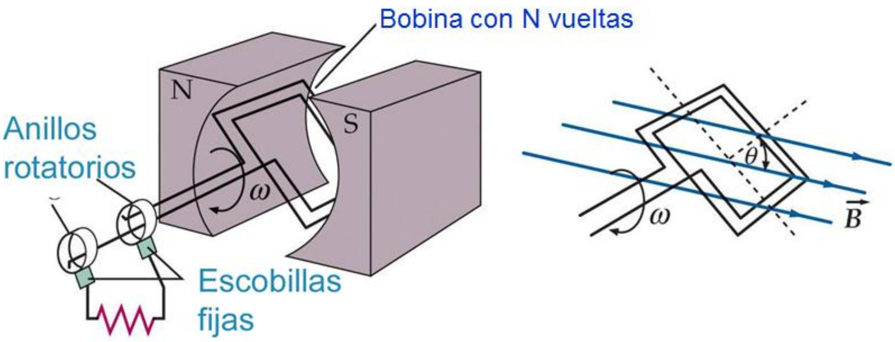
Serway- Jewett- Cap 33
Unidad 11: Corriente Alterna
Generación de ondas de fuerza electromotriz armónicas y su representación fasorial. Aplicación de fuerza electromotriz armónica a circuitos resistivos, capacitivos e inductivos. Potencia, energía e impedancias en cada caso. Gráficos de cada uno. Circuito RLC en serie; potencia; energía y triángulos de impedancias, tensión y potencia. Resonancia en serie.

Generadores de corriente alterna (CA)



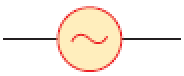
$$\Phi_B = BAcos\,\theta = BA\,cos\omega t$$

La fem inducida en la bobina es:

$$\varepsilon = -N\frac{d\Phi_B}{dt} = -NAB\frac{d}{dt}(\cos\omega t) = NAB\omega\,sen\omega t$$

$$\boxed{\varepsilon = NAB\omega\,sen\omega t = \varepsilon_{máx}\,sen\omega t}$$

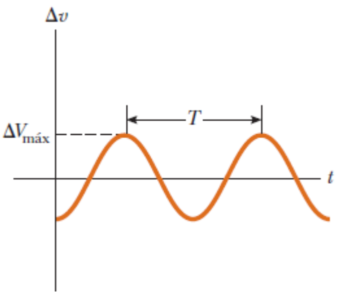
Circuito de corriente alterna CA
Un circuito de CA está conformado por elementos de circuito y una fuente de energía que proporciona un voltaje alterno Δv, y varia en el tiempo



$$\Delta v = \Delta V_{máx}\,sen\omega t$$

La frecuencia angular del voltaje de CA es:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$



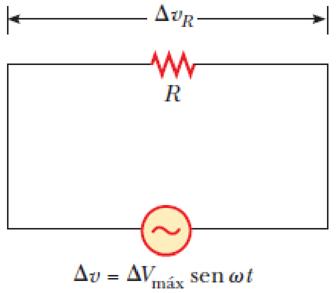
El voltaje suministrado por una fuente de CA es senoidal con un periodo T.

Donde $\Delta V_{máx}$ es el máximo voltaje de salida de la fuente de CA, o la amplitud de voltaje.
La corriente alterna se trata de una cantidad variable.

Valores que varían con el tiempo	Valores fijos
i = Corriente instantánea	$I_{máx}$ = Corriente
Δv = Voltaje instantáneo	$\Delta V_{máx}$ =Voltaje

La corriente en cualquier circuito conductor para una fuente de CA es una corriente alternante que también varía senoidalmente con el tiempo.

