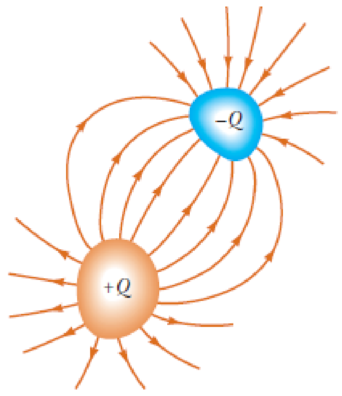
Serway-Jewett- 7ed- Ed: CERGANGE Learning-Capítulo 26

Unidad 5: Propiedades eléctricas de la materia y la capacidad eléctrica

Cálculo de la capacidad en capacitores planos, esféricos y cilíndricos. Conexión de condensadores. Energía de un condensador cargado y densidad de energía en un campo eléctrico. Los aislantes eléctricos o dieléctricos: descripción atómica. Constante dieléctrica, susceptibilidad y permitividad. Capacidad; unidades. Capacidad de una esfera. Influencia del dieléctrico.

Capacitores



Considere dos conductores como se observa en la figura, esta combinación se conoce como capacitor. Los conductores son las placas.

Si los conductores llevan carga de igual magnitud y signo opuesto, ($+Q\ y -Q$) existe una diferencia de potencial ΔV entre ellos.

Experimentalmente se demostró que $Q \propto \Delta V$,

$$Q = C\Delta V$$

donde C es la constante de proporcionalidad y se llama capacitancia.

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

La ***capacitancia C*** de un capacitor se define como la relación de la magnitud de la carga en cualquiera de los conductores a la magnitud de la diferencia de potencial entre dichos conductores.

- La capacitancia no depende ni de la carga, ni de la diferencia de potencial.
- Depende sólo de las características geométricas del capacitor, tales como el tamaño de los conductores, la distancia entre los conductores y la propiedad del espacio entre los conductores.
- La capacitancia siempre es una cantidad positiva.

$$C = \frac{Q}{\Delta V} > 0$$

La unidad del SI para capacitancia es el farad (F), nombre puesto en honor de Michael Faraday:

$$1F = 1\frac{C}{V}$$

En la práctica, los dispositivos representativos tienen capacitancias con intervalos entre microfarads (μF) ($1\mu F\ \equiv 1 \times 10^{-6}\ F$) a picofarads ($1pF$) ($1pF = 1 \times 10^{-12}\ F$).

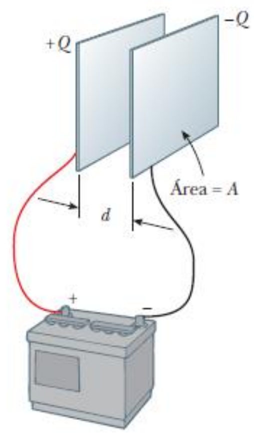
Carga de un capacitor formado por un par de placas paralelas

Cada placa está conectada a una de las terminales de una batería, como fuente de diferencia de potencial.

La batería establece un campo eléctrico, en los alambres de conexión cuando se cierra el circuito.

El campo eléctrico aplica una fuerza sobre los electrones en el alambre, esta fuerza hace que los electrones se muevan sobre la placa conectada con el terminal negativo.

Dicho movimiento continúa hasta que la placa, el alambre y la terminal quedan a un mismo potencial eléctrico.



Una vez alcanzada esta condición de equilibrio, ya no existirá diferencia de potencial entre el terminal y la placa; lo cual resulta en un campo eléctrico nulo en el alambre, y la detención del movimiento de los electrones. La placa tiene ahora una carga negativa.

Un proceso similar se presenta en la otra placa.

Cálculo de capacitancia

a- **Capacitor esférico**

Conductor esférico con carga, con cubierta conductora, esférica de radio infinito, concéntrico con la esfera, y con una carga de la misma magnitud, pero de signo opuesto.

