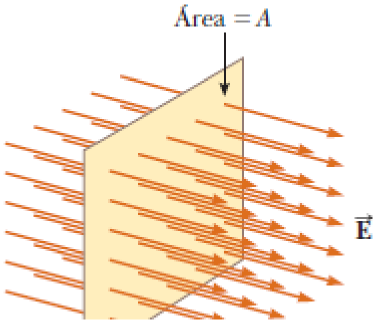
Serway- Jewett- ed 7-Cap 24
Unidad 3: Electrostática y campos eléctricos
La Carga Eléctrica: Ley de Coulomb, unidades. Campo eléctrico: definición y representación. Campo de una carga puntual y varias cargas puntuales. **Integral de Gauss: aplicaciones a diversas distribuciones de cargas.**

Flujo eléctrico

Es una cantidad que relaciona la línea de campo con una superficie que es atravesada por una línea de campo.
a- Líneas de campo que representan un campo eléctrico uniforme que penetra en un plano de área A perpendicular al campo.



Recuerde que el número de líneas por unidad de área (la *densidad de líneas*) es proporcional a la magnitud del campo eléctrico.

$$\frac{N}{A} \propto E$$

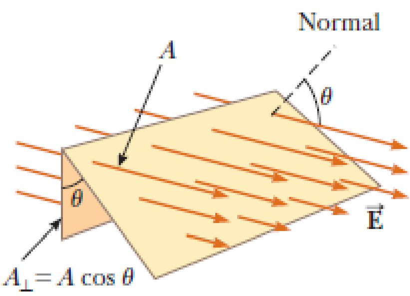
$$N \propto EA$$

Flujo eléctrico ϕ_E (phi mayúscula):

$$\phi_E = EA$$

Las unidades del SI correspondientes a $E\ y\ A, \phi_E$,se expresa en newtons por metros al cuadrado entre coulomb $(N.\frac{m^2}{c})$.

b- Líneas de campo que representan un campo eléctrico uniforme que penetra en un área *A* la cual forma un ángulo θ en relación con el campo.



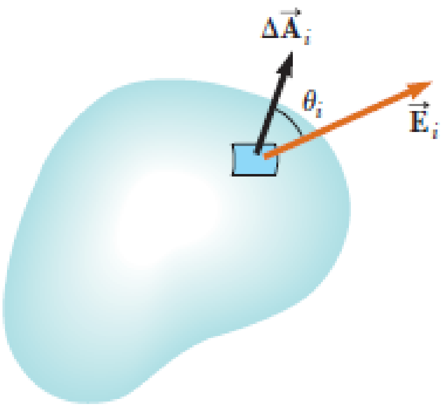
$$\phi_E = EA_{\perp} = EAcos\theta$$

El flujo que atraviesa una superficie de área *A* fija tiene un valor máximo *EA* cuando la superficie es perpendicular al campo (cuando la normal de la superficie es paralela al campo), $\theta = 0°$

El flujo es cero si la superficie es paralela al campo (cuando la normal de la superficie es perpendicular al campo), θ =90°.

El número de líneas de campo que atraviesan una determinada superficie depende de la orientación de esta última con respecto a las líneas de campo.

C- En situaciones más generales, el campo eléctrico varía a lo largo de una superficie.



-Considere una superficie dividida en un gran número de elementos pequeños, cada uno de área ΔA.
- $\Delta\vec{A}_i$ es una cantidad vectorial.