Resistores en un circuito de CA



Por regla de la espira de Kirchhoff

$$\Delta v - \Delta v_R = 0$$

$$\Delta v - i_R R = 0$$

Entonces

$$\Delta v = \Delta v_R = \Delta V_{máx}\ sen\ \omega t$$

La corriente instantánea

$$i_R = \frac{\Delta v_R}{R} = \frac{\Delta V_{máx}}{R}\ sen\ \omega t = I_{máx}\ sen\ \omega t$$

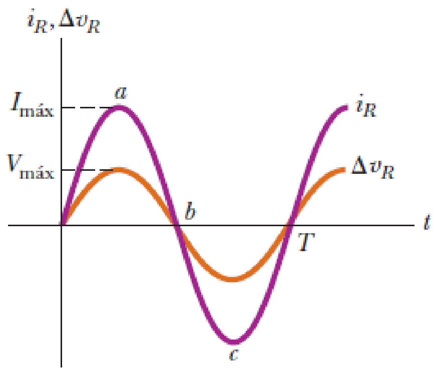
donde $I_{máx}$ es la corriente máxima

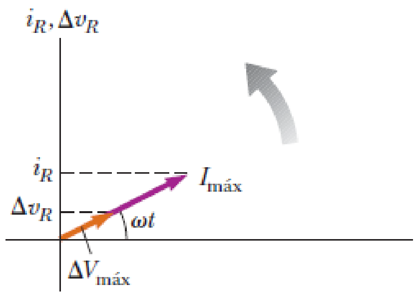
$$I_{máx} = \frac{\Delta V_{máx}}{R}$$

El voltaje instantáneo a través del resistor es

$$\Delta v_R = i_R R = I_{máx} R\ sen\ \omega t$$

La gráfica del voltaje y la corriente en función del tiempo para este circuito.





Se dice que la corriente y el voltaje están en fase porque cuando el voltaje toma el valor máximo, la corriente tomar el valor máximo, así cuando son cero y en sus valores mínimos.

Diagrama de fasores

Para simplificar el análisis de circuitos que contienen dos o más elementos, se usa una representación gráfica denominada diagramas de fasores.

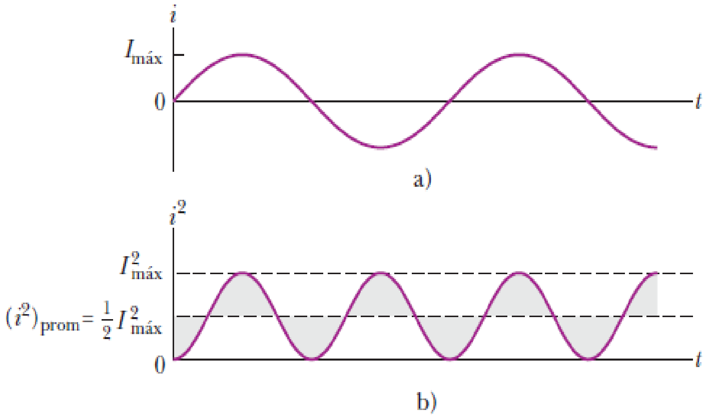
Un fasor es un vector cuya longitud es proporcional al valor máximo de la variable que representa ($\Delta V_{máx}$ para voltaje e $I_{máx}$ para corriente en el presente análisis) y que gira en sentido contrario a las manecillas del reloj con una rapidez angular igual a la frecuencia angular asociada con la variable. La proyección del fasor sobre el eje vertical representa el valor instantáneo de la cantidad que representa.

Para el circuito resistivo sencillo, observe que el valor promedio de la corriente en todo un ciclo es cero.

Calentamiento por efecto Joule en una resistencia

Potencia instantánea $P = I^2 R$

El aumento de temperatura producido por una corriente alterna que tiene un valor máximo $I_{máx}$ no es igual que el que produce una corriente directa igual a $I_{máx}$, porque la corriente alterna tiene este valor máximo sólo un instante durante cada ciclo.



Lo que es de importancia en un circuito de CA es el valor promedio de corriente, que se conoce como ***corriente*** $\boldsymbol{rms}$ (root mean square), rms quiere decir media cuadrática que en este caso se trata de la raíz cuadrada del valor medio (promedio) del cuadrado de la corriente.

$$I_{rms} = \sqrt{(i^2)_{prom}} \qquad\qquad i = I_{máx}\, sen\, \omega t$$

$i^{\,2}$ varía con $sen^2 \omega t$ y el valor promedio de $i^{\,2}$ es $\frac{1}{2}\ I^2_{máx}$