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

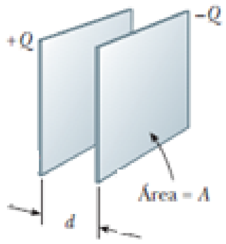
$V = k_e \frac{Q}{a}$; $\Delta V = V - 0$ en el caso de la cubierta infinitamente grande

$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{k_e \frac{Q}{a}} = \frac{a}{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}} = 4\pi\varepsilon_0 a$ **Capacitancia de una esfera con carga aislada**

Recordar que: $k_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$

La capacitancia de la esfera con carga y aislada es proporcional a su radio e independiente de su carga y la diferencia de potencial.

b- **Capacitor de placas paralelas**



La densidad de carga superficial en cada placa $\sigma = \frac{Q}{A}$

Campo eléctrico $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}$

Ya que el campo uniforme entre las placas $\Delta V = Ed$

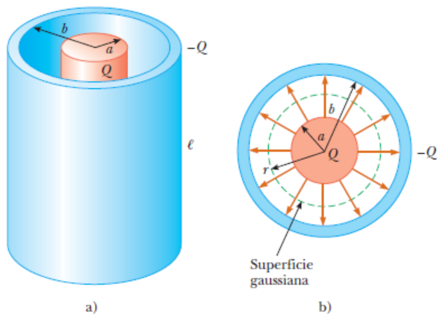
$$\Delta V = Ed = \frac{Qd}{\varepsilon_0 A}$$

Al sustituir ΔV en: $C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{\frac{Qd}{\varepsilon_0 A}} = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$

$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$ **Capacitancia de placas paralelas**

La capacitancia de un capacitor de placas paralelas es directamente proporcional al área de las placas, e inversamente proporcional a la distancia entre las placas. Hay un límite, si las acercamos mucho se produce una descarga eléctrica (una chispa en el aire).

c- **Capacitor cilíndrico**



Un conductor cilíndrico sólido, de radio a y carga Q, es coaxial con una cubierta cilíndrica de grosor despreciable, radio $b > a$ y carga $-Q$. Este capacitor cilíndrico tiene una longitud l

$$V_b - V_a = -\int_a^a \vec{E}.d\vec{s}$$

$$V_b - V_a = -\int_a^b E_r\, dr = -2k_e\lambda \int_a^b \frac{dr}{r} = -2k_e\lambda\, ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Sustituimos ΔV en valor absoluto

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{\left(2k_e\,{}^{Q}/_{l}\right)\, ln(b/a)} = \frac{l}{2k_e\, ln(b/a)}$$

Entonces la capacitancia del conductor cilíndrico de longitud l es:

$C = \frac{l}{2k_e\, ln(b/a)}$

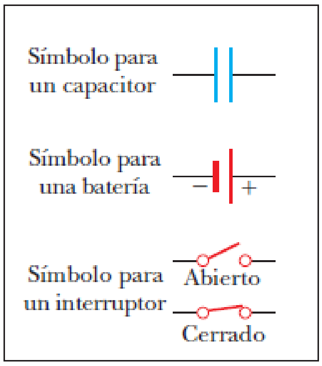
- La capacitancia es proporcional a la longitud de los cilindros.
- La capacitancia también depende de los radios de los dos conductores cilíndricos.

La capacitancia por unidad de longitud de una combinación de conductores cilíndricos concéntricos es:

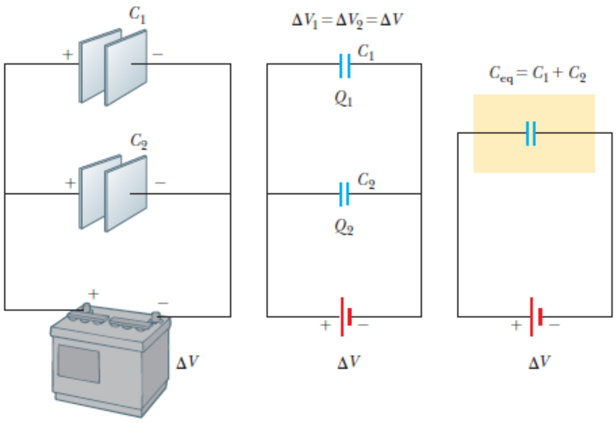
$$\frac{C}{l} = \frac{1}{2k_e\, ln(b/a)}$$

Combinaciones de capacitores

En los circuitos eléctricos con frecuencia se combinan dos o más capacitores. Es posible calcular la capacitancia equivalente de ciertas combinaciones.