$$\Delta\phi_E = E_i \Delta A_i cos\theta_i = \vec{E_i} \cdot \Delta\vec{A_i}$$

$$\phi_E \approx \sum \vec{E_i} \cdot \Delta\vec{A_i}$$

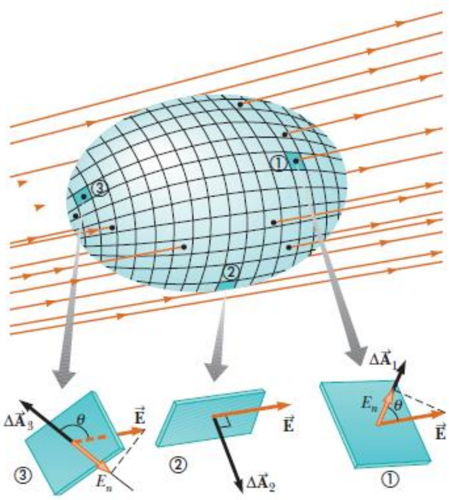
$$\phi_E = \lim_{\Delta A_i \to 0} \sum \vec{E_i} \cdot \Delta\vec{A_i} = \int_{Superficie} \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

Definición flujo eléctrico: El flujo del campo eléctrico ϕ_E es una magnitud escalar que se define mediante el producto escalar

$$\phi_E = \int_{Superficie} \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

d- Flujo eléctrico a través de una superficie cerrada.

Una superficie cerrada es una superficie que divide el espacio en dos regiones, una región interior y una región exterior, no es posible pasar de una región a otra sin atravesar la superficie. Para esta superficie el vector representativo del área apunta hacia afuera de la superficie.



1- $\theta_i < 90°$ $\Delta\phi_E = E\,\Delta A_1 cos\theta_1$ $\Delta\phi_E > 0$ $positivo$

2-$\theta_i = 90°$ $\Delta\phi_E = E\,\Delta A_2 cos\theta_2$ $\Delta\phi_E = 0$

3-$180° \geq \theta_i > 90°$ $\Delta\phi_E = E\,\Delta A_3 cos\theta_3$ $\Delta\phi_E < 0$ $negativo$

Entonces

$\phi_E > 0$ Flujo saliente

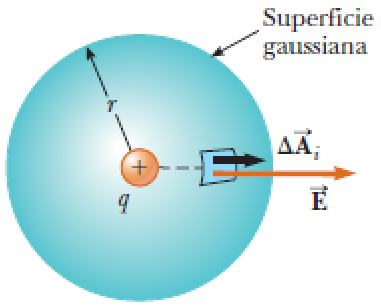
$\phi_E < 0$ Flujo entrante

El flujo neto ϕ_Ea través de una superficie cerrada

$$\phi_E = \phi_{Esaliente} - \phi_{Eentrante} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

Ley de Gauss

Relaciona el flujo neto a través de una superficie cerrada con la carga encerrada en la superficie.



El flujo neto a través de la superficie gaussiana es igual a:

$$\phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E\, dA = E \oint dA = EA$$

Si: $E = k_e \frac{q}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2}$

$$A = 4\pi r^2$$

Por lo tanto, el flujo neto a través de la superficie gaussiana es:

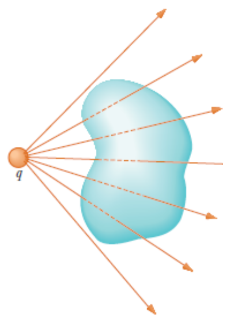
$$\phi_E = EA = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

- El flujo neto a través de la superficie esférica es proporcional a la carga existente en el interior.
- El flujo es independiente del radio r porque el área de la superficie esférica es proporcional a r^2, en tanto que el campo eléctrico es proporcional a $\frac{1}{r^2}$.

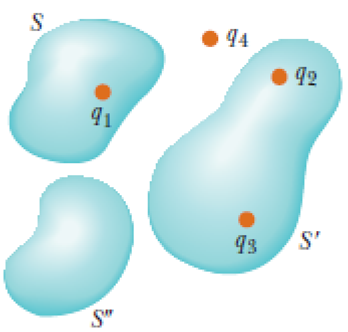
En consecuencia, en el producto del área y el campo eléctrico, se elimina la dependencia con r.