Por lo tanto, la corriente rms es:

$$I_{rms} = \frac{I_{máx}}{\sqrt{2}} = 0{,}707\ I_{máx}$$

Ejemplo: Si una corriente alterna cuyo valor máximo es 2 A entrega a un resistor la misma potencia que una corriente directa que tiene un valor de

$$I_{rms} = (0.707)(2\ A) = \ 1.41\ A$$

La potencia promedio entregada a un resistor

$$P_{prom} = I^2_{rms} R$$

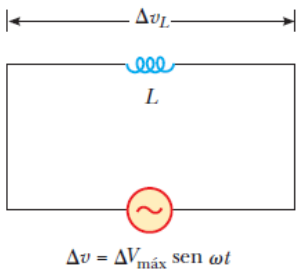
El voltaje alterno también se explica mejor en términos del voltaje rms, y la correspondencia es idéntica a la de la corriente:

$$\Delta V_{rms} = \frac{\Delta V_{máx}}{\sqrt{2}} = 0{,}707\ \Delta V_{máx}$$

Ejemplo: $\Delta V_{máx} = 170\ V$

$$\Delta V_{rms} = 0{,}707 \cdot 170\ V = 120\ V$$

Inductores en un circuito de CA



Por regla de la espira de Kirchhoff

$$\Delta v - \Delta v_L = 0$$

$$\Delta v_L = \varepsilon_L = -L\frac{di}{dt}$$

$$\Delta v - L\frac{di_L}{dt} = 0$$

$$\Delta v = \Delta v_L = L\frac{di_L}{dt} = \Delta V_{máx}\ sen\ \omega t$$

$$di_L = \frac{\Delta V_{máx}}{L}\ sen\ \omega t\ dt$$

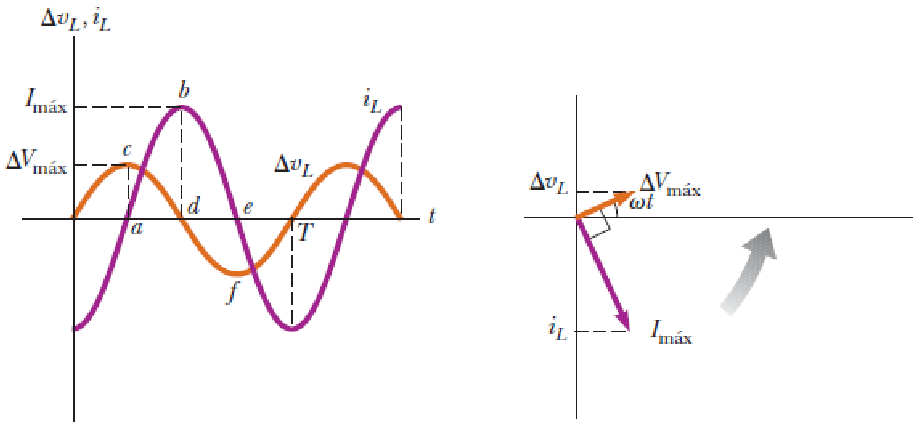
Al integrar la corriente instantánea i_L del inductor como función del tiempo:

$$i_L = \frac{\Delta V_{máx}}{L}\int sen\ \omega t\ dt = -\frac{\Delta V_{máx}}{\omega L}\cos\omega t$$

Por trigonométrica $\cos\omega t = -sen\ (\omega t - \frac{\pi}{2})$, y la ecuación se expresa

$$i_L = \frac{\Delta V_{máx}}{\omega L}\ sen\ (\omega t - \frac{\pi}{2})$$

La corriente en un inductor siempre se atrasa $90°$ respecto al voltaje en las terminales del inductor (un cuarto de ciclo en tiempo).



a) b)

El valor máximo de la corriente en un circuito inductivo

$$I_{máx} = \frac{\Delta V_{máx}}{\omega L}$$

Donde $\omega L = X_L$ y se llama reactancia inductiva, y su unidad es el ohm (Ω)

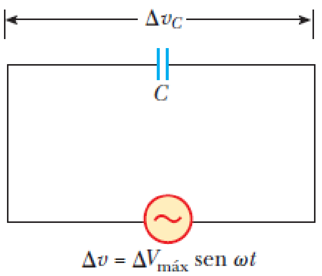
Por lo tanto

$$I_{máx} = \frac{\Delta V_{máx}}{X_L}$$

El voltaje en los terminales de un inductor es:

$$\Delta v_L = -L\frac{di_L}{dt} = -\Delta V_{máx}\ sen\ \omega t = -I_{máx}\ X_L\ sen\ \omega t$$