a- Combinación en paralelo



$$\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V$$

$$Q_{tot} = Q_1 + Q_2$$

$$Q_{tot} = C_{eq}\Delta V$$

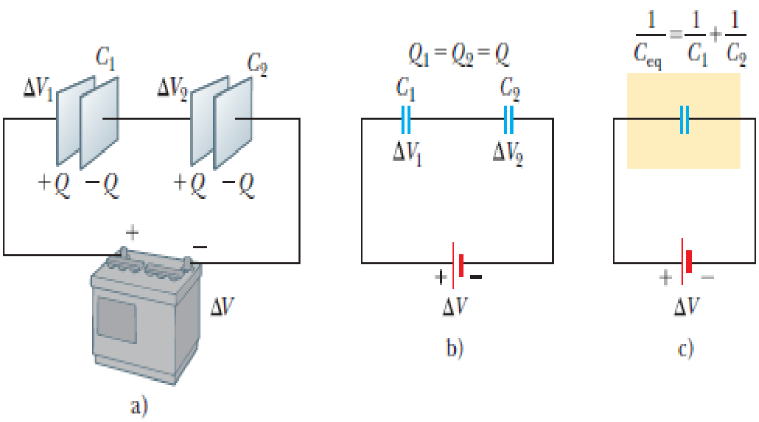
$$C_{eq}\Delta V = C_1\Delta V_1 + C_2\Delta V_2$$

$$C_{eq} = C_1 + C_2$$

Capacitores en paralelo $C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 \ldots$ (combinación en paralelo)

La capacitancia equivalente (C_{eq}) en paralelo resulta siempre mayor que la mayor de las capacitancias del agrupamiento.

b- Combinación en serie



$$Q_1 = Q_2 = Q$$

$$\Delta V_{tot} = \Delta V_1 + \Delta V_2$$

$$\Delta V_{tot} = \frac{Q}{C_{eq}}$$

$$\frac{Q}{C_{eq}} = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2}$$

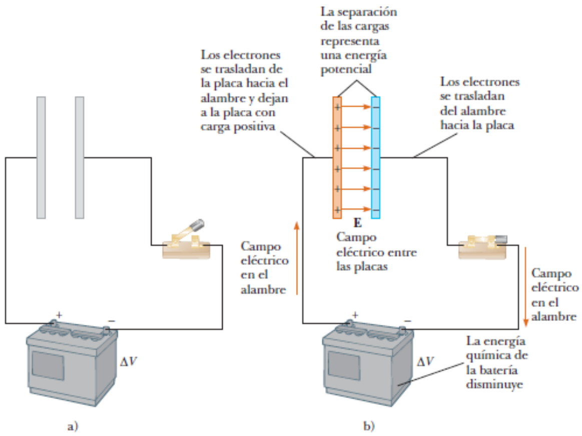
$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Capacitores en serie $\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \cdots$ (combinación en serie)

La capacitancia equivalente (C_{eq}) en serie resulta siempre menor que la menor de las capacitancias del agrupamiento.

c- Combinación mixta. (Ver ejemplo)

Energía almacenada en un capacitor con carga



Explicación que dista del proceso real, pero llegamos al mismo resultado final.

Suponemos que se mueve mecánicamente un elemento de carga positivo (dq) de la placa conectada con el terminal negativo hasta la placa conectada con el terminal positivo.

El primer elemento de carga no requiere trabajo para trasladarlo, el segundo sí, porque aparece una pequeña diferencia de potencial entre las placas.

$$dW = \Delta V dq = \frac{q}{C} dq$$

El trabajo total requerido para cargar el capacitor desde $q = 0$ hasta $q = Q$ es:

$$W = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{C} \int_0^Q q dq = \frac{Q^2}{2C}$$

El trabajo invertido al cargar el capacitor se presenta como una ***energía potencial eléctrica*** U almacenada en el mismo.

$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} Q\Delta V = \frac{1}{2} C(\Delta V)^2$ (energía almacenada en un capacitor)

Es aplicable a cualquier capacitor.
La energía se almacena en el campo eléctrico que hay entre las placas.

