

INTRODUCCIÓN AL PROCESAMIENTO DE SEÑALES

Práctica con Utilitario 1

Análisis de señales y sistemas discretos mediante Octave

Integrantes:

- Guzmán Joaquín - Legajo 03751/4
- Gamarra Tomás - Legajo 03852/8

La Plata – Argentina

Fecha de entrega: 27/11/2025

Índice

1. Introducción.....
2. Ejercicio 1.....
2.1. Señal y aproximación de su TFTD.....
2.2. Respuesta impulsional y en frecuencia de sistemas dados.....
2.2.1. Sistema 1.....
2.2.2. Sistema 2.....
2.2.3. Sistema 3.....
2.2.4. Sistema 4.....
2.3. Implementación de los sistemas.....
2.3.1. Sistema 1.....
2.3.2. Sistema 2.....
2.3.3. Sistema 3.....
2.3.4. Sistema 4.....
2.4. Señales de salida.....
2.5. Aproximación de la TFTD de cada señal de salida.....
3. Ejercicio 2.....
3.1. Canal digital - Respuesta impulsional.....
3.2. Implementación.....
3.3. Audio procesado.....
3.4. Diseño de filtros correctores.....
3.5. Resultados comparativos.....
3.6. Conclusiones.....

1. Introducción

El presente trabajo con utilitario tiene como objetivo la utilización de Octave como herramienta para el análisis y descripción de sistemas discretos. En particular estos sistemas serán del tipo lineal e invariantes al desplazamiento (SLID).

El desarrollo del informe se organiza en dos secciones principales:

-En la primera, se analiza una señal discreta y su espectro. Se estudia una serie de sistemas discretos, sus respuestas impulsionales y respuestas en frecuencia. Finalmente, se analiza las salidas de cada sistema cuando se aplica la señal anteriormente mencionada junto con sus respectivos contenidos espectrales.

-En la segunda, se analiza una señal que representa la respuesta impulsional de un sistema discreto, cuyo comportamiento modela un canal digital con dos ecos. Se modela al sistema en Octave, a través del cual se procesa una señal de audio real y se busca corregir el efecto del canal mediante filtros FIR puestos en cascada.

2. Ejercicio 1

En este ejercicio se estudia una señal discreta dada y su espectro de frecuencias. Para su análisis se emplea la Transformada de Fourier en Tiempo Discreto (TFTD), la cual se calcula mediante una aproximación numérica.

Además, se consideran cuatro sistemas descritos por ecuaciones en diferencias. De cada uno se obtiene analíticamente su respuesta impulsional y su respuesta en frecuencia, y se los clasifica en función de sus correspondientes gráficas. Luego, estos sistemas se implementan en Octave y se comparan sus respuestas impulsionales numéricas con las obtenidas analíticamente.

A continuación, utilizando la implementación de los sistemas, se calcula de manera numérica la TFTD de cada uno y se la contrasta con la respuesta en frecuencia obtenida analíticamente.

Finalmente, se aplica la señal discreta dada a cada sistema, se grafican sus salidas, se obtiene su espectro mediante la TFTD numérica y se analizan los resultados.

2.1. Señal y aproximación de su TFTD

Sea $x[n]$ la señal obtenida al evaluar la función **senial.m** en el número 37514. En este punto se calcula una aproximación numérica de su TFTD. La sumatoria de la TFTD se evalúa sobre un intervalo discreto y finito de valores de n .

En estas condiciones, la transformada obtenida coincide con la TFTD exacta de la señal truncada mediante un cajón de longitud $2K+1$.

La implementación empleada en Octave se muestra en el **Código 2.1.1.**

```
for k = 1:length(s)
    X_aprox(k) = sum(x .* exp(-1i*2*pi*s(k)*n));
end
```

Código 2.1.1. Fragmento de código que implementa la aproximación numérica de la TFTD de x .

La variable n representa el conjunto de instantes donde está definida la señal $x[n]$, en particular desde $-K$ hasta K con paso uno.

Por otro lado, la variable s define las frecuencias en las que se evalúa la aproximación numérica. Para cada valor de $s(k)$, el código suma $x[n] \cdot e^{-j \cdot 2\pi s(k) n}$, almacenando el resultado en $X_{\text{aprox}}(k)$.

A continuación se muestran en las figuras **2.1.** y **2.2.** las gráficas de la parte real e imaginaria de $x[n]$ respectivamente. Luego se muestran también en las figuras **2.3.** y **2.4.** el módulo y fase de la aproximación de la TFTD de $x[n]$.

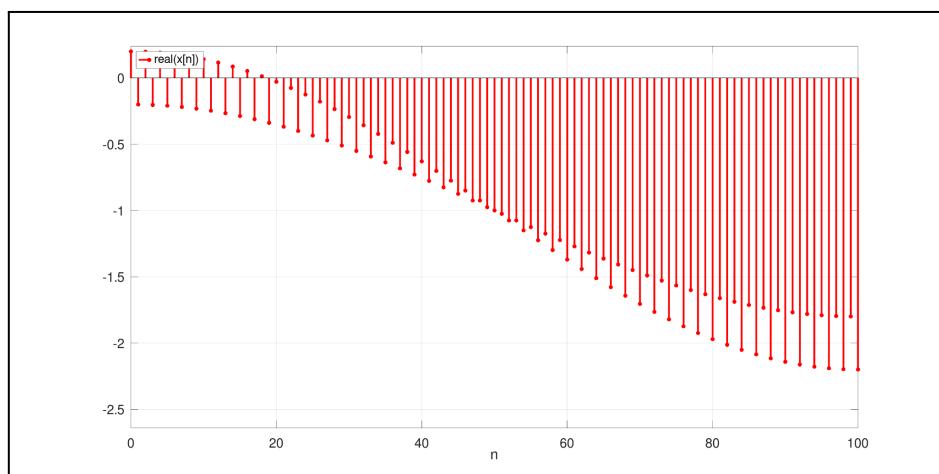


Figura 2.1.1. Gráfico de la parte real de la señal $x[n]$.

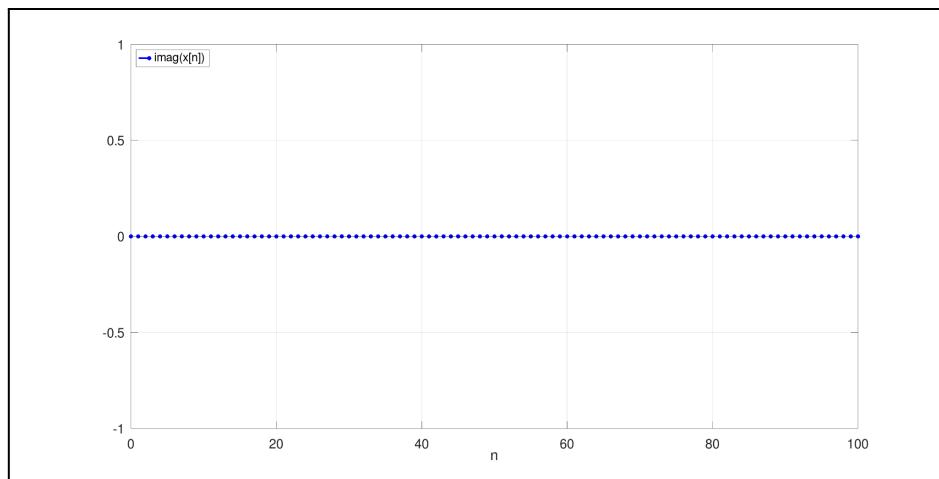


Figura 2.1.2. Gráfico de la parte imaginaria de la señal $x[n]$.

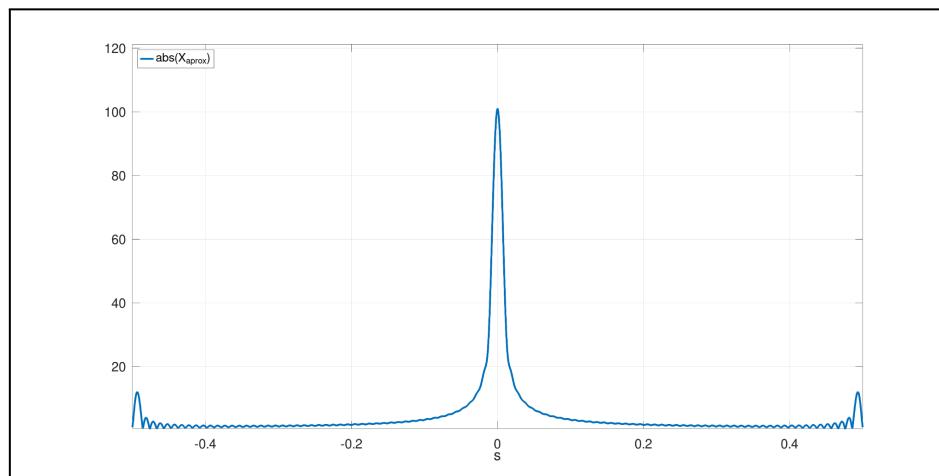


Figura 2.1.3. Gráfico del módulo de la aproximación de la TFTD de $x[n]$.

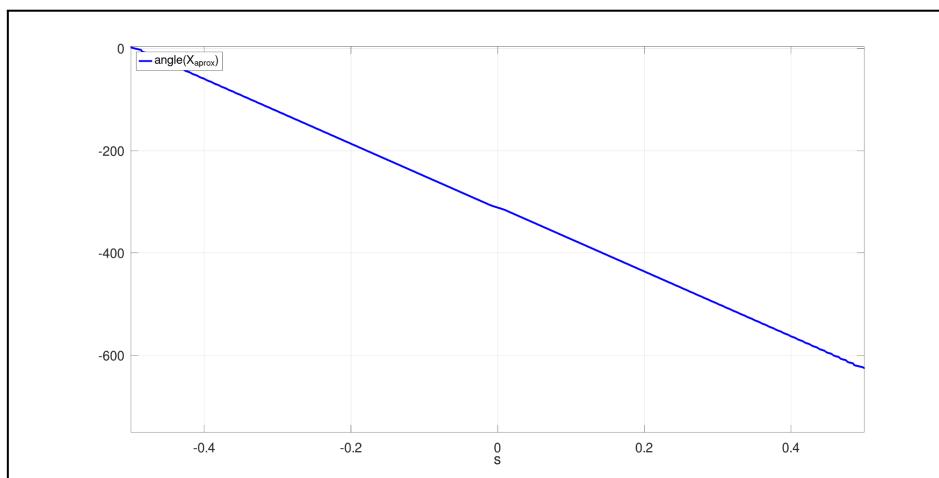


Figura 2.1.4. Gráfico de la fase de la aproximación de la TFTD de $x[n]$.

A partir de los gráficos de la parte real e imaginaria de la señal $x[n]$, se observa que la parte imaginaria es nula en todos los instantes, mientras que la parte real contiene toda la variación de la señal. Por lo tanto, puede concluirse que la señal $x[n]$ es una señal real.

A partir del módulo de la TFTD aproximada se observa que la señal concentra la mayor parte de su energía en frecuencias bajas. Además, se aprecia una pequeña contribución en frecuencias altas, lo cual sugiere la presencia de cambios más bruscos en la señal, aunque con menor intensidad.

Por parte de la fase de la TFTD aproximada, se observa un comportamiento lineal, por lo que es seguro decir que, siendo $-2\pi \cdot n_0$ la pendiente de la recta, la señal $x[n]$ puede expresarse como la versión desplazada en n_0 de otra señal centrada $x_1[n]$:

$$x[n] = x_1[n - n_0]$$

2.2. Respuesta impulsional y en frecuencia de los sistemas

En este inciso se analizan cuatro sistemas lineales e invariantes al desplazamiento (SLID), definidos mediante sus ecuaciones en diferencias:

$$\textbf{Sistema 1: } y[n] = \frac{1}{2}x[n] + \frac{1}{2}x[n - 1]$$

$$\textbf{Sistema 2: } y[n] = \frac{1}{2}x[n] - \frac{1}{2}x[n - 1]$$

$$\textbf{Sistema 3: } y[n] = \frac{1}{4}x[n] + \frac{1}{4}x[n - 1] + \frac{1}{2}y[n - 1]$$

$$\textbf{Sistema 4: } y[n] = \frac{1}{4}x[n] - \frac{1}{4}x[n - 1] - \frac{1}{2}y[n - 1]$$

Dado que todas las ecuaciones presentadas se ajustan a la forma general:

$$\sum_{i=0}^N a_i y[n - i] = \sum_{j=0}^M b_j x[n - j]$$

que corresponde a un sistema lineal e invariante al desplazamiento descrito mediante ecuaciones en diferencias, se concluye que los cuatro sistemas analizados son efectivamente SLID.

A continuación, se obtiene de manera analítica tanto la respuesta impulsional como la respuesta en frecuencia de cada uno de los sistemas, se presentan para cada sistema sus respectivos gráficos y se extraen conclusiones sobre las propiedades y el comportamiento de cada uno.

Metodología (procedimiento general)

- **Respuesta impulsional:** La respuesta impulsional $h[n]$ de un sistema se obtiene aplicando una entrada $x[n]=\delta[n]$. Alternativamente, cuando resulta más conveniente, se determina $h[n]$ a partir de $H(e^{j2\pi s})$ mediante la TFTD inversa.
- **Respuesta en frecuencia:** La respuesta en frecuencia $H(e^{j2\pi s})$ de un sistema se obtiene aplicando la TFTD a la respuesta impulsional del mismo. Alternativamente, cuando resulte más conveniente, al ser todos los sistemas SLID, se determina a partir de la TFTD mediante:

$$H(e^{j2\pi s}) = \frac{Y(e^{j2\pi s})}{X(e^{j2\pi s})}$$

Para evitar repeticiones, en los apartados siguientes se aplicarán estas técnicas a cada sistema.