Capacitores en un circuito de CA



$$\Delta v - \Delta v_C = 0;\ \ \Delta v_C = \frac{q}{C}$$

$$\Delta v - \frac{q}{C} = 0$$

$$\Delta v = \frac{q}{C} = \Delta V_{máx}\ sen\ \omega t$$

$$q = C\Delta V_{máx}\ sen\ \omega t$$

$$i_C = \frac{dq}{dt} = \omega C\ \Delta V_{máx} \cos \omega t$$

Si usa la identidad trigonométrica

$$\cos \omega t = sen\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

La corriente

$$i_C = \omega C \Delta V_{máx}\ sen\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

La corriente siempre se adelanta $90°$ al voltaje presente en las terminales del capacitor.

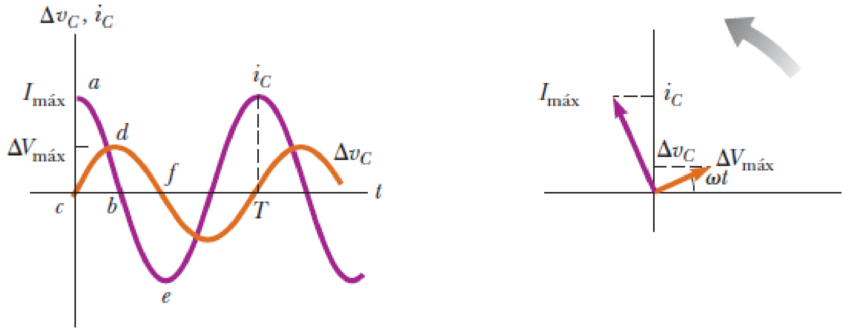
La corriente máxima alcanza su valor máximo cuando $cos\ \omega t = \pm 1$.

$$I_{máx} = \frac{\Delta V_{máx}}{\frac{1}{\omega C}} = \frac{\Delta V_{máx}}{X_c}$$

Donde $X_c = \frac{1}{\omega C}$, se llama reactancia capacitiva, y su unidad es el ohm (Ω)

El voltaje en los terminales de un capacitor es

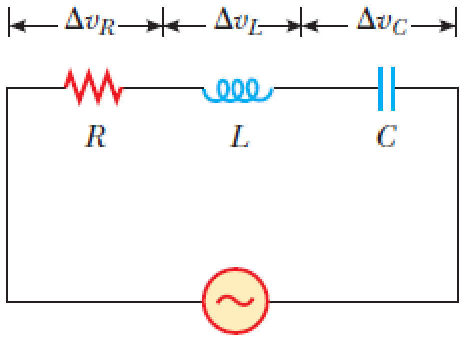
$$\Delta v_c = \Delta V_{máx} sen\ \omega t = I_{máx}\ X_c sen\ \omega t$$



a)

b)

Circuito *RLC* en serie



$$\Delta v = \Delta V_{máx}\ sen\ \omega t$$

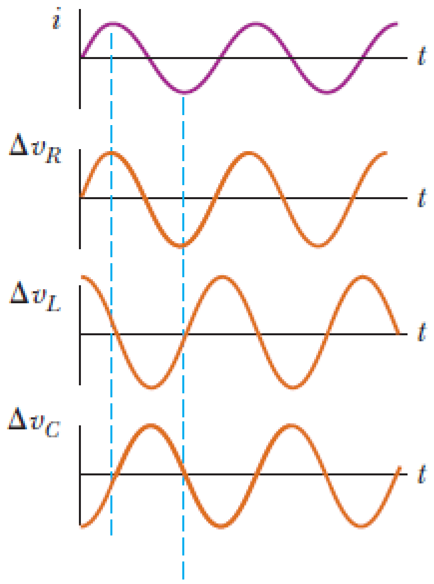
El voltaje aplicado tiene una variación senoidal con el tiempo,

Y la corriente varía con el tiempo

$$i = I_{máx}\ sen\ (\omega t - \emptyset)$$

donde $\emptyset$ **es cierto ángulo de fase** entre la corriente y el voltaje aplicados.