Ejemplo: Considere la energía almacenada en un capacitor de placas paralelas

Donde tenemos: $\Delta V = Ed$ y $C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$

Si sustituye estas expresiones en la ecuación

$$U = \frac{1}{2} C(\Delta V)^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{A}{d} (E^2 d^2) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 (Ad) E^2$$

El volumen ocupado por el campo eléctrico es (Ad),

La energía por cada unidad de volumen $\mu_E = \frac{U}{Ad}$, conocida como densidad de energía

Densidad de energía en un campo eléctrico $\mu_E = \frac{U}{Ad} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$

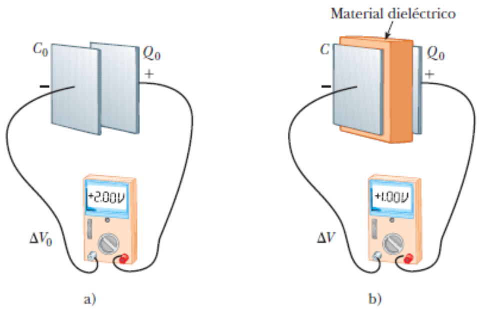
La expresión que se obtuvo a partir de considerar un capacitor de placas paralelas tiene validez general y establece que toda vez que haya un campo eléctrico en una región en el espacio hay asociada una energía cuya densidad es μ_E.

La densidad de energía en cualquier campo eléctrico en un punto dado es proporcional al cuadrado de la magnitud del campo eléctrico.

Capacitores con material dieléctrico

Un dieléctrico es un material no conductor, como el hule, el vidrio o el papel encerado.
Propiedades
• Incrementa la capacitancia.
• Incrementa el voltaje máximo de operación.
• Proporciona un posible soporte mecánico entre las placas, lo que permite que estén cerca una de la otra sin tocarse, así reduce d y aumenta C.

Experimento:



Capacitor cargado desconectado sin dieléctrico, en el voltímetro mide ΔV_0

$$C_0 = \frac{Q_0}{\Delta V_0}$$

Si ahora se inserta un material dieléctrico entre las placas el voltímetro mide ΔV, Se observa que $\Delta V_0 > \Delta V$. La relación de $\frac{\Delta V_0}{\Delta V} = K$ se llama constante dieléctrica, es adimensional, depende de las características del material y $K > 1$.
Ya que la carga Q_0 en el capacitor no cambia.

$$C = \frac{Q_0}{\Delta V} = \frac{Q_0}{\frac{\Delta V_0}{K}} = K\frac{Q_0}{\Delta V_0} = KC_0$$

$$C = KC_0$$

Es decir, la capacitancia aumenta en un factor K cuando el material dieléctrico llena por completo la región entre placas.

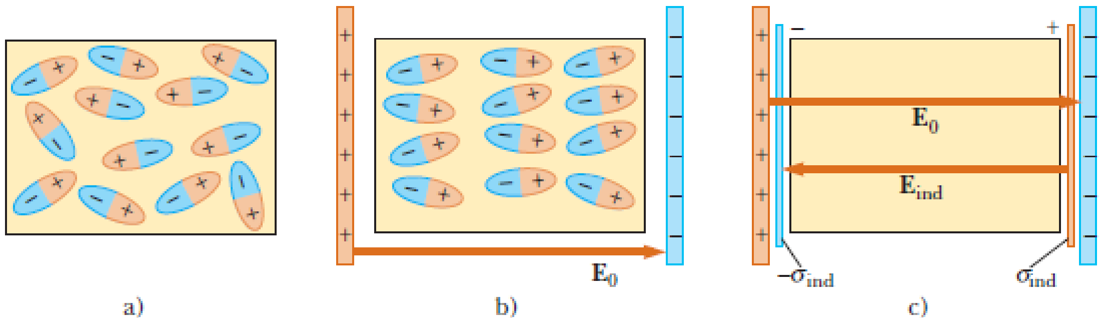
Ejemplo: La capacitancia para un capacitor de placas paralelas

Capacitancia sin dieléctrico $\qquad C_0 = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$

Capacitancia con dieléctrico $\qquad C = KC_0 = K\varepsilon_0 \frac{A}{d}$

$$Si\ \ K > 1\ \rightarrow C > C_0$$

Descripción atómica de los materiales dieléctricos



Sabemos que: $\Delta V = \frac{\Delta V_0}{K}$

La diferencia de potencial ΔV_0 entre las placas de un capacitor queda reducida a $\frac{\Delta V_0}{K}$ al insertar un material dieléctrico. Esta diferencia de potencial disminuye porque se reduce la magnitud del campo eléctrico entre las placas

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{K}$$

Considere primero un dieléctrico compuesto de moléculas polares colocadas en el campo eléctrico entre las placas de un capacitor.

