



Taller de Automatización y Control

Trabajo Práctico 1

Identificación

Ferrari, Faustino	– 106324 –	faferrari@fi.uba.ar
Macia, Joaquín	– 102586 –	jmacia@fi.uba.ar

Grupo 13

2do Cuatrimestre 2024

Índice

1	Introducción	1
2	Modelado del Sistema	1
2.1	Obtención de las ecuaciones	1
2.2	Determinación del área efectiva de la cañería de salida	2
2.3	Descripción en espacio de estados y linealización	3
2.4	Obtención de la transferencia de la Planta	4
2.5	Estudio de la transferencia de la planta	4
3	Diseño en Matlab	5
3.1	Respuesta al escalón	5
3.2	Diseño del controlador	6
3.3	Respuesta al escalón del sistema controlado	6
3.4	Respuesta ante perturbaciones en la entrada	8
4	Conclusiones	10

1. Introducción

El objetivo de este Trabajo Práctico es afianzar los conocimientos adquiridos durante las ultimas clases, así como también lo estudiado durante el Curso de Control Automático I, así lograr aplicarlos en el análisis y control de una Planta real.

La planta a estudiar tiene forma de tanque cónico piramidal, con la punta de la pirámide recortada. Una bomba de agua genera un flujo constante de entrada hacia el tanque Q_i , regulado manualmente por una válvula. La válvula de salida permite controlar el flujo de salida Q_o , mediante una acción de control que modifica el área efectiva de la cañería de salida.

El Trabajo se encuentra dividido en dos partes principales. La primera abarca el modelado del sistema. Será necesario obtener las ecuaciones que describen el comportamiento dinámico de la planta. Como se vera a continuación, estas ecuaciones no son lineales, por lo que para facilitar su estudio y operación se deberán linealizar alrededor de un punto de equilibrio. Luego de obtener la función de transferencia de la planta y estudiarla para distintos puntos de trabajo se procederá a la segunda parte.

En la segunda parte se utilizará Simulink para obtener la respuesta al escalón de la planta, y luego diseñar un controlador para la misma que sea rápido, que no sature al actuador, y que tenga error nulo a una referencia tipo escalón. Luego se agregará una perturbación al flujo de entrada, para graficar la respuesta al escalón y la acción de control en este caso.

2. Modelado del Sistema

2.1. Obtención de las ecuaciones

Para comenzar el desarrollo de las ecuaciones, debemos tener en cuenta que el caudal de agua que fluye a través de la válvula es turbulento, por lo que su comportamiento físico tiene la forma:

$$Q = A_{efectiva} \sqrt{2gh}$$

El volumen de agua contenido dentro del tanque cónico piramidal esta dado por la siguiente formula:

$$v(h) = \frac{h}{3} (A_H(h) + A_L + \sqrt{A_H(h) \cdot A_L})$$

Como puede apreciarse A_H , el área transversal del tanque, varia en función del nivel de agua. Por lo tanto tendremos que aplicar geometría para encontrar la relación con la altura del agua:

$$\tan(\alpha) = \frac{\frac{l}{2}}{L_1 + h} = \frac{\frac{l_L}{2}}{L_1} = \frac{\frac{l_H}{2}}{L + L_1} \quad (2.1)$$

$$l = \frac{L_1 + h}{L_1} l_L \quad (2.2)$$

$$L_1 = \frac{l_L}{l_H - l_L} L \quad (2.3)$$

Reemplazando en la ecuación del volumen y realizando un manejo algebraico:

$$v(h) = \frac{l_L^2}{3L_1^2} (h^3 + 3L_1 h^2 + 3L_1^2 h) \quad (2.4)$$

Realizando la derivada del volumen en función del tiempo:

$$\frac{dv(h)}{dt} = \frac{l_L^2}{3L_1^2} (h^2 \dot{h} + 3L_1 h \dot{h} + 3L_1^2 \dot{h}) \quad (2.5)$$

Además, como la variación del volumen de agua en función del tiempo, esta dado por el caudal de entrada y el de salida, podemos relacionar la derivada con la altura:

$$\frac{dv(h)}{dt} = Q_i - Q_o = Q_i - A_{efectiva} \sqrt{2gh} = Q_i - A_{sal} u \sqrt{2gh} \quad (2.6)$$

Notar que el área efectiva de la válvula, fue remplazada por el área de salida de la misma, multiplicado por una acción de control u la cual varia el área efectiva.