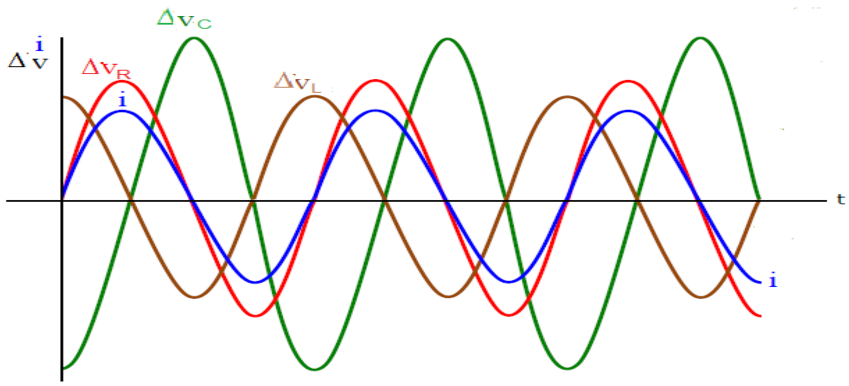
La incógnitas serán $\emptyset$ y $I_{máx}$



$$\Delta v_R = I_{máx} R\ sen\ \omega t = \Delta V_{máx}\ sen\ \omega t$$

$$\Delta v_L = I_{máx}\ X_L\ sen\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \Delta V_{máx} \cos \omega t$$

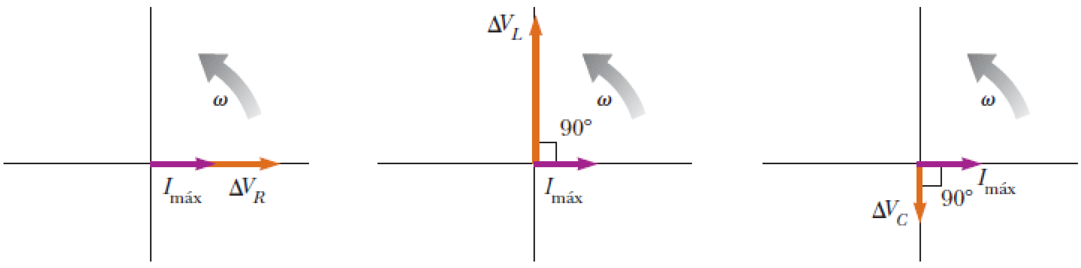
$$\Delta v_c = I_{máx}\ X_c sen\ \left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = -\Delta V_{máx}\ cos\ \omega t$$



Relación entre las fases de $\Delta v_{R,}$ $\Delta v_{L,}$ $\Delta v_{C,}$ para el circuito

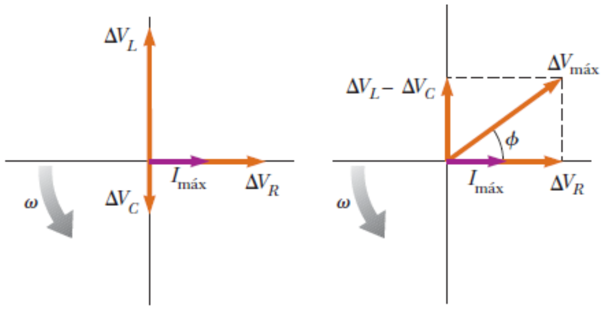
La suma de los tres voltajes debe ser igual al voltaje de la fuente de CA, ***pero es importante reconocer que como los tres voltajes tienen diferente correspondencia de fase con la corriente no se pueden sumar directamente.***

Representación de los fasores en un instante en el que la corriente de los tres elementos es, momentáneamente, cero. La corriente cero la representa el fasor de corriente a lo largo del eje horizontal.



a) Resistor b) Inductor c) Condensador

Suma vectorial de los fasores de voltaje.



a) b)

$\Delta V_L - \Delta V_C$ están en direcciones opuestas, y $\Delta V_L - \Delta V_C$ es perpendicular a ΔV_R

