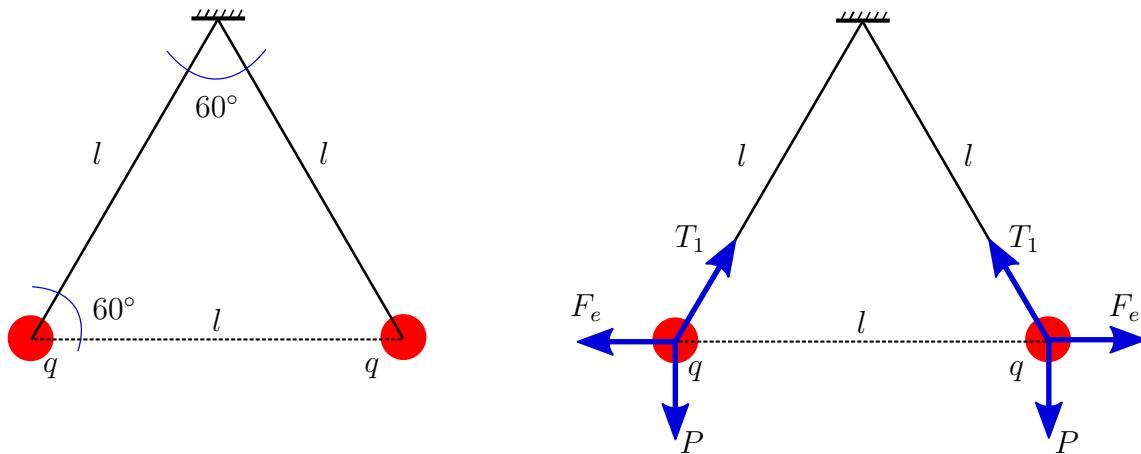


Figura 6.5: Esquema del ejercicio 5

Las fuerzas actuantes se muestran en la Fig. 6.5, derecha. La fuerza eléctrica “ F_e ” es:

$$F_e = k \times \frac{|q \times q|}{l^2} = k \times \frac{q^2}{l^2}$$

Como las fuerzas quedan equilibradas se cumple:

$$F_e = T_1 \times \cos 60^\circ \rightarrow T_1 = k \cdot \frac{q^2}{\cos 60^\circ \times l^2} = 0,072 [N]$$

$$P = T_1 \times \sin 60^\circ = \mathbf{0,062 [N]}$$

6. Una carga puntual $\mathbf{q} = -5,2 \mu\text{C}$ se coloca en el origen (ver Fig. 6.6, izquierda). Determinar el campo eléctrico:

- a) p_1 , sobre el eje x en $\mathbf{x} = 3 \text{ m}$
- b) p_2 , sobre el eje y en $\mathbf{y} = -4 \text{ m}$
- c) p_3 , en coordenadas $(2, 2) \text{ m}$

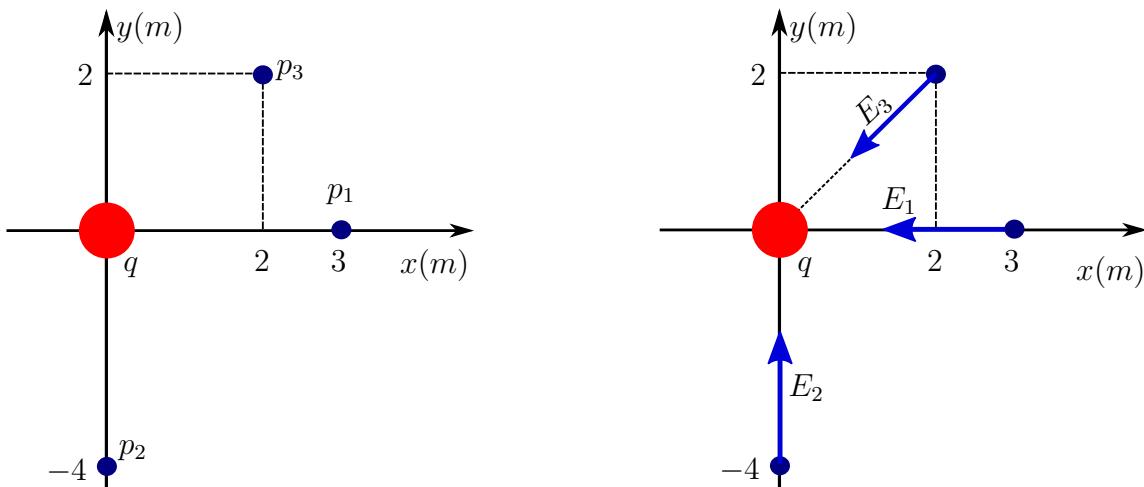


Figura 6.6: Esquema del ejercicio 6

Para calcular la magnitud del campo eléctrico se utiliza la siguiente ecuación:

$$E = k \times \frac{|q|}{r^2} \quad (6.2)$$

Con esta ecuación se calculan los módulos de E en cada punto:

$$E_1 = 9 \times 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \times \frac{|-5,2 \mu\text{C}|}{(3\text{m})^2} = \mathbf{5200 \frac{N}{C}}$$

$$E_2 = 9 \times 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \times \frac{|-5,2 \mu\text{C}|}{(4\text{m})^2} = \mathbf{2925 \frac{N}{C}}$$

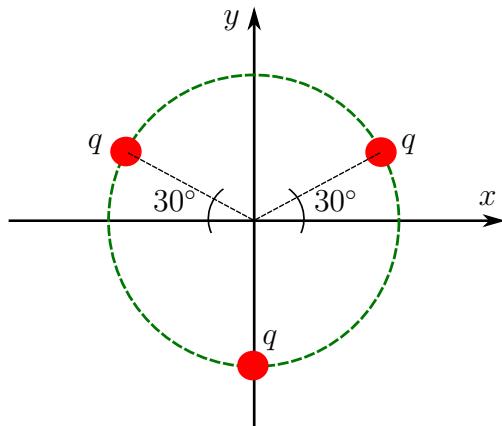
$$E_3 = 9 \times 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \times \frac{|-5,2 \mu\text{C}|}{(\sqrt{8}\text{m})^2} = \mathbf{5850 \frac{N}{C}}$$

De acuerdo a la Fig. 6.6 (derecha) se pueden obtener las direcciones del campo eléctrico para cada caso:

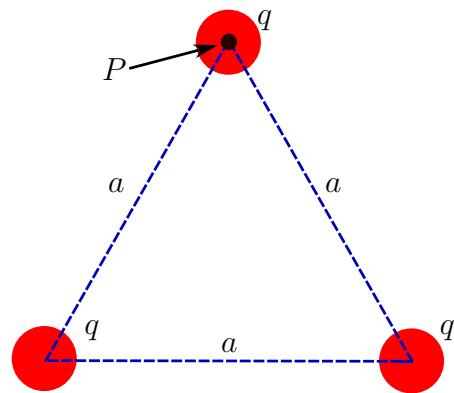
$$E_1 = \left(-5200 \frac{\text{N}}{\text{C}}\right) \hat{\mathbf{i}} \quad E_2 = \left(2925 \frac{\text{N}}{\text{C}}\right) \hat{\mathbf{j}} \quad E_3 = 5850 \frac{\text{N}}{\text{C}} \text{ } [225^\circ]$$

7. **TAREA** Tres cargas puntuales idénticas de $-5 \mu\text{C}$ se localizan a lo largo de un círculo de $r = 2 \text{ m}$ a ángulos de 30° , 150° y 270° , según se indica en la Fig. 6.7a. Determinar el campo eléctrico resultante en el centro del círculo.

$$\mathbf{R}: \mathbf{E} = (0\hat{\mathbf{i}} + 0\hat{\mathbf{j}}) \text{ N/C}$$



(a) Esquema del ejercicio 7



(b) Esquema del ejercicio 8

Figura 6.7: Esquemas.

8. **TAREA** Tres cargas positivas iguales \mathbf{q} están en las esquinas de un triángulo equilátero como muestra la Fig 6.7b. Calcular:

- Magnitud del campo eléctrico en el centro del triángulo. $\mathbf{R}: \mathbf{E} = (0\hat{\mathbf{i}} + 0\hat{\mathbf{j}}) \text{ N/C}$
- Magnitud y sentido del campo eléctrico en el punto \mathbf{P} debido a las cargas de la base del triángulo. $\mathbf{R}: \mathbf{E} = \sqrt{3} \cdot \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}}{a^2} \hat{\mathbf{j}}$

9. Una carga $\mathbf{q}_1 = -4 \mu\text{C}$ está colocada en el origen y una carga $\mathbf{q}_2 = -5 \mu\text{C}$ está colocada a lo largo del eje y en $y = 2 \text{ m}$, tal como muestra la Fig. 6.8 (izquierda). Calcular en qué punto a lo largo del eje y el campo eléctrico es cero.

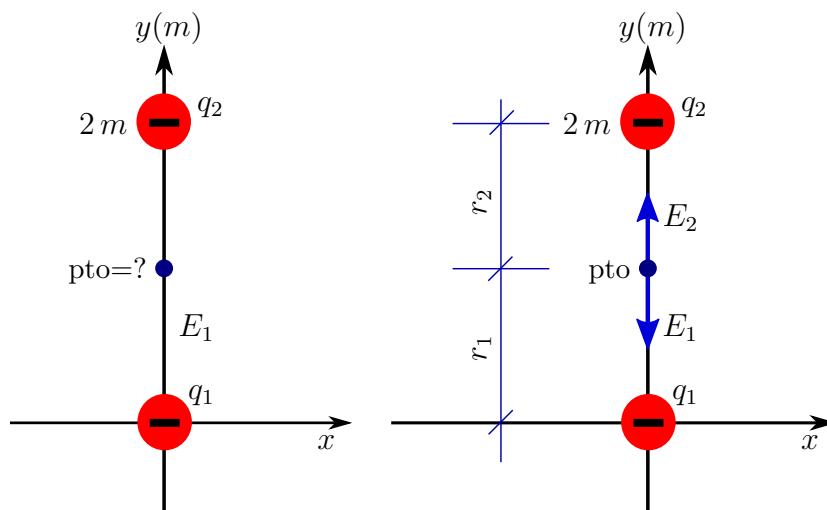


Figura 6.8: Esquema del ejercicio 9

El esquema de solución se muestra en la Fig. 6.8, derecha. Utilizando la Ec. (6.2) y sabiendo que $|E_1| - |E_2| = 0$ en el punto (**punto**):

$$\begin{aligned} |E_1| - |E_2| &= k \times \frac{|q_1|}{r_1^2} - k \times \frac{|q_2|}{r_2^2} = 0 \\ k \times \frac{|q_1|}{r_1^2} &= k \times \frac{|q_2|}{r_2^2} \quad \text{con } (r_1 + r_2) = 2m \\ \frac{|q_1|}{r_1^2} &= \frac{|q_2|}{(2m - r_1)^2} \rightarrow r_1 = \frac{2m}{\sqrt{|q_2|/|q_1| + 1}} = 0,944 \text{ m} \end{aligned}$$

10. Un objeto que tiene una carga neta de **24 μC** se coloca en un campo eléctrico uniforme de **610 N/C** dirigido verticalmente (ver Fig. 6.9). Calcular la masa del objeto si está flotando en el campo eléctrico.

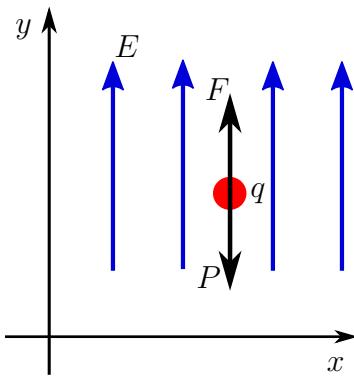


Figura 6.9: Esquema del ejercicio 10

La Fuerza eléctrica se puede calcular de la siguiente manera:

$$|F| = q \times |E| \quad (6.3)$$

Planteando el equilibrio que se produce entre el peso y la fuerza:

$$\begin{aligned} |F| - |P| &= 0 \\ |P| &= m \times g = q \times |E| \rightarrow m = \frac{q \times |E|}{g} = 1,5 \text{ gr} \end{aligned}$$

11. **TAREA** La fuerza eléctrica sobre una carga puntual neta de **4 μC** en algún punto es **6,9x10⁻⁴ N** en la dirección **x** positiva. Calcular el módulo del campo eléctrico en ese punto. **R = 172,5 N/C**

12. Un péndulo cuya esfera posee una masa de **2 gr**, se halla en un campo eléctrico horizontal de **5000 N/C**. En estado de equilibrio el péndulo forma un ángulo de **25°** con la vertical (ver Fig. 6.10, izquierda). ¿Cuál es la carga que tiene la esfera del péndulo?

El sistema se encuentra en equilibrio. Las fuerzas en juego se muestran en la Fig. 6.10-derecha, se infiere:

$$\begin{aligned} T_1 \times \cos 25^\circ &= P \\ T_1 \times \sin 25^\circ &= |F_e| = |E| \times q \end{aligned}$$

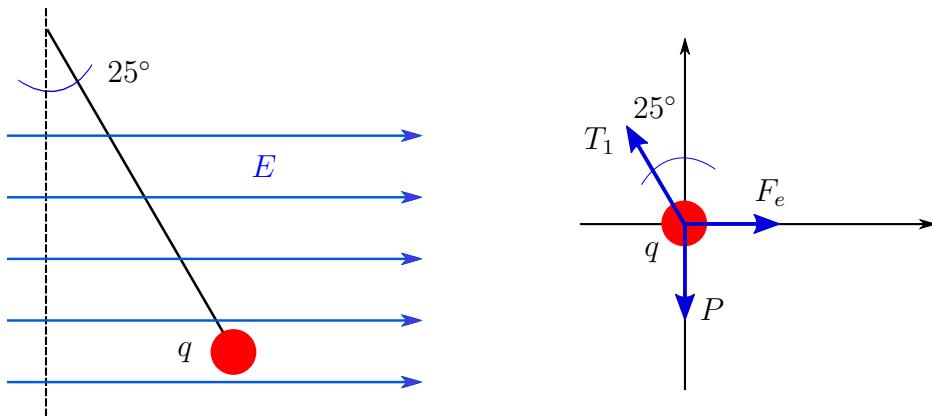


Figura 6.10: Esquema del ejercicio 12

Se puede despejar q en base a las dos ecuaciones:

$$q = \frac{T_1 \times \sin 25^\circ}{E} = \frac{P \times \sin 25^\circ}{E \times \cos 25^\circ} = \frac{m \times g \times \tan 25^\circ}{E} = 1,82 \mu\text{C}$$

13. El osciloscopio de rayos catódicos opera con el siguiente principio: un electrón con carga e^- y masa m_e se lanza con una velocidad v_0 en ángulo recto al campo eléctrico y sufre una deflexión según se indica en Fig. 6.11-B. Una pantalla se coloca a una distancia L de las placas cargadas. Considere E constante y uniforme entre placas y nulo fuera de ellas. Ignorando los efectos de la gravedad demuestre que la ecuación de la trayectoria seguida por el electrón dentro del campo está dada por:

$$y(x) = \frac{1}{2} \times \frac{e^- \times E}{m_e \times v_0^2} \times x^2$$

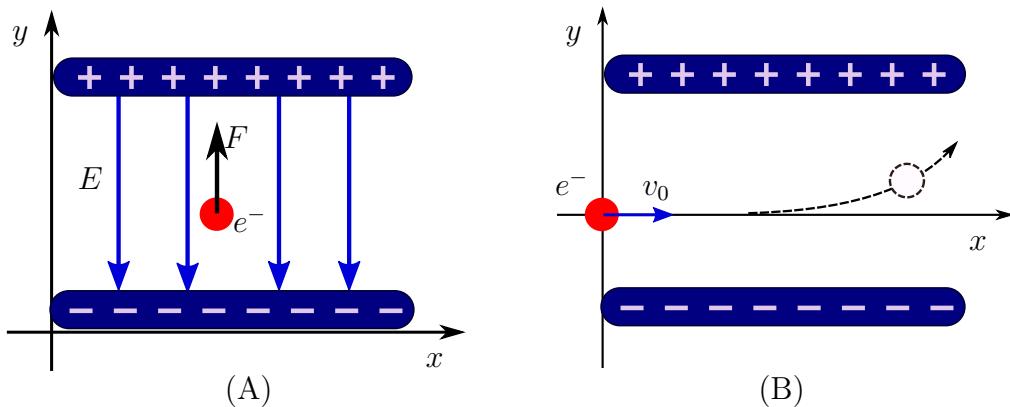


Figura 6.11: Esquema del ejercicio 13

La fuerza F de la Fig. 6.11A está dada por la Ec. (6.3):

$$F = e^- \times E$$

La aceleración en el eje "y" del e^- está descrita por la 2^{da} Ley de Newton:

$$a_y = \frac{F}{m_e} = \frac{e^- \times E}{m_e}, \quad m_e = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$$

En el punto $(0, 0)$, para tiempo $t=0$, la velocidad inicial para cada eje es:

$$\begin{aligned} v_{0x} &= v_0 \\ v_{0y} &= 0 \end{aligned}$$

Los desplazamientos en ambos ejes están definidos por las siguientes ecuaciones cinemáticas:

$$\begin{aligned} x &= v_{0x} \times t = v_0 \cdot t \\ y &= \underbrace{y_0}_{=0} + \underbrace{V_{0y} \times t}_{=0} + \frac{1}{2} \times a_y \times t^2 = \frac{1}{2} \cdot a_y \cdot t^2 \end{aligned}$$

Reemplazando el valor de a_y y con $t = x/v_0$:

$$y = \frac{1}{2} \times \frac{e^- \times E}{m_e \times v_0^2} \times x^2 \quad (6.4)$$

14. Un electrón se dispara paralelamente a un campo eléctrico de 10^3 N/C con una velocidad de $5 \times 10^6 \text{ m/s}$ y de modo tal que vaya disminuyendo su velocidad hasta detenerse (Fig. 6.12). Calcular:

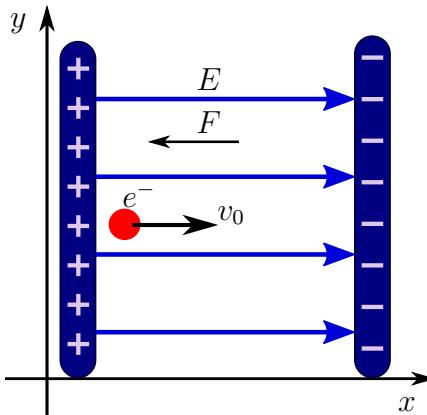


Figura 6.12: Esquema del ejercicio 14

- a) ¿Cuántos metros avanzará el electrón en el campo antes de quedar momentáneamente en reposo? En primer lugar hay que calcular la fuerza que se opone al movimiento del electrón y luego su desaceleración:

$$\begin{aligned} F &= e^- \times E = 1,6 \times 10^{-16} [\text{N}] \\ a &= -\frac{F}{m_e} = -1,75 \times 10^{14} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{aligned}$$

Ahora, aplicando cinemática, se calcula el desplazamiento x_f :

$$v_f^2 = v_0^2 + 2 \times a \times (x_f - x_i) \rightarrow x_f = \frac{-v_0^2}{2 \times a} = 0,071 \text{ m}$$

- b) ¿Cuánto tiempo transcurrirá?

$$v_f = v_0 + a \times t \rightarrow t = \frac{-v_0}{a} = 28,57 \text{ ns}$$

- c) Si el campo eléctrico termina bruscamente después de 0,8 cm, ¿qué fracción de su energía inicial pierde el electrón al atravesarlo? En primer lugar se debe calcular la velocidad final:

$$v_f^2 = v_0^2 + 2 \times a \times (x_f - x_i) = 4,71 \times 10^6 \text{ m/s}$$

Finalmente, la variación de Energía Cinética está dada por:

$$\Delta K = \frac{1}{2} \times m_e \times (v_f^2 - v_0^2) = -1,27 \times 10^{-18} \text{ J}$$

15. Un electrón es lanzado dentro de un campo eléctrico uniforme generado por dos placas planas paralelas de longitud **2cm** y separadas entre sí **1cm**. La velocidad de lanzamiento es **$v_0 = 10^7 \text{ m/s}$** . El campo está dirigido hacia abajo y existe solo en el espacio entre placas. El electrón ingresa por un punto equidistante de ambas placas. Determinar:

- a) La intensidad del campo eléctrico entre placas si el electrón abandona el espacio entre ellas por el borde derecho de la placa superior. De acuerdo a la Ec. (6.4), se obtiene E :

$$E = \frac{2 \times y \times m \times V_0^2}{e^- \times x^2} = \frac{2 * 0,005 \text{ m} * 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg} * (10^7 \text{ m/s})^2}{1,602 \times 10^{-19} \text{ C} * (0,02 \text{ m})^2} = 14,23 \times 10^3 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

- b) La densidad de carga de las placas. El campo eléctrico entre las láminas está dada por:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (6.5)$$

Despejando la densidad de carga superficial σ :

$$\sigma = \epsilon_0 \times E = 8,85 \times 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2} * 14,23 \times 10^3 \frac{\text{N}}{\text{C}} = 12,5 \times 10^{-8} \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$$

16. Una línea continua de carga se encuentra a lo largo del eje x , extendiéndose desde $x = +x_0$ hasta $x = +\infty$. La línea posee una densidad de carga lineal uniforme λ . ¿Cuál es el vector campo eléctrico en el origen de coordenadas?

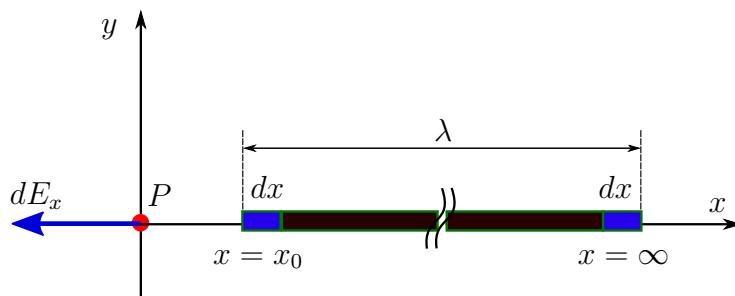


Figura 6.13: Esquema del ejercicio 16

La Fig. 6.13 muestra la línea de carga dividida en varios dx . Cada uno de estos diferenciales posee una carga dQ y generan un campo dE_x . Aparece solo la componente x del campo

porque la línea está posicionada sobre el eje en cuestión. Entonces, para cada diferencial se tiene:

$$dQ = \lambda \times dx$$

$$dE_x = -k \times \frac{dQ}{x^2} = -k \times \frac{\lambda \times dx}{x^2} \hat{i}$$

x es la distancia desde cada diferencial al origen. Para calcular el campo E_x debido a toda la línea se debe integrar desde $x = x_0$ a $x = \infty$:

$$E_x = \int_{x_0}^{\infty} -k \times \lambda \times \frac{dx}{x^2} \hat{i} = k \times \lambda \left[\frac{1}{\infty} - \frac{1}{x_0} \right] \hat{i} = -k \times \frac{\lambda}{x_0} \hat{i}$$

17. Calcular el ángulo que el hilo no conductor forma con la placa infinita cargada uniformemente con una densidad de carga $\sigma = 2,5 \times 10^{-9} \text{ C/m}^2$, cuando la esfera de $\mathbf{m} = 1 \times 10^{-3} \text{ kg}$ y carga $\mathbf{q} = 2 \times 10^{-8} \text{ C}$ está en equilibrio como se indica en la Fig. 6.14 (izquierda).

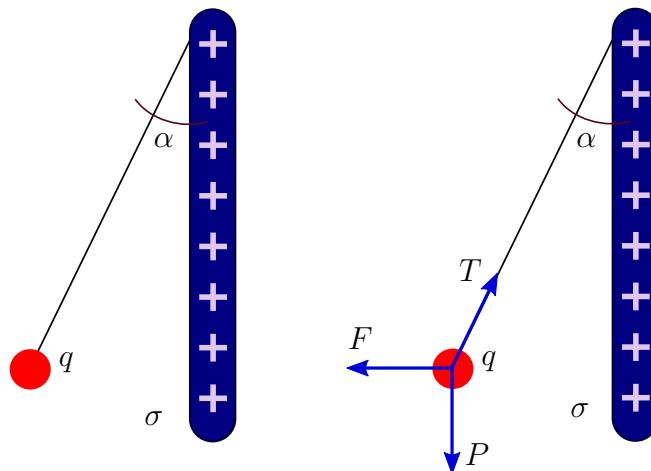


Figura 6.14: Esquema del ejercicio 17

El campo para la placa cargada está dado por:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (6.6)$$

Se calcula el campo de acuerdo a la Ec. (6.6), la fuerza mediante (6.3) y el peso con (2.5):

$$E = \frac{2,5 \times 10^{-9} \text{ C/m}^2}{2 * 8,85 \times 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N.m}^2}} = 141,18 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

$$F = q \times E = 2,82 \mu\text{N}$$

$$P = m \times g = 9,8 \times 10^{-3} \text{ N}$$

Ahora se plantean ecuaciones de equilibrio según la Fig. 6.14 (derecha):

$$P - T \times \cos \alpha = 0$$

$$F - T \times \sin \alpha = 0$$

Despejando α :

$$\frac{P}{\cos \alpha} = \frac{F}{\sin \alpha} \rightarrow \alpha = \operatorname{arctg} \frac{F}{P} = 0,016^\circ$$

18. Una línea de cargas positivas se distribuye en un semicírculo de radio $R = 60\text{ cm}$, como se observa en la Fig. 6.15 (izquierda). La carga por unidad de longitud a lo largo del semicírculo queda descrita por la expresión $\lambda = \lambda_0 \cos \theta$. La carga total del semicírculo es de $12\mu\text{C}$. Calcule la fuerza total sobre una carga de $3\mu\text{C}$ colocada en el centro de curvatura.

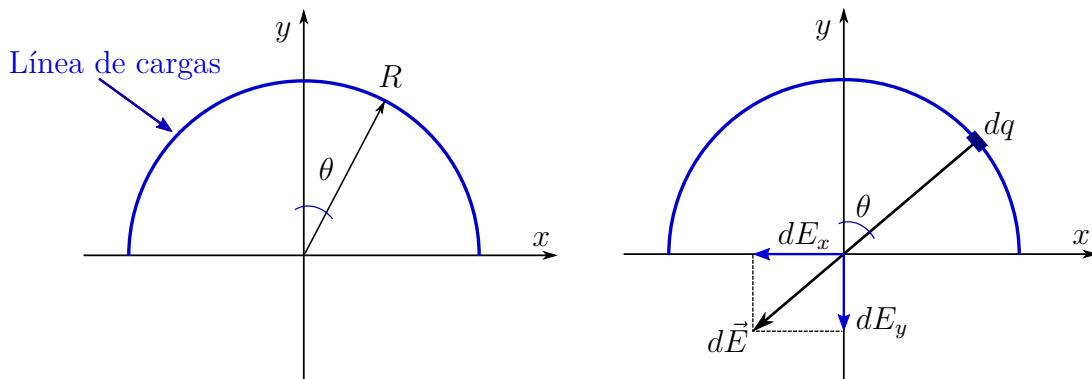


Figura 6.15: Esquema del ejercicio 18

Observar la Fig. 6.15 (derecha). Las componentes del campo eléctrico son:

$$\begin{aligned} dE_x &= dE \times \sin \theta & dE_y &= dE \times \cos \theta \\ \int dE_x &= \int dE \times \sin \theta & \int dE_y &= \int dE \times \cos \theta \\ E_x &= \int dE \times \sin \theta & E_y &= \int dE \times \cos \theta \end{aligned}$$

Mientras que el diferencial de campo, según la Ec. (6.2), es:

$$dE = k \times \frac{dq}{r^2}$$

Cálculo de la componente dE_x :

$$E_x = \int_0^q k \times \frac{dq}{r^2} \sin \theta \quad (1)$$

Es necesario estudiar en profundidad el diferencial de carga dq para que quede en función de λ y del desplazamiento "l" a través del arco del semicírculo:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{q}{l} \rightarrow q = \lambda \times l \\ l &= R \times \theta & q &= \lambda \times (R \times \theta) \end{aligned}$$

Se toma el diferencial respecto al ángulo y luego se reemplaza por la expresión de la densidad $\lambda = \lambda_0 \cos \theta$:

$$\begin{aligned} dq &= \lambda \times (R \times d\theta) \\ dq &= \lambda_0 \times \cos \theta \times (R \times d\theta) \end{aligned}$$

Se reemplaza dq en (1) haciendo $r = R$:

$$\begin{aligned} E_x &= \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} k \times \frac{\lambda_0 \times R \times \cos \theta \times d\theta}{R^2} \sin \theta \\ E_x &= \frac{k \times \lambda_0}{R} \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \cos \theta \times \sin \theta \times d\theta \\ E_x &= \frac{k \times \lambda_0}{R} \times \left[-\frac{1}{2} \cos^2 \theta \right]_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Cálculo de la componente dE_y :

$$\begin{aligned} E_y &= \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} k \times \frac{\lambda_0 \times R \times \cos \theta \times d\theta}{R^2} \cos \theta \\ E_y &= \frac{k \times \lambda_0}{R} \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \cos^2 \theta \times d\theta \\ E_y &= \frac{k \times \lambda_0}{R} \times \left[\frac{1}{2} \theta + \frac{1}{4} \times \sin(2\theta) \right]_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \\ \mathbf{E}_y &= \frac{\pi \times \mathbf{k} \times \lambda_0}{2 \times \mathbf{R}} \end{aligned}$$

Cálculo de λ_0 :

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^L \lambda(l) \times dl \\ \text{con } l &= R \times \theta \rightarrow dl = R \times d\theta \\ Q &= \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \lambda_0 \times \cos \theta \times (R \times d\theta) = \lambda_0 \times R \times \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \cos \theta \times d\theta \\ Q &= \lambda_0 \times R \times [\sin \theta]_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} = 2 \times \lambda_0 \times \mathbf{R} \end{aligned}$$

Cálculo del campo eléctrico:

$$\begin{aligned} E_y &= \frac{\pi \times k \times \lambda_0}{2 \times R} \\ E_y &= \frac{\pi \times k \times \frac{Q}{2R}}{2 \times R} = \frac{\pi \times k \times Q}{4 \times R^2} \end{aligned}$$

Dada la posición del campo dE_y mostrado en al Fig. 6.15 (derecha):

$$E_y = -\frac{\pi \times k \times Q}{4 \times R^2} \hat{j}$$

Finalmente, la fuerza está dada por:

$$\begin{aligned} F &= q \times E_y \\ F &= -\frac{3 \mu C \times \pi \times k \times 12 \mu C}{4 \times (0,6 m)^2} \hat{j} = -0,707 [N] \hat{j} \end{aligned}$$

19. Calcular el flujo eléctrico a través de la superficie \mathbf{S} en los casos **A**, **B**, **C** mostrados en la Fig. 6.16. Considerese: $\mathbf{E} = 500 \text{ N/C}$ y $\mathbf{S} = 100 \text{ cm}^2$.