2.2.1. Sistema 1

Se tiene al Sistema 1 descrito por la ecuación en diferencias:

$$y[n] = \frac{1}{2}x[n] + \frac{1}{2}x[n - 1]$$

Respuesta impulsional

La respuesta impulsional $h[n]$ se obtiene aplicando como entrada un impulso:

$$x[n] = \delta[n]$$

Sustituyendo en la ecuación del sistema:

$$h[n] = \frac{1}{2}\delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n - 1]$$

Respuesta en frecuencia

La respuesta en frecuencia $H(e^{j2\pi s})$ se obtiene aplicando la definición de la TFTD:

$$H(e^{j2\pi s}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j2\pi sn}$$

Sustituyendo $h[n]$:

$$H(e^{j2\pi s}) = TFTD\{h[\cdot]\}(s) = \frac{1}{2}(1 + e^{-j2\pi s})$$

$$H(e^{j2\pi s}) = \frac{1}{2}(1 + e^{-j2\pi s})$$

Gráficos

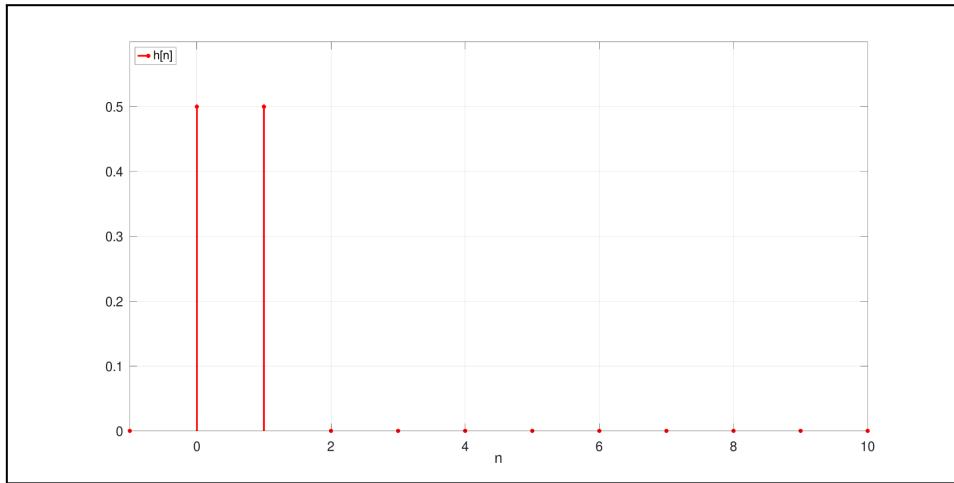


Figura 2.2.1. Gráfico de la respuesta impulsional $h[n]$ del Sistema 1.

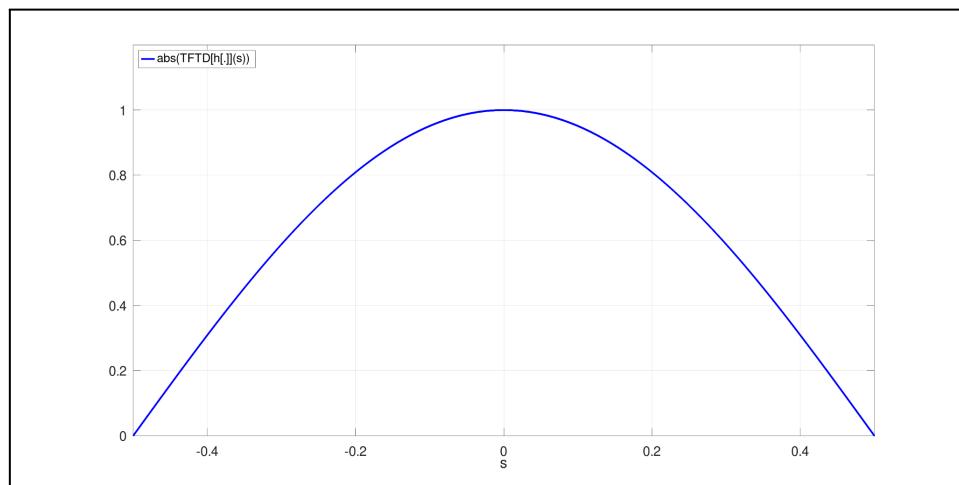


Figura 2.2.2. Gráfico del módulo de la respuesta en frecuencia $H(e^{j2\pi s})$ del Sistema 1 para $|s| \leq 1/2$.

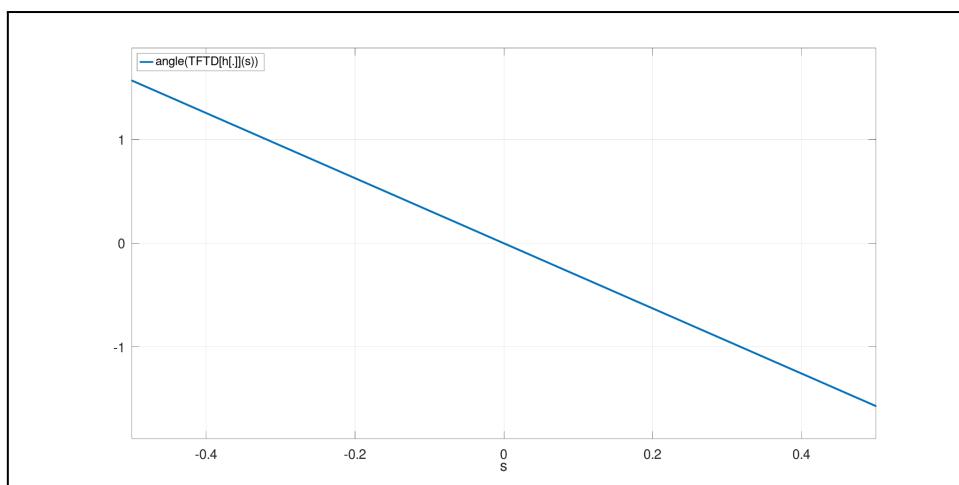


Figura 2.2.3. Gráfico de la fase de la respuesta en frecuencia $H(e^{j2\pi s})$ del Sistema 1 para $|s| \leq 1/2$.

Análisis y conclusiones

En base a los gráficos de la respuesta impulsional y respuesta en frecuencia del Sistema 1, es posible concluir que además de ser un SLID, cumple con las siguientes propiedades:

- **Causalidad:** Dado que $h[n] = 0$ para $n < 0$, se puede concluir que el sistema no responde antes de recibir una entrada, y por lo tanto es causal (Ver **Figura 2.2.1.**).
- **FIR:** Dado que $h[n] = 0$ a partir de un valor $n=n_0=2$, entonces el sistema tiene una respuesta impulsional finita.
- **Estabilidad EA/SA:** Al ser **FIR**, $h[n]$ es absolutamente sumable, por lo que el sistema es estable en sentido EA/SA.
- **Memoria:** El sistema tiene memoria, porque la salida en un instante depende no sólo de $x[n]$ sino también de $x[n-1]$.
- **Comportamiento en frecuencia:** Como se observa en el módulo de $H(e^{j2\pi s})$ (**Figura 2.2.1.**), el sistema amplifica las bajas frecuencias y atenúa las altas, por lo que actúa como un filtro pasa-bajos.

Conclusión global: El Sistema 1 es un SLID FIR, causal, estable y con memoria. Además actúa como un filtro pasa-bajos.

2.2.2. Sistema 2

Se tiene al Sistema 2 descrito por la ecuación en diferencias:

$$y[n] = \frac{1}{2}x[n] - \frac{1}{2}x[n - 1]$$

Respuesta impulsional

La respuesta impulsional $h[n]$ se obtiene aplicando como entrada un impulso:

$$x[n] = \delta[n]$$

Sustituyendo en la ecuación del sistema:

$$h[n] = \frac{1}{2}\delta[n] - \frac{1}{2}\delta[n - 1]$$

Respuesta en frecuencia

La respuesta en frecuencia $H(e^{j2\pi s})$ se obtiene aplicando la definición de la TFTD:

$$H(e^{j2\pi s}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j2\pi sn}$$

Sustituyendo $h[n]$:

$$H(e^{j2\pi s}) = TFTD\{h[\cdot]\}(s) = \frac{1}{2}(1 - e^{-j2\pi s})$$

$$H(e^{j2\pi s}) = \frac{1}{2}(1 - e^{-j2\pi s})$$

Gráficos

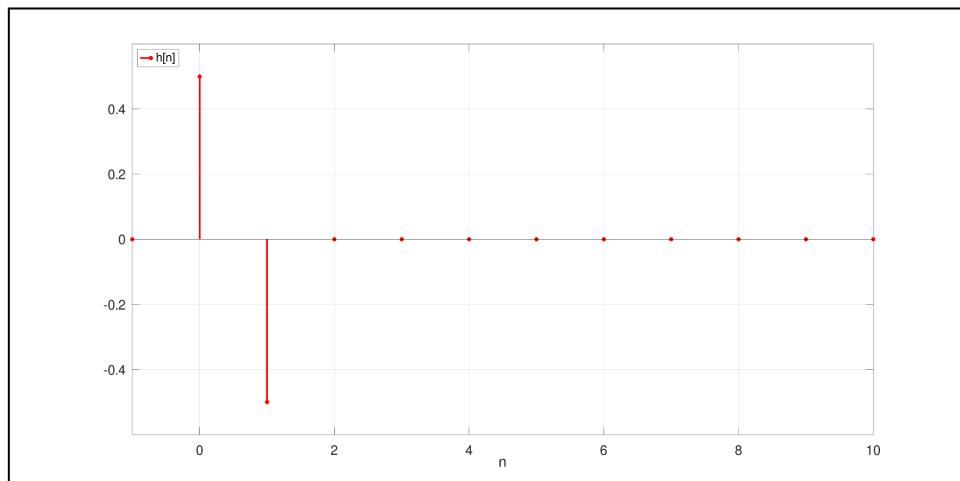


Figura 2.2.4. Gráfico de la respuesta impulsional $h[n]$ del Sistema 2.

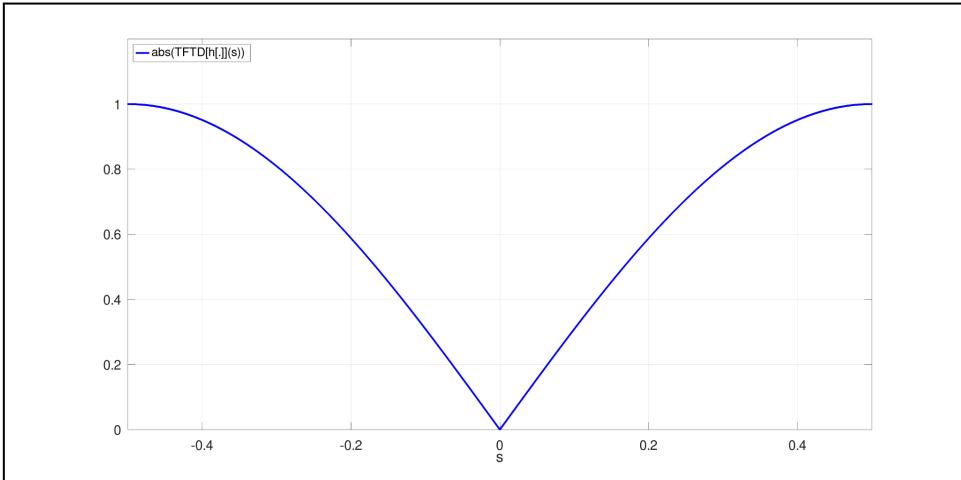


Figura 2.2.5. Gráfico del módulo de la respuesta en frecuencia $H(e^{j2\pi s})$ del Sistema 2 para $|s| \leq 1/2$.

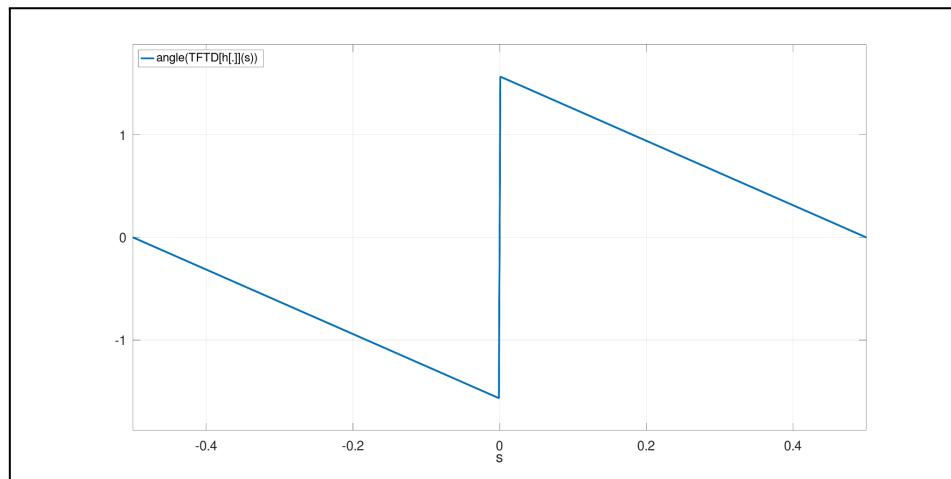


Figura 2.2.6. Gráfico de la fase de la respuesta en frecuencia $H(e^{j2\pi s})$ del Sistema 2 para $|s| \leq 1/2$.

Análisis y conclusiones

En base a los gráficos de la respuesta impulsional y respuesta en frecuencia del Sistema 2, es posible concluir que además de ser un SLID, cumple con las siguientes propiedades:

- **Causalidad:** Dado que $h[n] = 0$ para $n < 0$, se puede concluir que el sistema no responde antes de recibir una entrada, y por lo tanto es causal (Ver **Figura 2.2.4.**).
- **FIR:** Dado que $h[n] = 0$ a partir de un valor $n=n_0=2$, entonces el sistema tiene una respuesta finita al impulso.
- **Estabilidad EA/SA:** Al ser **FIR**, $h[n]$ es absolutamente sumable, por lo que el sistema es estable en sentido EA/SA.
- **Memoria:** El sistema tiene memoria, porque la salida en un instante depende no sólo de $x[n]$ sino también de $x[n-1]$.

- **Comportamiento en frecuencia:** Como se observa en el módulo de $H(e^{j2\pi s})$ (**Figura 2.2.5.**), el sistema amplifica las altas frecuencias y atenúa las bajas, por lo que actúa como un filtro pasa-altos.

Conclusión global: El Sistema 2 es un SLID FIR, causal, estable EA/SA y con memoria. Además actúa como un filtro pasa-altos.