Igualando ambas expresiones:

$$\dot{h} = 3L_1^2 \frac{Q_i - A_{sal}u\sqrt{2gh}}{l_L^2(3h^2 + 6L_1h + 3L_1^2)} \quad (2.7)$$

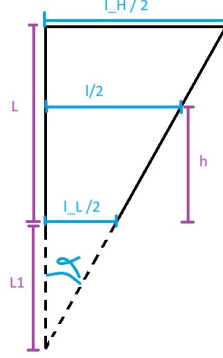


Figura 2.1

2.2. Determinación del área efectiva de la cañería de salida

La planta en cuestión posee una cantidad numerosa de variables cuyo valor es producto de sus características particulares. Algunas, como los lados superiores o inferiores, necesarios para calcular el volumen, son fácilmente medibles. Otras, como el área efectiva de la cañería de salida, resultan un poco mas complejas de estimar. Esto se debe a la presencia de una válvula “digital” que se encarga de regular el flujo de salida. Su funcionamiento se modela con una señal PWM de 1 segundo. Si se esta abierta durante 400ms, su comportamiento es similar al de una válvula “analógica” abierta en un 40 %.

Como se vera mas adelante, el polo de la transferencia de la planta, depende de las características constructivas y geométricas de la misma, así como también del flujo de entrada. El valor del polo es el encargado de hacer que la planta sea mas rápida o mas lenta, lo cual también tiene una influencia en la rapidez de las acciones de control (ya que se necesitarán acciones de control rápidas si la planta tiene un comportamiento rápido).

El comportamiento del flujo de salida de esta válvula es difícil de modelar debido a que su estructura interna hace que se necesiten modelos muy complejos para obtener el comportamiento hidrodinámico de la misma. En este caso se estimará el área efectiva, en base a una regresión lineal (cuadrados mínimos). Teniendo en cuenta que la válvula utilizada es digital y se comandara con un PWM de 1Hz que producirá el cierre y la apertura de la misma para regular el área efectiva de la misma, puede que su comportamiento no sea lineal para cada acción de control se le aplique.

Como se verá mas adelante, la transferencia de esta planta tiene la siguiente forma

$$P(s) = \frac{-K}{(s + p)} \quad (2.8)$$

Transformando al espacio discreto, la expresión de la planta es

$$P_d(s) = \frac{-K_d}{(z - p_d)} = \frac{y_n}{u_n} \quad (2.9)$$

En base a esta discretización se puede obtener un conjunto de ecuaciones en diferencias que representan al sistema

$$y_{n+1} = p_d \cdot y_n + K_d \cdot u_n \quad (2.10)$$

Por otro lado, la relación entre los coeficientes K y K_d , p y p_d (discretización ZOH) es

$$\begin{cases} K_d = \int_0^T e^{p \cdot T} \cdot K \cdot dT = -\frac{K}{p} \cdot (e^{p \cdot T} - 1) \\ p_d = e^{-p \cdot T} \end{cases}$$

Con un set de datos provisto durante las clases (muestreados a 1 segundo, por lo que $T = 1s$), que corresponden a la evolución del nivel de agua de la planta cuando la acción de control u pasa de valer 0.5 a 0.55, y conociendo la forma de la planta, se pueden estimar tanto el valor de K como el valor de p .

Como también se vera mas adelante, la expresión completa de la planta tiene la siguiente forma

$$H(s) = -\frac{\frac{\sqrt{2} \cdot A_{sal} \cdot L^2 \cdot \sqrt{gh_0}}{(L_h h_0 - L_l h_0 + L \cdot L_l)^2}}{(s + p)} \quad (2.11)$$

Definiendo a $\alpha = \frac{\sqrt{2} \cdot L^2 \cdot \sqrt{gh_0}}{(L_h h_0 - L_l h_0 + L \cdot L_l)^2}$

$$H(s) = -\frac{\alpha \cdot A_{sal}}{(s + p)} = \frac{-K}{(s + p)} \quad (2.12)$$

Igualando numeradores y despejando el valor de A_{sal} se obtiene

$$A_{sal} = \frac{K}{\alpha} \quad (2.13)$$

Para hacer mas sencilla la estimación por cuadrados mínimos, se considerara conocido el valor de $p = 0.00237$. Realizando los cálculos mediante Matlab, se obtiene un valor de $K = 0.0042$. Como los valores que integran α son conocidos, se puede despejar A_{sal}

$$A_{sal} = 0,000088388m^2 \quad (2.14)$$

De la ecuación de área de la circunferencia se puede extraer el valor del diámetro de la cañería de salida

$$d_{sal} = \sqrt{\frac{4 \cdot A_{sal}}{\pi}} = 10,61mm \quad (2.15)$$

2.3. Descripción en espacio de estados y linealización

Para linealizar el sistema y poder llevarlo a una expresión del tipo:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2.16)$$

$$y = Cx + Du \quad (2.17)$$

Primero debemos hallar las matrices A,B,C y D. Para ello realizamos las derivadas correspondientes:

$$A = \frac{df(h)}{dh} = -\frac{3L^2 \left(Qi - 2^{\frac{1}{2}} A_{sal} u \sqrt{gh} \right) \left(6h + \frac{6L^2 L_l}{L_h - L_l} \right)}{(L_h - L_l)^2 \left(3h^2 + \frac{3L^2 L_l^2}{(L_h - L_l)^2} + \frac{6LL_l h}{L_h - L_l} \right)^2} - \frac{3\sqrt{2} A_{sal} L^2 g u}{2\sqrt{gh} (L_h - L_l)^2 \left(3h^2 + \frac{3L^2 L_l^2}{(L_h - L_l)^2} + \frac{6LL_l h}{L_h - L_l} \right)} \quad (2.18)$$

$$B = \frac{df}{du} = -\frac{3 \cdot 2^{\frac{1}{2}} A_{sal} L^2 \sqrt{gh}}{(L_h - L_l)^2 \left(3h^2 + \frac{3L^2 L_l^2}{(L_h - L_l)^2} + \frac{6LL_l h}{L_h - L_l} \right)} \quad (2.19)$$

$$C = \frac{dy}{dh} = 1 \quad (2.20)$$

$$D = \frac{dy}{du} = 0 \quad (2.21)$$

Para hallar u_0 , debemos plantear la condición de equilibrio donde: $\dot{h} = 0$ y $h = h_0$.

$$u_0 = \frac{Q_i}{A_{sal} \sqrt{2gh_0}} \quad (2.22)$$

Finalmente el sistema queda modelado por:

$$\dot{x} = A|_{h=h_0, u=u_0}(h - h_0) + B|_{h=h_0, u=u_0}(u - u_0) \quad (2.23)$$

$$y = h - h_0 \quad (2.24)$$

2.4. Obtención de la transferencia de la Planta

Debido a que la transferencia esta dada en forma paramétrica, Para hallar la función de transferencia,, utilizaremos la expresión conocida:

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D; \quad (2.25)$$

$$H(s) = -\frac{\sqrt{2} \cdot A_{\text{sal}} \cdot L^2 \cdot \sqrt{gh_0}}{(L_h h_0 - L_l h_0 + L \cdot L_l)^2 \left(s + \frac{2 \cdot L^2 \cdot (L_h - L_l) \cdot (Q_i - \sqrt{2} \cdot A_{\text{sal}} \cdot u_0 \cdot \sqrt{gh_0})}{(L_h h_0 - L_l h_0 + L \cdot L_l)^3} + \frac{\sqrt{2} \cdot A_{\text{sal}} \cdot L^2 \cdot g \cdot u_0}{2 \cdot \sqrt{gh_0} \cdot (L_h h_0 - L_l h_0 + L \cdot L_l)^2} \right)} \quad (2.26)$$

$$H(s) = -\frac{\sqrt{2} \cdot A_{\text{sal}} \cdot L^2 \cdot \sqrt{gh_0}}{(L_h h_0 - L_l h_0 + L \cdot L_l)^2 \left(s + \frac{L^2 \cdot Q_i}{2 \cdot h_0 \cdot (L_h h_0 - L_l h_0 + L \cdot L_l)^2} \right)} \quad (2.27)$$

2.5. Estudio de la transferencia de la planta

Observando la transferencia hallada en el punto anterior, podemos notar que el valor del polo de la planta esta dado por:

$$p = \frac{L^2 \cdot Q_i}{2 \cdot h_0 \cdot (L_h h_0 - L_l h_0 + L \cdot L_l)^2} \quad (2.28)$$

$$K = \frac{\sqrt{2} \cdot A_{\text{sal}} \cdot L^2 \cdot \sqrt{gh_0}}{(L_h h_0 - L_l h_0 + L \cdot L_l)^2} \quad (2.29)$$

Por lo tanto a medida que la altura de la columna de agua se vuelve menor, la planta se vuelve mas rápida. Esto se puede apreciar en el gráfico observando la fase del diagrama de Bode. A medida que disminuye h_0 el polo se va desplazando hacia las frecuencias altas. Otro factor que puede observarse tanto en el diagrama de Bode como en la transferencia hallada, es la variación de la ganancia en función de la altura.

A la hora de controlar cada planta, se intentar diseñar un controlador que genere una frecuencia de corte para la ganancia de lazo L mayor a la frecuencia natural de la planta y también mayor a la frecuencia relacionada con el settling time especificado. Por lo mencionado anteriormente, una variación de h_0 entre 0.1m y 0.9m se traduce en una variación de dos ordenes de magnitud tanto para la ganancia, como para la ubicación de los polos, lo cual genera una complicación para la sintonización del controlador manteniendo una robustez en el diseño.