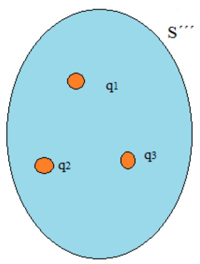
El flujo neto a través de cualquier superficie cerrada que rodea a una carga puntual q tiene un valor de $\frac{q}{\varepsilon_0}$ y es independiente de la forma de la superficie.



$$\phi_E = 0$$

El flujo neto saliente a través de la superficie que no encierra ninguna carga es cero.





$$q_1 \to \vec{E}_1$$

$$q_2 \to \vec{E}_2$$

$$q_3 \to \vec{E}_3$$

$$\phi_E = \oint (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3) \cdot d\vec{A} = \frac{(q_1 + q_2 + q_3)}{\varepsilon_0} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$$

q_{in} representa la carga neta en el interior de la superficie y $\vec{E}$ el campo eléctrico en cualquier punto de esta.

La ley de Gauss dice que el flujo neto a través de cualquier superficie cerrada es igual a la carga neta encerrada en la superficie dividida por ε_0

$$\phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$$

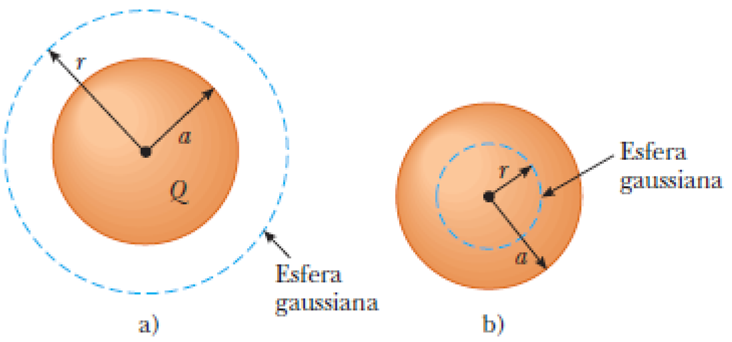
En la práctica la ley de Gauss se aplica para determinar el campo eléctrico para distribuciones de carga con simetrías esféricas, cilíndricas o planares.

Si es posible elegir con cuidado la superficie gaussiana que rodea a la distribución de cargas, se puede simplificar la integral de la ecuación.

Aplicación de la ley de Gauss a varias distribuciones de carga

a- Distribución de carga con simetría esférica: Una esfera sólida aislante con radio *a* tiene una densidad de carga volumétrica uniforme ρ y tiene una carga positiva total *Q*

1- $para\, r > a$ y $\rho = \frac{Q}{V} = constante$



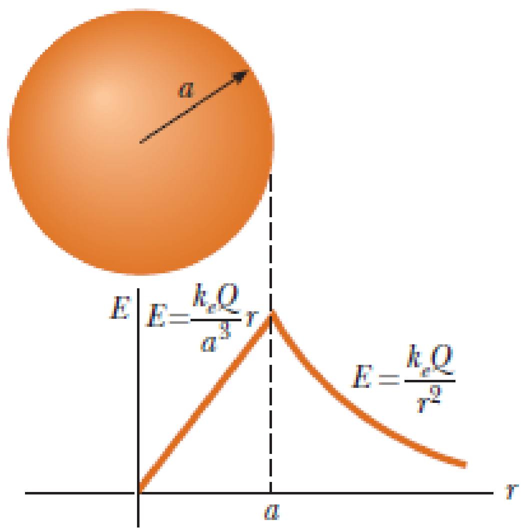
$$\phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint EdA = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\oint EA = E \oint dA = E(4\pi r^2) = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

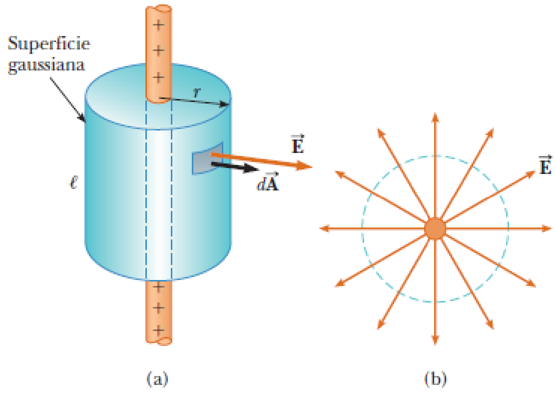
$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = k_e \frac{Q}{r^2} \quad \boxed{para\, r > a}$$