2.2.3. Sistema 3

Se tiene al Sistema 3 descrito por la ecuación en diferencias:

$$y[n] = \frac{1}{4}x[n] + \frac{1}{4}x[n - 1] + \frac{1}{2}y[n - 1]$$

Respuesta en frecuencia

La respuesta en frecuencia $H(e^{j2\pi s})$ se obtiene aplicando la TFTD en la ecuación en diferencias, buscando despejar $\frac{Y(e^{j2\pi s})}{X(e^{j2\pi s})}$:

$$Y(e^{j2\pi s}) = \frac{1}{4}X(e^{j2\pi s}) + \frac{1}{4}X(e^{j2\pi s})e^{-j2\pi s} + \frac{1}{2}Y(e^{j2\pi s})e^{-j2\pi s}$$

$$\frac{Y(e^{j2\pi s})}{X(e^{j2\pi s})} = \frac{1}{4(1 - \frac{1}{2}e^{-j2\pi s})}(1 + e^{-j2\pi s})$$

$$H(e^{j2\pi s}) = \frac{1}{4(1 - \frac{1}{2}e^{-j2\pi s})}(1 + e^{-j2\pi s})$$

Respuesta impulsional

La respuesta impulsional $h[n]$ se obtiene aplicando la TFTD inversa a la expresión de la respuesta en frecuencia hallada anteriormente:

$$h[n] = TFTD^{-1}\{H(e^{j2\pi s})\}[n]$$

Sustituyendo $H(e^{j2\pi s})$:

$$h[n] = TFTD^{-1}\left\{\frac{1}{4(1-\frac{1}{2}e^{-j2\pi s})}(1 + e^{-j2\pi s})\right\}[n]$$

$$h[n] = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^n \{u[n] + 2u[n - 1]\}$$

Gráficos

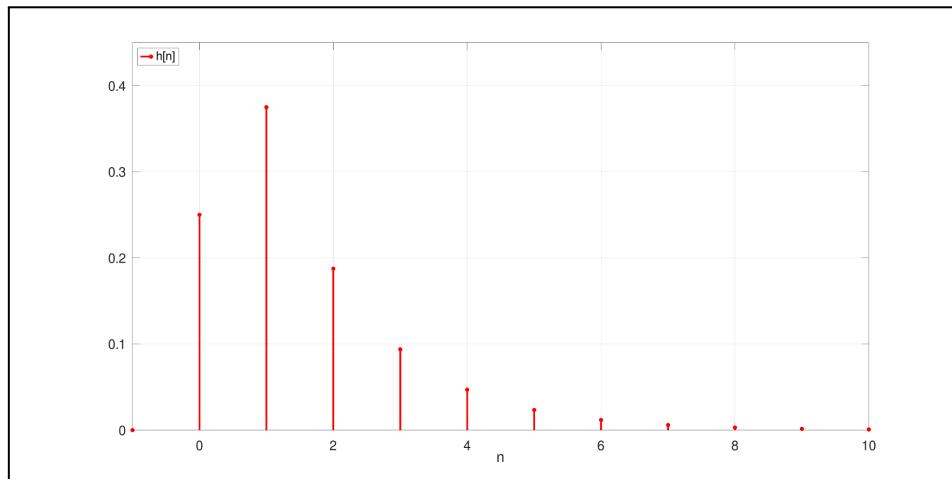


Figura 2.2.7. Gráfico de la respuesta impulsional $h[n]$ del Sistema 3.

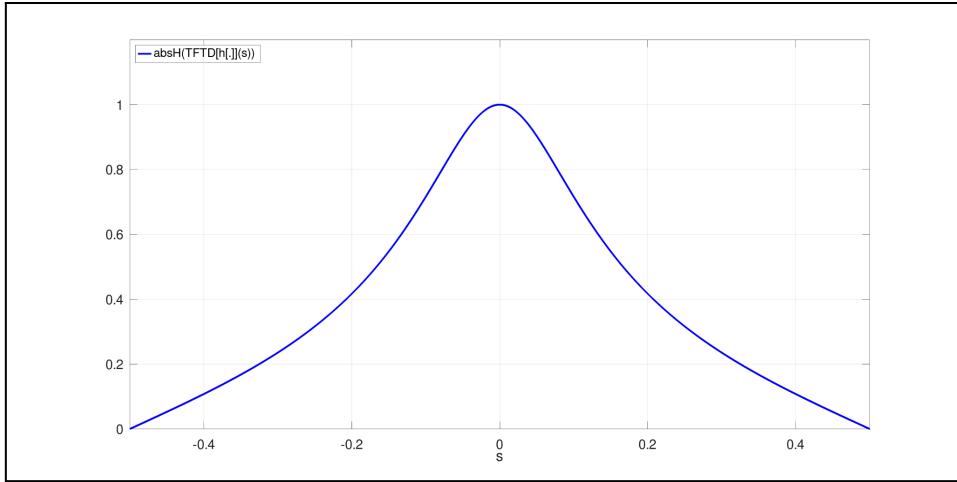


Figura 2.2.8. Gráfico del módulo de la respuesta en frecuencia $H(e^{j2\pi s})$ del Sistema 3 para $|s| \leq 1/2$.

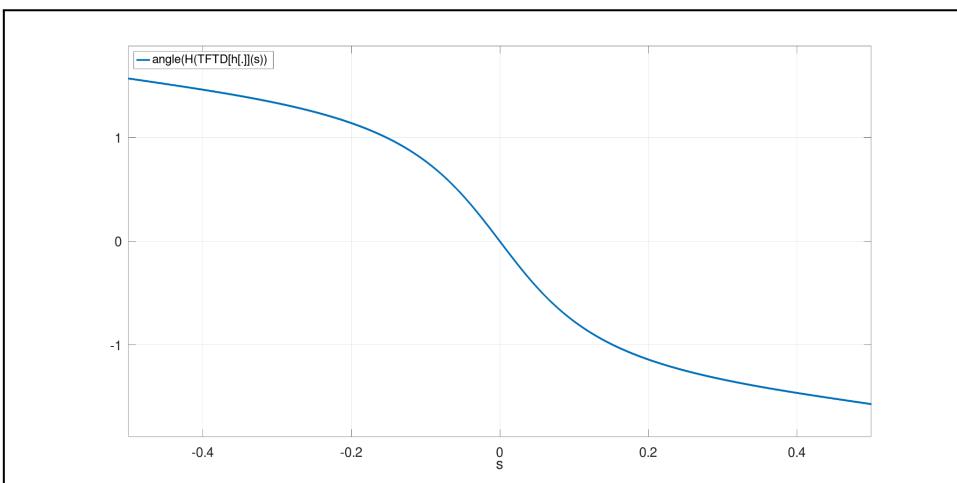


Figura 2.2.9. Gráfico de la fase de la respuesta en frecuencia $H(e^{j2\pi s})$ del Sistema 3 para $|s| \leq 1/2$.

Análisis y conclusiones

En base a los gráficos de la respuesta impulsional y respuesta en frecuencia del Sistema 3, es posible concluir que además de ser un SLID, cumple con las siguientes propiedades:

- **Causalidad:** Dado que $h[n] = 0$ para $n < 0$, se puede concluir que el sistema no responde antes de recibir una entrada, y por lo tanto es causal (Ver **Figura 2.2.7.**).
- **IIR:** Dado que $h[n] \neq 0$ a partir de un valor $n=n_0=0$, entonces el sistema tiene una respuesta infinita al impulso.
- **Estabilidad EA/SA:** Un SLID es estable en sentido EA/SA si su respuesta impulsional es absolutamente sumable:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h[n]| = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{8} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{1-1/2} = 1$$

Dado que es absolutamente sumable, se concluye que el sistema es estable en sentido EA/SA.

- **Memoria:** El sistema tiene memoria porque su respuesta impulsional no es nula fuera del instante $n=0$. Como $h[n]$ presenta valores distintos de cero para $n>0$, la salida en un instante dado depende de valores pasados de la entrada (por la convolución).
- **Comportamiento en frecuencia:** Como se observa en el módulo de $H(e^{j2\pi s})$ (**Figura 2.2.8.**), el sistema amplifica las bajas frecuencias y atenúa las altas, por lo que actúa como un filtro pasa-bajos.

Conclusión global: El Sistema 3 es un SLID IIR, causal, estable y con memoria. Además actúa como un filtro pasa-bajos.

2.2.4. Sistema 4

Se tiene al Sistema 4 descrito por la ecuación en diferencias:

$$y[n] = \frac{1}{4}x[n] - \frac{1}{4}x[n-1] - \frac{1}{2}y[n-1]$$

Respuesta en frecuencia

La respuesta en frecuencia $H(e^{j2\pi s})$ se obtiene aplicando la TFTD en la ecuación en diferencias, buscando despejar $\frac{Y(e^{j2\pi s})}{X(e^{j2\pi s})}$:

$$Y(e^{j2\pi s}) = \frac{1}{4}X(e^{j2\pi s}) - \frac{1}{4}X(e^{j2\pi s})e^{-j2\pi s} - \frac{1}{2}Y(e^{j2\pi s})e^{-j2\pi s}$$

$$\frac{Y(e^{j2\pi s})}{X(e^{j2\pi s})} = \frac{1}{4(1 + \frac{1}{2}e^{-j2\pi s})} (1 - e^{-j2\pi s})$$

$$H(e^{j2\pi s}) = \frac{1}{4(1 + \frac{1}{2}e^{-j2\pi s})} (1 - e^{-j2\pi s})$$

Respuesta impulsional

La respuesta impulsional $h[n]$ se obtiene aplicando la TFTD inversa a la expresión de la respuesta en frecuencia hallada anteriormente:

$$h[n] = TFTD^{-1}\{H(e^{j2\pi s})\}[n]$$

Sustituyendo $H(e^{j2\pi s})$:

$$h[n] = TFTD^{-1}\left\{\frac{1}{4(1+\frac{1}{2}e^{-j2\pi s})}(1 - e^{-j2\pi s})\right\}[n]$$

$$h[n] = \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \{u[n] + 2u[n-1]\}$$

Gráficos

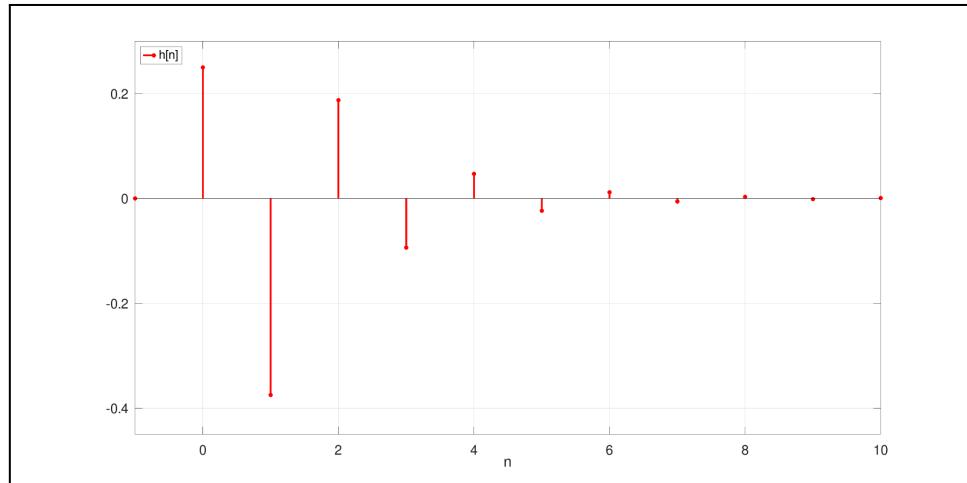


Figura 2.2.10. Gráfico de la respuesta impulsional $h[n]$ del Sistema 4.

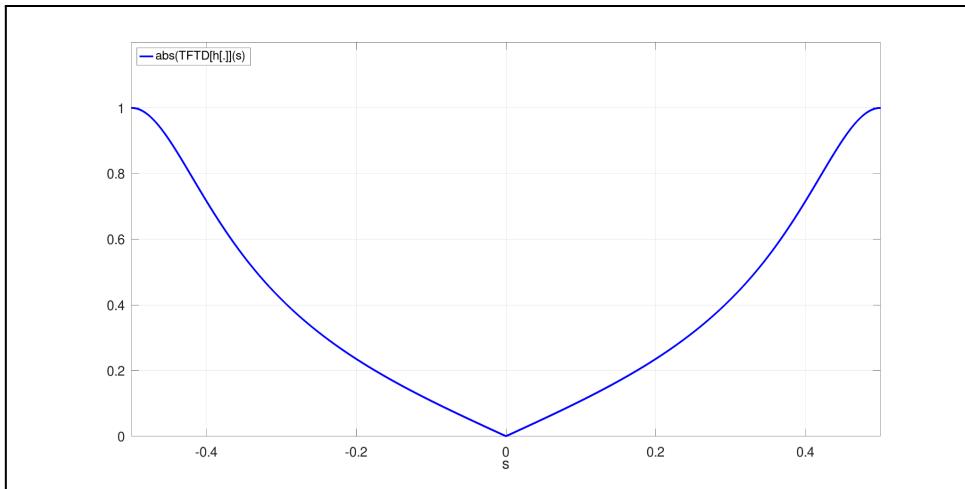


Figura 2.2.11. Gráfico del módulo de la respuesta en frecuencia $H(e^{j2\pi s})$ del Sistema 4 para $|s| \leq 1/2$.

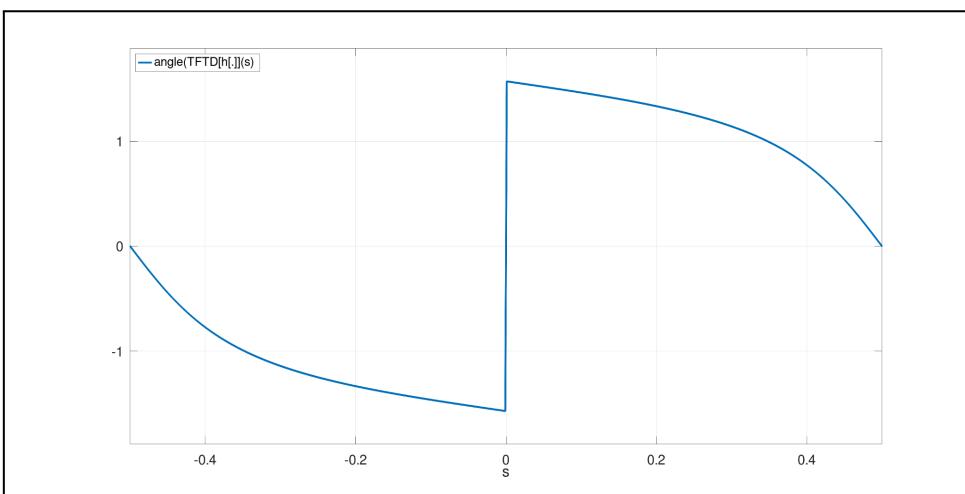


Figura 2.2.12. Gráfico de la fase de la respuesta en frecuencia $H(e^{j2\pi s})$ del Sistema 4 para $|s| \leq 1/2$.

Análisis y conclusiones

En base a los gráficos de la respuesta impulsional y respuesta en frecuencia del Sistema 3, es posible concluir que además de ser un SLID, cumple con las siguientes propiedades:

- **Causalidad:** Dado que $h[n] = 0$ para $n < 0$, se puede concluir que el sistema no responde antes de recibir una entrada, y por lo tanto es causal (Ver **Figura 2.2.10.**).
- **IIR:** Dado que $h[n] \neq 0$ a partir de un valor $n=n_0=0$, entonces el sistema tiene una respuesta infinita al impulso.
- **Estabilidad EA/SA:** Un SLID es estable en sentido EA/SA si su respuesta impulsional es absolutamente sumable:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h[n]| = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left| -\frac{3}{8} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right| = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{8} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{1-1/2} = 1$$

Dado que es absolutamente sumable, se concluye que el sistema es estable en sentido EA/SA.

- **Memoria:** El sistema tiene memoria porque su respuesta impulsional no es nula fuera del instante $n=0$. Como $h[n]$ presenta valores distintos de cero para $n>0$, la salida en un instante dado depende de valores pasados de la entrada (por la convolución).
- **Comportamiento en frecuencia:** Como se observa en el módulo de $H(e^{j2\pi s})$ (**Figura 2.2.11.**), el sistema amplifica las altas frecuencias y atenúa las bajas, por lo que actúa como un filtro pasa-altos.

Conclusión global: El Sistema 4 es un SLID IIR, causal, estable y con memoria. Además actúa como un filtro pasa-altos.