La suma vectorial de las amplitudes de voltaje $\Delta V_L, \Delta V_C$ y ΔV_R es igual a un fasor cuya longitud es el máximo voltaje aplicado $\Delta V_{máx}$ y que forma un ángulo $\emptyset$ con el fasor de corriente $I_{máx}$.

$$\Delta V_{máx} = \sqrt{\Delta V_R^2 + (\Delta V_L - \Delta V_C)^2} = \sqrt{(I_{máx}R)^2 + (I_{máx}X_L - I_{máx}X_C)^2}$$

$$\Delta V_{máx} = I_{máx}\sqrt{(R)^2 + (X_L - X_C)^2}$$

Entonces la corriente máxima es

$$I_{máx} = \frac{\Delta V_{máx}}{\sqrt{(R)^2 + (X_L - X_C)^2}}$$

Si llamamos ***impedancia Z*** del circuito

$$Z = \sqrt{(R)^2 + (X_L - X_C)^2}$$

La unidad de la impedancia Z es ohms.

La impedancia y, por lo tanto, la corriente de un circuito de CA depende de la resistencia, la inductancia, la capacitancia y la frecuencia (porque las reactancias son dependientes de la frecuencia).

Entonces la corriente máxima se puede escribir:

$$I_{máx} = \frac{\Delta V_{máx}}{Z}$$

Por el triángulo rectángulo en el diagrama del fasor, el ángulo de fase $\emptyset$ entre la corriente y el voltaje es:

$$\emptyset = tan^{-1}\left(\frac{\Delta V_L - \Delta V_C}{\Delta V_R}\right) = tan^{-1}\left(\frac{I_{máx}X_L - I_{máx}X_C}{I_{máx}R}\right)$$

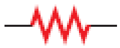
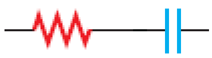
Por lo tanto, el ángulo de fase es

$$\emptyset = tan^{-1}\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right)$$

Sí $X_L > X_C$ $\quad\emptyset > 0$; el circuito es más inductivo que capacitivo.

Sí $X_L < X_C$ $\quad\emptyset < 0$: el circuito es más capacitivo que inductivo.

Sí $X_L = X_C$ $\quad\emptyset = 0$; el circuito es completamente resistivo.

Elementos del circuito	Impedancia (Z)	ϕ
 R	R	$0°$
 L	$X_L = \omega L$	$+90°$
 C	$X_c = \frac{1}{\omega C}$	$-90°$
 R L	$\sqrt{(R)^2 + (X_L)^2}$	Positivo y entre $0°\ y\ 90°$
 R C	$\sqrt{(R)^2 + (X_C)^2}$	Negativo y entre $0° y\ -90°$
 R L C	$\sqrt{(R)^2 + (X_L - X_C)^2}$	$X_L > X_C$ $\quad \emptyset > 0$ $X_L < X_C$ $\quad \emptyset < 0$
 L C	$X_L - X_C$	$X_L > X_C$ $\quad +90°$ $X_L < X_C$ $\quad -90°$

Ejemplo: Una resistencia de $600\ \Omega$ está conectada en serie con un inductor con una inductancia de $0,5\ H$ y un capacitor de $0,2\ \mu F$. Calcular la impedancia del circuito y dibujar el diagrama del vector impedancia para: a- una frecuencia de $400\ Hz$; b- una frecuencia de $600\ Hz$.

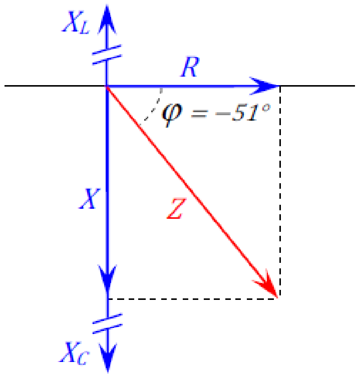
a- $X_L = \omega L = 2\pi f L = 2\pi \times 400\ Hz \times 0,5 = 1257\Omega$

$$X_c = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi \times 400\ Hz \times 0,2 \times 10^{-6} F} = 1989\ \Omega$$

$$X_L - X_c = 1257\Omega - 1989\ \Omega = -732\ \Omega$$

$$Z = \sqrt{(R\ )^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{(600\ \Omega\ )^2 + (-732\ \Omega)^2} = 946\ \Omega$$

