Función de dos variables

Definición

Sea D un conjunto de pares ordenados de números reales. Si a cada par ordenado (x, y) de D le corresponde un número real f(x, y), entonces se dice que f es función de x e y.
El conjunto D es el dominio de f y el correspondiente conjunto de valores de f(x, y) es el recorrido de f.
Para la función dada por z = f(x, y), a x e y se les llaman variables independientes, y a z variable dependiente.

Nota: Nótese el doble papel que juega la letra z en la notación: En funciones de dos variables se le suele usar para denotar los valores de la función, escribiendo z = f(x, y) (aquí, la z es la “función”, la variable dependiente), mientras que en funciones de tres o más variables suele aparecer denotando a una de las variables de la función, por ejemplo, en v = f(x, y, z) (aquí la z es una variable independiente).

El par ordenado (x, y) puede tener una doble interpretación: por un lado, lo podemos considerar como una pareja de números reales (es decir, vemos dos números, dos variables); y por otro, lo podemos considerar como una unidad, como las componentes de un vector, v =(x, y) (y, en este sentido, solo veremos una variable, un vector). En consecuencia las funciones de varias variables, también, pueden considerarse como funciones de una sola variable vectorial.
$f : D \subseteq R^2 \dashrightarrow R$
$f : (x, y) \dashrightarrow z \qquad z = f(x, y)$
$f : v \dashrightarrow z \qquad z = f(v) \quad \text{con} \quad v = (x, y)$

A las funciones de varias variables también se les llama campos escalares. Igual que en una variable, para que la correspondencia sea función la imagen tiene que ser única. Para poder aplicar las propiedades de las funciones a las correspondencias que no lo son, hay que descomponerlas en funciones.

Dominio de una función de varias variables

El dominio de una función se define como el conjunto de puntos que tienen imagen. En la práctica el dominio de una función de varias variables, normalmente, viene determinado por el contexto del problema (por ejemplo área de un triángulo). Por eso, para definir las funciones es usual dar simplemente la fórmula z = f(x), sin especiar el dominio D.
Dominio implícito en la fórmula. Cuando no se dispone de un contexto de aplicación, también es usual definir las funciones dando simplemente la regla z = f(x), sin especiar el dominio D. En tal caso se entiende que el dominio viene implícito en la propia fórmula, y queda determinado por todos aquellos valores para los cuales tiene sentido aplicar la fórmula que define la función. O sea, el dominio está formado

por todos aquellos valores tales que al sustituirlos en la fórmula y realizadas las operaciones indicadas se obtiene un valor numérico y no una operación imposible. Es decir, se entiende que el dominio de la función f es el mayor subconjunto D de R para el cual la regla f(x) tiene sentido (si el dominio es más pequeño hay que indicarlo).

El dominio de una función de dos variables f(x, y) será una región del plano, y el dominio de una función de tres variables f(x, y, z) una región del espacio. Y vendrá determinado por la propia fórmula (dominio implícito), o bien, por una restricción arbitraria que nosotros impongamos.

Se llama Rango o Recorrido de una función al conjunto de elementos que son imagen. En general, nos ocuparemos del Dominio y solo en casos particulares nos ocuparemos del Recorrido.

Grafica de funciones:

Planos:

La ecuación cartesiana de un plano es

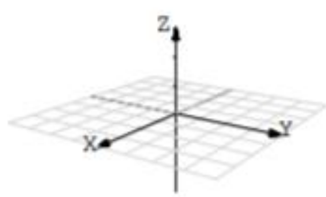
$ax + by + cz = d$

Planos XY, XZ y YZ: Los ejes coordenados determinan tres planos:

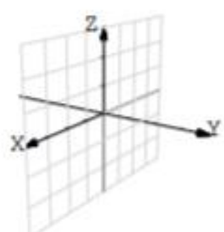
— Plano xy: formado por los puntos de la forma (x, y, C) esto es, z = Constante

— Plano yz: formado por los puntos de la forma (C, y, z) esto es, x = Constante

— Plano xz: formado por los puntos de la forma (x, C, z) esto es, y = Constante



Plano XY



Plano XZ

Plano YZ

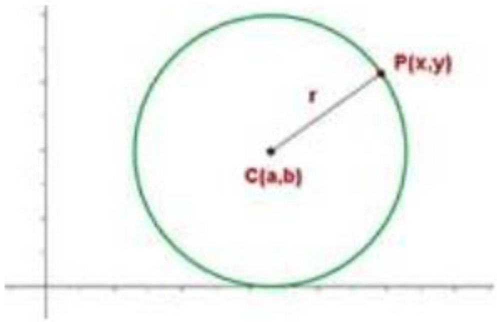
Trazas: Se llaman Trazas a las intersecciones de una superficie con los planos coordenados

Curvas de nivel: Cuando una superficie es cortada por un plano se obtiene, en general, una curva

Repaso de las gráficas de cónicas y Cuádricas.