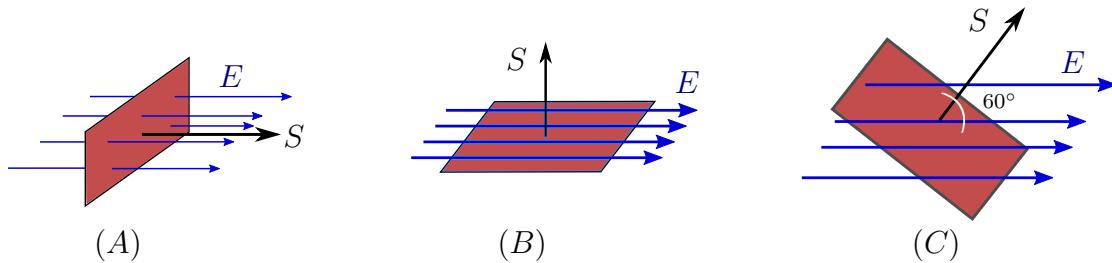


Figura 6.16: Esquema del ejercicio 19

El flujo eléctrico se calcula mediante:

$$\Phi_E = E \cdot A = E \times A \times \cos \phi \quad (6.7)$$

Cálculo de los diferentes casos:

$$(A) \quad \Phi_{E_A} = 500 \text{ N/C} * 100 \times 10^{-4} \text{ m}^2 * \cos 0^\circ = 5 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}}$$

$$(B) \quad \Phi_{E_B} = 500 \text{ N/C} * 100 \times 10^{-4} \text{ m}^2 * \cos 90^\circ = 0$$

$$(C) \quad \Phi_{E_C} = 500 \text{ N/C} * 100 \times 10^{-4} \text{ m}^2 * \cos 60^\circ = 2,5 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}}$$

20. Calcular el valor de la integral de Gauss a través de las superficies gaussianas que se muestran en la Fig. 6.17.

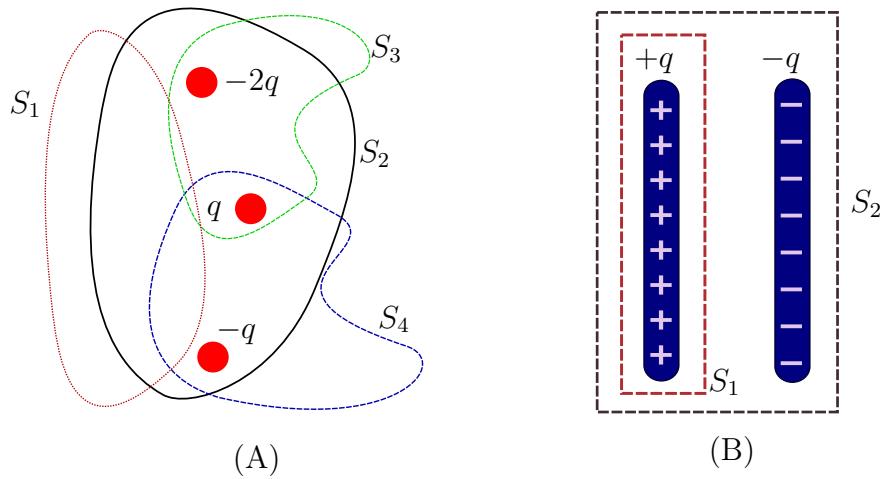


Figura 6.17: Esquema del ejercicio 20

La ley de Gauss para el vacío expresa:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \quad (6.8)$$

Por lo tanto, para las diferentes superficies de \mathbf{A} se tiene:

$$\begin{aligned}\Phi_{S_1} &= \oint E \cdot dA = \frac{0}{\epsilon_0} = \mathbf{0} \\ \Phi_{S_2} &= \oint E \cdot dA = \frac{q - q - 2q}{\epsilon_0} = \frac{-2\mathbf{q}}{\epsilon_0} \\ \Phi_{S_3} &= \oint E \cdot dA = \frac{q - 2q}{\epsilon_0} = \frac{-\mathbf{q}}{\epsilon_0} \\ \Phi_{S_4} &= \oint E \cdot dA = \frac{q - q}{\epsilon_0} = \mathbf{0}\end{aligned}$$

Para \mathbf{B} :

$$\begin{aligned}\Phi_{S_1} &= \oint E \cdot dA = \frac{\mathbf{q}}{\epsilon_0} \\ \Phi_{S_2} &= \oint E \cdot dA = \frac{q - q}{\epsilon_0} = \mathbf{0}\end{aligned}$$

21. Se mide el campo eléctrico sobre cualquier punto en la superficie de una esfera hueca de $\mathbf{R} = 11 \text{ cm}$ y da por resultado $3,8 \times 10^4 \text{ N/C}$ apuntando radialmente hacia fuera desde el centro de la esfera. Calcular:

- a) **Flujo eléctrico a través de esa superficie.** *Como E es uniforme en toda la esfera el flujo está dado por:*

$$\Phi_E = \oint E \cdot dA = E \oint dA = E \times 4\pi r^2 = 3,8 \times 10^4 \text{ N/C} * 4\pi * 0,11 \text{ m} = 5778 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}}$$

- b) **Carga encerrada por esa superficie.** *Mediante la Ec. (6.8):*

$$\Phi_E = \oint E \cdot dA = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \rightarrow Q_{enc} = \epsilon_0 * 5778 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}} = 51 \text{ nC}$$

22. **TAREA** Una carga de $170 \mu\text{C}$ está en el centro de un cubo cuyos lados miden 80 cm .

- a) Encuentre el flujo eléctrico a través de cada cara del cubo. $\mathbf{R} = 3,2 \times 10^6 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}}$
 b) Encuentre el flujo eléctrico a través de toda la superficie del cubo. $\mathbf{R} : \Phi = \mathbf{q}/\epsilon_0$
 c) ¿Cambiarían las respuestas a) y b) si la carga no estuviera en el centro?

23. **TAREA** Se tiene una esfera no conductora de $\mathbf{R} = 10 \text{ cm}$, en cuyo interior se encuentra homogéneamente distribuida en todo su volumen una carga cuyo valor total es $1000 \mu\text{C}$. Aplicando Gauss, hallar la ley de variación del campo eléctrico E en función de la distancia al centro de la esfera.

$$\mathbf{R} : \mathbf{E}_{int} = 8,99 \times 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m.C}} \mathbf{r} \hat{\mathbf{r}} \text{ y } \mathbf{E}_{ext} = 8,99 \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}} \frac{1}{\mathbf{r}^2} \hat{\mathbf{r}}$$

24. **TAREA** Considere dos planos conductores infinitos, paralelos, con densidades superficiales de carga σ y $-\sigma$ en sus caras internas. Utilice la ley de Gauss para determinar el campo eléctrico en todo el espacio.

R: $\mathbf{E} = \sigma/\epsilon_0$ (entre las placas), $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ (en el resto del espacio)

25. Una esfera conductora sólida de radio \mathbf{a} tiene una carga neta positiva $2\mathbf{Q}$ (ver Fig. 6.18). Un cascarón conductor esférico de radio interno \mathbf{b} y radio externo \mathbf{c} es concéntrico con la esfera sólida y tiene una carga neta $-\mathbf{Q}$. Utilizando la ley de Gauss, determinar el campo eléctrico en las regiones (1), (2), (3) y (4) y la distribución de carga sobre el cascarón esférico.

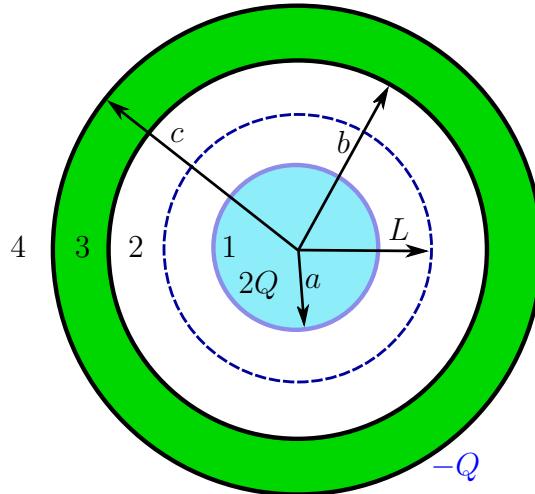


Figura 6.18: Esquema del ejercicio 25

Aplicando ley de Gauss en la **región 1** donde ($L < a$) no hay carga encerrada:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{0}{\epsilon_0} \rightarrow \mathbf{E} = \mathbf{0}$$

En la **región 2** donde ($a < L < b$) queda encerrada la esfera conductora:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{2Q}{\epsilon_0} \rightarrow \mathbf{E} = k \frac{2\mathbf{Q}}{\mathbf{L}^2}$$

En la **región 3** donde ($b < L < c$) se cumple que la superficie gaussiana encierra una carga del cascarón cuyo valor corresponde a $-2\mathbf{Q}$ (debido a la inducción de cargas en el cascarón de radio b), y a la vez la esfera conductora, por lo cual:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{2Q - 2Q}{\epsilon_0} \rightarrow \mathbf{E} = \mathbf{0}$$

La **región 4** donde ($c < L$):

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{2Q - Q}{\epsilon_0} \rightarrow \mathbf{E} = k \frac{\mathbf{Q}}{\mathbf{L}^2}$$

Capítulo 7

Trabajo y Energía Potencial Electrostática

1. El trabajo realizado para mover la unidad de carga entre dos puntos de un campo eléctrico es independiente de la trayectoria seguida entre los puntos. Calcular el trabajo para mover una carga de 2×10^{-4} C desde el punto **a** al **d**, sabiendo que $\mathbf{E} = 400 \text{ N/C}$ (ver Fig. 7.1).
 - a) Por la trayectoria *ad*.
 - b) Por la trayectoria *abcd*.

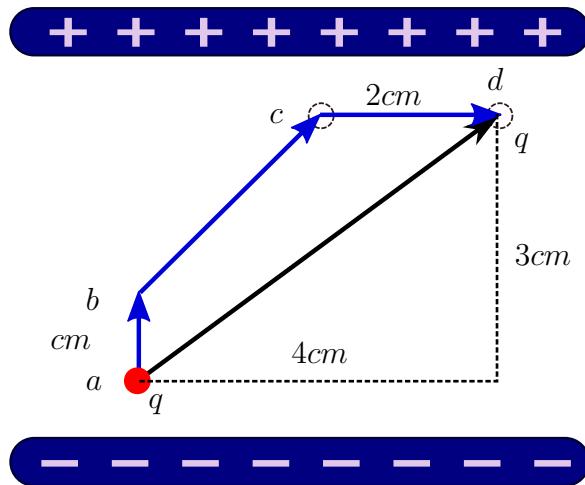


Figura 7.1: Esquema del ejercicio 1

Considerando que \mathbf{E} es uniforme, actúa una fuerza eléctrica conservativa sobre la carga y el trabajo depende sólo del desplazamiento paralelo al campo con una distancia operativa de (3cm). El trabajo está definido por la integral de línea del producto escalar $F_e \cdot dl$:

$$W = \int_a^b \mathbf{F}_e \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b (q \times \mathbf{E}) \times d\mathbf{l} \times \cos\theta \quad (7.1)$$

Dada esta integral, el trabajo realizado se puede entender desde dos puntos de vista:

- a) Trabajo realizado por fuerza externa:

$$W = \int_a^d q \cdot \mathbf{E} \times d\mathbf{l} \times \cos 0^\circ = q \cdot \mathbf{E} \times d = 2 \times 10^{-4} \text{ C} * 400 \frac{\text{N}}{\text{C}} * 0,03 \text{ m} = 2,4 \text{ mJ}$$

b) Trabajo realizado por el campo:

$$W = \int_a^d q.E \times dl \times \cos 180^\circ = -q.E \times d = -2 \times 10^{-4} C * 400 \frac{N}{C} * 0,03m = -\mathbf{2,4 \text{ mJ}}$$

2. El campo eléctrico entre dos placas paralelas separadas por una distancia $\mathbf{d = 1,8 \text{ cm}}$ tiene un valor uniforme de $\mathbf{2,4 \times 10^4 \text{ N/C}}$. Calcular la diferencia de potencial entre las placas.

La diferencia de potencial entre las dos placas está definida por la siguiente integral de línea:

$$\Delta V = V_a - V_b = \int_a^b E \cdot dl \quad (7.2)$$

Suponiendo que una carga de prueba positiva ($+q_0$) se mueve desde la placa positiva a la negativa, en un desplazamiento en dirección al campo se cumple:

$$\Delta V = \int_a^b E \cdot dl = E \times d \times \cos 0^\circ = 2,4 \times 10^4 \frac{N}{C} * 0,018m = \mathbf{432 \text{ V}}$$

El signo (+) indica que el potencial en la placa (-) es menor. Ya que la carga $+q_0$ se mueve de la placa (+) a la (-), se va de un potencial mayor (a) a uno menor (b).

3. Una placa metálica infinita tiene una densidad superficial de carga uniforme de $\mathbf{3 \text{ nC/m}^2}$. ¿A qué distancia de la placa se encuentran los planos equipotenciales cuyo potencial difiere en $\mathbf{6 \text{ V}}$ respecto al de la placa?

El campo eléctrico para una placa de superficie infinita se calcula mediante:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (7.3)$$

Se calcula E para luego obtener la distancia del plano equipotencial:

$$E = \frac{3 \text{ nC/m}^2}{2 * 8,85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{N.m^2}} = \mathbf{169,5 \frac{N}{C}}$$

$$d = \frac{V}{E} = \frac{6 \text{ V}}{169,5 \frac{N}{C}} = \mathbf{0,035 \text{ m}}$$

4. Dos cargas $\mathbf{q_1 = 3 \mu C}$ y $\mathbf{q_2 = -5 \mu C}$, están separadas por una distancia de $\mathbf{4 \text{ cm}}$. Calcular:

- a) **El potencial absoluto en el punto situado a la mitad de la distancia entre ellas. El potencial debido a un conjunto de cargas está dado por:**

$$V = k \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i} \quad (7.4)$$

La ecuación anterior corresponde a una suma algebraica donde importan los signos de las cargas:

$$V = 9 \times 10^9 \frac{N.m^2}{C^2} \left(\frac{3 \mu C}{0,02 \text{ m}} - \frac{5 \mu C}{0,02 \text{ m}} \right) = \mathbf{-900 \text{ kV}}$$

b) ¿En qué punto entre ellas el potencial es nulo? Haciendo el potencial igual a 0 se obtiene esta distancia:

$$0 = k \times \left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} \right) \quad \text{con } r_1 + r_2 = 0,04m$$

$$r_1 = \frac{0,04 \text{ m} \times q_1}{q_1 - q_2} = 0,015 \text{ m desde } q_1$$

5. Para la configuración de cargas de la Fig. 7.2 en donde $\mathbf{a} = 0, 20 \text{ m}$, $\mathbf{b} = 0, 40 \text{ m}$ y $\mathbf{q} = 10 \mu\text{C}$, calcular:

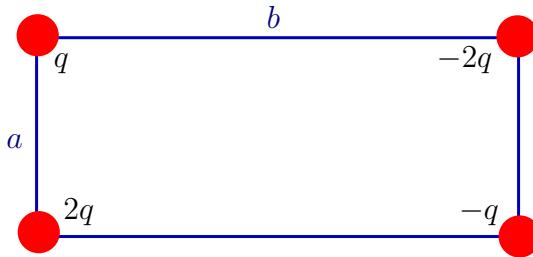


Figura 7.2: Esquema del ejercicio 5

- a) **Valor del potencial en el centro del rectángulo.** Utilizando la Ec. (7.4) para analizar el problema, claramente se puede observar que $\mathbf{V} = 0$.
- b) **Energía potencial del sistema.** Para obtener la Energía potencial del sistema es necesario calcular la suma de energías potenciales de interacción para cada par de cargas. Se utiliza la siguiente ecuación:

$$U = k \sum_{i < j} \frac{q_i \times q_j}{r_{ij}} \quad (7.5)$$

Se define $q_1 = q$, $q_2 = -2q$, $q_3 = -q$ y $q_4 = 2q$ para poder aplicar la suma algebraica de la Ec. (7.5):

$$U = k \cdot \left(\frac{q \times (-2q)}{b} + \frac{q \times (-q)}{r} + \frac{q \times (2q)}{a} + \frac{(-2q) \times (-q)}{a} + \frac{(-2q) \times 2q}{r} + \frac{-q \times 2q}{b} \right)$$

$$U = k \cdot \left(\frac{-4q^2}{b} - \frac{5q^2}{r} + \frac{4q^2}{a} \right) = -1,06 \text{ J}, \quad \text{con } r^2 = a^2 + b^2$$

6. **TAREA** En la configuración de cargas de la Fig. 7.3 calcular:

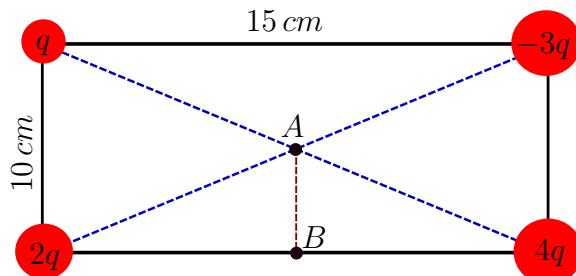


Figura 7.3: Esquema del ejercicio 6

- a) Valor de q si el potencial en el punto A es $V_A = 3500 \text{ V}$. $\mathbf{R} = 8,75 \text{ nC}$
- b) Con el valor de q obtenido en a) indicar el valor del potencial en el punto B . $\mathbf{R} = 5040 \text{ V}$
7. Una gota esférica de agua que tiene una carga de **100 pC** tiene un potencial de **600 V** en su superficie.

a) **¿Cuál es el radio de la gota?** El potencial V en una esfera está dado por:

$$V = k \times \frac{Q}{R} \quad (7.6)$$

Despejando el radio $\rightarrow \mathbf{R} = 1,5 \text{ mm}$

b) Si dos gotas iguales de la misma carga y radio se combinan para formar una sola gota esférica, ¿cuál es el potencial en la superficie de la nueva gota? El volumen de una esfera está dado por:

$$Vol = 4 \times \pi \times \frac{R^3}{3} \quad (7.7)$$

Entonces $Vol = 0,014 \text{ cm}^3$. El volumen de la nueva esfera $Vol_2 = 2 * Vol$, por lo cual se puede despejar el nuevo radio y luego calcular su potencial:

$$\begin{aligned} Vol_2 &= 4 \times \pi \times \frac{R_2^3}{3} \rightarrow \mathbf{R}_2 = 0,189 \text{ cm} \\ V &= k \times \frac{Q}{R_2} = 952 \text{ V} \end{aligned}$$

8. **TAREA** Se tiene una esfera de material conductor de $\mathbf{R} = 15 \text{ cm}$, la cual posee una carga $q = 0,5 \mu\text{C}$. Calcular:

- a) El potencial en la superficie de la esfera. Graficarlo en función de la distancia r al centro de la esfera. $\mathbf{R} = 29,96 \text{ kV}$
- b) El potencial de la superficie esférica equipotencial de $r = 1,5 \text{ m}$. $\mathbf{R} = 3,00 \text{ kV}$
9. Calcular cuánta energía es ganada por una carga de $75 \mu\text{C}$ que se mueve a través de una diferencia de potencial de **90 V**. Expresar la respuesta en Joule y en electrón-volt.

La relación entre la energía potencial eléctrica U y el potencial eléctrico V está dada por:

$$\Delta U = q \times \Delta V \quad (7.8)$$

Por lo cual:

$$\Delta U = 75\mu\text{C} \times 90\text{V} = 6,75 \text{ mJ}$$

Realizando el pasaje de unidades:

$$\begin{aligned} 1\text{eV} &= 1,6 \times 10^{-19} \text{ J} \\ 6,75 \times 10^{-3} \text{ J} &\times \frac{1\text{eV}}{1,6 \times 10^{-19} \text{ J}} = 4,21 \times 10^{16} \text{ eV} \end{aligned}$$

10. Suponga que un electrón se abandona desde el reposo en un campo eléctrico uniforme cuya intensidad es $5,9 \times 10^3 \text{ V/m}$ (ver Fig. 7.4). Calcular:

a) ¿Cuál será la diferencia de potencial que habrá pasado después de moverse **1 cm**? De este problema se pueden sacar algunas conclusiones, por eso se va a estudiar el comportamiento de las ecuaciones. En primer lugar, es interesante analizar el trabajo que hace el campo para mover el electrón desde **a** hacia **b**:

$$W = \int_a^b F_e \cdot dl = \int_a^b F \times dl \times \cos 0^\circ = F_e \times d, \text{o de otra forma}$$

$$W = \int_a^b (q.E) \cdot dl = e^- \times \int_a^b E \times dl \times \cos 180^\circ = e^- \times (-E.d)$$

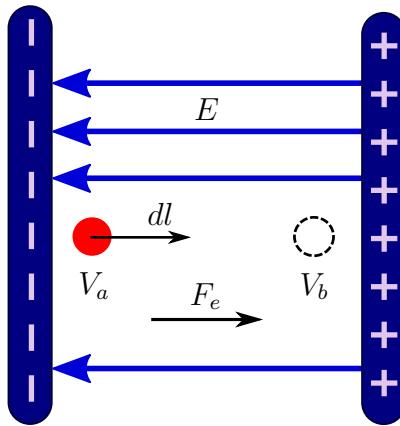


Figura 7.4: Esquema del ejercicio 10

Dado que la carga del electrón es negativa: $e^- \times (-E.d) = F_e \times d$ (el campo realiza un trabajo positivo sobre e^- para moverlo desde **a** hacia **b**). En cuanto a la energía potencial eléctrica:

$$W = -\Delta U = -(U_f - U_i)$$

Entonces, para este caso: $U_i > U_f$. La energía en **a** es mayor que en **b**. Ahora bien, para el cálculo de la diferencia de potencial se usa la Ec. (7.2):

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q} = - \int_a^b E \cdot dl = - \int_a^b E \times d \times \cos 180^\circ = E \times d = 5,9 \frac{kV}{m} \times 0,01m = 59 \text{ V}$$

- b) ¿Cuán rápido se moverá el electrón después de haber viajado 1 cm? Por ley de conservación de la Energía:

$$K_a + U_a = K_b + U_b \rightarrow \Delta K + \Delta U = 0$$

A medida que el electrón pierde energía potencial eléctrica gana velocidad:

$$\Delta K = -\Delta U = W = \frac{1}{2} \times m_{e^-} \times v_f^2 = e^- \times (-E \times d) \rightarrow v_f = 4,55 \times 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

11. Un electrón se dispara desde una placa hacia una segunda placa paralela a la primera. Si su velocidad inicial es $5 \times 10^6 \text{ m/s}$, y su velocidad justo antes de golpear a la otra placa es $2 \times 10^6 \text{ m/s}$. ¿Cuál es la diferencia de potencial entre las placas? La placa a la cual se dirige el electrón, ¿tiene un potencial mayor o menor?

El electrón disminuye su velocidad, esto significa que es lanzado hacia una placa negativa.
Planteando la Ley de Conservación de la energía:

$$\Delta K = -\Delta U = -q \times \Delta V = \frac{1}{2} \times m_{e^-} \times (v_f^2 - v_i^2) \rightarrow \Delta V = -59,7 \text{ V}$$

En este caso el electrón pierde energía cinética y gana energía potencial eléctrica; por otro lado, viaja de un potencial mayor a uno menor, tal cuál demuestra el resultado negativo ($V_a > V_b$).

12. Una partícula que tiene una carga de $3 \times 10^{-9} \text{ C}$ es accionada hacia la izquierda por un campo eléctrico. Una fuerza mecánica la mueve hacia la derecha desde **b** hacia **a**, realizando un trabajo de $6 \times 10^{-5} \text{ J}$ mientras aumenta la energía cinética de la partícula en $4,5 \times 10^{-5} \text{ J}$. Calcular la diferencia de potencial entre **a** y **b**.

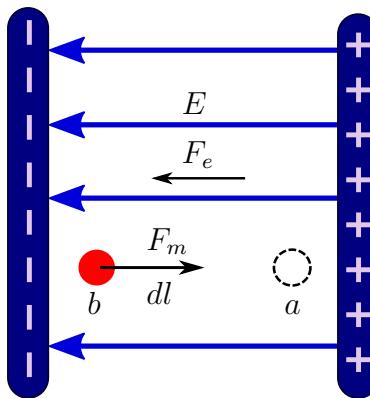


Figura 7.5: Esquema del ejercicio 12

La Fig. 7.5 expresa dos instancias: en primer lugar la fuerza eléctrica \mathbf{F}_e tiende a desplazar la carga hacia la izquierda. Por otro lado, la carga se desplaza hacia la derecha debido a la fuerza mecánica \mathbf{F}_m , exterior al campo eléctrico. Entonces, en este caso, el trabajo realizado por la fuerza externa es igual a las variaciones de energía potencial y cinética:

$$\Delta E_m = \Delta K + \Delta U \rightarrow \Delta U = \Delta E_m - \Delta K = 15 \mu\text{J}$$

La carga ganó energía potencial eléctrica. Ahora, para calcular el potencial:

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q} = \frac{15 \mu\text{J}}{3 \times 10^{-9} \text{ C}} = 5000 \text{ V}$$

13. **TAREA** Considere dos puntos en un campo eléctrico uniforme. El potencial en el punto **p₁** es **V₁ = -30 V** y el potencial en **p₂** es **V₂ = +150 V**. Calcular cuánto trabajo se realiza por una fuerza externa para mover una carga **q = -4,7 μC** desde **p₂** hasta **p₁**. **R = -8,46 × 10⁻⁴ J**

14. El potencial eléctrico en una cierta región del espacio está dado por $\mathbf{V} = 3x^2\mathbf{y} - 4xy - 5xy^2$. Encontrar el potencial eléctrico y el campo eléctrico en el punto $(1; 0, 2)\text{m}$.

Para calcular el potencial eléctrico, se reemplaza:

$$V = 3 \times (1\text{m})^2 \times 0,2\text{m} - 4 \times 1\text{m} \times 0,2\text{m} - 5 \times 1\text{m} \times (0,2\text{m})^2 = -0,4 \text{ V}$$

Por otro lado, para calcular el campo eléctrico, se plantea la definición de gradiente:

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}\right) \quad (7.9)$$

Calculando las derivadas parciales en las direcciones \mathbf{x} e \mathbf{y} :

$$E_x = \frac{\partial V}{\partial x} = 6xy - 4y - 5y^2 = 0,2 \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{m}} \quad E_y = \frac{\partial V}{\partial y} = 3x^2 - 4x - 10x = -3 \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{m}}$$

Finalmente:

$$\mathbf{E} = (-0,2\hat{i} + 3\hat{j}) \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{m}}$$

15. **TAREA** El potencial eléctrico dentro de un conductor esférico cargado de radio \mathbf{R} está dado por $\mathbf{V} = k.Q/\mathbf{R}$ y fuera del conductor está dado por $\mathbf{V} = k.Q/\mathbf{r}$. Utilizando $\mathbf{E}_r = -d\mathbf{V}/dr$, deduzca el campo eléctrico en **a**) dentro ($r < R$) y **b**) fuera ($r > R$) de ésta distribución de carga. **R: a) 0 y, b) $\mathbf{E} = k.Q/r^2$**
16. **TAREA** A una distancia \mathbf{r} de una carga puntual \mathbf{q} el potencial eléctrico es $\mathbf{V} = 400 \text{ V}$ y la magnitud del campo eléctrico es $\mathbf{E} = 150 \text{ N/C}$. Determinar el valor de \mathbf{r} y \mathbf{q} .
R: 2,67m; 119nC
17. Un dipolo eléctrico consta de dos cargas iguales y opuestas separadas una distancia $2a$ como muestra la Fig. 7.6. Calcule el potencial eléctrico y el campo eléctrico en un punto sobre el eje \mathbf{x} , localizado a una distancia x_0 del centro del dipolo (ubicado en el centro de coordenadas).