$$\phi = -51°$$



b- Respuesta:
$Z = 820\ \Omega$
$\phi = 43°$

Potencia en un circuito de CA

La potencia entregada por una batería a un circuito externo de CD es igual al producto de la corriente y al voltaje terminal de la batería. De igual modo, la potencia instantánea entregada por una fuente de CA a un circuito es el producto de la corriente de la fuente y el voltaje aplicado. Para el circuito RLC la potencia instantánea P como

$$P = i\Delta v = I_{máx}\, sen\, (\omega t - \emptyset) \cdot \Delta V_{máx} sen\, \omega t$$

$$P = I_{máx}\, \Delta V_{máx}\, sen\, \omega t\, sen\, (\omega t - \emptyset)$$

Este resultado es una función complicada del tiempo y, debido a eso, no es muy útil desde un punto de vista práctico.

Lo que sí interesa es la potencia promedio en uno o más ciclos. Este promedio se puede calcular al usar primero la identidad trigonométrica:

$$sen\, (\omega t - \emptyset) = sen\, \omega t \cos \emptyset - \cos \omega t\, sen\, \emptyset$$

$$P = I_{máx}\, \Delta V_{máx}\, sen\, \omega t\, (sen\, \omega t \cos \emptyset - \cos \omega t\, sen\, \emptyset)$$

$$P = I_{máx}\, \Delta V_{máx}\, sen^2\, \omega t\, cos\, \emptyset - I_{máx}\, \Delta V_{máx}\, sen\, \omega t \cos \omega t\, sen\, \emptyset$$

Ahora considere el tiempo promedio de P en uno o más ciclos, observe que $I_{máx}$, $\Delta V_{máx}$, $\emptyset$ y ω todos son constantes.

El valor promedio de $sen^2\, \omega t = \frac{1}{2}$

El valor promedio de $sen\, \omega t \cos \omega t = 0$

Por lo tanto la potencia promedio P_{prom} se expresa

$$P_{prom} = \frac{1}{2} I_{máx}\, \Delta V_{máx}\, cos\, \emptyset$$

Si recordamos que

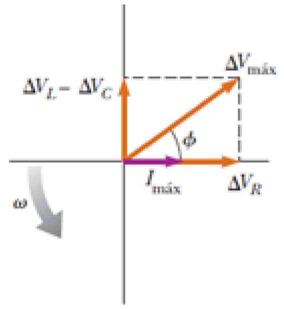
$$I_{rms} = \frac{I_{máx}}{\sqrt{2}} \quad \text{y} \quad \Delta V_{rms} = \frac{\Delta V_{máx}}{\sqrt{2}}$$

$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$

La potencia promedio P_{prom} entregada a un circuito RLC

$$P_{prom} = I_{rms}\, \Delta V_{rms}\, cos\, \emptyset$$

La cantidad $cos\, \emptyset$ se denomina factor de potencia.



Según la gráfica $\Delta V_R = \Delta V_{máx} \cos \emptyset$

Por lo tanto $\cos \emptyset = \frac{\Delta V_R}{\Delta V_{máx}} = \frac{I_{máx} R}{\Delta V_{máx}}$

$$P_{prom} = I_{rms}\, \Delta V_{rms}\, cos\, \emptyset = I_{rms} \frac{\Delta V_{máx}}{\sqrt{2}} \frac{I_{máx} R}{\Delta V_{máx}} = I_{rms} \frac{I_{máx}}{\sqrt{2}} R = I_{rms}^2 R$$

- La potencia promedio de un circuito de C.A resulta igual a la potencia que se convierte en energía interna y se disipa en forma de calor en el resistor, al igual que en el caso de un circuito de CD.

- No existen pérdidas de potencia asociadas con capacitores puros e inductores puros en un circuito de CA.

Resonancia en un circuito RLC en serie

Se dice que un circuito RLC en serie está en resonancia cuando la frecuencia impulsora es tal que la corriente rms tiene su valor máximo.

$$I_{rms} = \frac{\Delta V_{rms}}{Z} = \frac{\Delta V_{rms}}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$$

Puesto que la impedancia depende de la frecuencia de la fuente, la corriente del circuito RLC también depende de la frecuencia.