2.3. Implementación de los sistemas en Octave

En esta sección se implementan en funciones de Octave, en base a las ecuaciones en diferencias que los representan, los sistemas anteriormente estudiados. Además, se utilizan estas implementaciones para verificar que la respuesta impulsional y respuesta en frecuencia de cada sistema coincidan con las halladas analíticamente.

A lo largo de este trabajo, todas las implementaciones de los diferentes sistemas en Octave seguirán la misma convención de parámetros:

Entradas

- **x** la señal de entrada $x[n]$.
- **nx** el vector de índices n para el cual está definida la señal **x**.

Salidas

- **y** la señal de salida del sistema $y[n]$.
- **ny** el nuevo vector de índices n para el cual está definida la señal **y**.

La razón de este nuevo vector de índices **ny** para la señal de salida se debe a los desplazamientos en la señal de entrada. Estos desplazamientos presentes en las ecuaciones en diferencias generan que la salida pueda necesitar definirse para instantes anteriores o posteriores a los definidos para la señal de entrada. Por lo tanto, es necesario que el vector **ny** se ajuste de manera adecuada según los desplazamientos presentes en la ecuación, con el objetivo de una correcta representación de $y[n]$. De esta manera, en cada implementación de sistema en Octave que se muestre de aquí en adelante se utilizará este conocimiento para su correcta implementación.

2.3.1. Sistema 1

Se tiene al Sistema 1 descrito por la ecuación en diferencias:

$$y[n] = \frac{1}{2}x[n] + \frac{1}{2}x[n - 1]$$

El cual implementado en Octave queda:

```
function [ny,y] = sistema1(nx,x)
    x_1 = [0 x];
    x_aux = [x 0];
    y = 0.5*x_aux + 0.5 * x_1;
    ny = (nx(1) : (nx(end) + 1));
end
```

Código 2.3.1. Fragmento de código que implementa al Sistema 1 en Octave.

A continuación, se presenta la respuesta impulsional obtenida a partir de la implementación del Sistema 1, la cual se calcula excitando al sistema con un impulso discreto $\delta[n]$.

Luego, a partir de dicha respuesta impulsional, se obtiene la respuesta en frecuencia aplicando la aproximación numérica de la TFTD (Ver **Código 2.1.1.**).

Gráficos

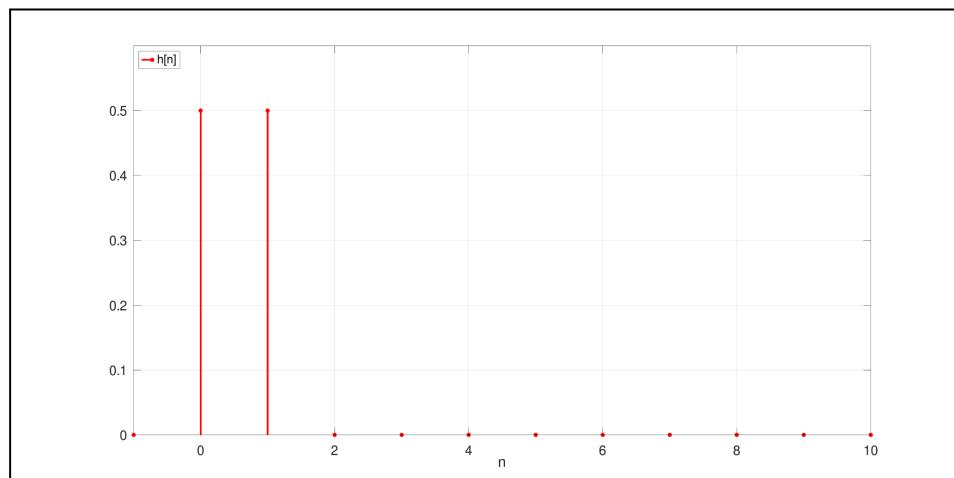


Figura 2.3.1. Gráfico de la respuesta impulsional $h[n]$ del Sistema 1, en base a su implementación en Octave.

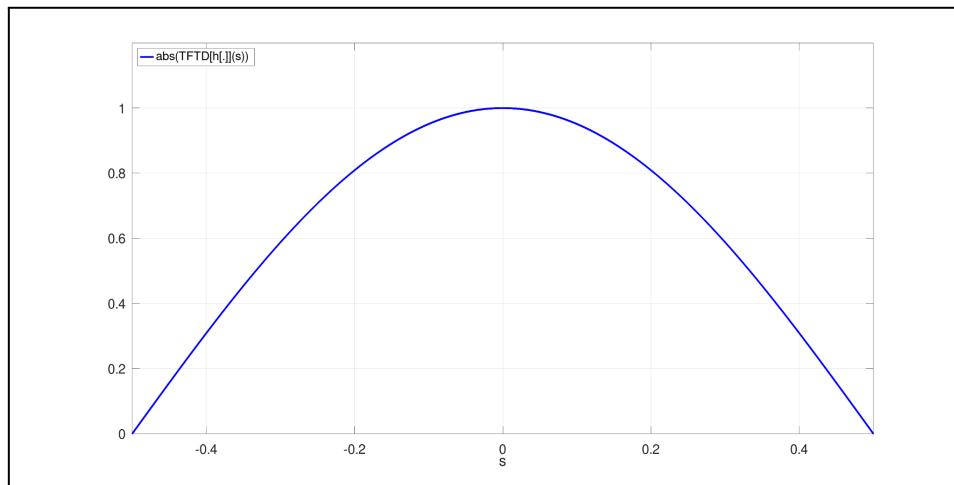


Figura 2.3.2. Gráfico del módulo de la respuesta en frecuencia $H(e^{j2\pi s})$ del Sistema 1 para $|s| \leq 1/2$, aproximado en base a su implementación en Octave.

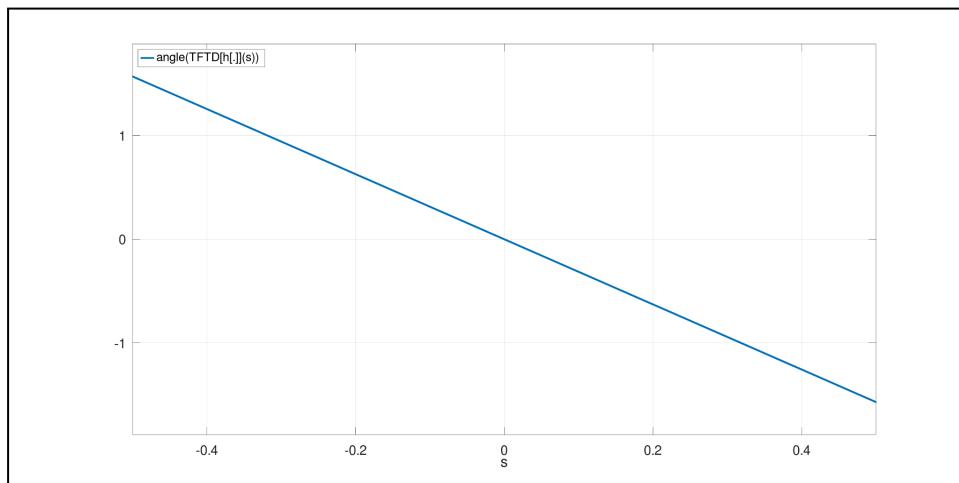


Figura 2.3.3. Gráfico de la fase de la respuesta en frecuencia $H(e^{j2\pi s})$ del Sistema 1 para $|s| \leq 1/2$, aproximada en base a su implementación en Octave.

Se observa que las respuestas obtenidas numéricamente a partir de la implementación coinciden plenamente con las respuestas analíticas previamente halladas en la sección 2.2.1.

2.3.2. Sistema 2

Se tiene al Sistema 2 descrito por la ecuación en diferencias:

$$y[n] = \frac{1}{2}x[n] - \frac{1}{2}x[n - 1]$$

El cual implementado en Octave queda:

```
function [ny,y] = sistema2(nx,x)
    x_1 = [0 x];
    x_aux = [x 0];
    y = 0.5*x_aux - 0.5 * x_1;
    ny = (nx(1) : (nx(end) + 1));
end
```

Código 2.3.2. Fragmento de código que implementa al Sistema 2 en Octave.

A continuación, se presenta la respuesta impulsional obtenida a partir de la implementación del Sistema 2, la cual se calcula excitando al sistema con un impulso discreto $\delta[n]$.

Luego, a partir de dicha respuesta impulsional, se obtiene la respuesta en frecuencia aplicando la aproximación numérica de la TFTD (Ver **Código 2.1.1.**).

Gráficos

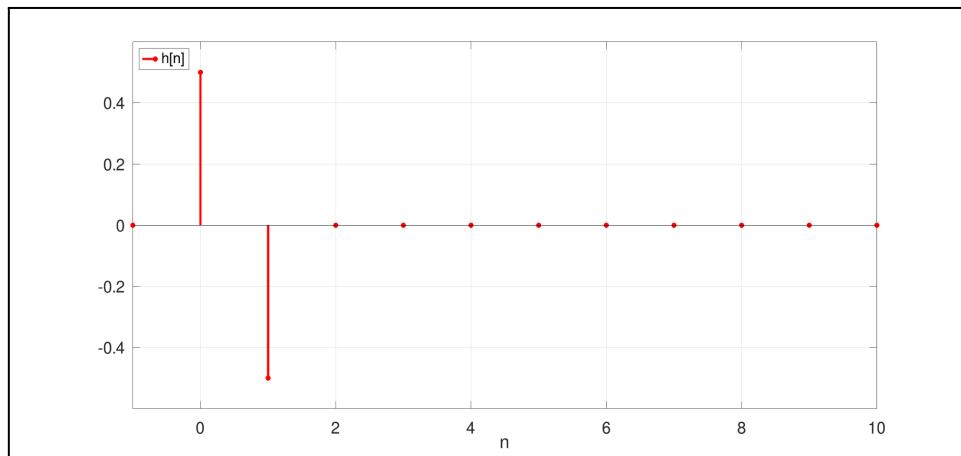


Figura 2.3.4. Gráfico de la respuesta impulsional $h[n]$ del Sistema 2.

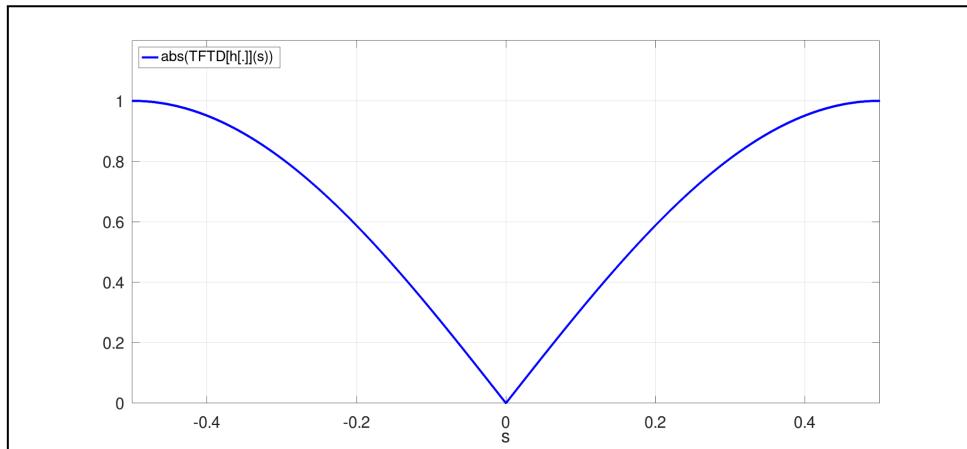


Figura 2.3.5. Gráfico del módulo de la respuesta en frecuencia $H(e^{j2\pi s})$ del Sistema 2 para $|s| \leq 1/2$, aproximada en base a su implementación en Octave.

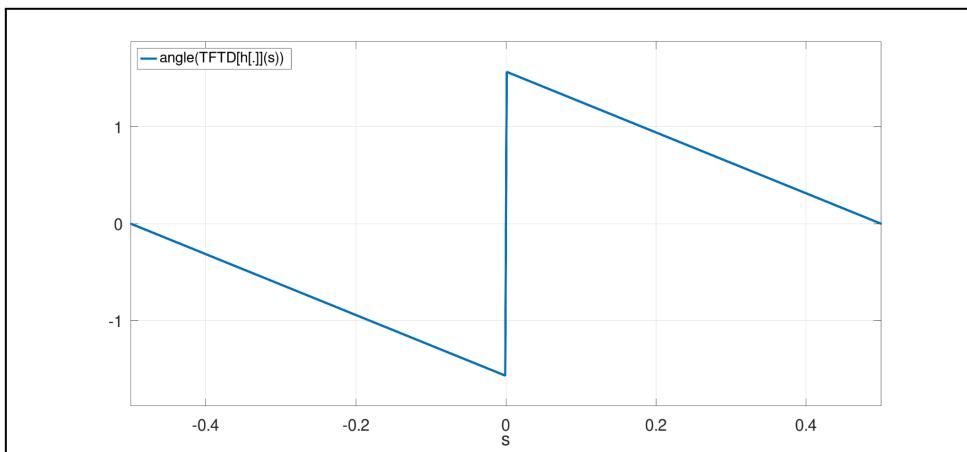


Figura 2.3.6. Gráfico de la fase de la respuesta en frecuencia $H(e^{j2\pi s})$ del Sistema 2 para $|s| \leq 1/2$, aproximada en base a su implementación en Octave.

Se observa que las respuestas obtenidas numéricamente a partir de la implementación coinciden plenamente con las respuestas analíticas previamente halladas en la sección 2.2.2.

2.3.3. Sistema 3

Se tiene al Sistema 3 descrito por la ecuación en diferencias:

$$y[n] = \frac{1}{4}x[n] + \frac{1}{4}x[n - 1] + \frac{1}{2}y[n - 1]$$

El cual implementado en Octave queda:

```
function [ny, y] = sistema3(nx,x)
    x_1 = [0 x];
    x_aux = [x 0];
    ny = (nx(1) : (nx(end) + 1));
    y = zeros(size(ny));
    for n = 1:length(ny)
        if n == 1
            y_1 = 0;
        else
            y_1 = y(n-1);
        end
        y(n) = 0.25*x_aux(n) + 0.25*x_1(n) + 0.5*y_1;
    end
end
```

Código 2.3.3. Fragmento de código que implementa al Sistema 3 en Octave (Se asumen condiciones iniciales nulas).

A continuación, se presenta la respuesta impulsional obtenida a partir de la implementación del Sistema 3, la cual se calcula excitando al sistema con un impulso discreto $\delta[n]$.

Luego, a partir de dicha respuesta impulsional, se obtiene la respuesta en frecuencia aplicando la aproximación numérica de la TFTD (Ver **Código 2.1.1.**).