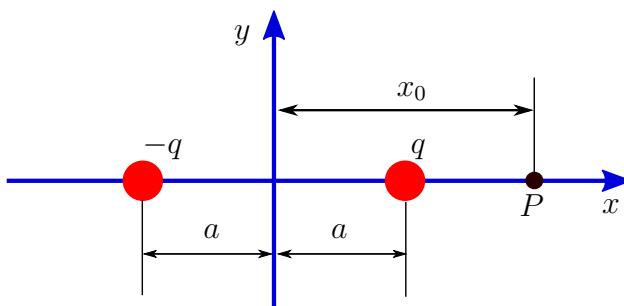


Figura 7.6: Esquema del ejercicio 17

Utilizando la Ec. (7.4) se calcula el potencial eléctrico:

$$V = k \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i} = k \left[\frac{q}{x_0 - a} - \frac{q}{x_0 + a} \right] = \frac{2.k.q.a}{x_0^2 - a^2}$$

Luego, para obtener el campo eléctrico se utiliza la definición de gradiente:

$$E_x = -\frac{dV}{dx} = -\frac{d}{dx} \left[\frac{2.k.q.a}{x_0^2 - a^2} \right] = \frac{2.k.q.(-x_0^2 - a^2)}{(x_0^2 + a^2)^2}$$

Capítulo 8

Dieléctrico - Condensadores

1. Dos láminas paralelas de **100 cm²** de superficie tienen cargas iguales y opuestas de **10⁻⁷ C**. El espacio comprendido entre las dos láminas está compuesto y ocupado por un dieléctrico y la intensidad de campo dentro del mismo es de **3,3 × 10⁵ V/m**. Calcular:

- a) **Coeficiente dieléctrico.** *El campo eléctrico entre dos placas cargadas y distanciadas por medio de un dieléctrico está dado por la relación:*

$$E = \frac{Q}{k_e \times \epsilon_0 \times A} \quad (8.1)$$

Despejando el coeficiente:

$$k_e = \frac{Q}{E \times \epsilon_0 \times A} = \frac{10^{-7} C}{8,85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2} * 3,3 \times 10^5 \frac{V}{m} * 100 \times 10^{-4} m} = 3,42$$

- b) **Carga inducida total sobre cada cara del mismo.** *Este valor se obtiene mediante:*

$$q_{face} = Q \times \left(1 - \frac{1}{K_e}\right) = 70,7 \text{ nC} \quad (8.2)$$

- c) **Carga máxima que podrán tener las placas si la rigidez dieléctrica del dieléctrico intercalado es de 50 × 10⁶ V/m.** *La rigidez dieléctrica del dispositivo corresponde al máximo campo eléctrico que soporta sin que se produzca la ruptura de la aislación.*

$$E_{max} = \frac{Q}{k_e \times \epsilon_0 \times A} \rightarrow Q = 15,1 \mu\text{C}$$

2. Se tiene un capacitor plano, con aislante de papel (**K_e = 3**), y distancia entre placas **0,05 mm**. Calcular:

- a) **¿Cuál debe ser la superficie de las placas si se desea lograr una C = 0,05 μF?**
La capacidad está definida por:

$$C = \frac{\epsilon_0 \times A}{d} \quad (8.3)$$

Y cuando se tiene un dieléctrico la capacidad aumenta:

$$C_k = C \times k_e \quad (8.4)$$

Usando ambas ecuaciones se puede despejar el área:

$$A = \frac{C_k \times d}{\epsilon_0 \times k_e} = 0,094 \text{ m}^2$$

- b) Diferencia de potencial y carga máxima que puede soportar el dispositivo si la rigidez dieléctrica del material empleado es $12 \times 10^6 \text{ V/m}$. Para calcular la carga, se aplica la Ec. (8.1):

$$Q = E \times k_e \times \epsilon_0 \times A = 30 \mu\text{C}$$

Para calcular la diferencia de potencial, la Ec. (7.2):

$$\Delta V = E \times d = 600 \text{ V}$$

3. Entre dos placas cargadas paralelas muy próximas, con densidades σ y $-\sigma$ se intercalan dos dieléctricos cuyos espesores son $d_1 = 0,5 \text{ mm}$ y $d_2 = 1,5 \text{ mm}$, con coeficientes dieléctricos de $k_1 = 1,5$ y $k_2 = 3$ respectivamente. Siendo $\sigma = 15 \times 10^{-9} \text{ C/m}^2$, calcular:

- a) Campo eléctrico en cada uno de ellos. El campo eléctrico según una densidad de carga y un dieléctrico se calcula como:

$$E = \frac{\sigma}{k_e \times \epsilon_0} \quad (8.5)$$

Para cada dieléctrico:

$$E_1 = \frac{15 \text{ nC/m}^2}{1,5 * 8,85 \times 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N.m}^2}} = 1130 \frac{\text{N}}{\text{C}}; \quad E_2 = \frac{15 \text{ nC/m}^2}{3 * 8,85 \times 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N.m}^2}} = 565 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

- b) Diferencia de potencial entre las placas. Se debe calcular la diferencia de potencial para cada dieléctrico:

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 = E_1 \times d_1 + E_2 \times d_2 = 1,41 \text{ V}$$

4. ¿Cuál es la capacidad de un condensador que adquiere una carga de $500 \mu\text{C}$ cuando se lo conecta a una batería de 125 V ?

La carga está relacionada con la diferencia de potencial y la capacitancia de la siguiente manera:

$$Q = C \times V \quad (8.6)$$

Despejando, $C = 4 \mu\text{F}$.

5. Un condensador se carga a 12 V cuando hay aire entre sus placas. Luego, se desconecta la batería y se reemplaza el aire por un dieléctrico, el cual provoca que el voltaje caiga hasta $4,2 \text{ V}$. ¿Cuál es el valor de k_e para el dieléctrico?

Utilizando las Ecuaciones (8.4) y (8.6):

$$C_k = C \times k_e \rightarrow \frac{Q}{V_k} = k_e \times \frac{Q}{V} \rightarrow k_e = \frac{V}{V_k} = \frac{12 \text{ V}}{4,2 \text{ V}} = 2,85$$

6. Dados los condensadores planos de la Fig. 8.1, cada uno de ellos con dos dieléctricos, demostrar que la capacidad en cada caso está dada por las fórmulas que se indican. A continuación generalice para el caso de n dieléctricos.

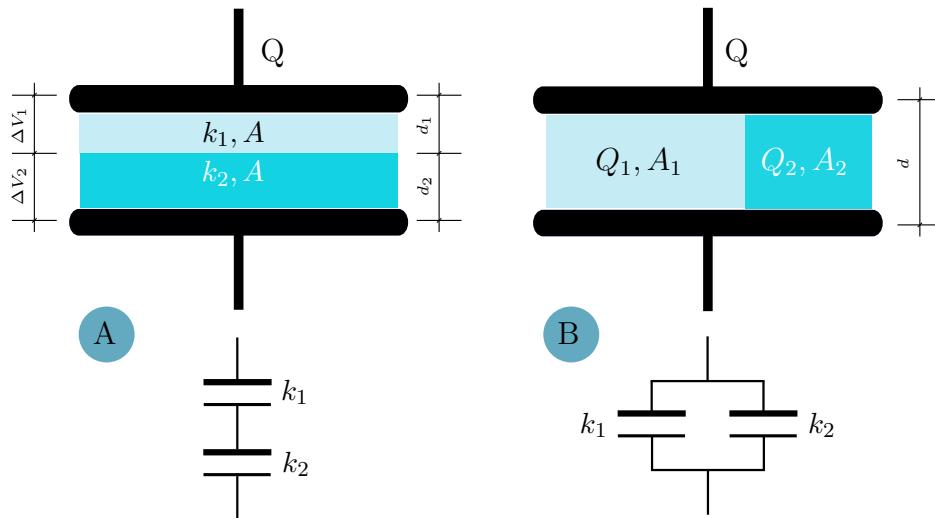


Figura 8.1: Esquema del ejercicio 6

- a) **Caso Serie A.** El comportamiento de la configuración mostrada en la Fig. 8.1-A, corresponde a dos capacitores en serie:

$$\begin{aligned}\Delta V &= \Delta V_1 + \Delta V_2, \quad \text{con } C = \frac{k_e \times \epsilon_0 \times A}{d} \quad \text{y } \Delta V = \frac{Q}{C} \\ \Delta V &= \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} \\ \frac{Q}{C_T} &= \frac{Q \times d_1}{K_{e1} \times \epsilon_0 \times A} + \frac{Q \times d_2}{K_{e2} \times \epsilon_0 \times A} \\ \frac{\epsilon_0 \times A}{C_T} &= \frac{d_1}{K_{e1}} + \frac{d_2}{K_{e2}} \rightarrow C_T = \frac{\epsilon_0 \times A}{\frac{d_1}{K_{e1}} + \frac{d_2}{K_{e2}}}\end{aligned}$$

El comportamiento de la configuración corresponde a dos capacitores en serie. Si se generaliza la expresión:

$$C_T = \frac{\epsilon_0 \times A}{\sum_{i=1}^n \frac{d_i}{K_{ei}}}$$

- b) **Caso Paralelo B.** El comportamiento de la configuración mostrada en la Fig. 8.1-B, corresponde a dos capacitores en paralelo:

$$\begin{aligned}Q &= Q_1 + Q_2 \\ \Delta V \times C_T &= \Delta V \times C_1 + \Delta V \times C_2 \\ C_T &= \frac{\epsilon_0}{d} \times (k_{e1} \times A_1 + k_{e2} \times A_2)\end{aligned}$$

Generalizando:

$$C_T = \frac{\epsilon_0}{d} \times \sum_{i=1}^n k_{ei} \times A_i$$

7. Una esfera conductora aislada puede ser considerada como un elemento de un condensador, el otro elemento sería una esfera concéntrica de radio infinito. Si una esfera conductora aislada de **R = 12 cm** genera un campo eléctrico de **4,9 × 10⁴ N/C** a una distancia de **21 cm** desde su centro, calcular:

- a) **¿Cuál es la densidad de carga superficial?** *El campo eléctrico en una esfera aislada está dado por:*

$$E = k \times \frac{Q}{R^2} \quad (8.7)$$

Despejando Q:

$$Q = \frac{R^2 \times E}{k} = \frac{(0,12\text{ m})^2 * 4,9 \times 10^4 \text{ N/C}}{9 \times 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}} = 2,4 \times 10^{-7} \text{ C}$$

La densidad de carga superficial es:

$$\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{2,4 \times 10^{-7} \text{ C}}{4\pi \cdot (0,12\text{ m})^2} = 1,33 \mu\text{C/m}^2$$

- b) **¿Cuál es su capacidad?** *La capacidad se calcula mediante:*

$$C = 4\pi\epsilon_0 \times R = 13,34 \text{ pF} \quad (8.8)$$

8. **TAREA** ¿Cuál será la carga máxima que puede adquirir una esfera conductora de **R = 10 cm** si está sumergida en un gas de coeficiente **k_e = 2** y rigidez dieléctrica **3 × 10⁷ V/m**? Repetir el cálculo para el aire. Campo disruptivo del aire → **3 × 10⁶ V/m**.
9. Un cable coaxial de **50 m** de longitud tiene un conductor interno de **ϕ = 2,58 mm** y una carga **q = 8,1 μC**. El conductor que lo rodea tiene un diámetro interno **ϕ = 7,27 mm** y una **q = -8,1 μC**. Calcular:

- a) **¿Cuál es la capacidad del cable?** *La capacidad se calcula mediante:*

$$C = 2\pi\epsilon_0 \times \frac{l}{\ln(r_b/r_a)} \quad (8.9)$$

Entonces:

$$C = 2\pi * 8,85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2} \frac{50\text{ m}}{\ln\left(\frac{7,27\text{ mm}}{2,58\text{ mm}}\right)} = 2,68 \text{ nF}$$

- b) **¿Cuál es la diferencia de potencial entre los conductores?** *Primero se debe calcular la densidad lineal de carga:*

$$\lambda = \frac{Q}{l} = \frac{8,1 \mu C}{50\text{ m}} = 0,162 \mu\text{C/m}$$

Finalmente, la diferencia de potencial se calcula mediante:

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_b}{r_a}\right) \quad (8.10)$$

$$V = \frac{0,162 \mu\text{C/m}}{2\pi * 8,85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2}} \ln\left(\frac{7,27\text{ mm}}{2,58\text{ mm}}\right) = 3,02 \text{ kV}$$

10. **TAREA** Un pequeño objeto de masa $m = 350\text{ g}$ tiene una carga $q = 30\text{ nC}$. Este está suspendido por un hilo entre las placas verticales de un condensador que están separadas **4 cm**. Si el hilo forma un ángulo de **15°** con la vertical, calcular la diferencia de potencial entre las placas. **R : $\Delta V = 1,22\text{ MV}$**

11. Cuatro condensadores se conectan según se indica en la Fig. 8.2 (la 1^{ra} de la secuencia). Calcular:

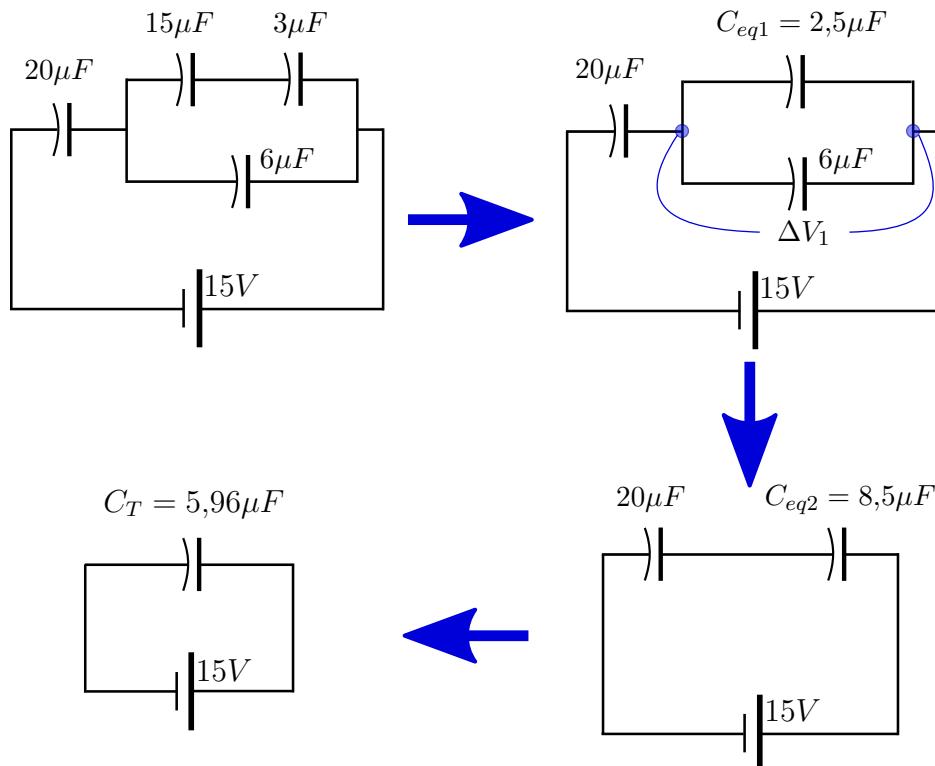


Figura 8.2: Esquema del ejercicio 11

- a) **Capacidad equivalente.** Para el cálculo de la capacidad total del circuito se observa la Fig. 8.2, sabiendo que la suma de capacitores se hace de la siguiente manera:

$$\frac{1}{C_T} = \frac{1}{C_1} + \dots + \frac{1}{C_n} \quad \text{SUMA en Serie} \quad (8.11)$$

$$C_T = C_1 + \dots + C_n \quad \text{SUMA en Paralelo} \quad (8.12)$$

Entonces:

$$\frac{1}{C_{eq1}} = \frac{1}{15\mu F} + \frac{1}{3\mu F} \rightarrow C_{eq1} = 2,5 \mu F$$

$$C_{eq2} = 2,5\mu F + 6\mu F = 8,5\mu F$$

$$\frac{1}{C_T} = \frac{1}{20\mu F} + \frac{1}{8,5\mu F} \rightarrow C_T = 5,96 \mu F$$

- b) **Carga en cada condensador.** Para el cálculo de la carga total del circuito, que también corresponde a la carga para el condensador de $20\mu F$, se utiliza la Ec. (8.6):

$$Q_T = C_T \times V = 89,5 \mu C$$

Cálculo de la diferencia de potencial entre bornes del paralelo (ΔV_1):

$$\Delta V_1 = \frac{Q}{C_{eq2}} = 10,5 \text{ V}$$

Carga para los capacitores $15\mu F$ y $3\mu F$:

$$Q = \Delta V_1 \times C_{eq1} = 26,25 \mu\text{C}$$

Carga en $6\mu F$:

$$Q = \Delta V_1 \times 6\mu F = 63 \mu\text{C}$$

12. **TAREA** ¿Cómo deberían ser conectados cuatro capacitores de $2\mu F$ para lograr una capacidad equivalente de: a) $8\mu F$, b) $2\mu F$, c) $1,5\mu F$, d) $0,5\mu F$

13. **TAREA** Hallar la capacidad equivalente en los casos que muestra la Fig. 8.3.

$$\mathbf{R : A = 11 \mu F - B = 1,5 \mu F - C = 4 \mu F}$$

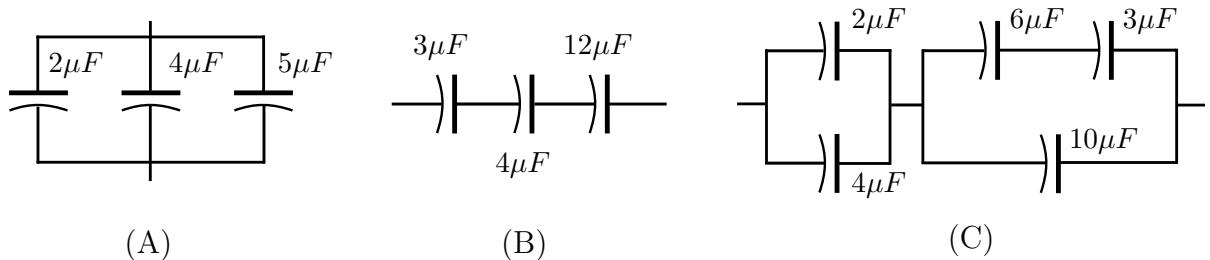


Figura 8.3: Esquema del ejercicio 13

14. **TAREA** En el circuito de la Fig. 8.4 calcular: **a)** Capacidad equivalente, **b)** Carga en C_1 y C_2 , **c)** Diferencia de potencial a entre los puntos mn , nx y xy .

$$\mathbf{R : a) 4 \mu F - b) Q_{C_1} = 16 \mu C; Q_{C_2} = 32 \mu C - c) V_{mn} = 2 V; V_{nx} = 4 V; V_{xy} = 6 V}$$

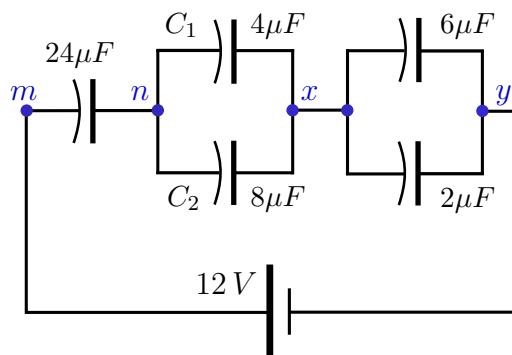


Figura 8.4: Esquema del ejercicio 14

15. Considere el circuito de la Fig. 8.5 en donde $C_1 = 6\mu F$, $C_2 = 3\mu F$ y $V = 20\text{ V}$. Se carga primero C_1 cerrando el interruptor S_1 . Luego se abre S_1 y el condensador cargado se conecta al descargado cerrando S_2 . Calcular la carga inicial de C_1 y la carga final en cada uno de los condensadores.

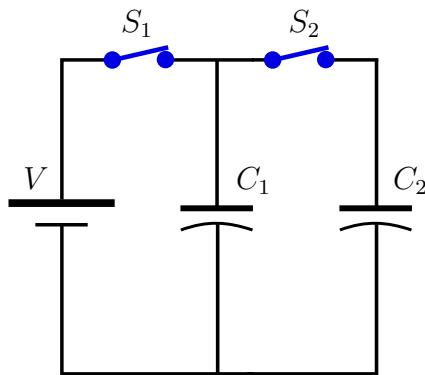


Figura 8.5: Esquema del ejercicio 15

Primero se carga C_1 con Q_0 :

$$Q_0 = C_1 \times V = 120 \mu\text{C}$$

Luego se comparte la carga entre los dos C :

$$\begin{aligned} Q_0 &= Q_1 + Q_2 \\ C_1 \times \Delta V_0 &= C_1 \times \Delta V + C_2 \times \Delta V \\ \Delta V &= \Delta V_0 \times \frac{C_1}{C_1 + C_2} = 13,3 \text{ V} \end{aligned}$$

Ahora se procede a calcular cada carga:

$$\begin{aligned} Q_1 &= C_1 \times \Delta V = 80 \mu\text{C} \\ Q_2 &= C_2 \times \Delta V = 40 \mu\text{C} \end{aligned}$$

16. Un condensador de $4 \mu\text{F}$ cargado a 400 V y un condensador de $6 \mu\text{F}$ cargado a 600 V se conectan como indica la Fig. 8.6. Indicar:

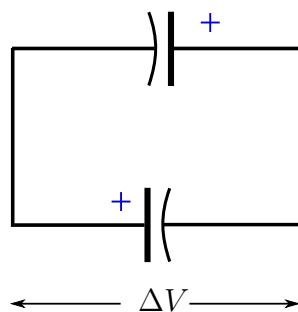


Figura 8.6: Esquema del ejercicio 16

- a) ¿Cuál es la diferencia de potencial a través de cada condensador después de que han sido conectados? Dado que se conectan en oposición, se cumple:

$$Q_f = Q_2 - Q_1 = 6 \mu\text{F} \times 600 \text{ V} - 4 \mu\text{F} \times 400 \text{ V} = 2 \text{ mC}$$

Para el cálculo de ΔV :

$$\Delta V = \frac{Q_f}{C_{eq}} = \frac{2 \text{ mC}}{10 \mu\text{F}} = 200 \text{ V}$$

b) ¿Cuál es el valor final de la carga que reside en cada condensador?

$$Q_1 = C_1 \times \Delta V = 800 \mu\text{C}$$

$$Q_2 = C_2 \times \Delta V = 1200 \mu\text{C}$$

17. Calcular la energía almacenada en un condensador de **$18 \mu\text{F}$** cuando es cargado a un potencial de **100V** .

La energía se calcula con la siguiente ecuación:

$$E = \frac{1}{2} \times C \times V^2 \quad (8.13)$$

Entonces:

$$E = \frac{1}{2} \times 18 \mu\text{F} \times (100 \text{V})^2 = 0,09 \text{ J}$$

18. **TAREA** ¿Cuánta energía está almacenada en el grupo de condensadores que se ve en la Fig. 8.7? **$\mathbf{R = 13,5 \text{ mJ}}$**

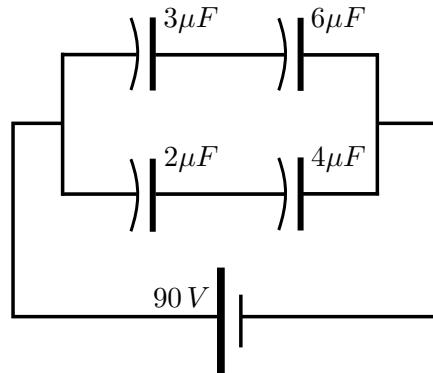


Figura 8.7: Esquema del ejercicio 18

19. **TAREA** Si dos condensadores $C_1 = 4 \mu\text{F}$ y $C_2 = 6 \mu\text{F}$ están desde un principio conectados a una batería de **10V** y luego se desconectan para reconectarse como se indica en la Fig. 8.8. ¿Cuál es la carga final en cada condensador? **$\mathbf{R : Q_4 = 8 \mu\text{C}; Q_6 = 12 \mu\text{C}}$**

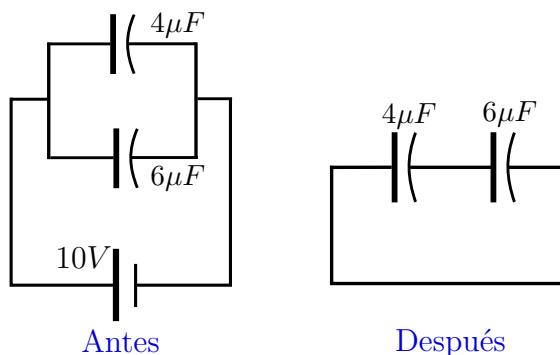


Figura 8.8: Esquema del ejercicio 19

20. **TAREA** Tres condensadores de $C_1 = 8 \mu\text{F}$, $C_2 = 10 \mu\text{F}$ y $C_3 = 14 \mu\text{F}$ se conectan a los terminales de una batería de 12 V . ¿Cuánta energía debe suministrar la batería si los condensadores están conectados a) en serie y b) en paralelo?

R: a) $243 \mu\text{J}$, b) $2,304 \text{ mJ}$

21. Un condensador de placas paralelas de área A , separadas una distancia d está cargado con una diferencia de potencial V . Luego, la batería de carga se desconecta y las placas se alejan hasta dejarlas separadas una distancia $2d$. Deducir las expresiones en función de A , d y V para las siguientes magnitudes:

- a) **La nueva diferencia de potencial.** La carga Q_0 se mantiene constante, varía C y V . Para la carga:

$$Q_0 = C_0 \times V \quad \text{con } C = \frac{\epsilon_0 \times A}{d}$$

$$Q_0 = \frac{\epsilon_0 \times A}{d} \times V$$

Cuando se corre una distancia $2d$:

$$Q_0 = C' \times V' = \frac{\epsilon_0 \times A}{(2d)} \times (2V)$$

- b) **La energía almacenada inicial y final.** Mediante Ec. (8.13):

$$E_0 = \frac{1}{2} \times \frac{\epsilon_0 \times A}{d} \times V^2 \quad E_f = \frac{1}{2} \times \frac{\epsilon_0 \times A}{2d} \times (2V)^2 = \frac{\epsilon_0 \times A}{d} \times V^2$$

$$\Delta E = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2 \times d}{\epsilon_0 \times A}; \text{ Aumenta } E$$

- c) **El trabajo necesario para separar las placas.** Como $\Delta W_{mec} = F_{mec} \times \Delta d = \Delta E$:

$$W_{mec} = \int_{x_0=d}^{x_1=2d} \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{\epsilon_0 \times A} \times dx = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2 \times d}{\epsilon_0 \times A} = \frac{\epsilon_0 \times A \times V^2}{2d}$$

22. Al llevar la llave **S** al punto **a** las placas de C_1 adquieren una diferencia de potencial V_0 mientras tanto, los capacitores C_2 y C_3 están descargados. A continuación se lleva **S** a la posición **b**. Calcular:

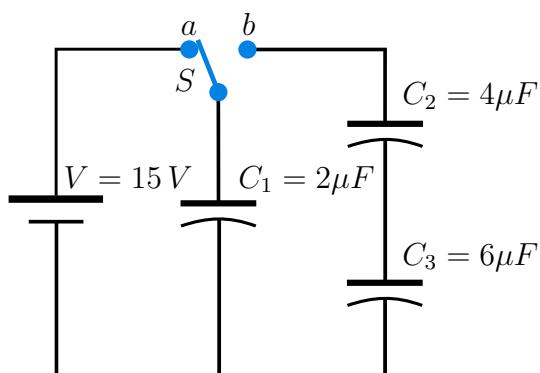


Figura 8.9: Esquema del ejercicio 22

- a) La carga que adquiere inicialmente C_1 .

$$Q_0 = C_1 \times V = 2 \mu F \times 15 V = 30 \mu C$$

- b) Carga y diferencia de potencial para cada condensador después de llevar S a la posición b. La carga inicial se comparte entre las dos ramas:

$$\begin{aligned} Q_0 &= Q_1 + Q_2 \\ Q_0 &= C_1 \times \Delta V + C_{23} \times \Delta V \\ \Delta &= \frac{Q_0}{C_1 + C_{23}} = 6,81 V \end{aligned}$$

Cálculo de la carga en C_1 . Dado que su diferencia de potencial es **6,81 V**:

$$Q_1 = C_1 \times \Delta V = 2 \mu F \times 6,18 V = 13,62 \mu C$$

Cálculo de la carga en la rama compartida por C_2 y C_3 :

$$Q_2 = C_{23} \times \Delta V = \frac{C_2 \times C_3}{C_2 + C_3} \times \Delta V = 16,34 \mu C$$

También se podía calcular como:

$$Q_2 = Q_0 - Q_1 = 30 \mu C - 13,62 \mu C = 16,34 \mu C$$

Cálculo de la diferencia de potencial en C_2 y C_3 :

$$\Delta V_2 = \frac{Q_2}{C_2} = 4,09 V \quad \Delta V_3 = \frac{Q_2}{C_3} = 2,72 V$$

- c) La energía inicial de C_1 . Mediante la Ec. (8.13):

$$U_1 = E_i = \frac{1}{2} \times C_1 \times V^2 = 2,25 \times 10^{-4} J$$

- d) la variación de energía cuando se conectan C_2 y C_3 .

$$\begin{aligned} U_2 = E_f &= \frac{1}{2} \times C_1 \times V_{1f}^2 + \frac{1}{2} \times C_2 \times V_{2f}^2 + \frac{1}{2} \times C_3 \times V_{3f}^2 = 102,33 \mu J \\ \Delta E &= E_f - E_i = -122,67 \mu J \end{aligned}$$

Capítulo 9

La Corriente Eléctrica

1. ¿Qué campo eléctrico es necesario para obtener una densidad de corriente de **2 A/mm²**, en un conductor de *Cu* y en uno de *Al*? ¿Cuál es la caída de potencial en cada caso para un tramo de **100 m**?

Cálculo del campo eléctrico:

$$E = \rho \times J \quad (9.1)$$

Siendo “ ρ ” la resistividad del material y “ J ” la densidad de corriente, se calcula:

$$E_{Cu} = 1,72 \times 10^{-8} [\Omega \cdot m] * 2 \frac{MA}{m^2} = 0,034 \frac{V}{m}$$
$$E_{Al} = 2,75 \times 10^{-8} [\Omega \cdot m] * 2 \frac{MA}{m^2} = 0,055 \frac{V}{m}$$

Finalmente se calcula V :

$$V_{Cu} = E \times l = 3,44 V$$

$$V_{Al} = E \times l = 5,5 V$$

2. Una barra de distribución de *Cu* tiene una sección transversal de **5 cm** por **15 cm** y conduce una corriente eléctrica con una densidad de **2000 A/cm²**. Calcular:

- a) **Corriente total en la barra de distribución.** La densidad de corriente es:

$$J = \frac{I}{A} \quad (9.2)$$

Por lo cual:

$$I = J \times A = 2000 \frac{A}{cm^2} \times (15 cm \times 5 cm) = 150 kA$$

- b) **¿Cuánta carga pasa por un punto dado en la barra por hora?** La corriente se define como el flujo de carga por unidad de tiempo:

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad (9.3)$$

Finalmente:

$$dQ = I \times dt = 150 kA \times 3600 seg = 540 \times 10^6 C$$

3. Un conductor de *Al* transporta una $\mathbf{I} = 35 \text{ A}$ a lo largo de 650 m y se produce una caída de potencial de $13,6 \text{ V}$. La temperatura del conductor es de 20°C ($\alpha_{\text{Al}} = 0,0039^\circ\text{C}^{-1}$). Determinar el diámetro del conductor.