Conicas

Ecuación de la circunferencia

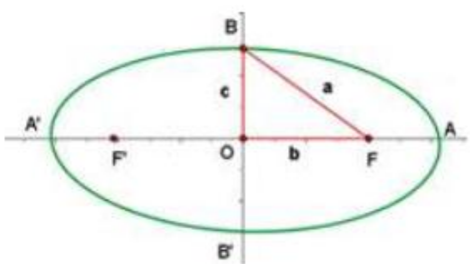


$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ con el centro trasladado

Ecuación reducida

$x^2+y^2=r^2$

Ecuación de la elipse



Elipse de eje horizontal y centro distinto al origen

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

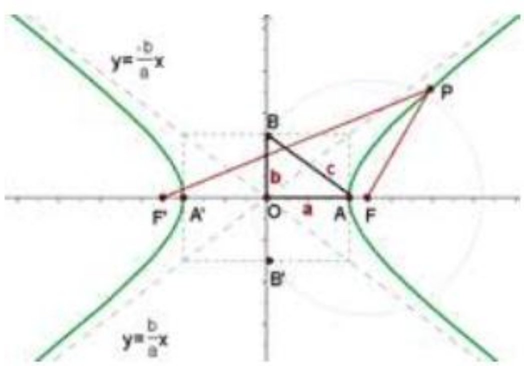
Ecuación reducida

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Elipse de eje vertical

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$$

Ecuación de la hipérbola



Hipérbola de eje horizontal y centro distinto al origen

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

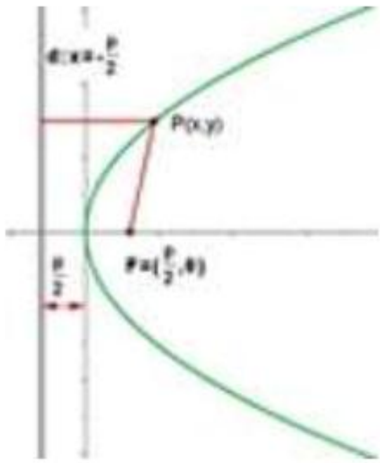
Hipérbola de eje horizontal

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Hipérbola de eje vertical

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Ecuación de la parábola



Parábola con eje paralelo a OX y vértice distinto al origen

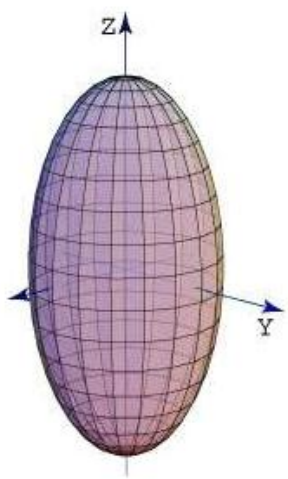
$$(y - b)^2 = 2p(x - a)$$

Parábola con eje paralelo a OY, y vértice distinto al origen

$$(x - a)^2 = 2p(y - b)$$

Superficies cuadráticas

Elipsoide

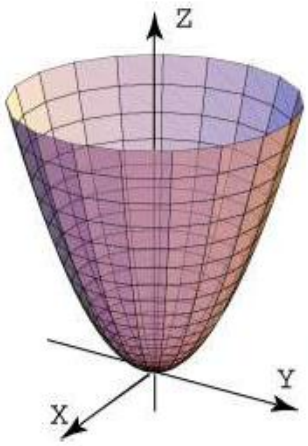


ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

corresponde a un elipsoide. Es simétrico con respecto a cada uno de los tres planos coordenados y tiene intersección con los ejes coordenados en (a,0,0) , (0,b,0) y (0,0,c).La traza del elipsoide sobre cada uno de los planos coordenados es un único punto o una elipse. Su gráfica.

Paraboloide elíptico



ecuación

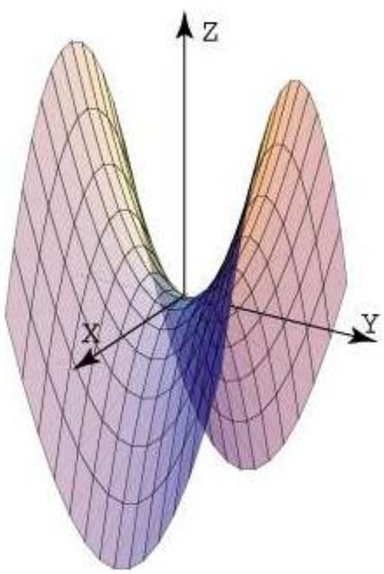
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

Sus trazas sobre planos horizontales $z = k$ son elipse :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{k}{c}$$

Sus trazas sobre planos verticales, ya sean x=k o y=k son parábola.

Paraboloide hiperbólico

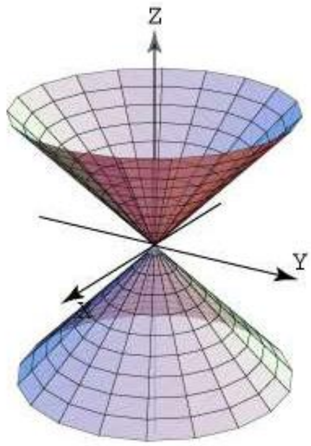


ecuación:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{z}{c}$$

Sus trazas sobre planos horizontales $z = k$ son hipérbolas o dos rectas ($z = 0$). Sus trazas sobre planos verticales paralelos al plano xz son parábolas que abren hacia abajo, mientras que las trazas sobre planos verticales paralelos al plano yz son parábolas que abren hacia arriba. Su gráfica tiene la forma de una silla de montar, como se observa.

Cono elíptico

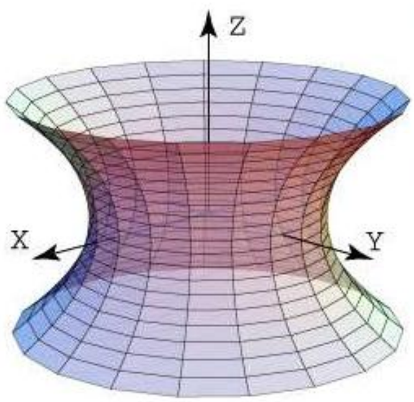


ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$$

Sus trazas sobre planos horizontales $z=k$ son elipses.Sus trazas sobre planos verticales corresponden a hipérbolas o un par de rectas.Su gráfica es:

Hiperboloide de una hoja



ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

Sus trazas sobre planos horizontales $z=k$ son elipses

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{k^2}{c^2}$$

Sus trazas sobre planos verticales son hipérbolas o un par de rectas que se intersecan. Se gráfica

.