Gráficos

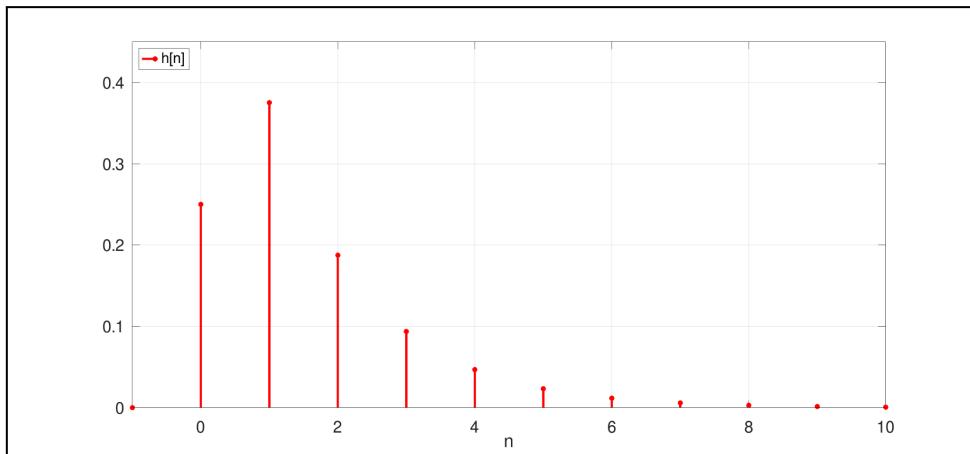


Figura 2.3.7. Gráfico de la respuesta impulsional $h[n]$ del Sistema 3.

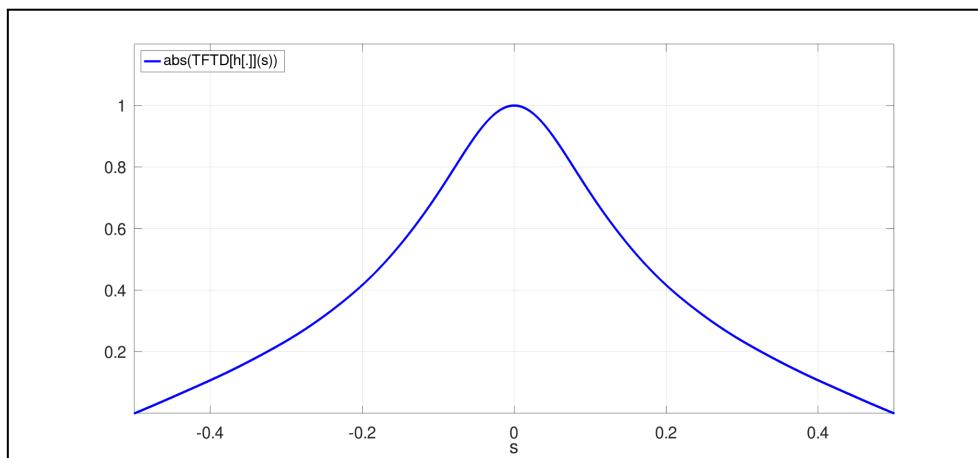


Figura 2.3.8. Gráfico del módulo de la respuesta en frecuencia $H(e^{j2\pi s})$ del Sistema 3 para $|s| \leq 1/2$, aproximada en base a la implementación en Octave.

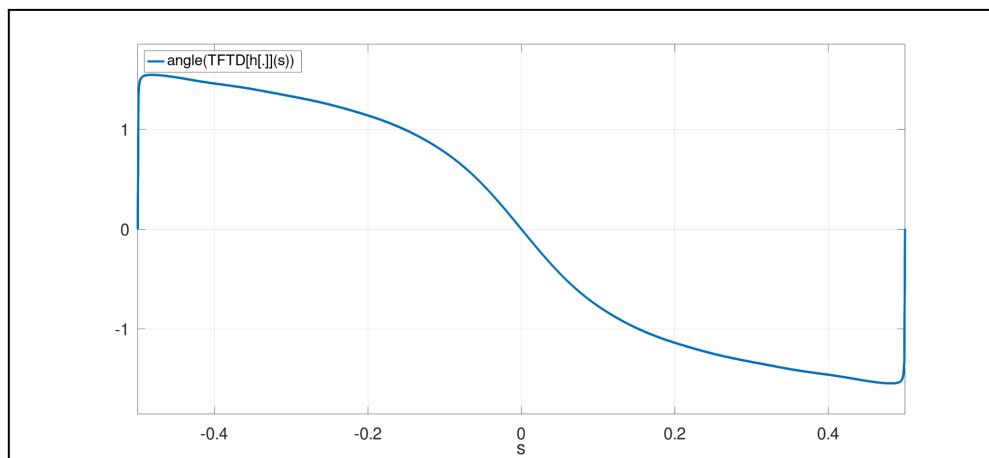


Figura 2.3.9. Gráfico de la fase de la respuesta en frecuencia $H(e^{j2\pi s})$ del Sistema 3 para $|s| \leq 1/2$, aproximada en base a la implementación en Octave.

Se observa que las respuestas obtenidas numéricamente a partir de la implementación coinciden plenamente con las respuestas analíticas previamente halladas en la sección 2.2.3.

2.3.4. Sistema 4

Se tiene al Sistema 4 descrito por la ecuación en diferencias:

$$y[n] = \frac{1}{4}x[n] - \frac{1}{4}x[n - 1] - \frac{1}{2}y[n - 1]$$

El cual implementado en Octave queda:

```
function [ny,y] = sistema4(nx,x)
    x_1 = [0 x];
    x_aux = [x 0];
    ny = (nx(1) : (nx(end) + 1));
    y = zeros(size(ny));
    for n = 1:length(ny)
        if n == 1
            y_1 = 0;
        else
            y_1 = y(n-1);
        end
        y(n) = 0.25*x_aux(n) - 0.25*x_1(n) - 0.5*y_1;
    end
end
```

Código 2.3.4. Fragmento de código que implementa al Sistema 4 en Octave (Se asumen condiciones iniciales nulas).

A continuación, se presenta la respuesta impulsional obtenida a partir de la implementación del Sistema 4, la cual se calcula excitando al sistema con un impulso discreto $\delta[n]$.

Luego, a partir de dicha respuesta impulsional, se obtiene la respuesta en frecuencia aplicando la aproximación numérica de la TFTD (Ver **Código 2.1.1.**).

Gráficos

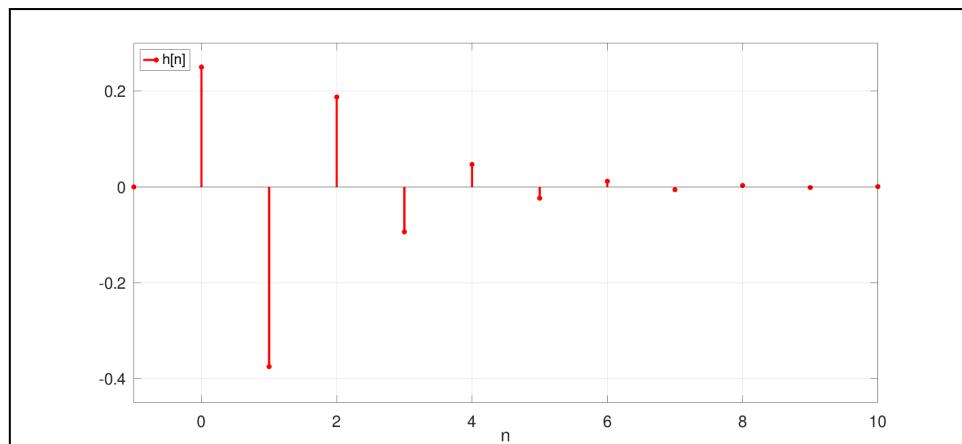


Figura 2.3.10. Gráfico de la respuesta impulsional $h[n]$ del Sistema 4.

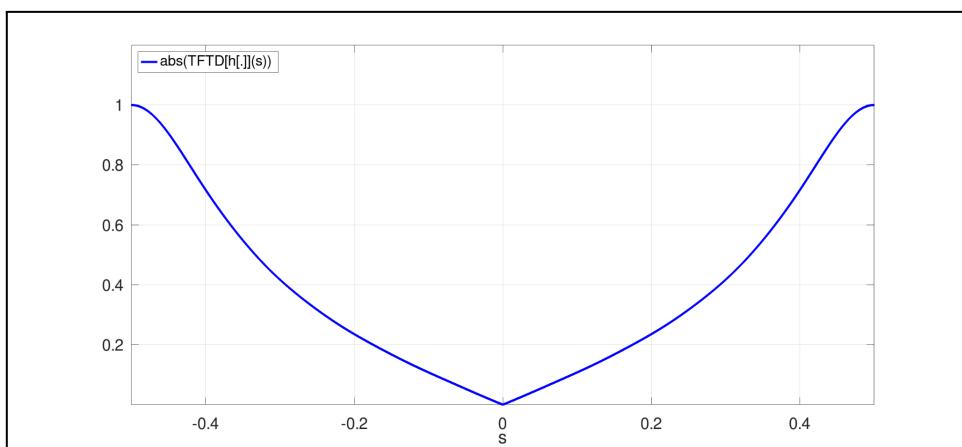


Figura 2.3.11. Gráfico del módulo de la respuesta en frecuencia $H(e^{j2πs})$ del Sistema 4 para $|s| \leq 1/2$, aproximada en base a la implementación en Octave.

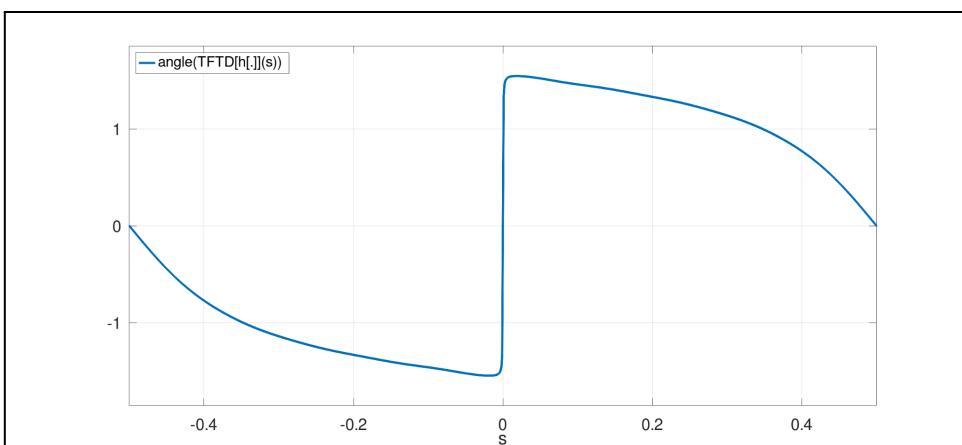


Figura 2.3.12. Gráfico de la fase de la respuesta en frecuencia $H(e^{j2\pi s})$ del Sistema 4 para $|s| \leq 1/2$, aproximada en base a la implementación en Octave.

Se observa que las respuestas obtenidas numéricamente a partir de la implementación coinciden plenamente con las respuestas analíticas previamente halladas en la sección 2.2.4.

2.4. Señales de salida

Sea $x[n]$ la señal obtenida al evaluar **senial.m** en el número 37514, se aplica esta misma a cada sistema tratado en los puntos anteriores.

A continuación, se presentan las salidas obtenidas de cada Sistema al aplicar $x[n]$.

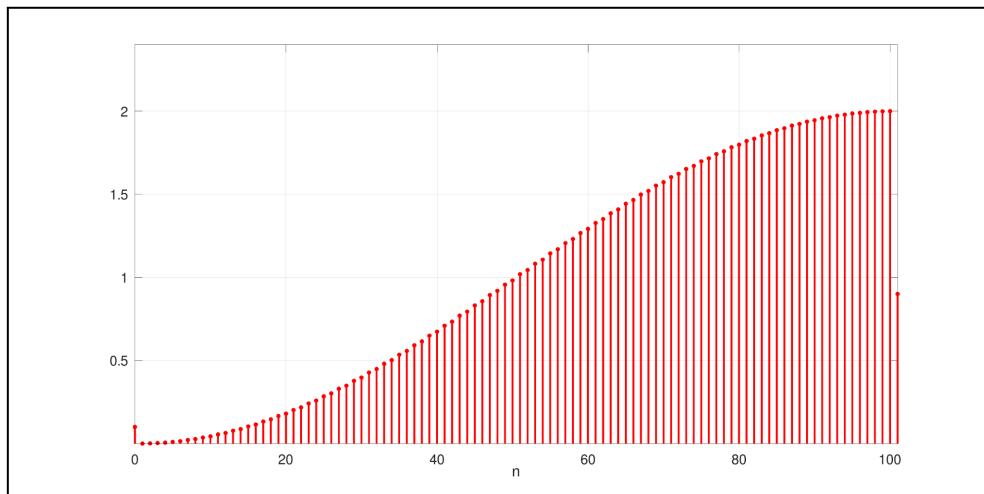


Figura 2.4.1. Salida correspondiente a aplicar $x[n]$ al Sistema 1.

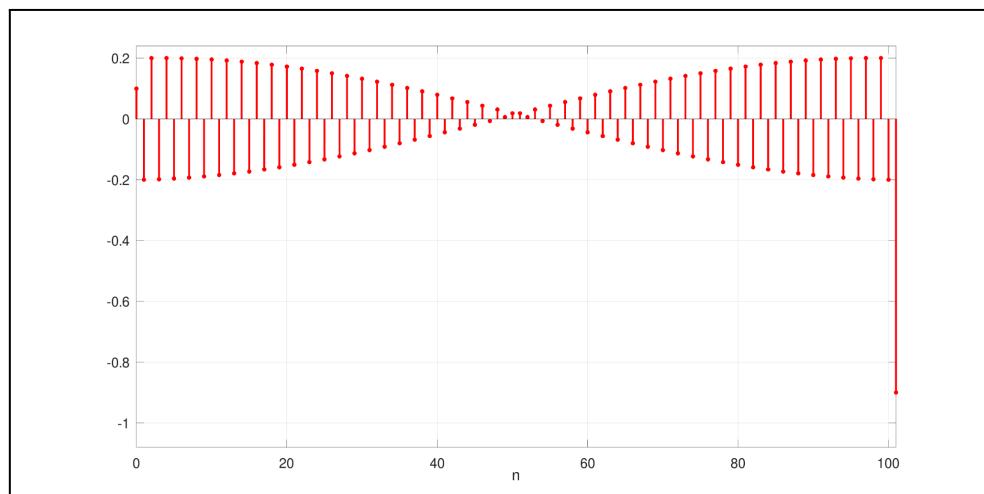


Figura 2.4.2 . Salida correspondiente a aplicar $x[n]$ al Sistema 2.