La resistividad se calcula como:

$$\rho = \frac{V \times A}{I \times l} \quad (9.4)$$

La resistividad no sufre cambios porque la temperatura del conductor está en 20°C . Despejando A :

$$A = \frac{\rho \times I \times l}{V} = \frac{2,75 \times 10^{-8} [\Omega \cdot \text{m}] * 35 \text{ A} * 650 \text{ m}}{13,6 \text{ V}} = 46 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

Finalmente, se obtiene el diámetro del conductor:

$$A = \pi \times \frac{D^2}{4} \rightarrow D = 7,7 \text{ mm}$$

4. Calcular la velocidad de arrastre de los electrones en un conductor que tiene un área de sección transversal igual a $8 \times 10^{-6} \text{ m}^2$ y lleva una corriente de 8 A . Tomar la concentración de electrones libres como $5 \times 10^{28} e^-/\text{m}^3$.

Si cada e^- tiene una carga q , la carga dQ que fluye por el conductor durante dt es:

$$dQ = q \times n \times A \times v_d \times dt \quad (9.5)$$

v_d : velocidad de arrastre.

n : concentración de electrones.

En base a las ecuaciones (9.3) y (9.5) se despeja v_d :

$$I \times dt = q \times n \times A \times v_d \times dt \rightarrow v_d = \frac{I}{q \times n \times A} = 0,12 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$$

5. **TAREA** Un conductor con radio uniforme de $1,2 \text{ cm}$ lleva una corriente de 3 A producida por un campo eléctrico de 120 V/m . ¿Cuál es la resistividad del material? $R = 0,018 [\Omega \cdot \text{m}]$
6. **TAREA** Suponga que se quiere fabricar un alambre uniforme con 1 gr de cobre. Si el alambre debe tener una resistencia $R = 5 \Omega$ y todo el cobre debe ser utilizado, ¿cuál será la longitud y el diámetro de dicho alambre? $R : l = 5,74 \text{ m}$; $d = 0,16 \text{ mm}$.
7. Calcule el porcentaje de cambio en la resistencia de un alambre de cobre electrolítico cuando es calentado de 0°C hasta 160°C .

La Resistencia varía en función de la temperatura de acuerdo a:

$$R(t) = R_0 \times (1 + \alpha \times \Delta T) \quad (9.6)$$

Debido a que la variación por la temperatura está definida por $\alpha \times \Delta T$, el porcentaje de cambio se expresa como:

$$100 \times (\alpha \times \Delta T) = 100 \times 0,0039 \frac{1}{K} \times 160 K = 60 \%$$

8. **TAREA** Un alambre de **3 m** de longitud y **0,45 mm²** de sección transversal tiene una resistencia de **41 Ω** a **20°C**. Si la R del alambre aumenta a **41,4 Ω** al pasar la temperatura a **29°C**. ¿Cuál es el coeficiente de temperatura de la resistividad? **R = 1,08 × 10⁻³1/°C**
9. Un resistor se construye con una barra de carbón cuya sección transversal uniforme es **0,5 mm²**. Cuando se aplica una diferencia de potencial de **15 V** entre los extremos de la barra circula una corriente de **I = 4 mA**. Determinar la resistencia de la barra y su longitud.

La Ley de Ohm expresa:

$$V = R \times I \quad (9.7)$$

Aplicando esta ecuación al problema:

$$R = \frac{V}{I} = \frac{15 V}{4 mA} = 3750 \Omega$$

La resistividad está dada por la Ec. (9.4):

$$\rho = \frac{V \times A}{L \times I}$$

Despejando L y siendo ρ_C = 3,5 × 10⁻⁵ [Ω.m]:

$$L = \frac{V \times A}{\rho \times I} = \frac{15 V * 0,5 \times 10^{-6} m^2}{3,5 \times 10^{-5} \Omega.m * 4 mA} = 53,5 \text{ m}$$

10. **TAREA** A **45°C** la resistencia de un segmento de un alambre de Oro es de **85 Ω**. Cuando el alambre se coloca en un baño líquido, la resistencia disminuye a **80 Ω**. Calcular la temperatura del baño ($\alpha_{Al} = 0,0034^\circ C^{-1}$). **R = 26,62°C**
11. Se construye un reóstato de Nichrome para regular la tensión de alimentación de una lámpara. La tensión de línea es **220 Vcc**. Determinar la *R* inicial del reóstato a **20°C**, si en funcionamiento normal circulan por la lámpara **450 mA** y se produce en ella una *V_{cc}* de **130 V**. En éste caso la temperatura del reóstato es **48°C** ($\alpha_{Nichrome} = 0,0004^\circ C^{-1}$).

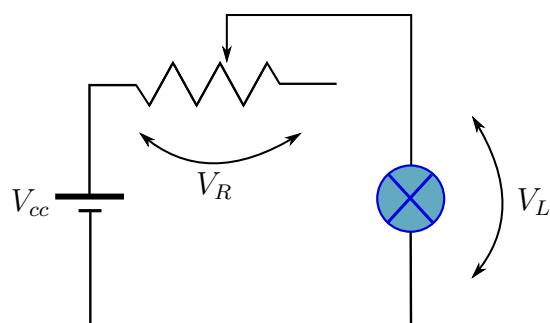


Figura 9.1: Circuito del ejercicio 11

Recorriendo la malla cerrada que forma el circuito se tiene:

$$V_{cc} = V_R + V_L = I \times R + V_L \rightarrow R_{(48^\circ C)} = \frac{220 V - 130 V}{450 mA} = 200 \Omega$$

Para calcular a temperatura ambiente se aplica Ec. (9.6):

$$R_0 = \frac{R_{(48^\circ C)}}{1 + \alpha \times \Delta T} = 197,7 \Omega$$

12. Se tiene una lámpara de **120 V** y **40W** de potencia. Calcular:

a) **¿Qué resistencia se debe conectar en serie con la misma para que su calentamiento sea el adecuado para su potencia si se dispone de una tensión de 220 Vcc?** Para calcular la corriente del circuito en base a la I y la V de la lámpara, se utiliza la siguiente ecuación:

$$P = I \times V \quad (9.8)$$

$$I_c = \frac{P_l}{V_l} = \frac{1}{3} A$$

Por otro lado, la potencia en base a R y V es:

$$P = \frac{V^2}{R} \quad (9.9)$$

Con la corriente del circuito se calcula R :

$$R = \frac{V_R}{I_c} = \frac{V_{cc} - V_l}{I_c} = 300 \Omega$$

b) **¿Qué cantidad de energía se consume en la lámpara y en la R al cabo de 25 horas de funcionamiento?** Utilizando la Ec. (2.4) y la Ec. (9.9):

$$E_L = P_l \times \Delta t = 40 W \times 25 \text{ h} \times \frac{3600 s}{\text{h}} = 3,6 \times 10^6 \text{ J}$$

$$E_R = P_R \times \Delta t = \frac{V_R^2}{R} \times 25 \text{ h} \times \frac{3600 s}{\text{h}} = 3 \times 10^6 \text{ J}$$

13. La diferencia de potencial a través del filamento de tungsteno de una lámpara se mantiene constante mientras alcanza la temperatura de equilibrio. Se observa que la corriente en estado estacionario es **un décimo** de la que se consume al encenderse la lámpara. Estando el filamento a una temperatura inicial de **20°C**, ¿cuál es la T_{final} de operación del filamento?

En el estado inicial, R_0 a 20°C, circula una corriente I y existe una diferencia de potencial V . Luego, en operación, se llega a un valor R mientras que circula una $I_f = I/10$ ($V = cte$).

$$\begin{aligned} R &= R_0 \times (1 + \alpha \times \Delta T) \\ \frac{V}{I/10} &= \frac{V}{I} \times [1 + 4,5 \times 10^{-3} \frac{1}{^\circ C} * (T - 20^\circ C)] \rightarrow T = 2020^\circ C \end{aligned}$$

14. **TAREA** El tramo indicado en la Fig. 9.2 está atravesado por una corriente I . La resistencia recuadrada es **R₀ = 4 Ω** a **(0°C)** ($\alpha_0 = 4,5 \times 10^{-3} \text{ }^\circ C^{-1}$). Si la temperatura del recinto recuadrado se eleva de **(0°C)** hasta **(50°C)**, y se desea mantener invariable el valor de la corriente, ¿a qué nueva distancia (L_1) se deberá ubicar el cursor del reóstato de compensación? Considere que el tramo de longitud (L_0) tiene una resistencia de **2 Ω/m**. **R : 1,55 m**

15. Una batería tiene una *f.e.m.* de **6 V** y una resistencia interna de **0,2 Ω**. Cuando sus terminales se conectan a una resistencia de carga, la corriente en el circuito es de **2 A**. ¿Cuál es el valor de la resistencia de carga?

Según el circuito de la Fig. 9.3, se escribe la ecuación de malla:

$$V = (R_C + R_i) \times I \rightarrow R_C = 2,8 \Omega$$

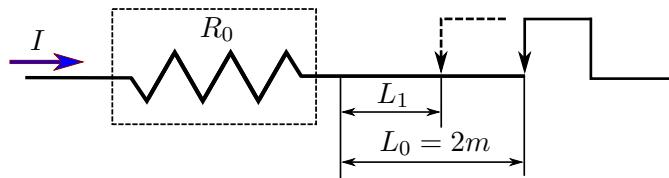


Figura 9.2: Circuito del ejercicio 14

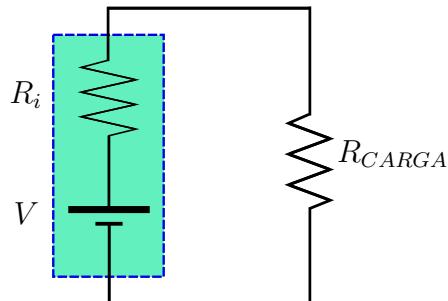


Figura 9.3: Circuito del ejercicio 15

16. **TAREA a)** ¿Cuál es la corriente en una resistencia de **5,6 Ω** conectada a una batería **10 V** que posee una resistencia interna de **0,2 Ω**? **b)** ¿Cuál es la *f.e.m.* de la batería?

R: $I = 1,78 \text{ A}$ y $V_f = 10,35 \text{ V}$

17. **TAREA** Si la *f.e.m.* de una batería es de **15 V** y una corriente de **60 A** se mide cuando la batería se pone en cortocircuito, ¿cuál es su resistencia interna? **R = 0,25 Ω**

18. **TAREA** Una corriente de **0,9 A** se hace circular por una resistencia de **160 Ω** durante **3 horas**. Determinar la energía calorífica desarrollada por la resistencia. Dar la respuesta en Joules y en calorías. **R: 1,40 MJ y 334,44 Kcal**

19. Un calentador de inmersión que consta de una resistencia de **10 Ω**. Se hace circular por él una corriente **I = 7,07 A** al sumergirlo en un recipiente que tiene **2 litros** de agua a **20°C**. Calcular:

- a) **¿Cuánto tiempo se requerirá para llevar el agua a la temperatura de ebullición suponiendo que el 80 % de la energía disponible es absorbida por el agua?** Mediante Ec. (2.2) y (2.4):

$$m \times c \times (100 - 20^\circ C) = \frac{P \times \Delta t}{4,186}$$

Y la potencia P está dada por:

$$P = I^2 \times R \quad (9.10)$$

Entonces:

$$2000 \text{ gr} \times 1 \frac{\text{cal}}{\text{gr.}^\circ\text{C}} \times 80^\circ\text{C} = \frac{500 \text{ W} \times \Delta t}{4,186} \rightarrow \Delta t = 0,37 \text{ hs}$$

- b) **¿cuánto tiempo más se requerirá para que se evapore por ebullición la mitad**

del agua? Siguiendo un procedimiento similar::

$$m \times c \times (100 - 20^\circ C) + \frac{m}{2} \times L_v = \frac{P \times \Delta t}{4,186}$$

$$2000 \text{ gr} \times 1 \frac{\text{cal}}{\text{gr.}^\circ\text{C}} \times 80^\circ\text{C} + 1000 \text{ gr} \times 540 \frac{\text{cal}}{\text{gr}} = \frac{500 \text{ W} \times \Delta t}{4,186} \rightarrow \Delta t = 1,62 \text{ hs}$$

20. **TAREA** Calcule el costo diario de operar una lámpara que toma **1,7 A** de una línea de **110 V** si el costo de la energía eléctrica es de **\$0,06 el kWh**. **R = 26,9 cent/día**

21. Dada una resistencia de **45 Ω/125 W** (máxima potencia permitida). Calcular:

- a) **¿Cuál es el máximo voltaje de operación que soportaría?** Mediante la Ec. (9.9):

$$V = \sqrt{P \times R} = 75 \text{ V}$$

- b) **¿Si ésta tensión aumenta un 10% en qué porcentaje aumenta la potencia?**
 $Si V_{+10\%} = 82,5 \text{ V} \rightarrow la P aumenta 21\%$

22. **TAREA** Calcular el valor de la R a colocar en un calefactor de aceite que contiene **24 kg** de aceite para elevar su temperatura hasta **97°C** partiendo de una **T₁ = 5°C** en un lapso de **35 minutos** (calor específico=0,85 cal/g.°C). Considerar una pérdida constante de **15 W**, tensión de alimentación **220 Vcc** y coeficiente térmico de la resistencia nulo.

$$R = 12,88 \Omega$$

23. Para los arreglos de resistencias mostrados en la Fig. 9.4 hallar la resistencia equivalente.

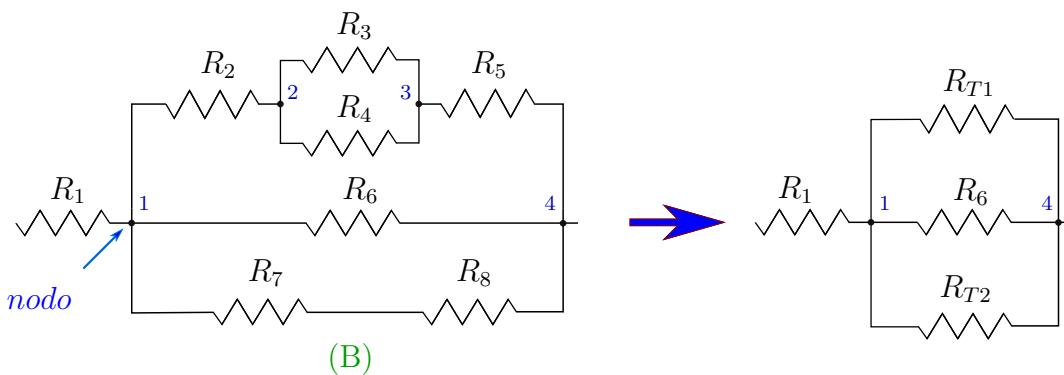
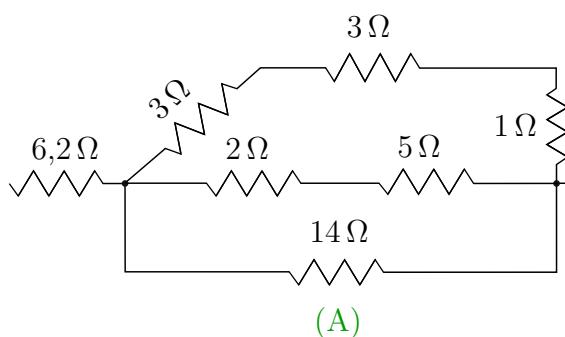


Figura 9.4: Circuito del ejercicio 23

Se solucionará la parte B de este ejercicio y el alumno deberá solucionar la sección A (cuyo resultado es $\mathbf{R}_T = 9 \Omega$). Para sumar resistores en serie se utiliza la ecuación:

$$R_{TOTAL} = R_1 + \dots + R_n \quad (9.11)$$

Para sumar resistores en paralelo:

$$\frac{1}{R_{TOTAL}} = \frac{1}{R_1} + \dots + \frac{1}{R_n} \quad (9.12)$$

Para solucionar este tipo de ejercicios, hay que ir reduciendo los nodos del circuito. Siguiendo la Fig. 9.4B, primero se eliminan los nodos 2 y 3, correspondientes a las R_3 y R_4 . Luego se suman la R_2 y R_5 , que están en serie con el paralelo entre R_3 y R_4 :

$$R_{R_3//R_4} = \frac{R_3 \times R_4}{R_3 + R_4} = \frac{3\Omega \times 6\Omega}{3\Omega + 6\Omega} = 2\Omega$$

$$R_{T1} = R_{R_3//R_4} + R_2 + R_5 = 2\Omega + 5\Omega + 4\Omega = 11\Omega$$

Se prosigue con R_7 y R_8 en serie: su resultante R_{T2} queda en paralelo con R_{T1} y R_6 . Sumando este último paralelo, se eliminan los nodos 1 y 4:

$$R_{T2} = R_7 + R_8 = 9\Omega + 2\Omega = 11\Omega$$

$$\frac{1}{R_{T3}} = \frac{1}{R_{T1}} + \frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_{T2}} = \frac{1}{11\Omega} + \frac{1}{22\Omega} + \frac{1}{11\Omega} \rightarrow \mathbf{R}_{T3} = 4,4\Omega$$

Finalmente:

$$R_{TOTAL} = R_1 + R_{T3} = 7,6\Omega + 4,4\Omega = 12\Omega$$

24. **TAREA** La corriente en un circuito se triplica conectando una $\mathbf{R}_1 = 500\Omega$ en paralelo con la resistencia R del circuito. Determinar R en ausencia de R_1 .

$$\mathbf{R} = 1000\Omega$$

25. La resistencia entre los terminales **a** y **b** de la Fig. 9.5 es $\mathbf{R} = 75\Omega$. Calcular el valor de R_x .
DATOS: $R_1 = 120\Omega$, $R_2 = 40\Omega$ y $R_3 = 5\Omega$.

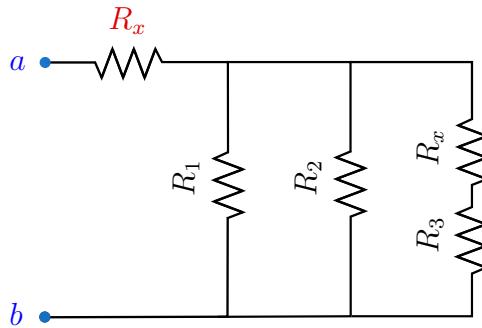


Figura 9.5: Circuito del ejercicio 25

En primer se debe sumar en paralelo R_1 y R_2 para luego reducir la otra rama:

$$\frac{1}{R_{T1}} = \frac{1}{120\Omega} + \frac{1}{40\Omega} \rightarrow \mathbf{R}_{T1} = 30\Omega$$

$$\frac{1}{R_{T2}} = \frac{1}{R_{T1}} + \frac{1}{(R_x + R_3)} \rightarrow R_{T2} = \frac{30\Omega \times (R_x + 5\Omega)}{30\Omega + R_x + 5\Omega}$$

Finalmente:

$$75 \Omega = R_x + R_{T2}$$

$$75 \Omega = R_x + \frac{30 \Omega \times (R_x + 5 \Omega)}{30 \Omega + R_x + 5 \Omega}$$

$$R_x^2 - 10 * R_x - 2475 = 0 \rightarrow R_{x1} = -45 \Omega, \quad \mathbf{R_{x2} = 55 \Omega}$$

Dado que no puede ser negativo el resultado, se considera la respuesta $\mathbf{R_{x2} = 55 \Omega}$.

26. Una diferencia de potencial $\mathbf{V = 50 V}$ se aplica entre los puntos a y b del circuito de la Fig. 9.6. Calcular la corriente en cada una de las resistencias.

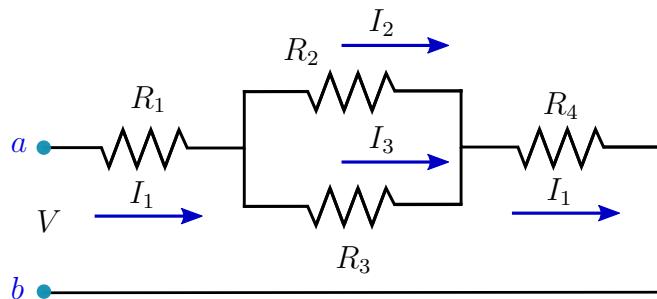


Figura 9.6: Circuito del ejercicio 26

En primer lugar, se debe obtener el valor R_T :

$$R_T = R_1 + R_{23} + R_4 = R_1 + \frac{R_2 \times R_3}{R_2 + R_3} + R_4 = 17,11 \Omega$$

Cálculo de I_1 :

$$I_1 = \frac{V}{R_T} = 2,92 \Omega$$

Cálculo de Voltaje en R_2 y R_3 :

$$V_{//} = I_1 \times R_{23} = 12 \text{ V}$$

Cálculo de I en cada rama:

$$I_2 = \frac{V_{//}}{R_2} = 1,71 \text{ A} \quad I_3 = \frac{V_{//}}{R_3} = 1,2 \text{ A}$$

27. **TAREA** La Fig. 9.7 muestra un tramo de un circuito recorrido por una corriente de **320 mA**. Determine la diferencia de potencial entre los puntos **a** y **b**. $\mathbf{R = 1,87 \text{ V}}$

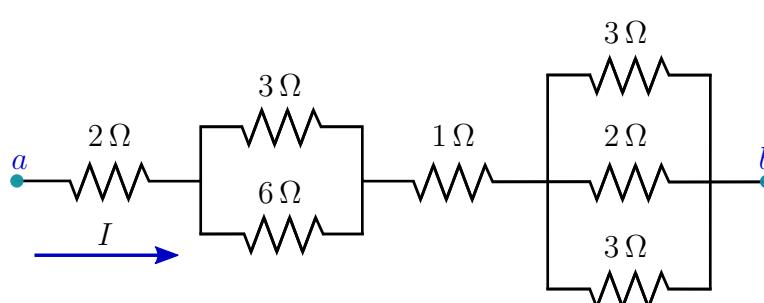


Figura 9.7: Circuito del ejercicio 27

28. **TAREA** Calcular la diferencia de potencial (*ddp*) entre los extremos *a* y *b* de cada uno de los tramos que se muestran a en la Fig. 9.8. Tomar como potencial cero de referencia el de la toma a tierra. **R:** **A = 20 V, B = 12 V.**

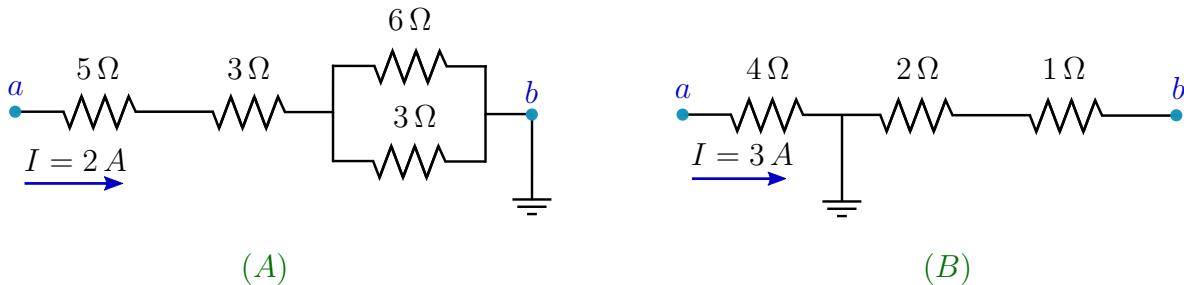


Figura 9.8: Circuito del ejercicio 28

29. En un circuito *RC*, ¿cuantas veces transcurre la constante de tiempo (τ) antes de que el condensador se cargue hasta el **90 %** de su carga de equilibrio? ¿Y hasta el **99 %**?

La función de carga del condensador está dada por:

$$q(t) = Q \times [1 - e^{-t/RC}], \quad \tau = RC \quad (9.13)$$

Entonces, si se desea calcular la constante de tiempo τ para los casos de 90 % y 99 % de la carga final Q , se plantea:

$$\begin{aligned} 0,9 \times Q &= Q \times [1 - e^{-t/RC}] \\ \ln(0,1) &= -\frac{t}{RC} \rightarrow t = 2,3 \times RC = 2,3 * \tau \\ 0,99 * Q &= Q * [1 - e^{-t/RC}] \\ \ln(0,01) &= -\frac{t}{RC} \rightarrow t = 4,6 * \tau \end{aligned}$$

30. Una resistencia de **$3 \times 10^6 \Omega$** y un condensador de **$1 \mu F$** se conectan en serie con una fuente **E = 4 V**. Al cabo de **2 s** de conectar la fuente, calcular:

- a) **Carga en el condensador.** Mediante la Ec. (8.6) y la Ec. (9.13) :

$$q(t) = CV \times [1 - e^{-t/RC}] = 1 \mu F \times 4 V \times [1 - e^{-2s/(3 \times 10^6 \Omega \cdot 1 \mu F)}] = 1,94 \mu C$$

- b) **Acumulación de energía en el condensador.** Utilizando la Ec. de energía:

$$E_C = \frac{Q^2}{2 \times C} = \frac{(1,94 \mu C)^2}{2 \times 1 \mu F} = 1,89 \mu J$$

- c) **Disipación por el efecto Joule en la resistencia.** La corriente que circula está dada por:

$$I(t) = \frac{V}{R} \times e^{-t/RC} \quad (9.14)$$

Cálculo de la disipación por Efecto Joule:

$$\begin{aligned}E_R &= \int_0^t I(t)^2 \times R \times dt = \int_0^t \left(\frac{V}{R} \times e^{-t/RC} \right)^2 \times R \times dt \\E_R &= \frac{V^2}{R} \int_0^t e^{-2t/RC} \times dt = \frac{V^2}{R} \times \frac{RC}{2} \times \left[-e^{-2t/RC} \right]_0^t \\E_R &= \frac{V^2 \times C}{2} \times \left[1 - e^{-2t/RC} \right] = 5,89 \mu\text{J}\end{aligned}$$

d) **Energía proporcionada por la fuente.**

$$\begin{aligned}E_F &= \int_0^t V \times I(t) \times dt = V \times \int_0^t \left(\frac{V}{R} \times e^{-t/RC} \right) \times dt \\E_F &= \frac{V^2}{R} \int_0^t e^{-t/RC} \times dt = \frac{V^2}{R} \times RC \times \left[-e^{-t/RC} \right]_0^t \\E_F &= V^2 \times C \times \left[1 - e^{-t/RC} \right] = E_R + E_C = 7,78 \mu\text{J}\end{aligned}$$

31. **TAREA** Considere un circuito en serie con un interruptor para el cual $\mathbf{R} = 1 \text{ M}\Omega$, $\mathbf{C} = 5 \mu\text{F}$ y $\mathbf{E} = 30 \text{ V}$. Determine **a)** constante de tiempo del circuito; **b)** carga máxima en el capacitor después de que el interruptor se cierra; **c)** ¿cuál es el valor de la resistencia del circuito **10 s** después de cerrar el interruptor?

R: a) 5 seg; b) $150 \mu\text{C}$; c) $7,39 \text{ M}\Omega$

32. **TAREA** Un capacitor de $750 \mu\text{F}$ tiene una carga inicial de $6 \mu\text{C}$. Luego se le conecta una $\mathbf{R} = 150 \Omega$ y se lo deja descargar. ¿Cuál es la constante de tiempo del circuito?

R = 0,1125s

33. **TAREA** Un capacitor de un circuito RC se carga hasta el 60% de su máximo valor en **0,9 s**, ¿Cuál es la constante de tiempo del circuito?

R = 0,9822 s

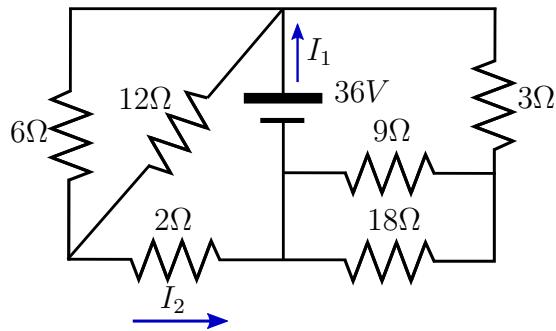
34. **TAREA** Los materiales dieléctricos utilizados en la fabricación de condensadores se caracterizan por tener una conductividad muy baja pero no cero. Por lo tanto, un condensador cargado perdería totalmente su carga por fuga a través del dieléctrico. Si cierto capacitor de **3,6 μF** fuga carga de tal manera que la diferencia de potencial disminuye hasta la mitad de su valor inicial en **4 s**. ¿Cuál es la resistencia equivalente del dieléctrico?

R = 1,6MΩ

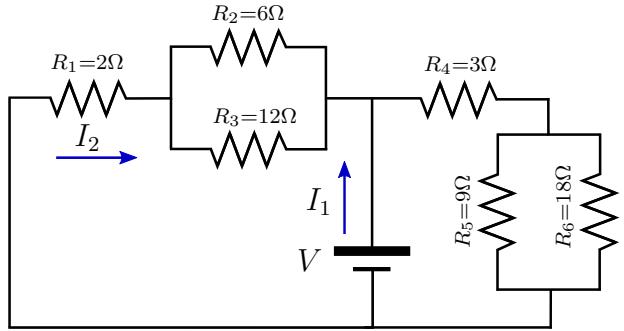
Capítulo 10

Circuitos de Corriente Continua

1. En el circuito de la Fig. 10.1a encontrar la resistencia equivalente y las corrientes I_1 e I_2 .



(a) Circuito del ejercicio 1



(b) Mejor visualización.

Figura 10.1: Esquemas.