Las moléculas tienen una orientación al azar en ausencia de un campo eléctrico.

El campo eléctrico $\vec{E}_0$ debido a las cargas sobre las placas del capacitor, se ejerce un momento de torsión sobre los dipolos, lo que provoca que se alineen parcialmente con el campo y el dieléctrico es un material polarizado.

La alineación de las moléculas en relación con el campo eléctrico depende de la temperatura y de la magnitud de este.

El efecto neto sobre el dieléctrico es la formación de una densidad de carga superficial inducida $-\sigma_{ind}$ y $+\sigma_{ind}$ en ambas caras.

Las cargas superficiales inducidas en el dieléctrico originan un campo eléctrico inducido, E_{ind} con dirección opuesta a E_0.

El campo eléctrico neto dentro del dieléctrico es:

$$E = E_0 - E_{ind}$$

Si $\quad E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad E = \frac{E_0}{K} = \frac{\sigma}{K\varepsilon_0} \qquad E_{ind} = \frac{\sigma_{ind}}{\varepsilon_0}$

Al sustituir en

$$E = E_0 - E_{ind}$$

$$\frac{\sigma}{K\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma_{ind}}{\varepsilon_0}$$

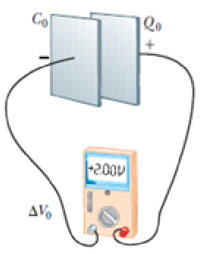
Despejando σ_{ind}

$$\sigma_{ind} = \left(\frac{K-1}{K}\right)\sigma$$

Sí K=1; $\sigma_{ind} = 0$

Sí K>1; $\sigma_{ind} < \sigma$

Energía almacenada en un capacitor con carga



a- Cargado y desconectado

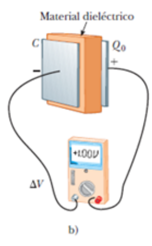
Energía almacenada en el capacitor sin dieléctrico $U_0 = \frac{1}{2}C_0(\Delta V_0)^2$

Se inserta el dieléctrico entre las placas de capacitor la energía almacenada en el capacitor con dieléctrico es:

$$U = \frac{1}{2}C(\Delta V)^2$$

Capacitancia $\quad C = KC_0$

y diferencia de potencial con dieléctrico $\Delta V = \frac{\Delta V_0}{K}$



Al sustituir en $\quad U = \frac{1}{2}C(\Delta V)^2$

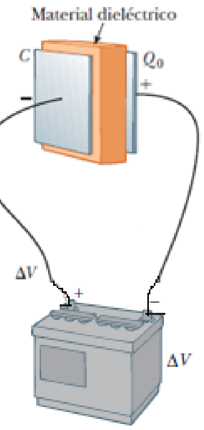
$$U = \frac{1}{2}C(\Delta V)^2 = \frac{1}{2}KC_0\left(\frac{\Delta V_0}{K}\right)^2 = \frac{U_0}{K}$$

La energía después de introducir el dieléctrico nos queda $U = \frac{U_0}{K}$

$U < U_0$ la energía final es menor que la energía inicial.

Ya que k > 1, la energía final es menor que la energía inicial. Se puede explicar la energía "perdida" al notar que el dieléctrico, cuando se inserta, se jala hacia el dispositivo. Para evitar que el dieléctrico acelere, un agente externo debe realizar trabajo negativo (W) sobre el dieléctrico, que es simplemente la diferencia $U - U_0$.

b- Capacitor conectado a la batería, en este caso tenemos que:



Campo eléctrico $E = E_0$

La diferencia de potencial $\Delta V = \Delta V_0$

La carga eléctrica $Q > Q_0$ $Q = KQ_0$

La capacitancia $C = \frac{Q}{\Delta V} = K\frac{Q_0}{\Delta V} = KC_0$

Al sustituir en: $U = \frac{1}{2}C(\Delta V)^2$

$$U = \frac{1}{2}C(\Delta V)^2 = \frac{1}{2}KC_0(\Delta V)^2 = KU_0$$

$$U = KU_0$$

La energía final es mayor que la energía inicial, aumenta gracias a la batería y para ello debe estar conectada a la misma.