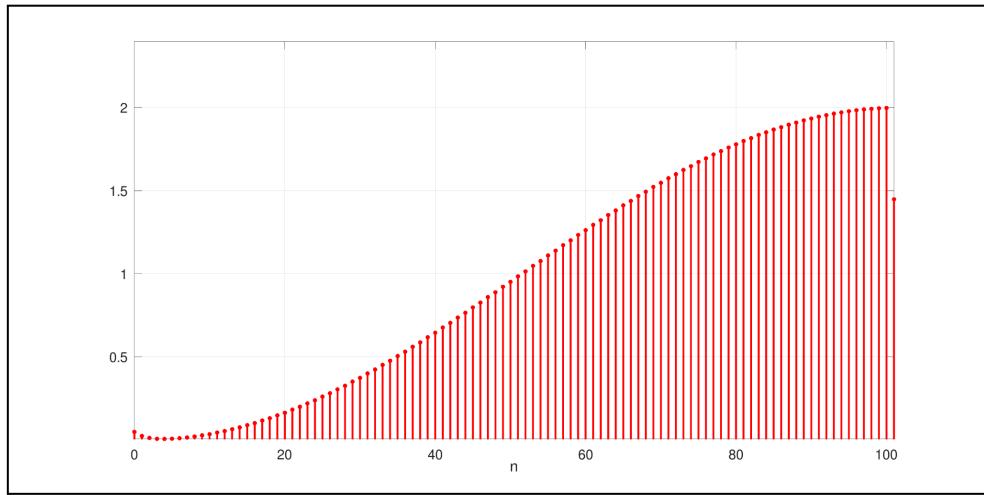


Figura 2.4.3. Salida correspondiente a aplicar $x[n]$ al Sistema 3.

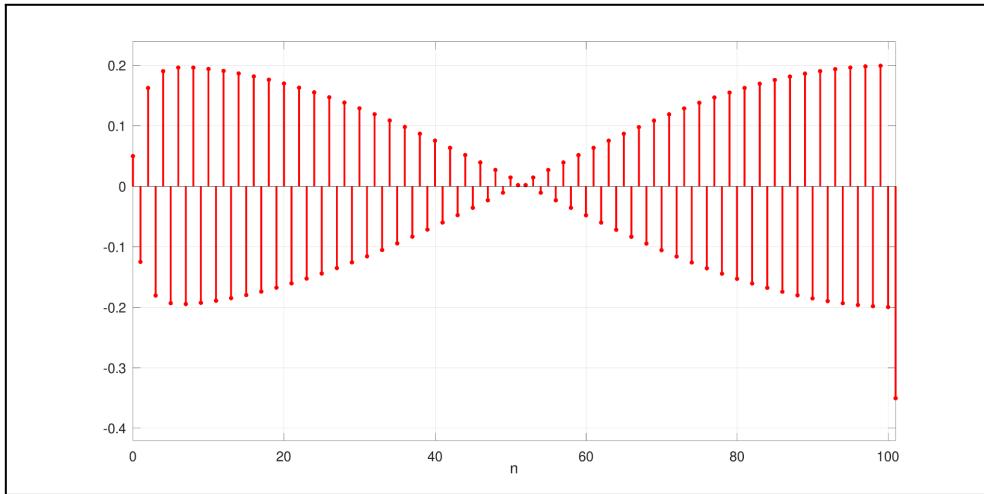


Figura 2.4.4. Salida correspondiente a aplicar $x[n]$ al Sistema 4.

2.5. Aproximación de la TFTD de cada señal de salida

A partir de las señales de salidas presentadas en el punto anterior, se obtiene la aproximación numérica de la TFTD para cada una de ellas (Ver **Código 2.1.1.**).

A continuación, se presentan los gráficos obtenidos al aproximar la TFTD de cada salida.

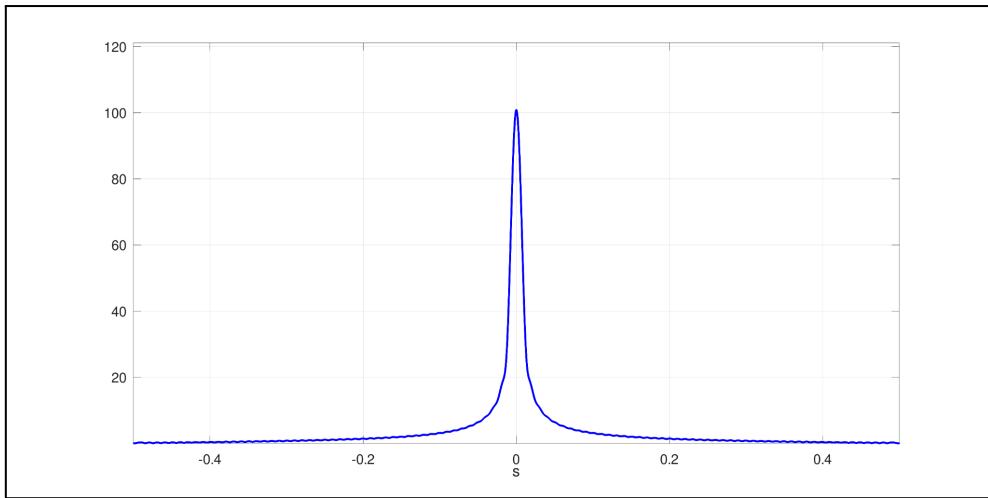


Figura 2.5.1. Gráfico del módulo de la TFTD de la salida del Sistema 1 $Y(e^{j2\pi s})$ para $|s| \leq 1/2$, aproximada en base a la implementación en Octave.

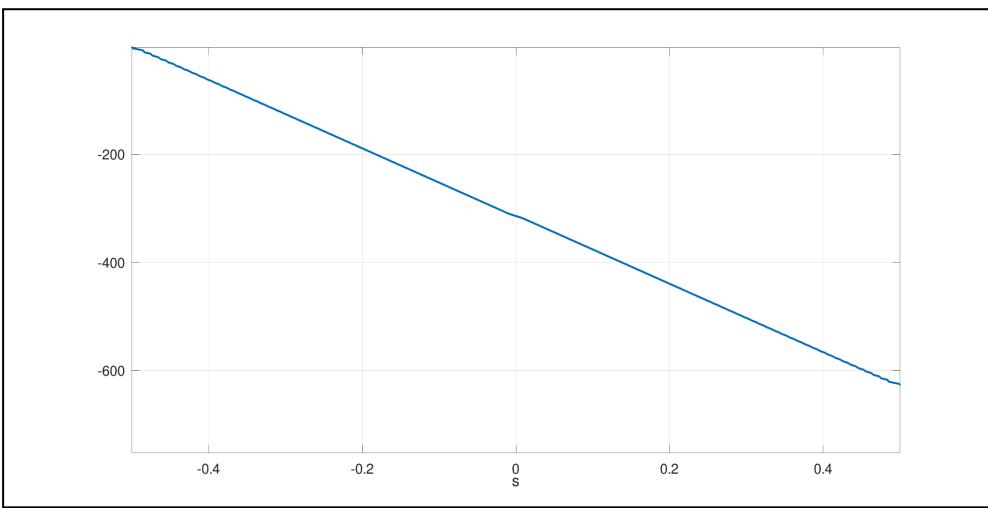


Figura 2.5.2. Gráfico de la fase de la TFTD de la salida del Sistema 1 $Y(e^{j2\pi s})$ para $|s| \leq 1/2$, aproximada en base a la implementación en Octave.

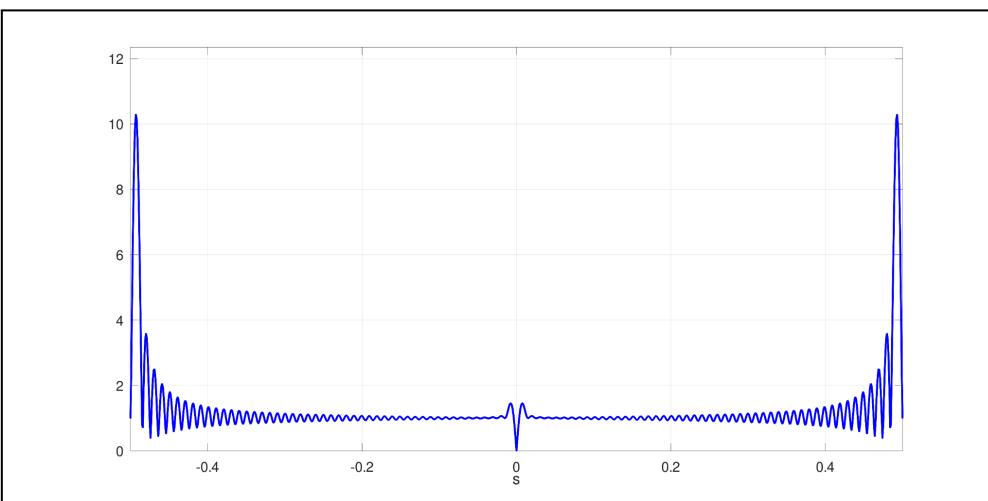


Figura 2.5.3. Gráfico del módulo de la TFTD de la salida del Sistema 2 $Y(e^{j2\pi s})$ para $|s| \leq 1/2$, aproximada en base a la implementación en Octave.

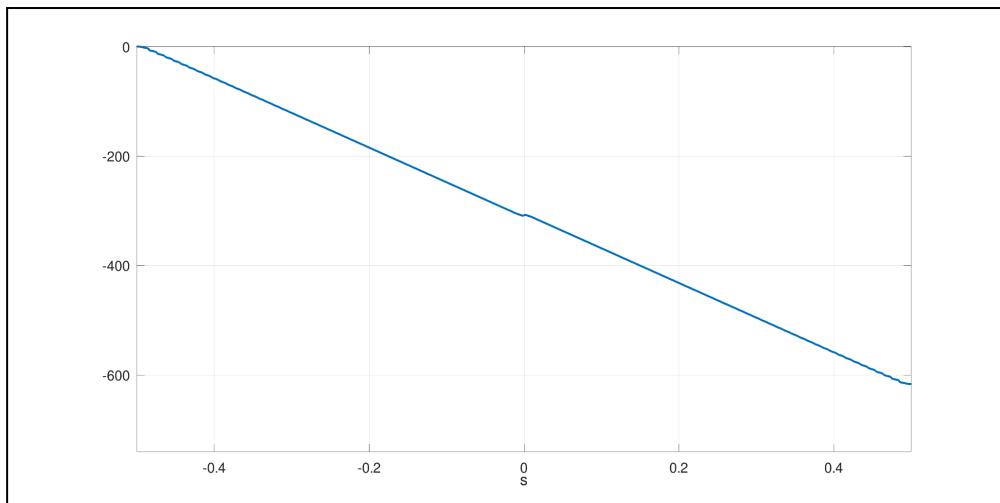


Figura 2.5.4. Gráfico de la fase de la TFTD de la salida del Sistema 2 $Y(e^{j2\pi s})$ para $|s| \leq 1/2$, aproximada en base a la implementación en Octave.

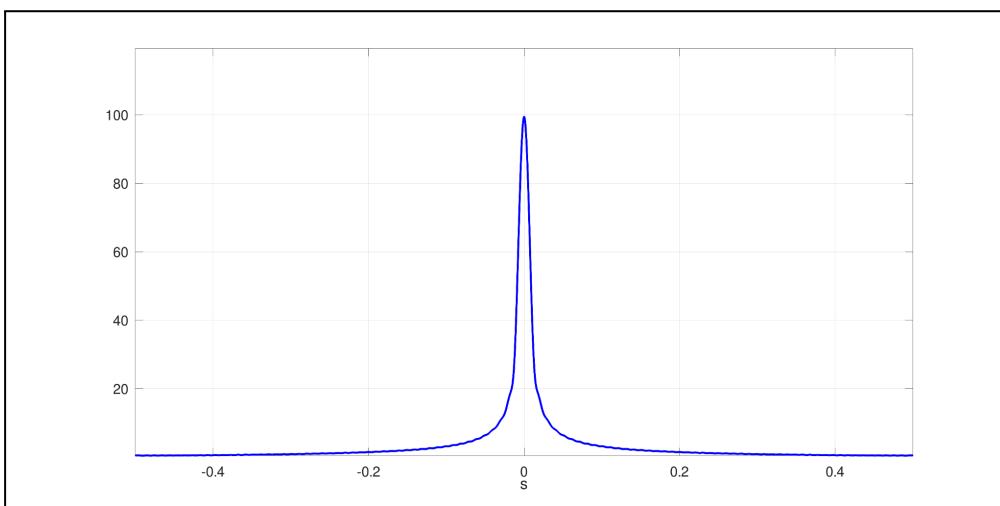


Figura 2.5.5. Gráfico del módulo de la TFTD de la salida del Sistema 3 $Y(e^{j2\pi s})$ para $|s| \leq 1/2$, aproximada en base a la implementación en Octave.

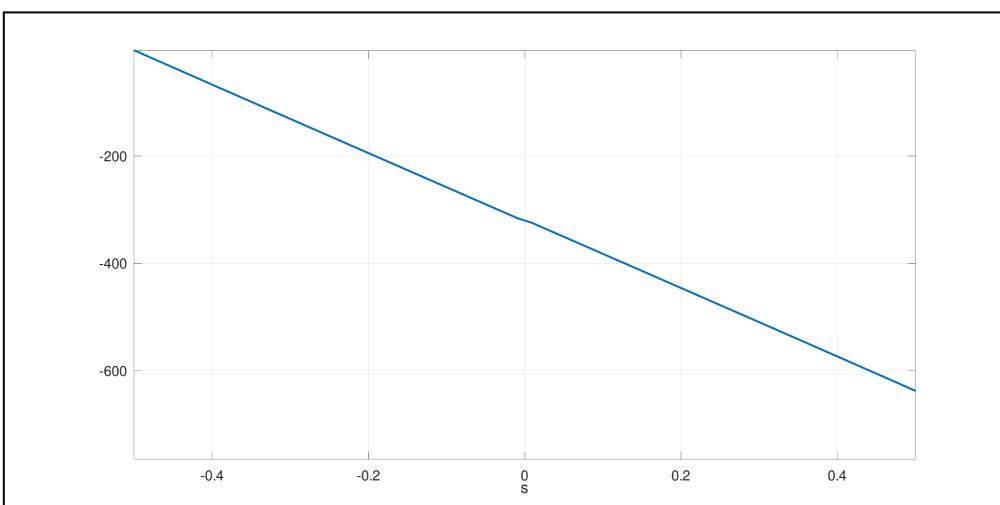


Figura 2.5.6. Gráfico de la fase de la TFTD de la salida del Sistema 3 $Y(e^{j2\pi s})$ para $|s| \leq 1/2$, aproximada en base a la implementación en Octave.