Se puede reacomodar el circuito para una mejor visualización (ver Fig. 10.1b). Luego, se calcula la R_T de la siguiente manera:

$$R_{T1} = R_1 + \frac{R_2 \times R_3}{R_2 + R_3} = 6\Omega \quad R_{T2} = R_4 + \frac{R_5 \times sR_6}{R_5 + R_6} = 9\Omega$$

$$R_T = \frac{R_{T1} * R_{T2}}{R_{T1} + R_{T2}} = 3,6\Omega$$

Cálculo de corrientes:

$$I_1 = \frac{V}{R_T} = 10\text{ A}$$

$$I_2 = \frac{V}{R_{T1}} = 6\text{ A}$$

2. En el circuito de la Fig. 10.2 calcular las corrientes en cada una de las ramas del circuito.

Cálculo de R_T :

$$R_{T1} = \frac{R_3 \times R_4}{R_3 + R_4} + R_5 = 3\Omega$$

$$R_T = \frac{R_{T1} \times R_6}{R_{T1} + R_6} + R_1 + R_2 = 8\Omega$$

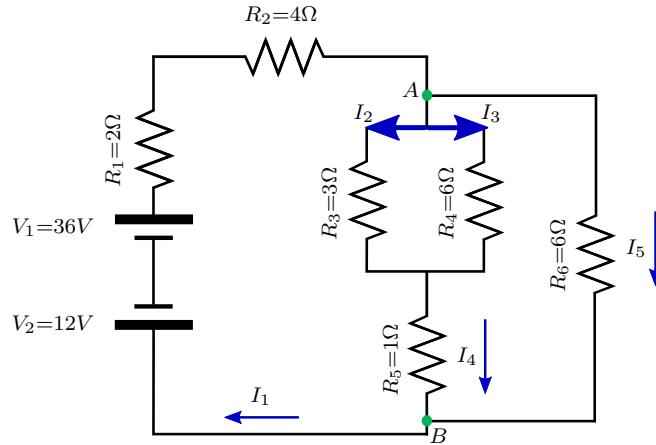


Figura 10.2: Circuito del ejercicio 2

Cálculo de la corriente I_1 (las fuentes se restan porque están en oposición):

$$I_1 = \frac{36V - 12V}{R_T} = 3 \text{ A}$$

Cálculo de la diferencia de potencial entre los bornes A y B :

$$V_{AB} = I_1 \times R_{//} = I_1 \times \frac{R_{T1} \times R_6}{R_{T1} + R_6} = 6 \text{ V}$$

Cálculo de corrientes:

$$I_2 = \frac{I_4 \left(\frac{R_3 \times R_4}{R_3 + R_4} \right)}{R_3} = \frac{4}{3} \text{ A}; \quad I_3 = I_4 - I_2 = \frac{2}{3} \text{ A}; \quad I_4 = \frac{V_{AB}}{R_{T1}} = 2 \text{ A}; \quad I_5 = \frac{V_{AB}}{R_6} = 1 \text{ A}$$

3. En el circuito de la Fig. 10.3 la lectura del amperímetro A_1 es **2 A**. Calcular el valor de V_2 y las lecturas del amperímetro A_2 y el voltímetro V_m .

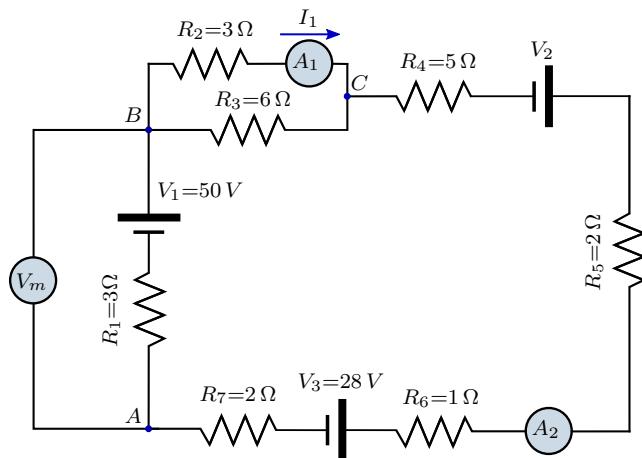


Figura 10.3: Circuito del ejercicio 3

Cálculo de R_T :

$$R_T = R_1 + \frac{R_2 \times R_3}{R_2 + R_3} + R_4 + R_5 + R_6 + R_7 = 15 \Omega$$

Cálculo de la diferencia de potencial en el paralelo entre R_2 y R_3 :

$$V_{//} = I_1 \times R_2 = 6 \text{ V}$$

Cálculo de la I_{R_3} :

$$I_{R_3} = \frac{V_{//}}{R_3} = 1 \text{ A}$$

Antes de continuar es necesario mencionar las Leyes de Kirchhoff:

La 1^{ra} Ley de Kirchhoff expresa: “En cualquier nodo, la suma de las corrientes que entran en ese nodo es igual a la suma de las corrientes que salen”.

$$\sum_{k=1}^n I_k = I_1 + \dots + I_n = 0 \quad (10.1)$$

Se consideran corrientes entrantes al NODO como (+) y salientes (-). En nodo C:

$$I_1 + I_{R_3} - I_2 = 0 \rightarrow I_2 = I_1 + I_{R_3} = 3 \text{ A}$$

La 2^{da} Ley de Kirchhoff expresa: “En un lazo cerrado, la suma de todas las caídas de tensión es igual a la tensión total suministrada. De forma equivalente, la suma algebraica de las diferencias de potencial eléctrico en un lazo es igual a cero”.

$$\sum_{k=1}^n V_k = V_1 + \dots + V_n = 0 \quad (10.2)$$

Para obtener el valor de V_2 se puede aplicar (10.2) recorriendo la malla. Una opción es empezar el recorrido desde V_1 :

$$V_1 - V_{//} - I_2 \times R_4 + V_2 - I_2 \times (R_5 + R_6) - V_3 - I_2 \times (R_7 + R_1) = 0 \\ \mathbf{V_2 = 23 V}$$

Para calcular la lectura de V_m se despeja la diferencia de potencial entre A y B:

$$V_{BA} = V_1 - I_2 \times R_1 = V_{//} + I_2 \times R_4 - V_2 + I_2 \times (R_5 + R_6) + V_3 + I_2 \times R_7 \\ \mathbf{V_{BA} = 41 V}$$

4. En el circuito de la Fig. 10.4 calcular la corriente I_2 , la resistencia R y la f.e.m siendo $\mathbf{I}_1 = 5 \text{ A}$ e $\mathbf{I}_3 = 3,1 \text{ A}$.

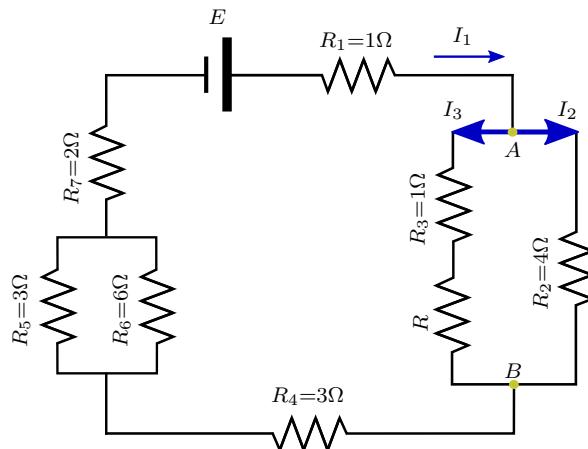


Figura 10.4: Circuito del ejercicio 4

Aplicando la Ec. (10.1) al nodo A:

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0 \rightarrow I_2 = 5A - 3,1A = 1,9\text{A}$$

Cálculo de la diferencia de potencial entre los nodos A y B:

$$V_{AB} = I_2 \times R_2 = 7,6 \text{ V}$$

Cálculo de R:

$$V_{AB} = I_3 \times (R_3 + R) \rightarrow R = 1,45 \Omega$$

Se aplica sobre la malla la Ec. (10.2):

$$E = I_1 \times R_1 + V_{AB} + I_1 \times R_4 + I_1 \times \frac{R_5 \times R_6}{R_5 + R_6} + I_1 \times R_7 = 47,6 \text{ V}$$

5. Resolver el circuito de la Fig. 10.5. Calcular la diferencia de potencial entre **a** y **b**, las corrientes de cada R y la R_T .

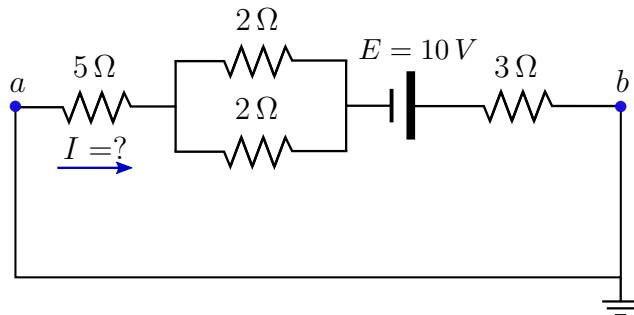


Figura 10.5: Circuito del ejercicio 5

Cálculo de R_T :

$$R_T = 5\Omega + \frac{2\Omega \times 2\Omega}{2\Omega + 2\Omega} + 3\Omega = 9\Omega$$

Cálculo de I :

$$I = \frac{E}{R_T} = \frac{10V}{9\Omega} = 1,11\text{ A}$$

Cálculo de la diferencia de potencial en el paralelo:

$$V_{//} = I \times \frac{2\Omega \times 2\Omega}{2\Omega + 2\Omega} = 1,11\text{ V}$$

Por lo cual, la corriente en cada rama será:

$$I_{2\Omega} = \frac{V_{//}}{2\Omega} = 0,55\text{ A}$$

Cálculo de V_{ab} , mediante Ec. (10.2):

$$\begin{aligned} V_a - I \times 5\Omega - I \times \frac{2\Omega \times 2\Omega}{2\Omega + 2\Omega} + E - I \times 5\Omega - V_b &= 0 \\ V_a - V_b &= 0 \text{ V} \end{aligned}$$

6. **TAREA** Resolver el circuito de la Fig. 10.6. Calcular R_T y las corrientes de cada rama.

$$\mathbf{R} : I_{R_1} = 2,2 \text{ A}, I_{R_4} = 1,65 \text{ A}, I_{R_5} = 0,55 \text{ A}, R_T = 15 \Omega$$

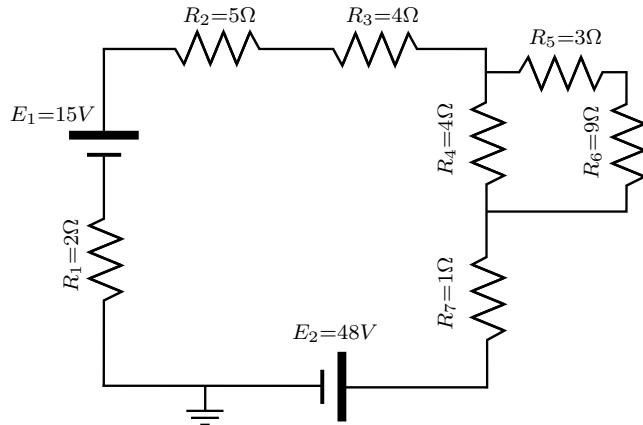


Figura 10.6: Circuito del ejercicio 6

7. Calcular el valor de las intensidades de corriente en cada una de las ramas del circuito de la Fig. 10.7 aplicando las Leyes de Kirchhoff.

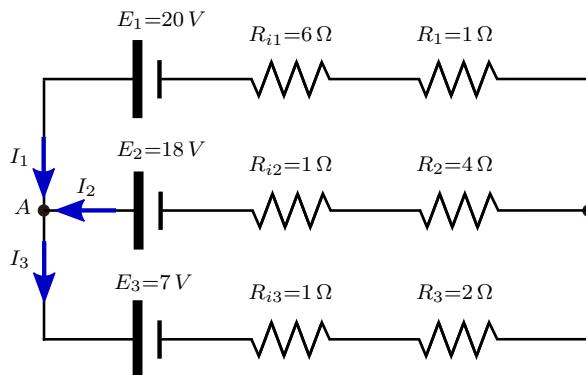


Figura 10.7: Circuito del ejercicio 7

En base a las mallas mostradas en la Fig. 10.8 se escriben las ecuaciones de malla.

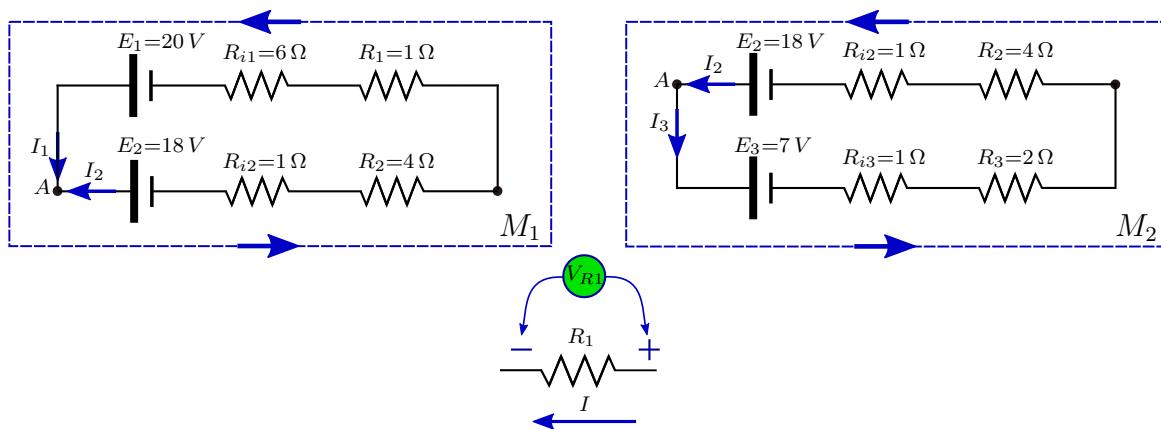


Figura 10.8: Esquema de solución del ejercicio 7

La caída de potencial en cada R se calcula de la misma manera que V_{R_1} . Por otro lado, las corrientes I_1 , I_2 e I_3 están circunscritas a su rama (van de nodo a nodo). Entonces, para la malla M_1 se escribe:

$$E_1 - E_2 - I_1 \times (R_{i1} + R_1) + I_2 \times (R_{i2} + R_2) = 0$$

Y para la malla M_2 :

$$E_2 - E_3 - I_2 \times (R_{i2} + R_2) - I_3 \times (R_{i3} + R_3) = 0$$

Se puede escribir una tercer ecuación, en base a la Ec. (10.1):

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0$$

Queda armado un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} E_1 - E_2 - I_1 \times (R_{i1} + R_1) + I_2 \times (R_{i2} + R_2) = 0 & (1) \\ E_2 - E_3 - I_2 \times (R_{i2} + R_2) - I_3 \times (R_{i3} + R_3) = 0 & (2) \\ I_1 + I_2 - I_3 = 0 & (3) \end{cases}$$

Se despeja I_1 de (3) y se introduce en (1); el resultado es el siguiente:

$$\begin{cases} E_1 - E_2 - (I_3 - I_2) \times (R_{i1} + R_1) + I_2 \times (R_{i2} + R_2) = 0 & (4) \\ E_2 - E_3 - I_2 \times (R_{i2} + R_2) - I_3 \times (R_{i3} + R_3) = 0 & (5) \end{cases}$$

Solucionando este nuevo sistema se obtienen las corrientes I_1 e I_2 :

$$\mathbf{I}_2 = 1 \text{ A}$$

$$\mathbf{I}_3 = 2 \text{ A}$$

Finalmente, con la ecuación (3) se calcula $I_3 - I_2 = \mathbf{I}_1 = 1 \text{ A}$

8. En el circuito de la Fig. 10.9 (izquierda) utilice las reglas de Kirchhoff para determinar la corriente en cada resistencia y la diferencia de potencial entre **a** y **b**. Supóngase $\mathbf{E}_1 = 6 \text{ V}$, $\mathbf{E}_2 = 5 \text{ V}$, $\mathbf{E}_3 = 4 \text{ V}$.

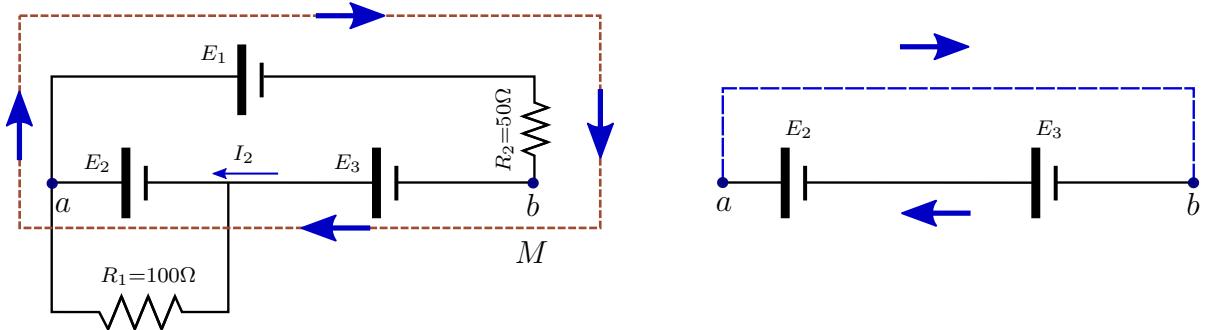


Figura 10.9: Circuito del ejercicio 8

De acuerdo a la 2^{da} Ley de Kirchhoff se recorre la malla M partiendo de E_2 :

$$E_2 + E_3 - I_2 \times R_2 - E_1 = 0 \rightarrow \mathbf{I}_2 = 60 \text{ mA}$$

La R_1 está expuesta a la fuente E_2 :

$$I_1 = \frac{E_2}{R_1} = \mathbf{I_1 = 50 \text{ mA}}$$

Para el cálculo de V_{ba} se recorre la malla que une a y b como muestra la Fig. 10.9 (derecha):

$$\begin{aligned} V_a + E_2 + E_3 - V_b &= 0 \\ V_b - V_a &= V_{ba} = E_2 + E_3 = \mathbf{9 \text{ V}} \end{aligned}$$

9. Determine los valores de I_1 , I_2 , e I_3 en el circuito de la Fig. 10.10. Utilice las reglas de Kirchhoff.

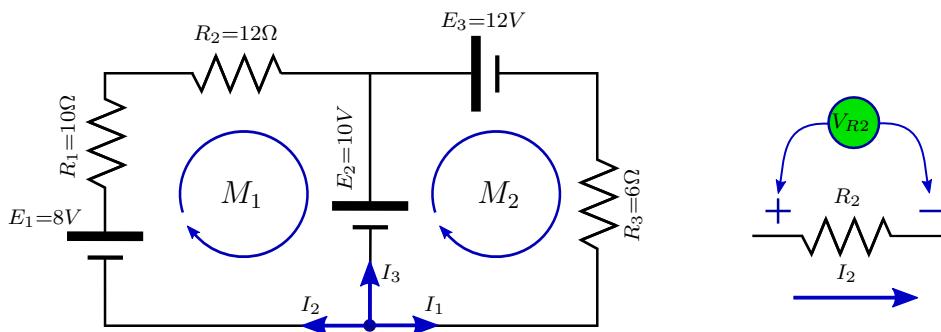


Figura 10.10: Circuito del ejercicio 9

Se escriben las ecuaciones de malla de acuerdo a la figura, teniendo en cuenta las corrientes de rama propuestas. I_1 , I_2 e I_3 se suponen con un sentido, luego el cálculo demostrará si son correctas estas suposiciones:

$$\begin{aligned} (M_1) \quad E_1 - I_2 \times (R_1 + R_2) - E_2 &= 0 \\ (M_2) \quad E_2 - E_3 + I_1 \times (R_3) &= 0 \end{aligned}$$

El sistema de ecuaciones debe incluir la ecuación de corrientes de acuerdo a (10.2):

$$\begin{cases} E_1 - I_2 \times (R_1 + R_2) - E_2 = 0 & (1) \\ E_2 - E_3 + I_1 \times (R_3) = 0 & (2) \\ I_1 + I_2 + I_3 = 0 & (3) \end{cases}$$

De (1) se despeja I_2 y de (2) se obtiene I_1 :

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2} = -0,09 \text{ A} \\ I_1 &= \frac{E_3 - E_2}{R_3} = 0,33 \text{ A} \end{aligned}$$

Cálculo de I_3 mediante (3):

$$I_3 = -I_1 - I_2 = -0,24 \text{ A}$$

NOTA: El resultado indica que I_2 e I_3 tienen sentido contrario al propuesto.

10. Resolver el circuito mostrado en la Fig. 10.11 (izquierda) e indicar la lectura de cada instrumento. Considerar nula la resistencia de los amperímetros e infinita la de los voltímetros. Indicar el sentido de las corrientes en las ramas que contienen amperímetros.

Cálculo de R_T :

$$R_T = R_1 + \frac{R_2 \times R_3}{R_2 + R_3} + \frac{R_4 \times R_5}{R_4 + R_5} + R_6 = 12 \Omega$$

En base a la malla M_2 de la Fig. 10.11 se procede a calcular I_1 :

$$E_1 - I_1 \times R_T - E_2 - E_3 = 0 \rightarrow I_1 = 3,33 \text{ A}$$

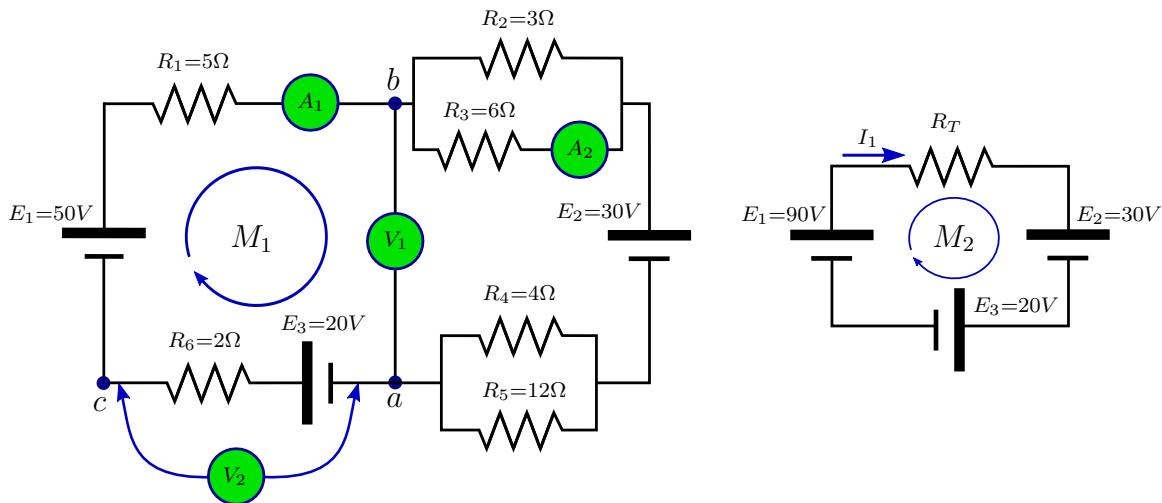


Figura 10.11: Circuito del ejercicio 10

El sentido de I_1 está definido de acuerdo a E_1 . Para el cálculo de la lectura de A_2 es necesario obtener la diferencia de potencial del paralelo correspondiente:

$$V_{//} = I_1 \times \frac{R_2 \times R_3}{R_2 + R_3} = 6,66 \text{ V}$$

Entonces:

$$I_2 = \frac{V_{//}}{R_3} = 1,11 \text{ A}$$

Para la lectura V_1 se recorre la malla M_1 y se obtiene la diferencia de potencial entre los nodos a y b :

$$\begin{aligned} V_a + E_3 - I_1 \times R_6 + E_1 - I_1 \times R_1 - V_b &= 0 \\ V_b - V_a &= V_{ba} = 46,66 \text{ V} \end{aligned}$$

Finalmente para la lectura de V_2 , se busca la diferencia de potencial entre c y a :

$$\begin{aligned} V_c + I_1 \times R_6 - E_3 - V_a &= 0 \\ V_c - V_a &= V_{ca} = 13,33 \text{ V} \end{aligned}$$

11. Dar las lecturas de los amperímetros A_1 y A_2 cuando el cursor está en las posiciones 1 y 2 del resistor variable (Ver Fig. 10.12).

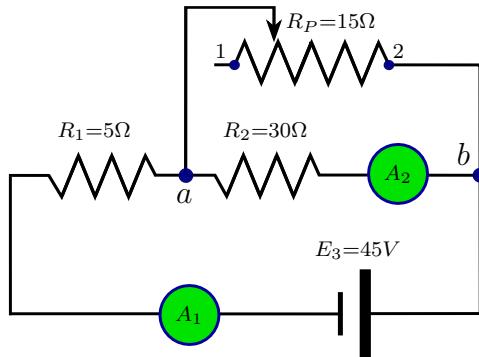


Figura 10.12: Circuito del ejercicio 11

Dado que el resistor variable posee dos posiciones, se poseerán dos resistencias equivalentes. Para posición 1, $R_P = 15 \Omega$, por lo tanto:

$$R_{T1} = \frac{15 \Omega \times 30 \Omega}{15 \Omega + 30 \Omega} + R_1 = 15 \Omega$$

Cálculo de la lectura de A_1 :

$$I_1 = \frac{45 V}{R_{T1}} = 3 \text{ A}$$

Para la lectura de A_2 se debe calcular la diferencia de potencial entre a y b:

$$V_{ab} = I_1 \times \frac{15 \Omega \times 30 \Omega}{15 \Omega + 30 \Omega} = 30 \text{ V} \rightarrow I_2 = \frac{V_{ab}}{30 \Omega} = 1 \text{ A}$$

Para la posición 2, $R_P = 0 \Omega$ por lo cual el A_2 no leerá ninguna corriente ya que la corriente circulará por la rama de resistencia 0. En otras palabras, la resistencia del paralelo es ~ 0 :

$$R_{//} = \frac{0 \Omega \times 30 \Omega}{0 \Omega + 30 \Omega} = 0 \Omega \rightarrow I_1 = \frac{45 V}{R_1} = 9 \text{ A}$$

12. **TAREA** Determinar la R_{shunt} del circuito de la Fig. 10.13 que permite llevar la escala de un miliamperímetro de fondo de escala **10 mA** y $R_g = 2 \Omega$ hasta **20, 30** y **50 mA** respectivamente. $R : R_{20mA} = 2 \Omega$, $R_{30mA} = 1 \Omega$, $R_{50mA} = 0,5 \Omega$

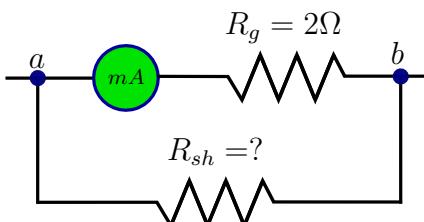


Figura 10.13: Circuito del ejercicio 12

13. **TAREA** En el circuito de la Fig. 10.14 se dispone de una $R_{\text{shunt}} = 4 \Omega$. Calcular el valor de la resistencia R_X para obtener la multiplicación de escala indicada en cada caso del ejercicio anterior.

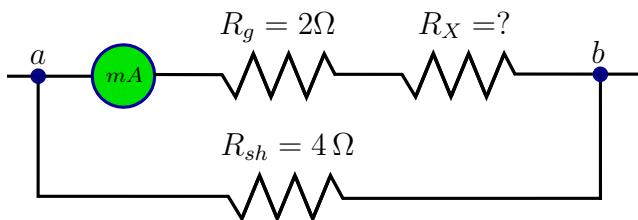


Figura 10.14: Circuito del ejercicio 13

14. **TAREA** Dado el circuito de la Fig. 10.15 se pide calcular la resistencia multiplicadora para llevar la escala de un voltímetro de fondo de escala **5 V** y $R_g = 10 \text{ k}\Omega$ a marcar **10, 15** y **50 V** respectivamente. $\mathbf{R : R_{10V} = 10k\Omega, R_{15V} = 20k\Omega, R_{50V} = 90k\Omega}$

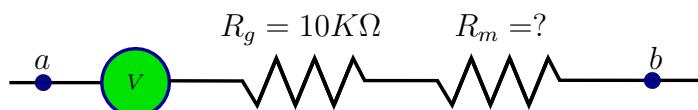


Figura 10.15: Circuito del ejercicio 14

15. **TAREA** Un medidor móvil tiene una resistencia interna de **100 Ω** y da una deflexión a escala completa cuando lleva una corriente de **25 μA**. a) ¿Qué resistencia se debe conectar en paralelo con el medidor para construir un amperímetro que tuviera una deflexión a escala completa para una corriente de **1 A**? b) ¿Qué resistencia se debe conectar en serie con el medidor para construir un voltímetro que tuviera una deflexión a escala completa para **20 V**?

R: a) $R_s = 2,5 \text{ m}\Omega$, b) $R_v = 799,9 \text{ k}\Omega$

16. **TAREA** ¿Cuál deberá ser el valor de R_x para que el puente de Wheatstone de la Fig. 10.16 esté balanceado (galvanómetro indica cero)? Datos: $\mathbf{R_1 = 100 \Omega, R_2 = 50 \Omega, R_3 = R_4 = 200 \Omega}$.

Resultado = 225 Ω

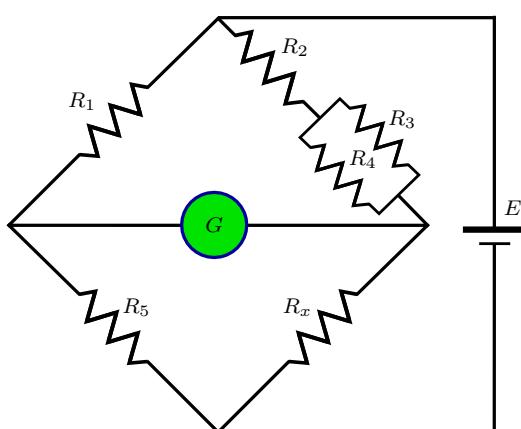


Figura 10.16: Puente de Wheatstone del ejercicio 16

Capítulo 11

Campo de Inducción Magnética

- Determine una expresión para el vector campo de inducción magnética en un punto ubicado a una distancia R de un conductor largo ($l \rightarrow \infty$) que lleva una corriente i .