2- $para\, r < a$

$$E = k_e \frac{Q}{a^3} r \quad \boxed{para\, r < a}$$



b- Distribución de carga con simetría cilíndrica: Encuentre el campo eléctrico a una distancia r desde una línea de carga positiva de longitud infinita y carga constante por unidad de longitud λ. $\left(\lambda = \frac{Q}{l} = constante\right)$

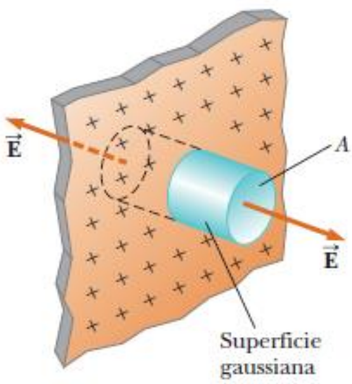


$$\phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \oint dA = EA = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0}$$

$$E(2\pi r l) = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} = 2k_e\frac{\lambda}{r}$$

c- Plano de carga: Encuentre el campo eléctrico debido a un plano infinito de carga positiva con densidad de carga superficial uniforme σ. $\left(\sigma = \frac{Q}{A} = constante\right)$



$$\phi_E = 2EA = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Conductores en equilibrio electrostático

Un buen conductor eléctrico contiene cargas (electrones) que no se encuentran unidas a ningún átomo y debido a eso tienen la libertad de moverse en el interior del material. Cuando dentro de un conductor no existe ningún movimiento neto de carga, el conductor está en equilibrio electrostático.

Un conductor en equilibrio electrostático tiene las siguientes propiedades:

1. En el interior del conductor el campo eléctrico es cero, si el conductor es sólido o hueco.

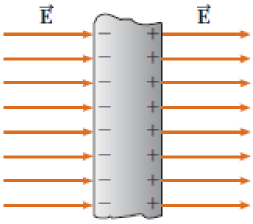
2. Si un conductor aislado tiene carga, ésta reside en su superficie.

3. El campo eléctrico justo fuera de un conductor con carga es perpendicular a la superficie del conductor y tiene una magnitud $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$, donde σ es la densidad de carga superficial en ese punto.

4. En un conductor de forma irregular, la densidad de carga superficial es máxima en aquellos puntos donde el radio de curvatura de la superficie es el menor.

En el análisis siguiente se comprueban las primeras tres propiedades.

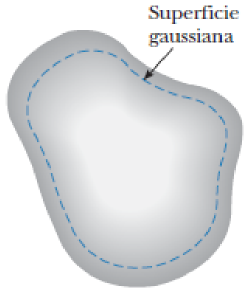
1- El campo eléctrico hace que las cargas negativas se muevan hacia la izquierda y causa un plano de cargas positiva del lado derecho. $\vec{F}_e = q\vec{E}$



Estos planos de carga crean un campo eléctrico adicional en el interior del conductor que se opone al campo externo, $E_{interno} = E_{externo}$, lo que resulta en un campo eléctrico cero en el interior del conductor.

2- Conductor con exceso de carga.
Si $E_{interior} = 0$ por la primera propiedad

$$\phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} = 0$$



$q_{in} = 0$ la carga neta en el interior de la superficie gaussiana es cero.

Entonces cualquier carga neta en
el conductor deberá residir sobre su superficie.

3- Si el vector de campo $\vec{E}$ tuviera algún componente paralelo a la superficie del conductor, los electrones libres estarían sujetos a una fuerza eléctrica y se moverían a lo largo de la superficie; en este caso, el conductor no estaría en equilibrio, por lo que el vector de campo debe ser perpendicular a la superficie.