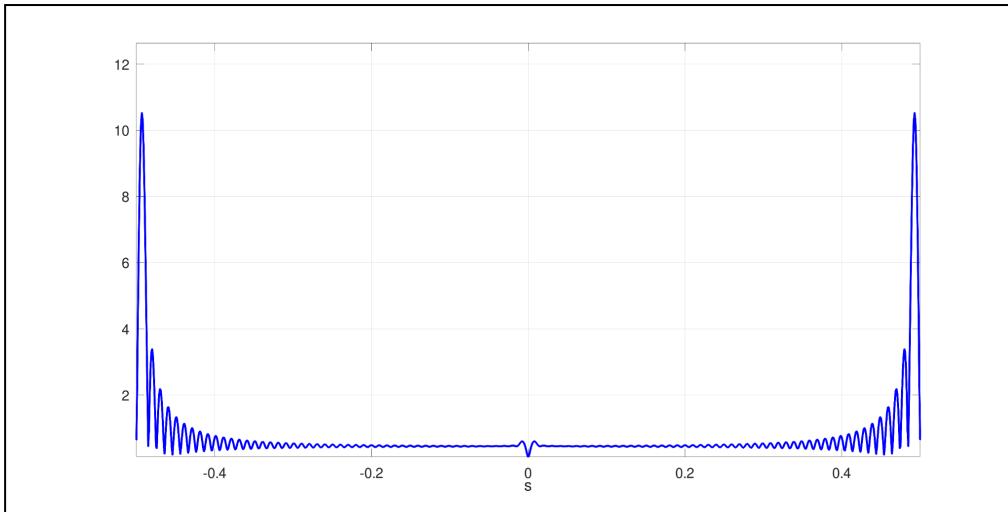


Figura 2.5.7. Gráfico del módulo de la TFTD de la salida del Sistema 4 $|Y(e^{j2\pi s})|$ para $|s| \leq 1/2$, aproximada en base a la implementación en Octave.

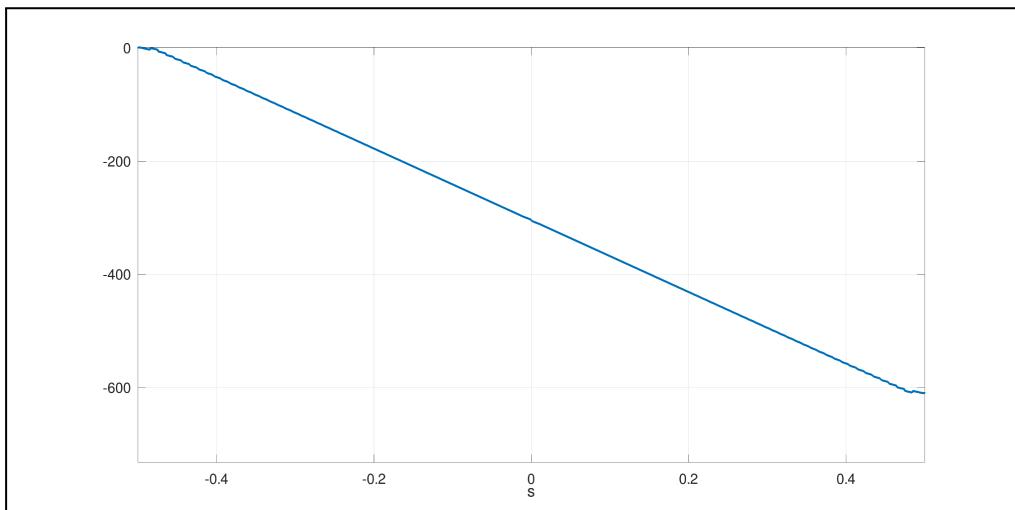


Figura 2.5.8. Gráfico de la fase de la TFTD de la salida del Sistema 4 $|Y(e^{j2\pi s})|$ para $|s| \leq 1/2$, aproximada en base a la implementación en Octave.

3. Ejercicio 2

En este ejercicio se analiza la respuesta al impulso de un sistema FIR que modela un canal digital con dos ecos. A partir del gráfico de la respuesta se extrae la ecuación en diferencias del sistema y se implementa en Octave. Luego se filtra una señal de audio muestreada para observar el efecto de los ecos y se diseñan filtros FIR en cascada con 1,2 y 3 ramas de retardo para intentar cancelar dichos ecos; se comparan gráficamente y por escucha las señales resultantes con la original.

3.1. Canal digital - Respuesta impulsional

Sea $h_A[n]$ la señal que retorna la función **hcanald.m** al ser evaluada en el número 37514, se busca hallar la ecuación en diferencias que representa al sistema.

A continuación se muestra la gráfica de $h_A[n]$.

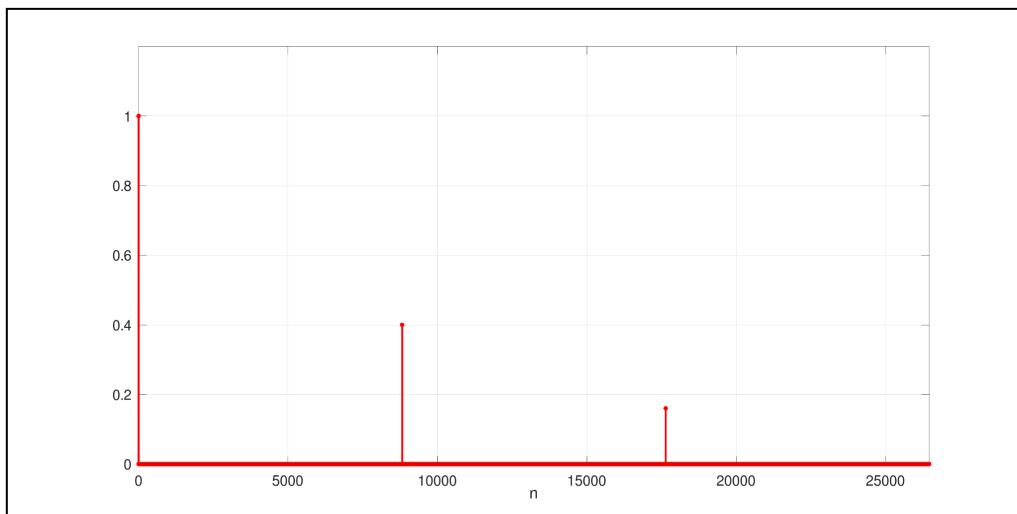


Figura 3.1.1. Gráfico de la respuesta impulsional $h_A[n]$

En base al gráfico, y el siguiente fragmento de código:

```
for i = 1:length(n)
    if h(i) != 0
        disp(n(i));
        disp(h(i));
    endif
end
```

Código 3.1.1. Fragmento de código que halla los valores de n donde las deltas de $h_A[n]$ se encuentran centradas.

Se puede hallar que la expresión de la $h_A[n]$ es:

$$h_A[n] = \delta[n] + 0,4 \cdot \delta[n - 8820] + 0,16 \cdot \delta[n - 17640]$$

Conociendo $h_A[n]$ y que el sistema es SLID FIR, se puede hallar entonces la ecuación en diferencias que representa al sistema para una entrada cualquiera $x[n]$:

$$y[n] = (x * h_A)[n] = x[n] + 0,4 \cdot x[n - 8820] + 0,16 \cdot x[n - 17640]$$

Estabilidad: Al ser el sistema SLID FIR, su respuesta impulsional es absolutamente sumable simplemente por el hecho de ser FIR, por lo que el sistema es estable en sentido EA/SA.

3.2. Implementación del canal en Octave

A continuación, se implementa el sistema dado para este ejercicio en Octave. Para verificar la implementación se excita el sistema con un impulso unitario y se compara la respuesta impulsional resultante con la provista por **hcanald.m**.

```
function [ny,y] = canal(nx,x)
    n1 = 8820;
    n2 = 17640;
    n_max = max([n1 n2]);
    Lx = length(x);
    L_final = Lx + n_max;
    x_aux = [x zeros(1, n_max)];
    x1 = [zeros(1,n1) x zeros(1, L_final -(n1 + Lx))];
    x2 = [zeros(1,n2) x zeros(1, L_final -(n2 + Lx))];
    y = x_aux + 0.4*x1 + 0.16*x2;
    ny = (nx(1) : (nx(end) + n_max));
```

```
end
```

Código 3.2.1. Fragmento de código que implementa en Octave al sistema dado en el ejercicio 2.

Abajo se muestra la salida de la implementación del sistema cuando se lo excita con un impulso.

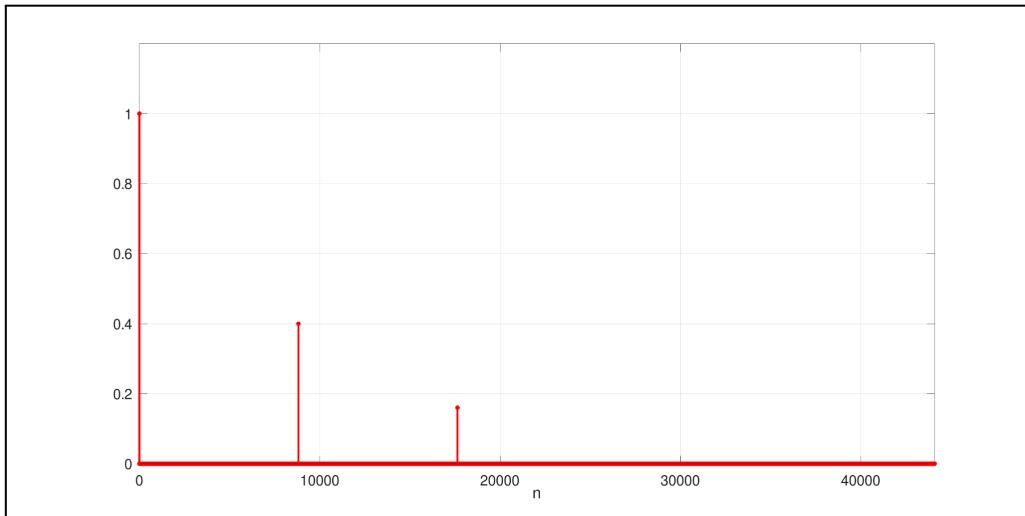


Figura 3.2.1. Gráfico de la respuesta impulsional del sistema implementado en Octave.

Comparando la respuesta impulsional obtenida en este inciso con la del archivo **hcanald.m** (Ver **Figura 3.1.1.**), se verifica que el sistema se implementó correctamente en Octave.

3.3. Audio procesado

Sea z la señal de salida obtenida del archivo **audio.wav** dado. Esta es una señal estéreo, compuesta por dos canales. Para facilitar futuros análisis dónde **audio.wav** sea la señal de entrada, se define $x[n]$ como la versión mono de z (donde z_1 y z_2 son los 2 canales que componen a z).

$$x[n] = (z_1 + z_2)/2$$

A continuación, utilizando la función descrita en **3.2.**, se aplica al sistema la señal $x[n]$ y se compara su salida con la señal de entrada.

Figura 3.3.1. Señal ‘mono’ $x[n]$ del archivo **audio.wav**.

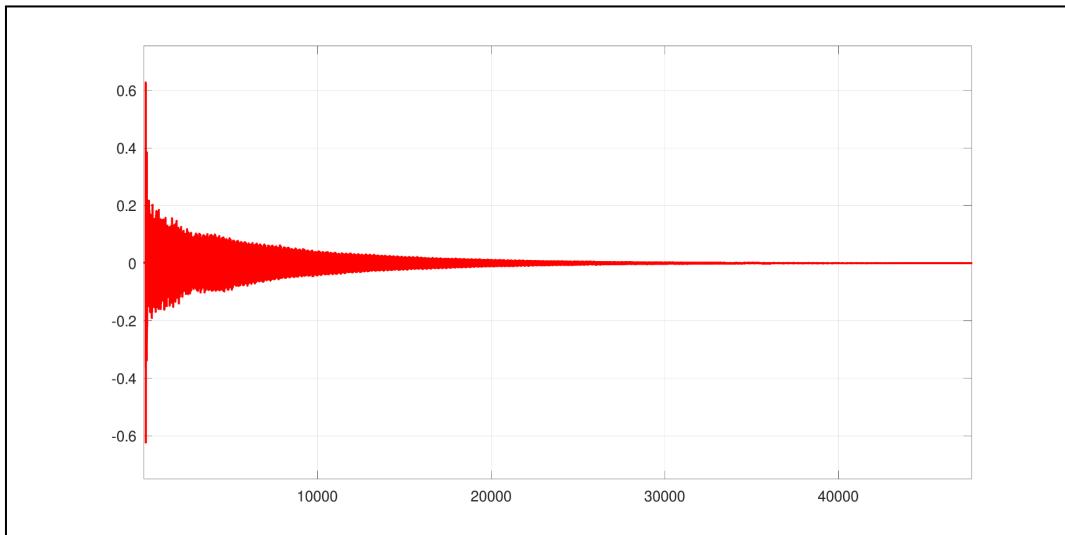
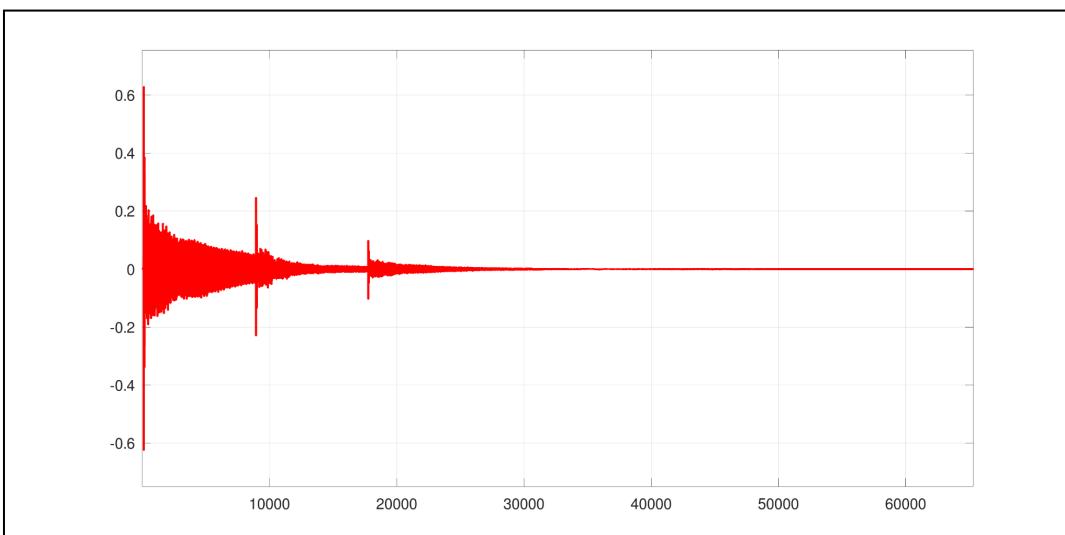


Figura 3.3.2. Señal de salida del sistema al aplicar la entrada $x[n]$.



Valoración de escucha de la señal de salida: Al escuchar la señal de audio.wav procesada por el canal se pueden diferenciar tres sonidos sucesivos, donde los dos últimos se atenúan en potencia, así como también se escuchan retrasados respecto al primer sonido. Esto coincide con lo esperado, ya que la respuesta impulsional del canal generaba no solo un $\delta[n]$, sino dos adicionales, los cuales se encontraban desplazados y multiplicados por coeficientes menores a uno (atenuados). Este es precisamente el comportamiento de un sistema que modela a un canal con dos ecos.

3.4. Diseño de filtros correctores

En este inciso se abordará una técnica para corregir el efecto de eco que introduce el sistema definido por **hcanald.m**. La técnica consiste de aplicar un filtro con una o varias ramas de retardo, cuya respuesta impulsional es de la forma:

$$h[n] = \delta[n] + \beta_1 \cdot \delta[n - n_1] + \beta_2 \cdot \delta[n - n_2] + \dots + \beta_i \cdot \delta[n - n_i]$$

En esta sección, se estudian los valores que han de tomar las distintas constantes del filtro propuesto para corregir lo máximo posible el eco del canal. En particular, se analizan los filtros con 1, 2 y 3 ramas de retardo.