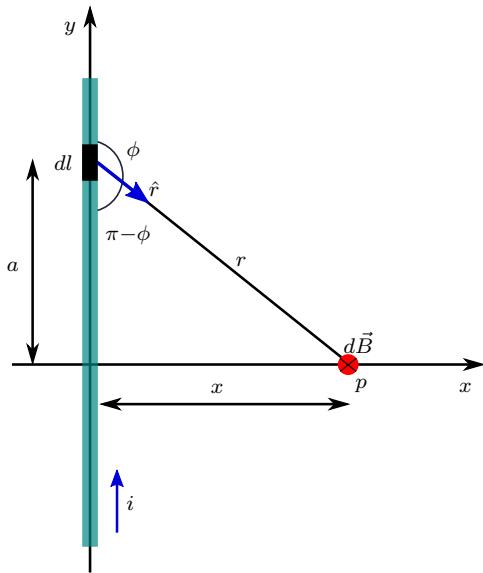


Figura 11.1: Esquema del ejercicio 1

Según la Ley de Biot-Savart, el campo debido a un elemento de corriente está dado por:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i \cdot d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} \quad (11.1)$$

Suponiendo en un caso inicial que el conductor tiene una longitud $2a$, se integra:

$$B = \frac{\mu_0 \cdot i}{4\pi} \int_{-a}^a \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

$d\vec{l} \times \hat{r}$ es un producto vectorial y \hat{r} un versor unitario, por lo cual:

$$\begin{aligned} d\vec{l} \times \hat{r} &= d\vec{l} \cdot \hat{r} \cdot \sin \phi \\ B &= \frac{\mu_0 \cdot i}{4\pi} \int_{-a}^a \frac{d\vec{l} \cdot \sin \phi}{r^2} \end{aligned}$$

Observando la Fig. 11.1:

$$\sin \phi = \sin(\pi - \phi) = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad y \quad d\vec{l} = d\vec{y}$$

Reemplazando:

$$B = \frac{\mu_0 \cdot i}{4\pi} \int_{-a}^a d\vec{y} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \underbrace{\frac{1}{x^2 + y^2}}_{r^2} = \frac{\mu_0 \cdot i}{4\pi} \int_{-a}^a \frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} d\vec{y} = \frac{\mu_0 \cdot i}{4\pi} \frac{2a}{x\sqrt{x^2 + a^2}}$$

$$B = \frac{\mu_0 \cdot i}{4\pi} \frac{2a}{x\sqrt{x^2 + a^2}} \quad (11.2)$$

Si $a \rightarrow \infty$:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 \cdot \mathbf{i}}{2\pi \cdot \mathbf{x}} \quad (11.3)$$

2. Un conductor largo lleva una corriente de **10 A**. ¿A qué distancia del conductor la magnitud del campo magnético resultante es igual a **100 μT** ?

Dado que no se ofrece la longitud del conductor, se considera que $l \rightarrow \infty$. Mediante la Ec. (11.3), se despeja la distancia x :

$$B = \frac{\mu_0 \cdot i}{2\pi \cdot x} = 100 \mu T = \frac{4\pi \times 10^{-7} \frac{T \cdot m}{A} * 10 A}{2\pi * x} \rightarrow x = 0,02 \text{ m}$$

3. Una brújula está situada a **0,70 m** por encima de un conductor recto largo que transporta una corriente continua de **70 A** y que circula de sur a norte. Calcular el ángulo que se desviará la aguja de la brújula. La componente horizontal del campo magnético terrestre es aproximadamente **$0,2 \times 10^{-4} \text{ T}$** .

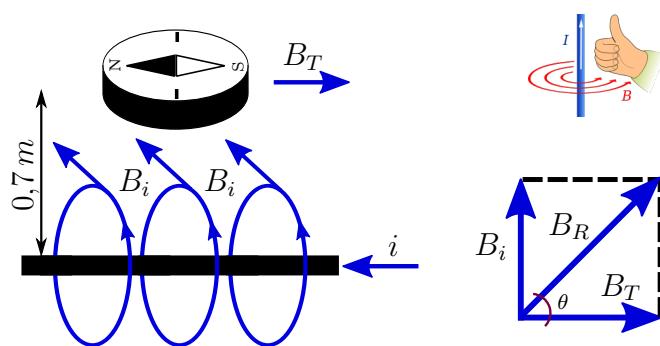


Figura 11.2: Esquema del ejercicio 3

En base a la regla de la mano derecha que se muestra a la derecha de la Fig. 11.2 se pueden determinar las líneas tangenciales de campo sobre la brújula. Su magnitud está dada por la Ec. (11.3) ($l \rightarrow \infty$):

$$B_i = \frac{4\pi \times 10^{-7} \frac{T \cdot m}{A} * 70 A}{2\pi * 0,7 \text{ m}} = 0,2 \times 10^{-4} \text{ T}$$

Se poseen dos componentes de campo sobre el plano brújula, uno debido al campo terrestre B_T y la otra generada por i , B_i . Entonces:

$$|B_R| = \sqrt{B_i^2 + B_T^2} = 28,28 \mu\text{T}$$

$$\theta = \arctg \frac{B_i}{B_T} = 45^\circ$$

4. Dado un conductor rectilíneo de longitud l_{finita} por el que circula una corriente \mathbf{i} , determine una expresión para el vector campo de inducción magnética en un punto ubicado a una distancia $\mathbf{R} = 0,5 \text{ m}$ del conductor. A continuación estudie el comportamiento de la expresión obtenida para el caso $l \rightarrow \infty$. Calcule el campo en ambas situaciones para el caso que se muestra en la Fig. 11.3.

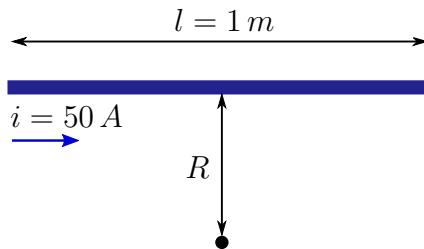


Figura 11.3: Esquema del ejercicio 4

La expresión ya fue calculada en el ejercicio 11.1. Utilizando la Ec. (11.2) se calcula con $x = 0,5 \text{ m}$ y $a = 0,5 \text{ m}$:

$$B = \frac{\mu_0 \cdot i}{4\pi} \frac{2a}{x\sqrt{x^2 + a^2}} = 14,14 \mu\text{T}$$

Si $a \rightarrow \infty$, se utiliza Ec. (11.3):

$$B = \frac{\mu_0 \cdot i}{2\pi \cdot R} = 0,2 \times 10^{-4} \text{ T}$$

5. Un conductor forma un cuadrado cuyos lados tienen una longitud $\mathbf{L} = 0,4 \text{ m}$. Este lleva una corriente $\mathbf{i} = 10 \text{ A}$. Calcular el vector campo de inducción magnética B en el centro del cuadrado (ver Fig. 11.4).

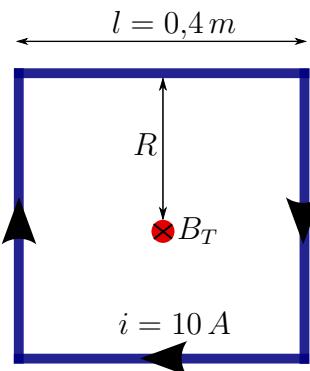


Figura 11.4: Esquema del ejercicio 5

Mediante la regla de la mano derecha se determina que cada lado suma una componente B_i en el centro (cada componente apunta hacia el mismo lugar). Siendo $R = l/2 = 0,2\text{ m}$:

$$B = \frac{\mu_0 \cdot i}{4\pi} \frac{2(l/2)}{R\sqrt{R^2 + (l/2)^2}} = 7,07 \mu\text{T}$$

Entonces:

$$B_T = 4 \times B_i = 28,28 \mu\text{T}$$

6. Dos largos conductores paralelos están recorridos por sendas corrientes $\mathbf{I}_1 = 20\text{ A}$ (saliente) e $\mathbf{I}_2 = 30\text{ A}$ (entrante), (ver Fig. 11.5). Calcular:

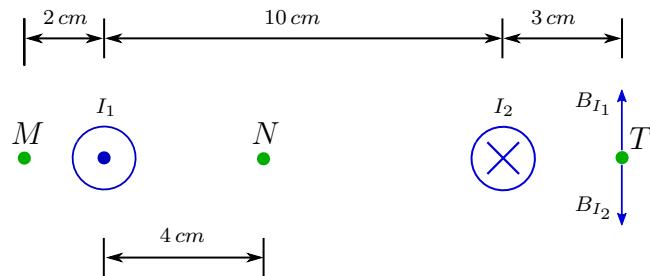


Figura 11.5: Esquema del ejercicio 6

- a) El vector campo de inducción B en los puntos M , N y T . Como ejemplo, se va a calcular el campo total en el punto T , el alumno, siguiendo el mismo procedimiento podrá calcular los puntos restantes. Mediante la regla de la mano derecha, como se muestra en la Fig. 11.2, se averiguan los vectores resultantes de campo magnético sobre T (ver Fig. 11.5). Luego mediante la Ec. (11.3):

$$B_T = B_{I_2} - B_{I_1} = \frac{\mu_0 \cdot I_2}{2\pi \cdot x_1} - \frac{\mu_0 \cdot I_1}{2\pi \cdot x_2} = 200 \mu\text{T} - 30,76 \mu\text{T} = -169,24 \mu\text{T}$$

Tomando una referencia (x, y) estándar, el campo es negativo en el eje y : $-169,24 \mu\text{T} \hat{j}$.

- b) TAREA: El valor y el sentido de la corriente I_2 para que el campo de inducción resultante en el punto T sea nulo.
7. Dados los dos largos conductores coplanares de la Fig. 11.6, calcular:

- a) el vector campo de inducción \vec{B} en los puntos A y B . En base a la Ec. (11.3) y planteando un plano 3D, con los versores $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$, para poder aplicar la regla de la mano derecha, se tiene:

$$\vec{B}_A = \vec{B}_{I_1} - \vec{B}_{I_2} = \frac{\mu_0 \cdot I_1}{2\pi \times 0,02\text{ m}} - \frac{\mu_0 \cdot I_2}{2\pi \times 0,04\text{ m}} = 3 \times 10^{-4} \text{ T} \hat{k}$$

$$\vec{B}_B = -\vec{B}_{I_1} - \vec{B}_{I_2} = -\frac{\mu_0 \cdot I_1}{2\pi \times 0,02\text{ m}} - \frac{\mu_0 \cdot I_2}{2\pi \times 0,04\text{ m}} = -5 \times 10^{-4} \text{ T} \hat{k}$$

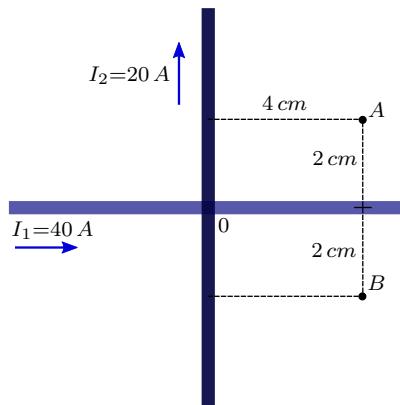


Figura 11.6: Esquema del ejercicio 7

- b) Adoptando el sistema cartesiano (x, y) con origen en 0 encontrar la relación funcional $y = f(x)$ correspondiente a los puntos del plano que tienen campo resultante nulo. Representar gráficamente dicha expresión y marcar las diferentes áreas del plano en que el campo es saliente o entrante. Para que el campo $\vec{B}(x, y)$ sea 0, se tiene que cumplir:

$$B(x, y) = \vec{B}_{I_1} - \vec{B}_{I_2} = \frac{\mu_0 \cdot I_1}{2\pi \times y} - \frac{\mu_0 \cdot I_2}{2\pi \times x} = 0$$

\vec{B}_{I_1} está en función de los desplazamientos y , y \vec{B}_{I_2} en función de los desplazamientos x del eje cartesiano que pide el punto b. Se puede despejar $B(x, y)$ para llegar a la relación funcional requerida:

$$\frac{\mu_0 \cdot I_1}{2\pi \times y} = \frac{\mu_0 \cdot I_2}{2\pi \times x}$$

$$y = \frac{I_1}{I_2}x = 2x$$

Los pares de puntos que ofrece la relación funcional $y = 2x$ (una recta), generan los puntos en el plano donde el campo $\vec{B} = 0$ (ver Fig. 11.7).

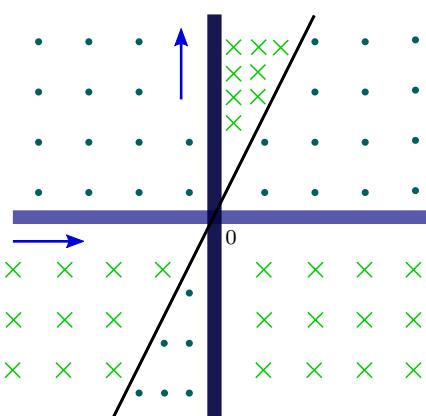


Figura 11.7: Áreas del plano donde el campo es entrante (x) o saliente (●). La recta demarca el campo $\vec{B} = 0$.

8. Con un trozo de alambre conductor se forma una espira circular. Si por el alambre circula una corriente de **6 A**, ¿cuál deberá ser el radio de la espira, si se desea que el campo magnético en su centro sea de **15 μ T**? Determine en primera instancia una expresión para el campo magnético en un punto ubicado a una distancia z del plano (x, y) definido por la espira. Considere que por la espira circula una corriente I .

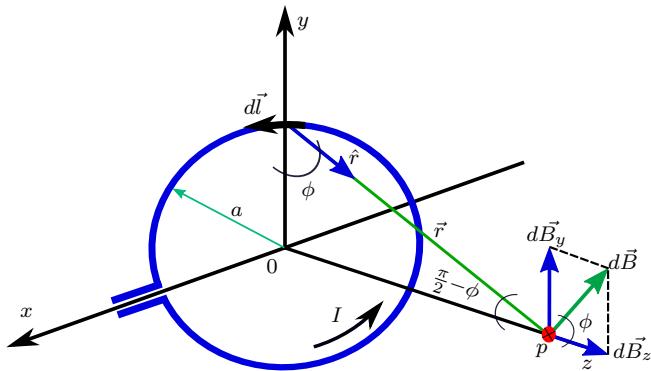


Figura 11.8: Esquema del ejercicio 8

En la Fig. 11.8 se puede ver una espira de radio a . Para calcular el campo en el punto p se utiliza la Ley de Biot y Savart, Ec. (11.1).

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i \cdot d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}; \quad \text{siendo} \quad r^2 = z^2 + a^2$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i \cdot d\vec{l} \times \hat{r}}{z^2 + a^2}$$

Las componentes del vector, en base a simples reglas trigonométricas, son:

$$dB_y = d\vec{B} \cdot \sin \phi = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{(z^2 + a^2)} \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}}$$

$$dB_z = d\vec{B} \cdot \cos \phi = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{(z^2 + a^2)} \frac{a}{\sqrt{z^2 + a^2}}$$

Como existe simetría rotacional respecto al eje z , la componente en el eje "y" es cero ($dB_y = 0$). Se integra la ecuación de componentes en z y se incluyen todos los elementos dl alrededor de la espira:

$$B_z = \int \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a \cdot dl}{(z^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \int dl$$

La integral de dl es la circunferencia $2\pi a$ de la espira. Finalmente:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I \cdot a^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}} \quad (11.4)$$

Para el cálculo pedido por el ejercicio, se tiene $z = 0$, $B = 15 \mu T$ e $I = 6 A$:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2a} \rightarrow a = \frac{\mu_0 I}{2B} = 0,25 \text{ m}$$

9. Si la longitud total del conductor del problema 5 se conforma en una sola espira circular con la misma corriente, calcular cuál será el valor del campo de inducción B en el centro de la espira.

*Se tiene que la circunferencia está dada por $4 \times 0,4\text{ m} = 2\pi a$; despejando el radio a queda en **0,25 m**. Finalmente:*

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2a} = \vec{B} = \frac{\mu_0 \times 10\text{ A}}{2 \times 0,25} = 25\mu\text{T}$$

10. **TAREA** Dos espiras circulares de **r = 4 cm** se hallan en planos paralelos a una distancia de **7 cm** una de otra. Por las espiras fluyen las corrientes **I₁ = I₂ = 2 A**. Hallar el valor del campo de inducción B en el eje de las espiras para el punto situado a la misma distancia de ellas. Resolver el problema para los siguientes casos: a) Las corrientes fluyen en el mismo sentido; b) Las corrientes fluyen en sentidos contrarios.

R: a) $4,49 \times 10^{-5}\text{ T}$; b) 0

11. ¿De cuantas vueltas deberá ser una bobina circular delgada, de radio **0,1 m**, para que cuando circule una corriente de **10 A**, el campo magnético en el centro sea de **3 mT**? En ese caso, ¿qué valor tendrá el campo magnético en un punto del eje situado a **3 cm** del centro?

Se utiliza la Ec. (11.4) multiplicada por la cantidad de vueltas:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I \cdot a^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}} \quad (11.5)$$

Si se calcula en el centro, $z = 0$, por lo tanto el campo magnético \vec{B} es:

$$B = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{2 \cdot a} \quad (11.6)$$

Por lo tanto, se despeja el valor N de la Ec. (11.6):

$$N = \frac{2 \times 3\text{ mT} \times 0,1\text{ m}}{10\text{ A} \times \mu_0} = 47,74 \text{ vueltas} \simeq 48 \text{ vueltas}$$

*Para calcular qué valor tendrá el campo magnético en un punto del eje situado a **3 cm** del centro, se usa la Ec. (11.5):*

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \times 48 \times 10\text{ A} \times (0,1\text{ m})^2}{2[(0,03\text{ m})^2 + (0,1\text{ m})^2]^{3/2}} = 2,65\text{ mT}$$

12. **TAREA** Calcular la cantidad de Ampere-vuelta que deberá tener una bobina circular plana de **$\phi = 10\text{ cm}$** de diámetro para lograr un campo **$B = 200 \times 10^{-4}\text{ T}$** en un punto situado sobre su eje, a una distancia de **3 cm** del centro de la misma.

R = 2524,22 Av

13. **TAREA** Una bobina solenoidal uniforme de **30 cm** de longitud y diámetro de **0,80 cm** tiene **2000 vueltas**. ¿Cuál es el campo dentro del solenoide cuando la corriente es de **600 mA**? Determine en primera instancia una expresión para el campo magnético dentro del solenoide. Considere una longitud **l**, un radio **r**, **N** vueltas y una corriente **i**.

R: $B = \frac{\mu_0 \times N \times i}{l}$, $B = 5\text{ mT}$.

14. **TAREA** ¿Qué corriente se requiere en el devanado de un solenoide que tiene **1000 vueltas** uniformemente distribuidas sobre una longitud de **0,4 m** para producir un campo magnético de **$100\mu\text{T}$** en el centro del solenoide?

$$\mathbf{R} = 32 \text{ mA.}$$

15. **TAREA** La Fig. 11.9 muestra un conductor cilíndrico hueco de radios **a** y **b** que lleva una corriente **I** uniformemente distribuida en su sección transversal. Se pide:

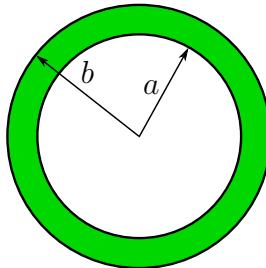


Figura 11.9: Esquema del ejercicio 15

- a) Demostrar que para $a < r < b$ el módulo del campo de inducción B es:

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi} \frac{(r^2 - a^2)}{r(b^2 - a^2)}$$

- b) Verificar la expresión anterior para $r = a$ y $r = b$ y representar gráficamente $B = f(r)$ para r que varía entre 0 e ∞ .

16. **TAREA** Un cable coaxial largo está formado por dos conductores concéntricos según se indica en la Fig. 11.10. Las corrientes en cada conductor son de igual valor y de sentidos opuestos. Se pide: **a)** Encontrar la expresión de B en función del radio, para los siguientes valores de r : $0 < r < a$; $a < r < b$; $b < r < c$; $c < r < \infty$. **b)** Representar gráficamente el módulo de B en función de r , desde $r = 0$ hasta $r = \infty$.

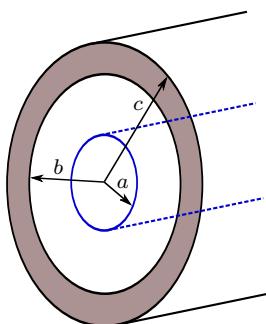


Figura 11.10: Esquema del ejercicio 16

17. **TAREA** Un devanado toroidal tiene un total de **400 vueltas** sobre un núcleo de radio interior **$r_i = 4 \text{ cm}$** y radio exterior **$r_e = 6 \text{ cm}$** . Calcular la magnitud del campo magnético en un punto medio entre la pared interna y externa el núcleo cuando existe una corriente de **$0,5 \text{ A}$** mantenida en el devanado.

$$\mathbf{R} = 800 \mu\text{T.}$$

18. Suponga que un protón y un electrón, cada uno con energía cinética de **200 eV**, entran en un campo magnético uniforme de intensidad **$B = 10 \text{ mT}$** en una dirección perpendicular al campo. ¿Cuáles son los radios de las trayectorias circulares de estas dos partículas y su frecuencia de rotación?

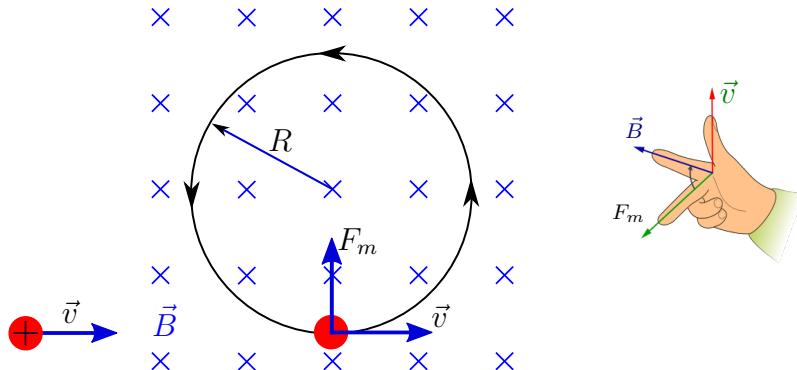


Figura 11.11: Esquema del ejercicio 18 (protón)

Se solucionará el ejercicio para el caso del protón, el alumno deberá averiguar el comportamiento del electrón. En la Fig. 11.11 se puede observar el movimiento del protón al entrar en el campo. La dirección de la fuerza F_m está dada por la regla de la mano derecha. La ecuación que la determina es:

$$F_m = q \cdot v \times B \quad (11.7)$$

La segunda ley de Newton y la aceleración centrípeta están dadas por:

$$F = m \times a, \quad a_c = \frac{v^2}{R}$$

Combinando las ecuaciones y despejando R :

$$R = \frac{m \times v}{|q| \times B} \quad (11.8)$$

Es necesario averiguar la velocidad v . Se calcula mediante la energía cinética de la partícula:

$$1 \text{ eV} \rightarrow 1,6 \times 10^{19} \text{ J}$$

$$m_p = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

$$K = \frac{1}{2} m \times v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2 * (3,2 \times 10^{-17})}{1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}}} = 0,19 \text{ Mm/s}$$

Cálculo del radio de giro:

$$R = \frac{1,67 \times 10^{-27} \text{ kg} * 0,19 \times 10^6 \text{ m/s}}{1,6 \times 10^{-19} \text{ C} * 10 \text{ mT}} = 0,204 \text{ m}$$

La velocidad angular de la partícula está dada por:

$$\omega = \frac{v}{R} \quad (11.9)$$

Y la ecuación que define la frecuencia en función de ω :

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \quad (11.10)$$

Entonces, la frecuencia queda expresada por:

$$f = \frac{v}{2\pi \cdot R} = 0,148 \text{ MHz}$$

19. Un protón se mueve con una velocidad de **10⁶ m/s** dentro del campo de inducción B , describiendo un círculo de radio **4 cm** como se indica en la Fig. 11.12a. Calcular:

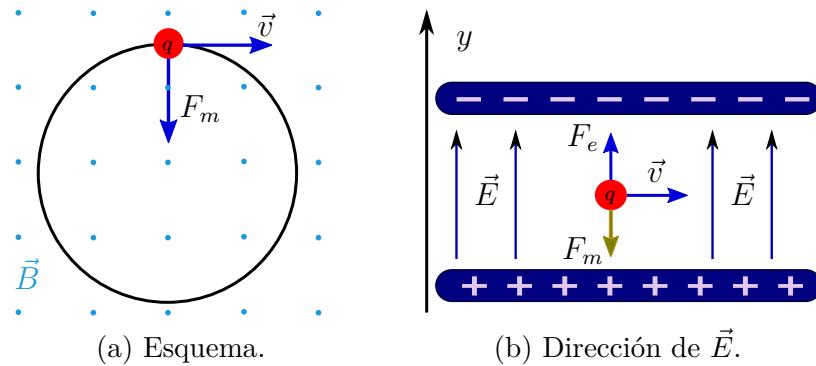


Figura 11.12: Figuras del ejercicio 19

- a) ¿Cuál es el valor del campo B ? En base a la Ec. (11.8):

$$B = \frac{m \times v}{|q| \times R} = \frac{1,67 \times 10^{-27} \text{ kg} * 10^6 \text{ m/s}}{1,602 \times 10^{-19} \text{ C} * 0,04 \text{ m}} = 0,26 \text{ T}$$

- b) ¿Cuál será el módulo, y hacia dónde deberá estar dirigido el campo eléctrico a aplicar, para que éste valor de B no desvíe la trayectoria? Para evitar que se desvíe el protón hay que aplicar el campo eléctrico de la Fig. 11.12b. Según la referencia "y" de la figura:

$$\begin{aligned} \sum F_y &= 0 \\ F_e - F_m &= 0 \\ q \cdot E - q \cdot v \times B &= 0 \\ E &= v \times B = 10^6 \text{ m/s} * 0,26 \text{ T} = 261 \text{ k} \frac{\text{N}}{\text{C}} \end{aligned}$$

20. Dos hilos paralelos están suspendidos de un eje común por cuerdas de longitud $l = 4 \text{ cm}$. Los hilos tienen una masa por unidad de longitud de **50 g/m** y transportan la misma corriente en sentidos opuestos. Calcular el valor de las corrientes si las cuerdas cuelgan formando un ángulo $\phi = 30^\circ$ con la vertical.

En la Fig. 11.13 (izquierda) se muestra el esquema del ejercicio. Se supone que la longitud de los conductores es infinita. Cada conductor genera un campo magnético sobre el otro como muestra la figura de la derecha. La interacción entre el campo \vec{B} y la corriente i genera una

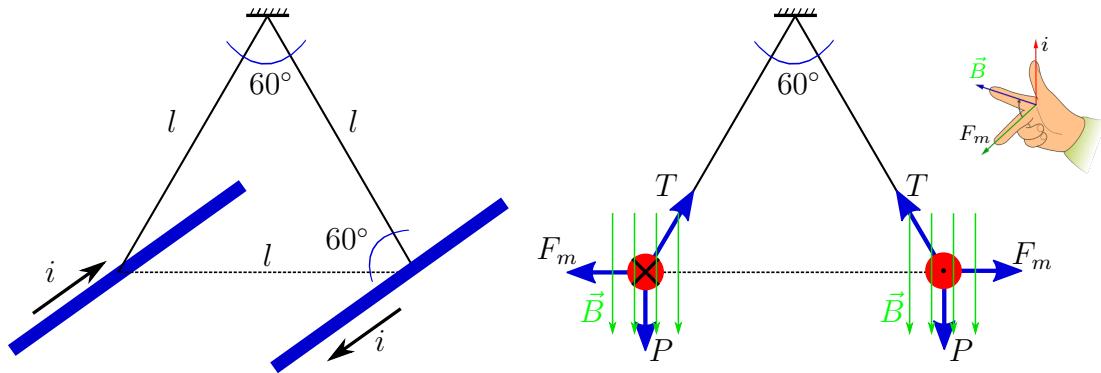


Figura 11.13: Esquema del ejercicio 20

fuerza F_m , que según la regla de la mano derecha, hace que los conductores se separen una distancia igual a la longitud del hilo. Se pueden armar las siguientes ecuaciones de equilibrio:

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 & \sum F_y &= 0 \\ T \times \cos 60^\circ &= F_m & T \times \sin 60^\circ &= P\end{aligned}$$

Combinando las ecuaciones anteriores:

$$F_m = \cos 60^\circ \times \frac{P}{\sin 60^\circ}$$

La fuerza magnética, cuya dirección da la regla de la mano derecha, está dada por:

$$F_m = I \cdot l \times B \quad (11.11)$$

Además, el campo está dado por la Ec. (11.3). Combinando estas ecuaciones y considerando que se multiplica la longitud $l(m)$ por el peso para obtener el peso del conductor:

$$\begin{aligned}\frac{P}{\tan 60^\circ} &= I \cdot l \times \frac{\mu_0 \times I}{2\pi \times R} \\ I &= \sqrt{\frac{2\pi \times m \times g \times R}{\mu_0 \times l \times \tan 60^\circ}} \\ I &= \sqrt{\frac{2\pi \times (0,05 \text{ kg/m}) \cdot l(\text{m}) \times 9,8 \text{ m/s}^2 \times 0,04 \text{ m}}{4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2 \times l(\text{m}) \times \tan 60^\circ}} \\ I &= 237,86 \text{ A}\end{aligned}$$

21. Para el arreglo de la Fig. 11.14, la corriente en el conductor largo y recto es de $I_1 = 20 \text{ A}$. Este está colocado en el mismo plano que la espira rectangular, en la cual circula una corriente $I_2 = 10 \text{ A}$. Las dimensiones son: $a = 0,01 \text{ m}$, $c = 0,09 \text{ m}$, $L = 0,20 \text{ m}$. Encontrar la fuerza (vector) total ejercida sobre la espira rectangular por el alambre recto.

En primer lugar la espira misma genera un campo sobre sí misma, este campo interactúa con la corriente I_2 y genera fuerzas sobre cada segmento de la espira que por simetría se anulan unas a otras.