Z Impedancia $\quad Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$

Reactancia inductiva $X_L = \omega L$

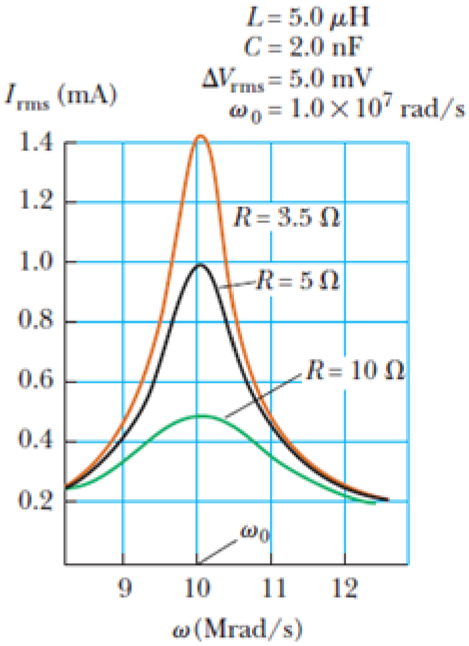
Reactancia capacitiva $X_C = \frac{1}{\omega C}$

La frecuencia ω_0 a la que $X_L - X_C = 0$, se denomina frecuencia de resonancia del circuito.

Para hallar la frecuencia de resonancia ω_0 la condición es $X_L = X_C$ por lo tanto

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \;\therefore\; \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Gráfica de corriente rms en función de la frecuencia para un circuito RLC en serie.



Curvas de resonancia en un circuito serie RLC. AL variar R en la expresión $I = I(\omega)$ se obtiene la curva de resonancia, y cuanto menor es R más alto y estrecho es el pico de la curva de resonancia. Esto es fundamental para el diseño de circuitos de sintonización de radio y televisión.

En cada caso la corriente rms alcanza su valor máximo a la frecuencia resonante ω_0.

Aplicación: sintonización de una emisora de radio.

También se puede calcular la potencia promedio como función de la frecuencia para un circuito RLC en serie.

$$P_{prom} = I_{rms}^2 R = \frac{(\Delta V_{rms})^2}{Z^2} R = \frac{(\Delta V_{rms})^2 R}{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

Como

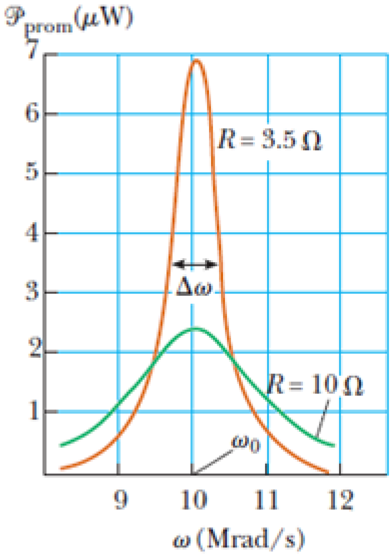
$X_L = \omega L$; $X_C = \frac{1}{\omega C}$ y $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$

$(X_L - X_C)^2 = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 = \frac{L^2}{\omega^2}(\omega^2 - \omega_0^2)^2$

La potencia promedio como función de la frecuencia en un circuito RLC

$$P_{prom} = \frac{(\Delta V_{rms})^2 R}{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \frac{(\Delta V_{rms})^2 R \omega^2}{R^2\omega^2 + L^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2}$$

Esta expresión muestra que con resonancia, cuando $\omega = \omega_0$, la potencia promedio es máxima y tiene el valor $\frac{(\Delta V_{rms})^2}{R}$.



Cuando se reduce la resistencia, la curva se hace más aplicada cerca de la frecuencia de resonancia. Esta nitidez de la curva suele describirse por medio de un parámetro sin dimensiones conocido como factor de calidad, denotada por Q:

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{\omega_0 L}{R}$$

$$\Delta\omega = \frac{R}{L}$$

Donde, $\Delta\omega$ es el ancho de la curva medido entre los dos valores de ω para los cuales P_{prom} tiene la mitad de su valor máximo, llamado puntos de potencia mitad.