1 Rama de retardo

Antes de comenzar el análisis de los filtros con 2 y 3 ramas de retardo, conviene resolver el caso de un canal cuya respuesta impulsional es de la forma:

$$h[n] = \delta[n] + \alpha_1 \cdot \delta[n - n_0]$$

al cual se le quiere aplicar un filtro de 1 rama de retardo. Siendo la respuesta impulsional de este:

$$hf1[n] = \delta[n] + \beta_1 \cdot \delta[n - n_1]$$

Siendo que el filtro se coloca en cascada, al ser ambos SLID, la respuesta impulsional total de los 2 sistemas en cascada es de la forma:

$$htotal[n] = \{h * hf1\}[n]$$

Como idealmente se busca eliminar completamente los ecos inducidos por el canal, se busca:

$$htotal[n] = \{h * hf1\}[n] = \delta[n]$$

A continuación, se desarrolla la expresión de $htotal[n]$ en la igualdad anterior:

$$\begin{aligned} htotal[n] &= \delta[n] \\ \{h * hf1\}[n] &= \delta[n] \\ \{(\delta[n] + \alpha_1 \cdot \delta[n - n_0]) * (\delta[n] + \beta_1 \cdot \delta[n - n_1])\}[n] &= \delta[n] \\ \delta[n] + \beta_1 \cdot \delta[n - n_1] + \alpha_1 \cdot \delta[n - n_0] + \beta_1 \cdot \alpha_1 \cdot \delta[n - n_0 - n_1] &= \delta[n] \\ \beta_1 \cdot \delta[n - n_1] + \alpha_1 \cdot \delta[n - n_0] + \beta_1 \cdot \alpha_1 \cdot \delta[n - n_0 - n_1] &= 0 \end{aligned}$$

En particular, se buscará cancelar el eco producido por el término $\alpha_1 \cdot \delta[n - n_0]$, por lo que se plantea la siguiente ecuación para hallar los valores de β_1 y n_1 :

$$\beta_1 \cdot \delta[n - n_1] + \alpha_1 \cdot \delta[n - n_0] = 0$$

$$\boxed{\beta_1 = -\alpha_1}$$

$$\boxed{n_1 = n_0}$$

Resultando finalmente la $htotal[n]$ del sistema canal + filtro:

$$htotal[n] = \delta[n] - \alpha_1^2 \cdot \delta[n - 2n_0]$$

Si bien el filtro no es perfecto ya que sigue habiendo componente que generará eco, es posible notar que el eco se atenuó respecto a la salida del canal.

2 Ramas de retardo

Se tiene al canal:

$$h_A[n] = \delta[n] + 0,4 \cdot \delta[n - 8820] + 0,16 \cdot \delta[n - 17640]$$

Para cancelar los ecos introducidos por el mismo, se propone un primer filtro de 2 ramas de retardo:

$$hf2[n] = \delta[n] + \beta_1 \cdot \delta[n - n_1] + \beta_2 \cdot \delta[n - n_2]$$

Utilizando los resultados del ejemplo del filtro de 1 rama de retardo, podemos proponer para β_1 y n_1 :

$$\beta_1 = -0,4 ; n_1 = 8820$$

Con el fin de cancelar el eco del término $0,4 \cdot \delta[n - 8820]$. Quedando entonces:

$$htotalf1[n] = \{h_A * (\delta[n] - 0,4 \cdot \delta[n - 8820])\}[n]$$

$$htotalf1[n] = \delta[n] - 0,4^3 \cdot \delta[n - 3 \cdot 8820]$$

Nuevamente, basándonos en los resultados del ejemplo del filtro de 1 rama de retardo, con el objetivo de eliminar el nuevo eco producido por el primer retardo, podemos proponer β_2 y n_2 tal que:

$$\beta_2 = 0,4^3 ; n_2 = 3 * 8820$$

Podemos ahora hallar $htotalf2[n]$:

$$htotalf2[n] = \{h_A * ((\delta[n] + -0,4 \cdot \delta[n - 8820]) + 0,4^3 \cdot \delta[n - 3 * 8820])\}[n]$$

$$htotalf2[n] = htotalf1[n] + \{h_A * (0,4^3 \cdot \delta[n - 3 * 8820])\}[n]$$

$$htotalf2[n] = htotalf1[n] + 0,4^3 \cdot \delta[n - 3.8820] + 0,4^4 \cdot \delta[n - 4.8820] + 0,4^5 \cdot \delta[n - 5.8820]$$

$$htotalf2[n] = \delta[n] + 0,4^4 \cdot \delta[n - 4.8820] + 0,4^5 \cdot \delta[n - 5.8820]$$

Resumen

- Primero se eligió $\beta_1 = -0,4$ y $n_1 = 8820$. Con eso se anulan las contribuciones en $n=8820$ y también en $n=17640$.
- Tras elegir $\beta_1 = -0,4$ queda un término remanente en $n = 26460$ que se puede anular escogiendo $\beta_2 = 0,4^3 = 0,064$ y $n_2 = 3.8820 = 26460$.

Por lo tanto, para un filtro de 2 ramas de retardo se proponen:

$\beta_1 = -0,4, n_1 = 8820, \beta_2 = 0,064, n_2 = 26460$

Ecuación en diferencias

Basandonos en la respuesta impulsional $hf2[n]$ del filtro, es posible hallar la ecuación en diferencias que representa al mismo. Sabiendo que el filtro es SLID:

$$yf2[n] = \{x * hf2\}[n]$$

$$yf2[n] = x[n] - 0,4 \cdot x[n - 8820] + 0,064 \cdot x[n - 26460]$$

3 Ramas de retardo

Ahora se busca añadir una tercera rama de retardo, generando un filtro con respuesta impulsional definida de la siguiente manera:

$$hf3[n] = \delta[n] + \beta_1 \cdot \delta[n - n_1] + \beta_2 \cdot \delta[n - n_2] + \beta_3 \cdot \delta[n - n_3]$$

Con esta nueva rama de retardo, se puede buscar cancelar el término $0,4^4 \cdot \delta[n - 4.8820]$ de $htotalf2[n]$. Nuevamente, con la lógica que se viene trabajando, se propone añadir al filtro una tercera rama con retardo n_3 y coeficiente β_3 tal que:

$$\beta_3 = -0,4^4 ; n_3 = 4.8820$$

Se puede hallar entonces, la expresión de $htotalf3[n]$ agregando esta tercera rama de retardo a $htotalf2[n]$:

$$htotalf3[n] = htotalf2[n] + \{h_A * (-0,4^4 \cdot \delta[n - 4 * 8820])\}[n]$$

$$htotalf3[n] = \delta[n] - 0,4^6 \cdot \delta[n - 6.8820]$$

Resumen

- Primero se eligió $\beta_1 = -0,4$ y $n_1 = 8820$. Con eso se anulan las contribuciones en $n=8820$ y también en $n=17640$.
- Tras elegir $\beta_1 = -0,4$ queda un término remanente en $n = 26460$ que se puede anular escogiendo $\beta_2 = 0,4^3 = 0,064$ y $n_2 = 3.8820 = 26460$.
- Finalmente, para el tercer retardo queda un término en $n = 35280$ que se puede cancelar escogiendo $\beta_3 = -0,4^4 = -0,0256$ y $n_3 = 35280$.

Por lo tanto, para un filtro de 3 ramas de retardo se proponen:

$\beta_1 = -0,4, n_1 = 8820, \beta_2 = 0,064, n_2 = 26460, \beta_3 = -0,0256, n_3 = 35280$

Ecuación en diferencias

Basándonos en la respuesta impulsional $hf3[n]$ del filtro, es posible hallar la ecuación en diferencias que representa al mismo. Sabiendo que el filtro es SLID:

$$yf3[n] = \{x * hf3\}[n]$$

$$yf3[n] = x[n] - 0,4 \cdot x[n - 8820] + 0,064 \cdot x[n - 26460] - 0,0256 \cdot x[n - 35280]$$

3.5. Resultados comparativos

A continuación se podrán observar gráficos que evidencian el resultado de ingresar un $\delta[n]$ a los diferentes sistemas en cascada compuestos Canal + Filtros FIR diseñados anteriormente, con el objetivo de intentar disminuir los ecos.

Figura 3.5.1. Respuesta impulsional del sistema en cascada Canal + Filtro con una rama de retardo

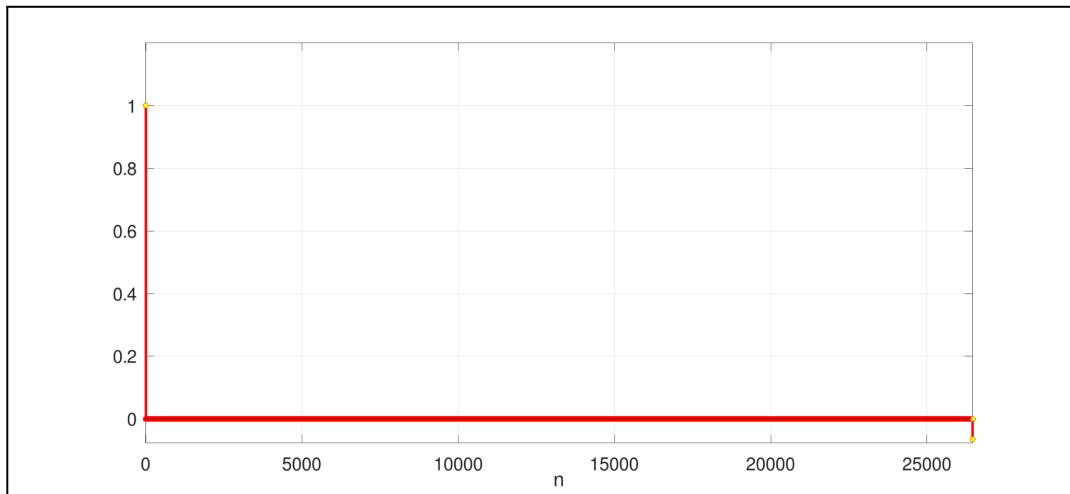
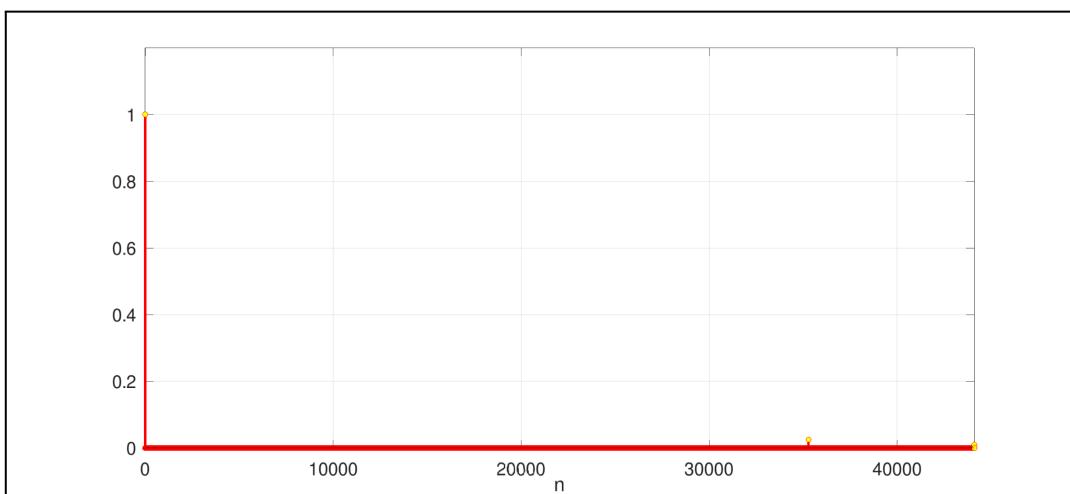


Figura 3.5.2. Respuesta impulsional del sistema en cascada Canal + Filtro con dos ramas de retardo



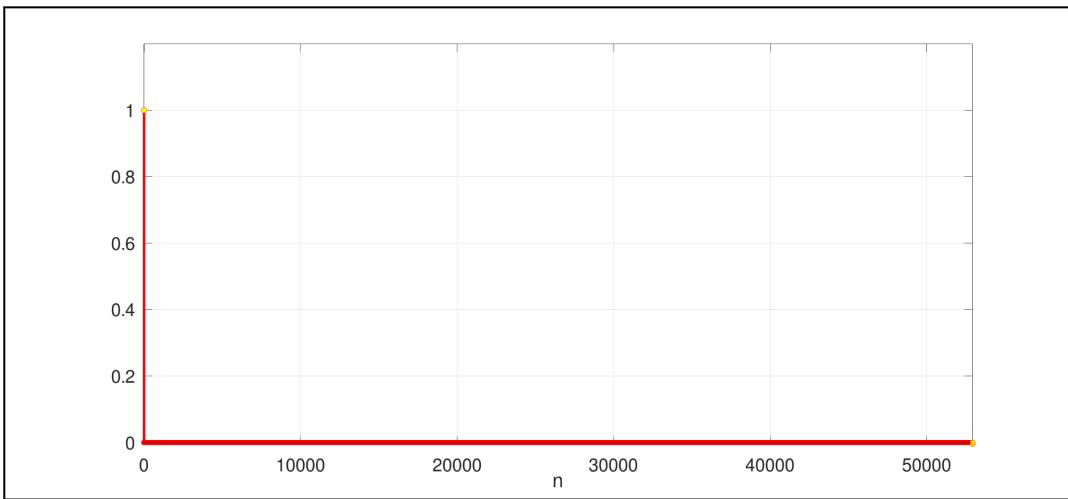


Figura 3.5.3. Respuesta impulsional del sistema en cascada Canal + Filtro con tres ramas de retardo

Aclaración: Se puede observar de una mejor manera las diferencias entre las respuestas impulsionales en el programa adjunto en Octave, haciendo zoom en los valores de n detallados en el archivo README.txt para cada caso.

3.6. Conclusiones

Como se pudo evidenciar en los gráficos sobre las respuestas impulsionales de los sistemas en cascadas Canal + Filtro (Ver **Figura 3.5.1.**, **Figura 3.5.2.** y **Figura 3.5.3.**), al agregar más ramas de retardo se obtiene una mejor aproximación a una $\delta[n]$. Cuanto más ramas de retardo se utilicen en el filtro, mayor es el desplazamiento y menor es la potencia de los ecos generados, lo que se traduce en una respuesta total más similar al comportamiento ideal de un canal que no genera ecos.

Esta mejora de la respuesta impulsional se refleja de manera clara a la hora de escuchar las señales resultantes. Cuanto mayor es el número de ramas de retardo, la salida se asemeja más a la señal original audio.wav.

Lo ideal sería eliminar por completo los ecos, pero para eso deberíamos diseñar un filtro del tipo IIR, es decir, con respuesta impulsional infinita.