Por otro lado, toda la espira está afectada por un campo \vec{B} que varía de acuerdo a la posición de los cables con respecto a I_1 . En los cables horizontales de la espira, I_1 genera un campo

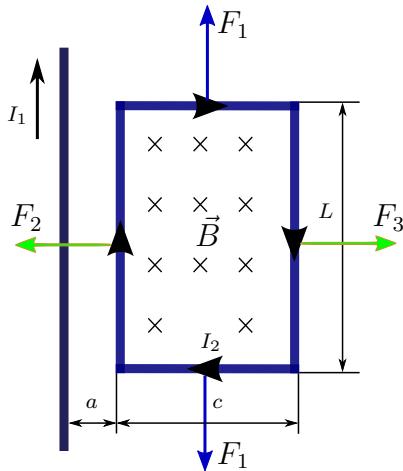


Figura 11.14: Esquema del ejercicio 21

decreciente a medida que aumenta la distancia y por simetría aparece una fuerza resultante $F_R = 0$ entre ambos cables:

$$F_R = F_1 - F_1 = 0$$

En cambio, para los cables verticales de la bobina, al estar separados por distancias desiguales de la I_1 se generan fuerzas opuestas que no se anulan:

$$\begin{aligned} F_R &= F_2 - F_3 = I_2 \cdot L \times B_1 - I_2 \cdot L \times B_2 \\ F_R &= I_2 \cdot L \cdot \frac{\mu_0 \cdot I_1}{2\pi} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+c} \right) \\ F_R &= 800 \mu N - 80 \mu N = 720 \mu N \end{aligned}$$

22. En el Ecuador el campo magnético de la Tierra es aproximadamente horizontal y está dirigido del hemisferio sur hacia el hemisferio norte. Su magnitud es de **0,50 gauss**. Encontrar la fuerza (vector) sobre un alambre de **20 m** que conduce una corriente de **30 A** en la dirección de este hacia oeste. Repetir el cálculo si el alambre se orienta de norte a sur.

La fuerza magnética está dada por la Ec. (11.11). Y los vectores son: la dirección de la corriente es hacia la izquierda (este-oeste) es $-\hat{j}$ y de sur a norte está el vector de campo (\hat{k}), por lo tanto:

$$\vec{F} = -I \cdot l \hat{j} \times B \hat{k} = -30 A \cdot 20 m \cdot 0,5 G \cdot \frac{1 \times 10^{-4} T}{1 G} \hat{i} = -3 \times 10^{-4} N \hat{i}$$

Si la corriente esta en $-\hat{k}$ y el campo en \hat{k} entonces $\vec{F} = 0$.

23. En la Fig. 11.15, la barra AC tiene **40 cm** de longitud y una masa de **50 g**. La barra se desliza libremente sobre las bandas de metal en los extremos del plano inclinado. Una corriente I fluye través de esas bandas y de la barra como se indica en la figura; hay en la región un campo magnético $\tilde{B} = -20 T \hat{j}$. a) ¿Qué tan grande debe ser I para que la barra permanezca en reposo? b) (TAREA) Con ese valor de corriente, ¿cuál deberá ser el valor del campo y hacia donde deberá estar dirigido, si en lugar de ser paralelo al eje y , es paralelo al eje x ?

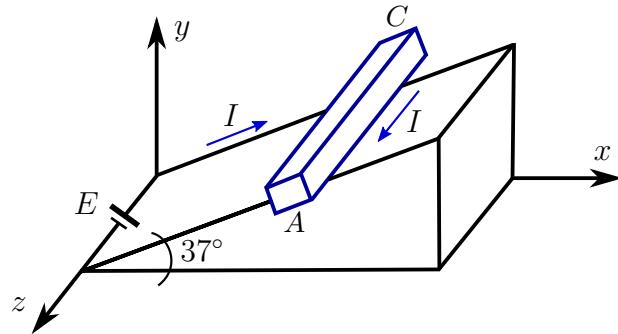


Figura 11.15: Esquema del ejercicio 23

La solución se muestra en la Fig. 11.16. En la misma se puede ver la F_m que aparece sobre la barra debida a la interacción entre el campo y la corriente.

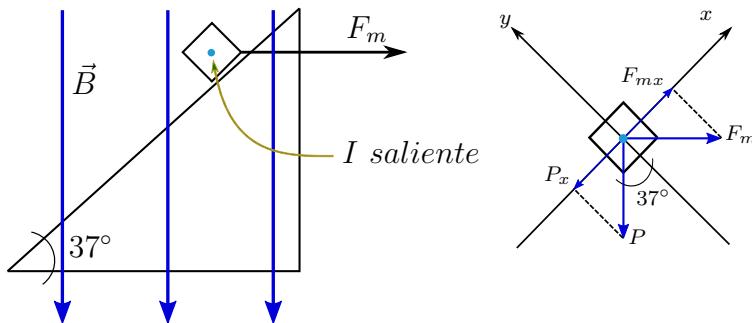


Figura 11.16: Esquema de la solución propuesta para el ejercicio 23

Planteando las ecuaciones de equilibrio se tiene:

$$\sum F_x = 0$$

$$F_{mx} - P_x = 0$$

$$F_m \times \cos 37^\circ = P \times \sin 37^\circ = m \cdot g \times \sin 37^\circ$$

$$F_m = m \cdot g \times \tan 37^\circ = \mathbf{0,369 \text{ N}}$$

Por otro lado, con la Ec. (11.11) se puede averiguar la corriente I :

$$F_m = I \cdot l \times B$$

$$I = \frac{0,369 \text{ N}}{0,4 \text{ m} \times 20 \text{ T}} = \mathbf{0,046 \text{ A}}$$

El punto B debe solucionarlo el alumno.

Capítulo 12

Inducción Electromagnética

- El campo de inducción B en una región del espacio es de **0,5 T**. Calcular la *f.e.m.* inducida en un conductor recto de **10 cm** de longitud que se mueve perpendicularmente a B con una velocidad $\mathbf{v} = 1 \text{ m/s}$, tal cual muestra la Fig. 12.1.

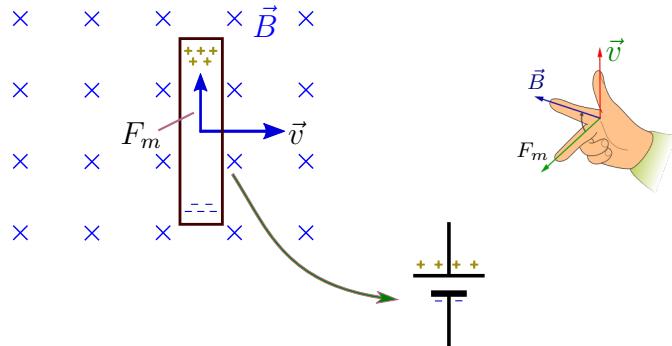


Figura 12.1: Esquema del ejercicio 1

*El conductor se mueve en un campo magnético a velocidad constante, por lo cuál se genera una fuerza sobre las cargas eléctricas del mismo. En particular, si se estudia el movimiento de los protones de la barra, por la regla de la mano derecha, estos sufren una fuerza como muestra la Fig. 12.1. Entonces se produce el efecto de una fuente de tensión (*f.e.m.*). El módulo de esta fuerza electromotriz está dado por:*

$$\epsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -B \frac{dA}{dt} = -BLv \frac{dx}{dt} = -BLv \quad (12.1)$$

*Entonces, el módulo de la *f.e.m.* es:*

$$|\epsilon| = 0,5 \text{ T} \times 0,1 \text{ m} \times 1 \text{ m/s} = \mathbf{0,05 \text{ V}}$$

- Se tiene una espira rectangular cuyas dimensiones son **x = 10 cm × y = 4 cm**. Esta se introduce a velocidad constante (**1 m/s**) a través de una región de espesor **d = 15 cm** en la cual hay un campo uniforme de inducción **B = 0,2 T** (ver Fig. 12.2). Graficar a) El flujo Φ_B a través de la espira en función de la posición x ; b) La *f.e.m.* inducida en función de x .

El flujo que atraviesa la espira está dado por:

$$\Phi = \vec{B} \cdot A = \vec{B} \cdot A \cos \phi \quad (12.2)$$

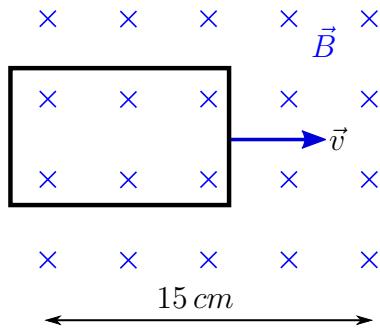
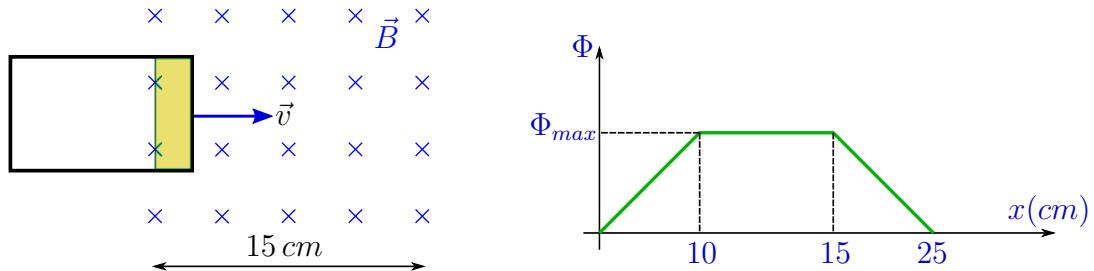


Figura 12.2: Esquema del ejercicio 2

En este caso, el flujo pasa perpendicularmente por la espira, por lo cual $\cos \phi = \cos 0 = 1$. La función del flujo en función de x se muestra en la Fig. 12.3.

$$\Phi_{max} = \vec{B} \cdot A = 0,2 \text{ T} \times 0,1 \text{ m} \times 0,04 \text{ m} = 0,8 \text{ mWb}$$

Figura 12.3: Variación del flujo en la espira en función de x .

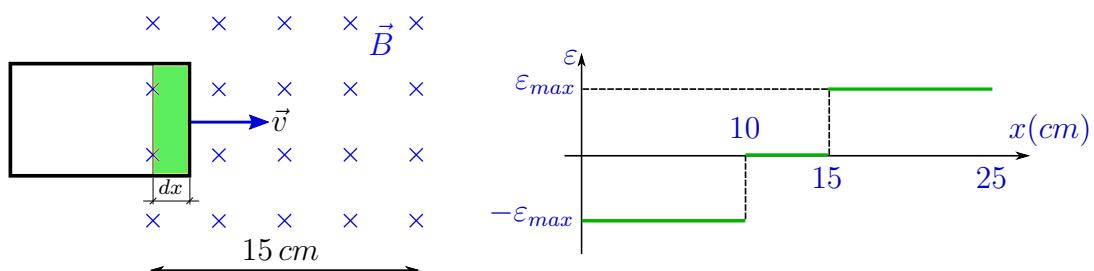
En cuanto a la variación de la f.e.m se presenta lo siguiente:

$$d\Phi = \vec{B} \cdot dA \cos \phi$$

$$dA = y \cdot dx = y \cdot v \cdot dt$$

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\vec{B} \cdot y \cdot v \cdot dt}{dt} = -\vec{B} \cdot y \cdot v \rightarrow \varepsilon_{max} = -0,2 \text{ T} \times 0,04 \text{ m} \times 1 \text{ m/s} = -8 \text{ mV}$$

La variación de dx está mostrada en la Fig. 12.4. El cambio de la f.e.m. está determinado por el campo magnético \vec{B} , la altura de la espira (y) y su velocidad.

Figura 12.4: Variación de la f.e.m en la espira en función de x .

3. La barra conductora $A - B$ hace contacto con las guías metálicas como muestra la Fig. 12.5. El aparato se encuentra en un campo de inducción $\mathbf{B} = 0,5 \text{ T}$ perpendicular al plano de la figura. Calcular:

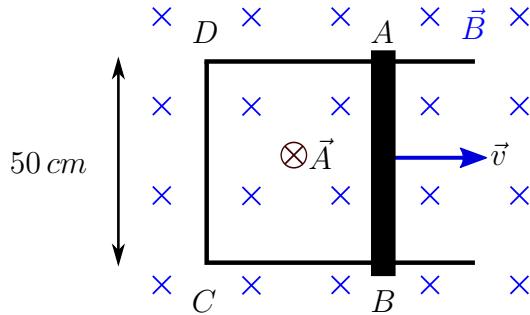


Figura 12.5: Esquema del ejercicio 3

- a) **Magnitud y sentido de la f.e.m. inducida en la barra cuando se mueve hacia la derecha con $v = 4 \text{ m/s}$.** A medida que la barra se mueve, el área (\vec{A}) de la espira va aumentando (tal cual sucedió en el ejercicio anterior, Fig. 12.3). Se aplica la expresión dada por el Ec. (12.1), para eliminar la variable área (A):

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -B \frac{dA}{dt} = -BLv \frac{dt}{dt} = -BLv$$

El signo negativo indica que la f.e.m. está dirigida en el sentido antihorario al igual que la corriente inducida (en contra del sentido de la espira dado por el vector \vec{A}), como se muestra en la Fig. 12.6.

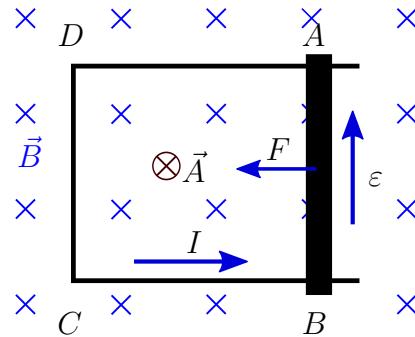


Figura 12.6: Comportamiento de la fem y de la corriente.

- b) **Fuerza necesaria para mantener la barra en movimiento si la resistencia del circuito $A - B - C - D$ es de $0,2 \Omega$ (supuesta constante).** No se tendrá en cuenta el rozamiento. Por la Ec. (11.11) se genera una fuerza que se opone al movimiento de la barra (ver Fig. 12.6). En primer lugar, se debe calcular la corriente que circula por la espira:

$$I = \frac{|\varepsilon|}{R} = \frac{1 \text{ V}}{0,2 \Omega} = 5 \text{ A}$$

Se aplica Ec. (11.11) para obtener la fuerza para que la barra se mueva a $v = cte$:

$$F = I \cdot l \times B = 1,25 \text{ N}$$

- c) Comparar la cantidad de trabajo mecánico que realiza la fuerza con la cantidad de calor desarrollada por segundo en el circuito. En el circuito se produce una disipación de potencia dada por:

$$P = I^2 \cdot R = 5 \text{ J/s} = 5 \text{ W}$$

Por otro lado, la fuerza realiza un trabajo mecánico a través del tiempo dado por:

$$P_F = F \cdot v = 1,25 \text{ N} \times 4 \text{ m/s} = 5 \text{ W}$$

4. Se tiene una varilla metálica $A - B$ que se mueve con una velocidad constante de $\mathbf{v} = 2 \text{ m/s}$ paralelamente a un conductor largo rectilíneo en el cual circula una corriente de $I = 40 \text{ A}$ (ver Fig. 12.7). Calcular a) F.e.m. inducida en la varilla; b) Indicar que extremo está a mayor potencial.

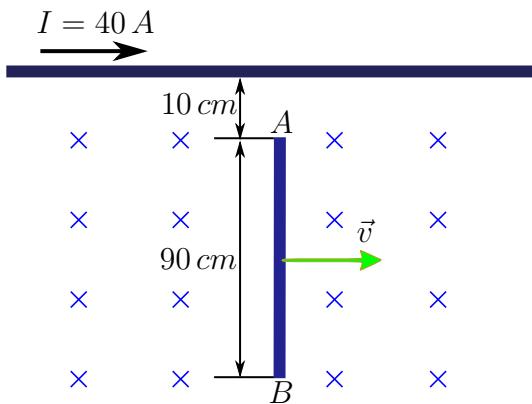


Figura 12.7: Esquema del ejercicio 4

La varilla está bajo la influencia de un campo \vec{B} producido por el conductor superior. Este campo está dado por la Ec. (11.3). Cada segmento dl de la barra está expuesto a un campo \vec{B} particular, ya que varía de acuerdo a la distancia, por lo tanto cada segmento posee un $d\varepsilon$. Es necesario integrar:

$$d\varepsilon = B \cdot v \cdot dl$$

$$\text{siendo } B = \frac{\mu \cdot i}{2\pi \cdot l}$$

$$\varepsilon = \int_A^B \frac{\mu \cdot i}{2\pi \cdot l} \cdot v \cdot dl = \frac{\mu \cdot i}{2\pi} \cdot v \cdot [\ln l]_A^B$$

$$\varepsilon = \frac{\mu \cdot i}{2\pi} \cdot v \cdot \ln \frac{B}{A} = 36,84 \mu \text{V}$$

Aplicando la regla de la mano derecha se produce que las cargas positivas se acumulan en A mientras que las negativas en B por lo tanto el extremo de mayor potencial es el A:

$$V_A - V_B = 36,84 \mu \text{V.}$$

5. En la Fig. 12.8 el flujo magnético que pasa por la espira perpendicularmente al plano de la bobina y con sentido hacia la figura está variando según la siguiente relación: $\Phi_B = 6 \cdot t^2 + 7 \cdot t + 1$, estando Φ_B en miliwebers y t en segundos. Calcular:

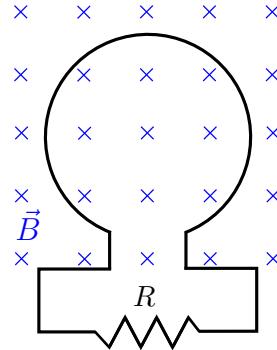


Figura 12.8: Esquema del ejercicio 5

- a) **Magnitud de la f.e.m. inducida en la espira cuanto $t = 2$ seg. Aplicando la Ley de Faraday-Lenz:**

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (12.3)$$

$$\varepsilon = -\frac{d(6t^2 + 7t + 1)}{dt} = -(12t + 7)_{t=2\text{s}} = 31 \text{ mWb/s}$$

- b) **Dirección de la corriente que pasa por R . Aplicando regla de la mano derecha se obtiene una corriente que circula de izquierda a derecha.**

6. **TAREA** Una bobina plana en forma de cuadrado, de **12 cm** de lado, tiene **10** espiras. La bobina gira alrededor de un eje perpendicular a la barra y a través de uno de sus extremos en un campo de inducción magnética **$B = 0,025 \text{ T}$** . Calcular la velocidad angular de la bobina si la *f.e.m.* máxima producida es de **20 mV**.

R = 53,1 rmp

7. **TAREA** Un cuadro de 5 espiras tiene por dimensiones **9 cm** y **7 cm**. Gira a velocidad $\omega = 15\pi \text{ rad/s}$ en un campo uniforme **$B = 0,8 \text{ T}$** . Calcular a) ¿Cuál es la *f.e.m.* máxima inducida en la bobina? b) ¿Cuál es la *f.e.m.* **1/90 seg** después de alcanzar el valor nulo?

R: a) 1,19 V y b) 0,595 V

8. Una barra delgada rígida conductora de longitud L está girando mecánicamente con una velocidad angular constante ω alrededor de un eje perpendicular a la barra y a través de su centro. Si un campo magnético uniforme existe paralelo al eje de rotación de la barra,

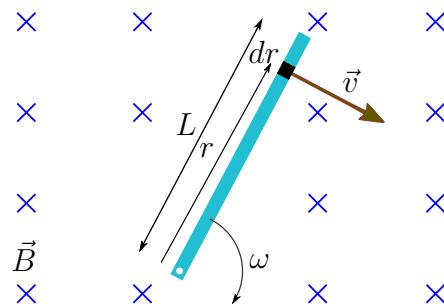


Figura 12.9: Esquema del ejercicio 8

- a) Demuestre que la f.e.m. inducida entre el centro de la barra y uno de sus extremos es proporcional a L^2 . Se puede escribir la Ec. (12.1) en función del radio de giro r de la siguiente manera:

$$d\epsilon = B \cdot dr \cdot v$$

Puesto que cada segmento de la barra se mueve perpendicular a \vec{B} una fem ($d\epsilon$) se genera en cada segmento. Para obtener (ϵ) se debe integrar:

$$\int d\epsilon = \int B \cdot dr \cdot v = \int B \cdot dr \cdot (\omega \cdot r)$$

$$\epsilon = B \int_0^L \omega \cdot r \cdot dr = B \cdot \omega \cdot \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^L = B \cdot \omega \cdot \frac{L^2}{2}$$

- b) TAREA Evalúe la magnitud de esta f.e.m. para $L = 0,2 \text{ m}$, $\omega = 60 \text{ rad/s}$, y $B = 1,2 \text{ T}$.

9. TAREA Utilice la ley de Lenz para responder las siguientes preguntas concernientes a la dirección de las corrientes inducidas: a) ¿Cuál es la dirección de la corriente inducida en la resistencia de la Fig. cuando el imán de barra se mueve hacia la izquierda? b) ¿Cuál es la dirección de la corriente inducida en la resistencia R precisamente después que se cierra el interruptor S en el circuito de la figura b?

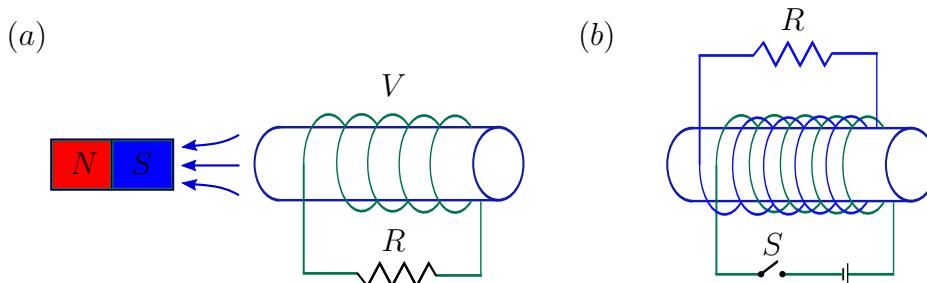


Figura 12.10: Esquema del ejercicio 9

10. El plano de una bobina rectangular, de dimensiones **5 cm × 9 cm**, es perpendicular a la dirección de un campo magnético B . Si la bobina tiene **75 vueltas** y una $\mathbf{R} = 8\Omega$ ¿con qué rapidez debe cambiar la magnitud de B de manera que la corriente inducida en el alambre sea **0,1 A**?

Aplicando la Ley de Faraday-Lenz:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$0,1A * 8\Omega = -\frac{d}{dt}(N * A * B)$$

$$0,8V = -75 * 0,05m * 0,09m * \frac{dB}{dt}$$

$$\frac{dB}{dt} = -2,37 \frac{\text{V}}{\text{m}^2}$$

11. **TAREA** Una bobina plana de **200 vueltas** y **10 cm** de radio, se coloca en un campo magnético uniforme de **0,8 T** de tal manera que el plano de la bobina es perpendicular a la dirección del campo. La bobina es girada **90°** con velocidad constante (hasta que el plano de la bobina se hace paralelo al campo) en un tiempo de **1,5 s**. a) Calcule la *f.e.m* promedio inducida en la bobina como resultado de la rotación; b) ¿Cuál es el valor instantáneo de la *f.e.m* en la bobina, en el momento en que el plano de la misma forma un ángulo de **45°** con el campo magnético? **R: a) 3,35 V ; b) $\varepsilon = 3,55\omega$**
12. Por un inductor de **2 H** circula una corriente de **0,5 A**. Cuando se abre el interruptor del circuito, la corriente cesa en **10 ms**. ¿Cuál es la *f.e.m.* inducida que aparece en el inductor durante éste intervalo de tiempo?

En un inductor se cumple la siguiente relación:

$$\epsilon = -L \frac{di}{dt} \quad (12.4)$$

Aplicando la ecuación:

$$\epsilon = -2 H * \frac{0,5 A}{10 ms} = 100 \text{ V}$$

13. **TAREA** Calcule el flujo magnético a través de una bobina de **300 vueltas** y **7,2 mH** cuando la corriente en la bobina es de **10 mA**.

$$\mathbf{R = 0,24 \mu Wb}$$

14. **TAREA** Un solenoide con núcleo de aire, **68 vueltas** y **8 cm** de longitud tiene un diámetro de **1,2 cm**. ¿Cuánta energía se almacena en el campo magnético cuando circula una corriente de **0,77 A**?

$$\mathbf{R = 9,74 \mu J}$$

15. ¿Cuál es la energía almacenada en el inductor de la Fig. 12.11, cuando la corriente alcanza su valor de equilibrio después de haber cerrado el interruptor *S*?

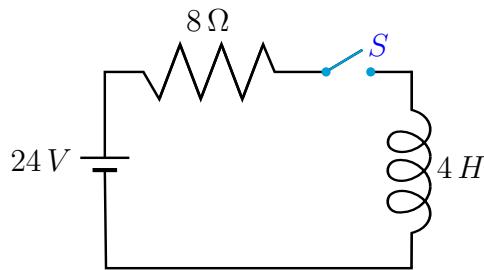


Figura 12.11: Esquema del ejercicio 15

Aplicando la 2da ley de Kirchhoff a la malla:

$$\epsilon - V_R - V_L = \epsilon - i * R - L * \frac{di}{dt} = 0$$

Despejando di/dt:

$$\frac{di}{dt} = \frac{\epsilon}{L} - i * \frac{R}{L}$$

Cuando se cierra el interruptor S , la caída de potencial en R es 0 e $i=0$. Sucede que la bobina se opone a ϵ ; queda:

$$\left(\frac{di}{dt} \right)_{inicial} = \frac{\epsilon}{L}$$

Luego la corriente llega a un estado de equilibrio y $di/dt = 0$:

$$\frac{di}{dt} = 0 = \frac{\epsilon}{L} - i * \frac{R}{L} \rightarrow I = \frac{\epsilon}{R}$$

Los valores anteriores responden al comienzo y al final del análisis del circuito $L - R$. Si se desea conocer cualquier momento del circuito, se plantea:

$$\begin{aligned} \frac{di}{i - \epsilon/R} &= -\frac{R}{L} dt \\ \int_0^i \frac{di}{i - \epsilon/R} &= \int_0^t -\frac{R}{L} dt \\ \ln \left(\frac{i - \epsilon/R}{-\epsilon/R} \right) &= -\frac{R}{L} t \end{aligned}$$

Despejando i :

$$i = \frac{\epsilon}{R} * (1 - e^{-(R/L)t}) \quad (12.5)$$

La energía del inductor está dada por:

$$U_L = \frac{1}{2} \times L \times i^2 \quad (12.6)$$

Para la condición de equilibrio $i = \epsilon/R$:

$$U_L = \frac{1}{2} \times L \times (\epsilon/R)^2 = 18 \text{ J}$$

16. Una bobina de **20 mH** se conecta en serie con una resistencia de **2000 Ω**, con un interruptor y una batería de **12 V**.

- a) ¿Cuál es la constante de tiempo del circuito? La constante de tiempo está dada por:

$$\tau = \frac{L}{R} \quad (12.7)$$

Entonces:

$$\tau = \frac{20 \text{ mH}}{2000 \Omega} = 0,01 \text{ ms}$$

- b) ¿Cuánto tiempo después de que el interruptor se cierra, le tomará a la corriente alcanzar el **99%** de su valor final? Se aplica la Ec. (12.5) siendo el valor final ϵ/R como se explicó anteriormente:

$$\begin{aligned} i &= \frac{\epsilon}{R} * (1 - e^{-(R/L)t}) \\ 0,99 * \frac{\epsilon}{R} i &= \frac{\epsilon}{R} * (1 - e^{-(R/L)t}) \\ \ln(1 - 0,99) &= \ln e^{-t/\tau} \rightarrow t = \tau * \ln(0,01) = 0,046 \text{ ms} \end{aligned}$$

17. **TAREA** Un inductor de **140 mH** y una resistencia de **4,9 Ω** se conectan con un interruptor a una batería de **6 V** como se muestra en la Fig. 12.12. a) Si el interruptor se tira hacia la izquierda (conectando la batería), ¿cuánto tiempo pasa antes que la corriente alcance los **220 mA**? b) ¿Cuál es la corriente que circula por el inductor **10 s** después que el interruptor se cierra? c) Ahora el interruptor se tira rápidamente hacia la derecha. ¿Cuánto tiempo debe pasar antes que la corriente caiga a **160 mA**?

R: a) **5,65 ms**, b) **1,22 A** y c) **58,04 ms**

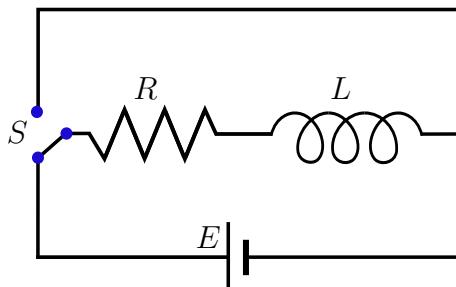


Figura 12.12: Esquema del ejercicio 17

18. **TAREA** En electrónica, los circuitos *RL* son aprovechados de múltiples formas, una de ellas es generar transitorios de alto voltaje, a partir de una fuente de bajo voltaje (por ejemplo las fuentes de alimentación comutadas, el encendido de las bujías de los motores cuyo combustible es la nafta, etc). Si poseemos un circuito como el de la Fig. 12.13, se pregunta: a) ¿Cuál es la corriente suministrada por la batería un tiempo suficientemente grande después de haber posicionado la llave en *A*? b) Si pasamos rápidamente el interruptor desde el punto *A* al punto *B*, ¿cuál será el voltaje a través de cada resistencia y del inductor? c) ¿Cuánto tiempo transcurrirá hasta que el voltaje a través del inductor caiga a **12 V**?

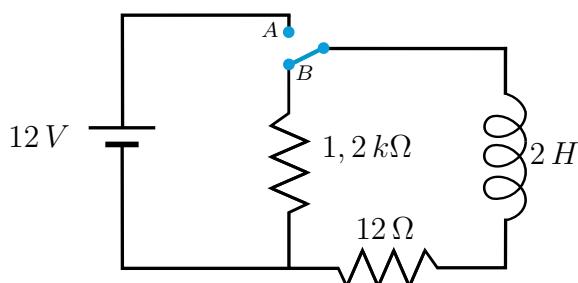


Figura 12.13: Esquema del ejercicio 18

19. **TAREA** Un condensador de **$1\mu F$** se carga con una fuente de poder de corriente continua de **40 V**. El capacitor, totalmente cargado, ahora se descarga través de un inductor de **10 mH**. Encuentre la corriente máxima que se genera en las oscilaciones resultantes.
20. **TAREA** Calcule la inductancia de un circuito *LC* que oscila a una frecuencia de **120 Hz** cuando la capacidad es de **$8\mu F$** .

Capítulo 13

Corriente Alterna

1. a) ¿Cuál es la resistencia de una lámpara que usa una potencia de promedio **75 W** cuando se conecta a una fuente de potencia de **60 Hz** que tiene un voltaje máximo de **170 V**? , b) ¿Cuál es la resistencia de una lámpara de **300 W**?

Se utiliza la Ec. (9.9), pero al tratarse de una tensión alterna, es necesario encontrar un valor de tensión continua que sea equivalente al de alterna en términos de disipación de energía, este valor es conocido como tensión promedio y se calcula según la ecuación:

$$V_{prom} = \frac{\hat{v}}{\sqrt{2}} \quad (13.1)$$

En el presente caso la $\hat{v} = 170V$, por lo tanto:

$$V_{prom} = \frac{170 V}{\sqrt{2}} = \mathbf{120,21 V}$$

Despejando R de la Ec. (9.9):

$$R = \frac{V_{prom}^2}{P_{prom}} = \frac{(120,21 V)^2}{75 W} = \mathbf{192,66 \Omega}$$

2. Una fuente de potencia de CA produce un voltaje máximo **V_{max} = 100 V**. Esta alimentación se conecta a un resistor de **24 Ω** y se miden la corriente y el voltaje en el mismo con un amperímetro y un voltímetro de CA ideales, como se indica en la Fig. 13.1. ¿Cuáles son los valores que registra cada medidor?

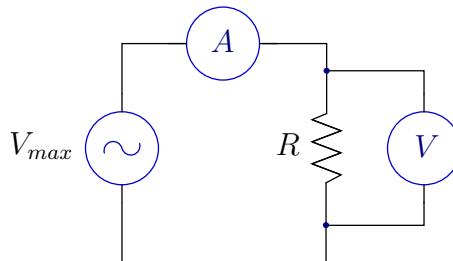


Figura 13.1: Esquema del ejercicio 2

Los instrumentos de medición son ideales, esto quiere decir que el amperímetro actúa como un cortocircuito y el voltímetro como un circuito abierto, por lo cual, la fuente tiene como carga únicamente a la resistencia. Por otro lado, dichos instrumentos miden valores promedios por lo cual se puede utilizar la Ec. (13.1):

$$V_{prom} = \frac{\hat{v}}{\sqrt{2}} = \frac{100 V}{\sqrt{2}} = 70,7 \text{ V}$$

Mediante la ley de ohm se obtiene la I_{prom} :

$$I_{prom} = \frac{V_{prom}}{R} = \frac{70,7 \text{ V}}{24 \Omega} = 2,94 \text{ A}$$

Otra solución posible sería calcular la \hat{i} y luego la I_{prom} con la siguiente ecuación:

$$I_{prom} = \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}} \quad (13.2)$$

3. **TAREA** En el circuito sencillo de CA que se muestra en la Fig. 13.2, $R = 70 \Omega$ y $v = V_{max} \cdot \sin \omega t$; Si $V_R = 0,25 \times V_{max}$ en $t = 0,010 \text{ s}$, ¿cuál es la frecuencia angular del generador?

$R = 25,26 \text{ rad/s}$

$$v(t) = V_{max} \cdot \sin(\omega t)$$

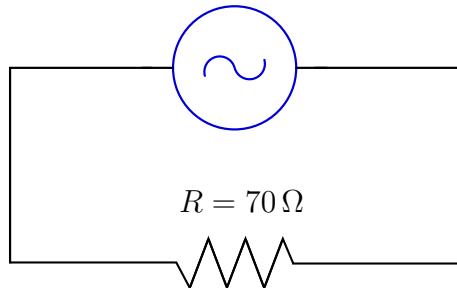


Figura 13.2: Esquema del ejercicio 3

4. En el circuito de CA puramente inductivo de la Fig. 13.3 la $V_{max} = 100 \text{ V}$.

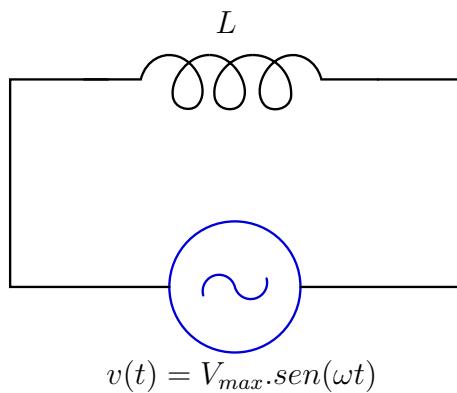


Figura 13.3: Esquema del ejercicio 4

- a) Si la corriente máxima es 7,5 A a 50 Hz, calcule la inductancia L . Al existir una corriente variable en el tiempo a través del inductor, se genera una fem autoinducida. Esta fem inducida viene dada por la Ec. (12.4). En este caso, $\epsilon = V_L = V_{max} \cdot \operatorname{sen}(\omega t)$. Se debe despejar i_L para encontrar la relación que permita hallar L .

$$V_{max} \operatorname{sen}(\omega t) = L \frac{di_L}{dt}$$

$$di_L = \frac{V_{max}}{L} \operatorname{sen}(\omega t) dt$$

Integrando en ambos miembros se obtiene la relación entre la corriente y la tensión:

$$i_L = \frac{V_{max}}{L} \int \operatorname{sen}(\omega t) dt = \frac{V_{max}}{\omega L} [-\cos(\omega t)]$$

El valor máximo de corriente se obtiene cuando $|\cos(\omega t)| = 1$; reduciendo la expresión a la Ec. (13.3):

$$i_{max} = \frac{V_{max}}{\omega L} \quad (13.3)$$

Despejando L :

$$L = \frac{V_{max}}{\omega \cdot i_L} = \frac{100 V}{2\pi * 50 Hz * 7,5 A} = 42,44 \text{ mH}$$

- b) ¿A qué frecuencia angular ω la corriente máxima es 2,5 A? R: $\omega = 942,51 \text{ rad/s}$

5. Cuando un inductor particular se conecta a un voltaje sinusoidal con una amplitud de 120 V, una corriente máxima de 3 A aparece en el inductor. a) ¿Cuál es la corriente máxima si la frecuencia del voltaje aplicado se duplica?, b) ¿Cuál es la reactancia inductiva a estas dos frecuencias?

En la Ec. (13.3) se puede observar que la correspondencia entre voltaje y corriente es similar a la ley de Ohm. Pero en este caso, en lugar de R , se tiene un término ωL , que por ser dependiente de la frecuencia se denomina **reactancia inductiva**, dicha reactancia se define con la Ec. (13.4):

$$X_L = \omega L \quad (13.4)$$

Con esta definición de reactancia inductiva, y reemplazando en la Ec. (13.3), se obtiene el valor de X_L para una corriente de 3 A, que corresponde a la frecuencia baja.

$$X_L = \frac{V_{max}}{I_{max}} = \frac{120 V}{3 A} = 40 \Omega$$

Respuestas faltantes: a) $i_{max} = 1,5 \text{ A}$ - b) $X'_L = 80 \Omega$

6. **TAREA** Un inductor se conecta a un suministro de potencia de 20 Hz que produce un voltaje r.m.s. de 50 V. ¿Qué inductancia se necesita para mantener la corriente instantánea en el circuito debajo de 80 mA?

$$R = 7,033 \text{ H}$$

7. a) ¿Para qué frecuencias lineales un capacitor de **22 μ F** tiene una reactancia por debajo de **175 Ω** ? b) Sobre ese mismo intervalo de frecuencia, ¿cuál es la reactancia de un capacitor de **44 μ F**?

La reactancia de un capacitor se define en la Ec. (13.5):

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \quad (13.5)$$

a) Reemplazando ω y despejando f se puede obtener el rango de frecuencias:

$$\begin{aligned} f &\geq \frac{1}{2\pi \times C \times X_C} \\ f &\geq \frac{1}{2\pi \times 22 \mu F \times 175\Omega} \\ f &\geq \mathbf{41,34 \text{ Hz}} \end{aligned}$$

R: b) $X_C \leq 87,5 \Omega$

8. Un capacitor de **98 pF** está conectado a un suministro de potencia de **60 Hz** que produce un voltaje *r.m.s.* de **20 V**. ¿Cuál es la carga máxima que aparece en cualquiera de las placas del capacitor?

La carga de un capacitor se determina como:

$$q = C \times V_{max} \times \sin(\omega t) \quad (13.6)$$

La carga máxima se obtiene cuando $\sin(\omega t) = 1$, de éste modo, calculando previamente la tensión máxima, se obtiene:

$$q = C \times V_{max} = 98 pF \times 28,28 V = \mathbf{2,77 \eta C}$$

9. Un voltaje sinusoidal $v = V_{max} \cdot \cos(\omega t)$ se aplica a un capacitor como se muestra en la Fig. 13.4. a) Escriba una expresión para la carga instantánea en el capacitor en función de V_{max} , C , t y ω . b) ¿Cuál es la corriente instantánea en el circuito?

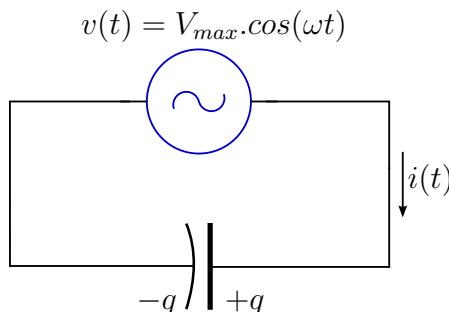


Figura 13.4: Esquema del ejercicio 9

a) Aplicando la segunda Ley de Kirchhoff, se obtiene:

$$v - v_C = 0$$

$$V_{max} \cdot \cos(\omega t) - \frac{q}{C} = 0$$

$$q = C \times V_{max} \times \cos(\omega t)$$

b) La corriente sobre un capacitor se muestra en la Ec. (13.7):

$$i_C = C \frac{dv_C}{dt} \quad (13.7)$$

Reemplazando y resolviendo la derivada se obtiene el valor de corriente instantánea:

$$i_C = C \frac{d[V_{max} \cos(\omega t)]}{dt} = -\omega C V_{max} \operatorname{sen}(\omega t)$$

10. ¿A qué frecuencia la reactancia inductiva de un inductor de **57mH** es igual a la reactancia capacitiva de un capacitor de **57μF**?

Igualando las ecuaciones (13.4) y (13.5), y buscando f :

$$\begin{aligned} X_L &= X_C \\ \omega L &= \frac{1}{\omega C} \\ 2\pi f \times L &= \frac{1}{2\pi f \times C} \\ f^2 &= \frac{1}{(2\pi)^2 \times L \times C} \\ f &= \sqrt{\frac{1}{(2\pi)^2 \times L \times C}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L \times C}} \\ f &= \frac{1}{2\pi\sqrt{57\mu H * 57\mu F}} = \mathbf{2792,19 \text{ Hz}} \end{aligned}$$

11. Un circuito en serie contiene los siguientes componentes: **R = 150Ω**, **L = 250 mH**, **C = 2μF** y un generador con **V_{max} = 210 V** operando a **50 Hz**. Calcule: a) La reactancia inductiva, b) La reactancia capacitativa, c) La impedancia, d) La corriente máxima y e) El ángulo de fase. (R: a) **X_L = 78,54Ω** - b) **X_C = 1591,55Ω**).

Para calcular la impedancia del circuito, se debe calcular la impedancia de cada elemento y luego sumarlas, ya que los 3 elementos están en serie.

$$\begin{array}{lll} Z_L = jX_L & Z_C = -jX_C & Z_R = R \\ Z_L = j78,54\Omega & Z_C = -j1591,55\Omega & Z_R = 150\Omega \end{array}$$

$$\begin{aligned} Z_T &= Z_L + Z_C + Z_R \\ Z_T &= j78,55 \Omega - j1591,55 \Omega + 150 \Omega = (\mathbf{150 - j1513}) \Omega \end{aligned}$$

Hasta ahora se ha expresado la impedancia total en forma rectangular, pero para calcular la corriente conviene expresarla en forma polar:

$$\begin{aligned} |Z_T| &= \sqrt{150^2 + 1513^2} = \mathbf{1520,42} \\ \angle Z_T &= \operatorname{arctg}\left(\frac{-1513}{150}\right) = \mathbf{-84,34^\circ} \end{aligned}$$

El valor de corriente se obtiene de dividir la tensión de alimentación por la impedancia total del circuito:

$$I = \frac{V}{Z_T} = \frac{210\angle 0^\circ}{1520,42\angle -84,34^\circ}$$

c) $I = 138,12 \text{ mA}$

d) $\angle I = 84,34^\circ$

12. **TAREA** Un resistor ($R = 900\Omega$), un capacitor ($C = 0,25\mu\text{F}$) y un inductor ($L = 2,5 \text{ H}$) se conectan en serie a través de una fuente de CA de **240 Hz** para la cual $V_{\max} = 140 \text{ V}$. Calcule: a) la impedancia del circuito, b) la corriente pico entregada por la fuente, y c) el ángulo de fase entre la corriente y el voltaje.

R: a) $Z_T = 1434,72\Omega$ - b) $91,58 \text{ mA}$ - c) $51,15^\circ$

13. Un voltaje de CA de la forma $v = 100\text{V} \sin(1000t)$ se aplica a un circuito RLC en serie. Si $R = 400\Omega$, $L = 0,5 \text{ H}$ y $C = 5\mu\text{F}$, encuentre la potencia promedio disipada en el circuito.

Para hallar la potencia promedio se debe obtener la tensión, la corriente y el ángulo de fase entre las mismas (como ya fue realizado anteriormente) luego se aplica la Ec. (13.8):

$$P_{\text{prom}} = I_{\text{RMS}} \times V_{\text{RMS}} \times \cos\varphi \quad (13.8)$$

Reemplazando por los valores correspondientes, se obtiene:

$$P_{\text{prom}} = I_{\text{prom}} \times V_{\text{prom}} \times \cos\varphi = 70,71A \times 0,14V \times \cos 36,87^\circ = 8 \text{ W}$$

14. Un voltaje de CA con una amplitud de **100 V** se aplica a una combinación en serie de un capacitor de **200 μF** , un inductor de **100 mH** y un resistor de **20 Ω** . Calcule la potencia disipada y el factor de potencia para una frecuencia de: a) **60 Hz**, b) **50 Hz**.

Se realizan los cálculos de impedancias para el inciso a):

$$X_L = \omega L = 2\pi f L = 2\pi 60 \text{ Hz} \times 100 \text{ mH} = 37,70 \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi C} = \frac{1}{2\pi 60 \text{ Hz} \times 200 \mu\text{F}} = 13,26 \Omega$$

$$Z_R = R = 20 \Omega$$

La impedancia total del circuito resulta:

$$Z_T = Z_R + j(X_L - X_C) = 20 + j(37,70 - 13,26) = 20 + j24,436$$

$$|Z_T| = 31,577$$

$$\angle Z_T = 50,70^\circ$$

Con el módulo de impedancia y el valor promedio de tensión se calcula la potencia promedio:

$$P_{\text{Prom}} = \frac{V_{\text{Prom}}^2}{|Z_T|} = \frac{(3213 \text{ V})^2}{31,577 \Omega} = 158,38 \text{ W}$$

Por último, el factor de potencia se calcula en función del ángulo de desfasaje entre la tensión y la corriente de un circuito, como muestra la Ec. (13.9):

$$FP = \cos \varphi \quad (13.9)$$

En nuestro caso el ángulo de desfasaje es de $50,7^\circ$

$$FP = \cos(50,7^\circ) = 0,633$$

R: b) $P_{\text{Prom}} = 197,55 \text{ W}$ - $FP = 0,633$

15. **TAREA** La potencia promedio en un circuito para el cual la corriente *r.m.s.* es **5 A** es **450 W**. Calcule la resistencia del circuito.

R = **90 Ω**

16. **TAREA** Un circuito *RLC* se usa en un radioreceptor para sintonizar una estación de *FM* que transmite a **99,7 MHz**. La resistencia en el circuito es **12 Ω** y la inductancia es **1,4 μH**. ¿Qué capacidad se debe emplear?

R = **$1,82 \times 10^{-12} \text{ F}$**

17. El circuito de sintonización de un radio-receptor de *AM* es una combinación *LC* en paralelo que tiene una resistencia de **1 Ω**. La inductancia es **0,2 mH** y la capacidad es variable, de modo que el circuito puede resonar entre **550 kHz** y **1650 kHz**. Encuentre el intervalo de valores para C.

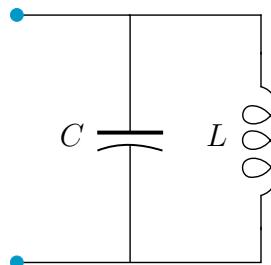


Figura 13.5: Esquema del ejercicio 17

El circuito planteado corresponde a la Fig. 13.5. Como es un circuito en paralelo, conviene operar con las admitancias de los componentes en lugar de sus impedancias. La admitancia se define como la inversa de la impedancia, tal como muestra la Ec. (13.10):

$$Y = \frac{1}{Z} \quad (13.10)$$

La impedancia total se calcula como:

$$Y_T = Y_C + Y_L = \frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_L} = j\omega C + \frac{1}{j\omega L} = j(\omega C - \frac{1}{\omega L})$$

Este circuito debe estar sintonizado entre 550 kHz y 1650 kHz, es decir, debe estar en resonancia en ese rango de frecuencias. El valor de resonancia es aquel valor donde la parte

inductiva y la capacitiva se anulan. Por lo tanto, se busca el valor de C que cumple estas condiciones.

$$\begin{aligned}\omega C - \frac{1}{\omega L} &= 0 \\ \omega C &= \frac{1}{\omega L} \\ C &= \frac{1}{\omega^2 L} = \frac{1}{(2\pi f)^2 L}\end{aligned}$$

$$C|_{f=550\text{ kHz}} = \frac{1}{(2\pi 550\text{ kHz})^2 * 0,2\text{ mH}} = 418\text{ pF}$$

$$C|_{f=1650\text{ kHz}} = \frac{1}{(2\pi 1650\text{ kHz})^2 * 0,2\text{ mH}} = 46,52\text{ pF}$$

18. Una bobina de $\mathbf{R = 35\Omega}$ y $\mathbf{L = 20,5\text{ H}}$ está en serie con un capacitor y una fuente de $\mathbf{200\text{ V}}$ (r.m.s.) y $\mathbf{100\text{ Hz}}$. La corriente r.m.s. en el circuito es $\mathbf{4\text{ A}}$. a) Calcule la capacidad en el circuito, b) ¿Cuál es la V_{max} a través de la bobina?

R: a) $C = 0,12\mu\text{F}$ - b) $V_{L\text{ max}} = 72863,55\text{ V}$

Capítulo 14

Ondas Electromagnéticas y Ecuaciones de Maxwell

- Una onda electromagnética en el vacío tiene una amplitud de campo eléctrico $\mathbf{E} = 220 \text{ V/m}$. Calcule la amplitud del campo magnético correspondiente.

En todo instante, la relación de la magnitud del campo eléctrico con la magnitud del campo magnético en una onda electromagnética es igual a la rapidez de la luz. Cómo lo muestra la siguiente ecuación:

$$\frac{E_{max}}{B_{max}} = \frac{E}{B} = c \quad (14.1)$$

Despejando B en la Ec. (14.1):

$$B = \frac{E}{c}$$

Finalmente, reemplazando el valor de E y asumiendo la rapidez de la luz como $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$, se obtiene:

$$B = \frac{220 \text{ V/m}}{3 \times 10^8 \text{ m/s}} = 0,73 \times 10^{-6} \text{ T}$$

- TAREA** Calcule el valor máximo del campo magnético en una región donde el valor máximo medido del campo eléctrico es de $5,3 \text{ V/m}$.

$$R = 17,66 \times 10^{-12} \text{ T}$$

- Calcule la longitud de onda de una onda electromagnética en el vacío que tenga una frecuencia de: a) $5 \times 10^{19} \text{ Hz}$, b) $4 \times 10^9 \text{ Hz}$.

La frecuencia f , la longitud de onda λ y la rapidez de propagación c de cualquier onda periódica guardan entre sí la siguiente relación:

$$c = \lambda f \quad (14.2)$$

Despejando λ de la Ec. (14.2):

$$\lambda = \frac{c}{f}$$

Para el inciso a), se obtiene:

$$\lambda = \frac{3 \times 10^8 \text{ m/s}}{5 \times 10^{19} \text{ Hz}} = 6 \times 10^{-12} \text{ m}$$

R: b) 75 mm

4. Calcule la frecuencia de las siguientes ondas electromagnéticas: a) microondas ($\lambda = 1 \text{ cm}$), b) radiación infrarroja ($\lambda = 1 \mu\text{m}$), c) luz amarilla ($\lambda = 580 \text{ nm}$), d) luz ultravioleta ($\lambda = 100 \text{ nm}$), e) rayos X ($\lambda = 1 \text{ pm}$).

Ra) 30 GHz

Rb) 300 THz

Rc) 517, 24 THz

Rd) $3 \times 10^{15} \text{ Hz}$

Re) $300 \times 10^{18} \text{ Hz}$

5. ¿A qué distancia de una fuente de ondas electromagnéticas isotrópicas de **100 W** se tendrá **$E_m = 15 \text{ V/m}$** ?

La potencia media por unidad de área es equivalente a la intensidad de onda I:

$$I = \frac{P_{med}}{A} \quad (14.3)$$

A su vez, la intensidad de onda se relaciona con el campo eléctrico de la siguiente manera:

$$I = \frac{E^2}{\mu_0 c} = \frac{E_{max}^2}{2\mu_0 c} \quad (14.4)$$

Mediante la Ec. (14.4) se obtiene I:

$$I = \frac{15 \text{ V/m}}{(4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A})(3 \times 10^8 \text{ m/s})} = 39,79 \times 10^{-3} \text{ W/m}^2$$

Ahora se reemplaza en la Ec. (14.3) y se obtiene el área:

$$A = \frac{100 \text{ W}}{39,79 \times 10^{-3} \text{ W/m}^2} = 2513,19 \text{ m}^2$$

Como se trata de una fuente isotrópica, se toma el área de una esfera, y se despeja el radio, que tipifica la distancia.

$$A = 2\pi r^2 = 2513,19 \text{ m}^2 \rightarrow r = \sqrt{\frac{2513,19 \text{ m}^2}{2\pi}} = 20 \text{ m}$$

6. Un transmisor de radio irradia isotrópicamente con una potencia de **15 kW**. Calcule el valor máximo del campo eléctrico de las ondas de radio a las siguientes distancias del transmisor: a) **1 km**, b) **10 km**, c) **100 km**.

7. En la Fig. 14.1 tenemos un campo eléctrico de **300 V/m** confinado en una superficie circular de **10 cm** de diámetro y dirigido perpendicularmente hacia fuera del plano de la figura. Si el campo aumenta a razón de **20 V/m**. ¿Cuál es la dirección y la magnitud del campo magnético en el punto P situado a **15 cm** del centro del círculo?.

R: $B = 1,85 \times 10^{-18} \text{ T}$. Sentido anti-horario, sobre el plano del dibujo.

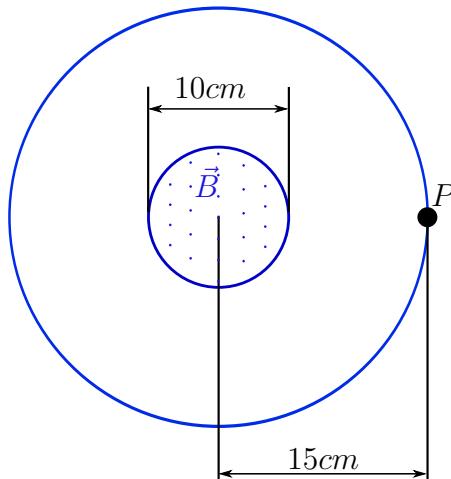


Figura 14.1: Esquema del ejercicio 7

8. Una onda electromagnética sinusoidal plana se propaga en la dirección **x**. Suponiendo que la longitud de onda es de **50 m** y que el campo eléctrico vibra en el plano **x – y** con una amplitud de **22 V/m**, calcule: a) la frecuencia de la onda, b) la magnitud y dirección de **B** cuando el campo eléctrico tiene valor máximo en la dirección negativa de **y** c) escriba una expresión para **B** en la forma $\mathbf{B} = B_{\max} \cos(kx - \omega t)$ con valores numéricos para B_{\max} , k y ω .

Ra) $f = 6 \times 10^6 \text{ Hz}$

Rb) $7,3 \times 10^{-8} \text{ T}$ en dirección **-Z**.

Rc) $\mathbf{B} = 7,3 \times 10^{-8} \cos(0,126x - 3,8 \times 10^7 t) \hat{\mathbf{z}}$

Capítulo 15

Óptica Ondulatoria

1. Un par de rendijas estrechas se ilumina con luz de $\lambda = 546,1 \text{ nm}$. Los máximos de interferencia se encuentran separados **1,10 mm** sobre una pantalla ubicada a **1,00 m** de las rendijas. ¿Cuál es la separación de las rendijas?
2. ¿A qué ángulo con respecto al eje óptico se encontrará el máximo de segundo orden, cuando un par de rendijas con una separación de **0,50 mm** se iluminen con luz verde de **550 nm** de longitud de onda?
3. Un par de rendijas estrechas se iluminan con luz roja de longitud de onda $\lambda = 633 \text{ nm}$. Las rendijas están separadas por **0,085 mm** de centro a centro. a) ¿Cuál es la separación angular de máximos de interferencia cercanos al centro del patrón? b) ¿Cuál es la distancia de separación entre máximos cercanos si se observan sobre una pared a **6,25 m** de distancia de la rendija?
4. Dos rendijas estrechas se iluminan con luz azul de longitud de onda $\lambda = 434 \text{ nm}$. Los máximos de interferencia que resultan están separados por **1,00 mm** sobre una pantalla a un **1,0 m** de las rendijas. ¿Cuál sería la franja de separación de los máximos si la luz que ilumina fuera roja de **656 nm**?
5. Dos ranuras separadas por una distancia de **0,45 mm** se colocan a **75 cm** de una pantalla. ¿Cuál es la distancia entre la segunda y la tercera líneas oscuras del patrón de interferencia en la pantalla, cuando se iluminan las ranuras con luz coherente con una longitud de onda de **50 nm**?
6. Se hace pasar luz coherente con una longitud de onda de **600 nm** a través de dos ranuras muy estrechas y se observa el patrón de interferencia en una pantalla que está a **3,00 m** de las ranuras. La franja brillante de primer orden está a **4,84 mm** del centro de la franja central brillante. ¿Con qué longitud de onda de la luz se observaría la franja oscura de primer orden en este mismo punto de la pantalla?
7. Se colocan dos vidrios planos rectangulares uno encima de otro sobre una mesa. Se introduce una tira delgada de papel entre ellos por el borde a fin de formar una cuña muy fina de aire. Se iluminan las placas a incidencia normal con luz de **546 nm** de una lámpara de vapor de mercurio. Se forman franjas de interferencia a razón de **15,0 franjas/cm**. Halle el ángulo de la cuña.
8. Una placa de vidrio de **9,00 cm** de largo se pone en contacto con una segunda placa y se mantiene a un ángulo pequeño respecto a esta por medio de una tira metálica de **0,0800 mm**.

de espesor colocada bajo un extremo. El espacio entre las placas está lleno de aire. Se ilumina el vidrio desde arriba con luz cuya longitud de onda en aire es de **656 nm** ¿Cuántas franjas de interferencia por centímetro se observan en la luz reflejada?

9. ¿Cuál es la película más fina de un recubrimiento de **$n = 1,42$** sobre vidrio (**$n = 1,52$**) con la cual puede haber interferencia destructiva del componente rojo (**650 nm**) de un haz incidente de luz blanca en aire por reflexión?
10. Sobre una ranura de **0,750 mm** de ancho incide luz monocromática proveniente de una fuente lejana. En una pantalla distante **2,00 m** de la ranura, la distancia medida del máximo central del patrón de difracción al primer mínimo, resulta ser de **1,35 mm**. Calcule la longitud de onda de la luz.
11. A través de una ranura que cubre una lente con una distancia focal de **60 cm** pasan rayos paralelos de luz verde de mercurio con una longitud de onda de **546 nm**. En el plano focal de la lente la distancia del plano focal al primer mínimo es de **10,2 mm**. ¿Cuál es el ancho de la ranura?
12. Sobre una ranura de **0,750 mm** de ancho incide luz proveniente de una fuente distante, cuya longitud de onda es de **633 nm** y el patrón de difracción resultante se observa en una pantalla a **3,50 m** de distancia. ¿Cuál es la distancia entre las dos franjas oscuras a ambos lados de la franja central brillante?
13. Un haz paralelo de luz no polarizada en aire incide a un ángulo de **54,5°** (respecto a la normal) sobre una superficie plana de vidrio. El haz reflejado está polarizado en su totalidad
a) ¿Cuál es el índice de refracción del vidrio? b) ¿Cuál es el ángulo de refracción del haz transmitido?
14. La luz que viaja en agua incide en una placa de vidrio a un ángulo de incidencia de **53°**; una parte del haz se refleja y otra se refracta. Si las porciones reflejada y transmitida forman un ángulo de **90°** una con la otra, ¿Cuál es el índice de refracción del vidrio? ($n_{\text{agua}} = 1,33$)
15. La luz no polarizada que se propaga en un líquido con un índice de refracción **n** incide en la superficie de un líquido, arriba de la cual hay aire. Si la luz incide sobre una superficie a un ángulo de **31,2°** respecto a la normal, la luz que se refleja de regreso en el líquido está totalmente polarizada a) ¿Cuál es el índice de refracción del líquido? b) ¿Qué ángulo forma con la normal a la superficie la luz refractada que propaga en el aire?