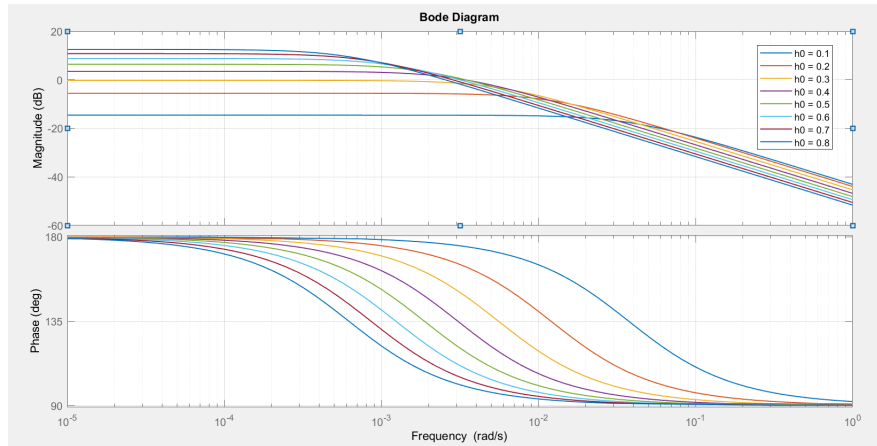


Figura 2.1

3. Diseño en Matlab

3.1. Respuesta al escalón

En esta sección se estudiara la respuesta al escalón de la planta, para un $h_0 = 0.45\text{m}$, cuando la entrada de control pasa de valer u_0 (valor de u en el equilibrio correspondiente al h_0 anterior) a $1.1 \cdot u_0$.

Para esto se ha utilizado el siguiente modelo de Simulink:

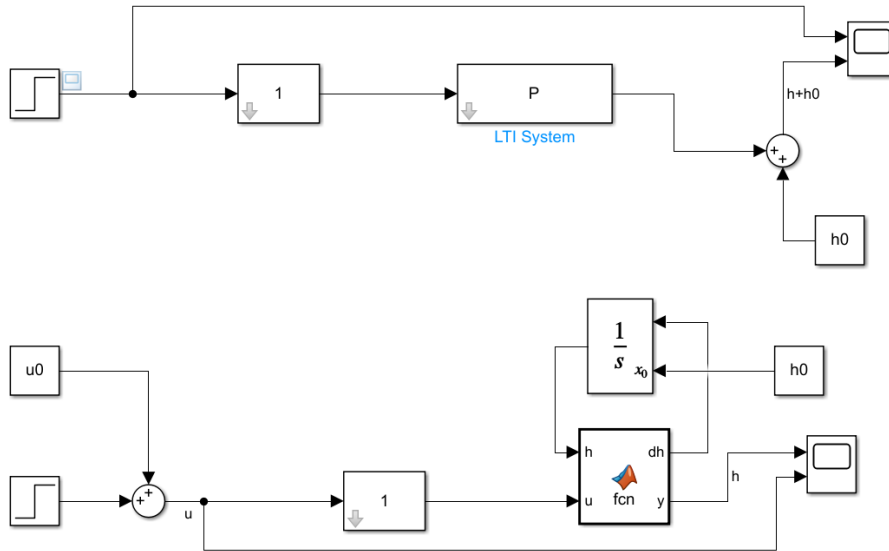


Figura 3.1

La respuesta que se obtuvo es la siguiente

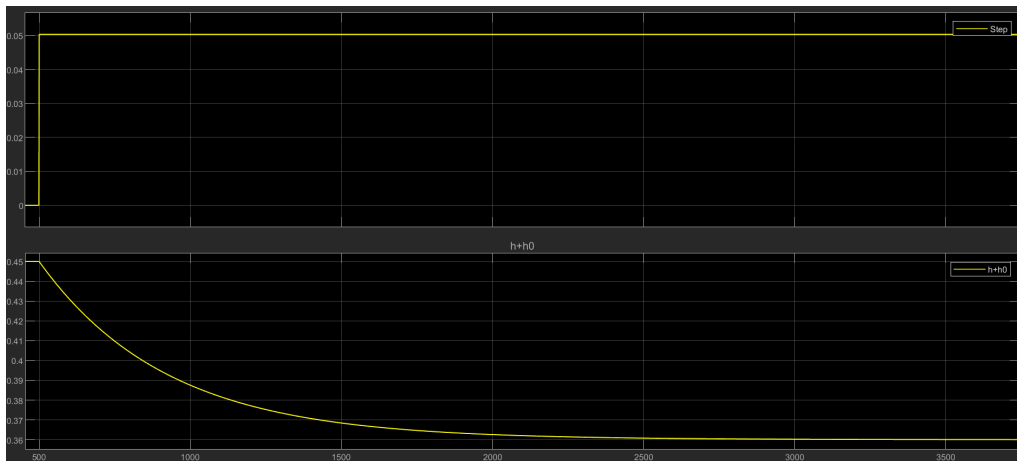


Figura 3.2: Respuesta al escalón de la planta linealizada.

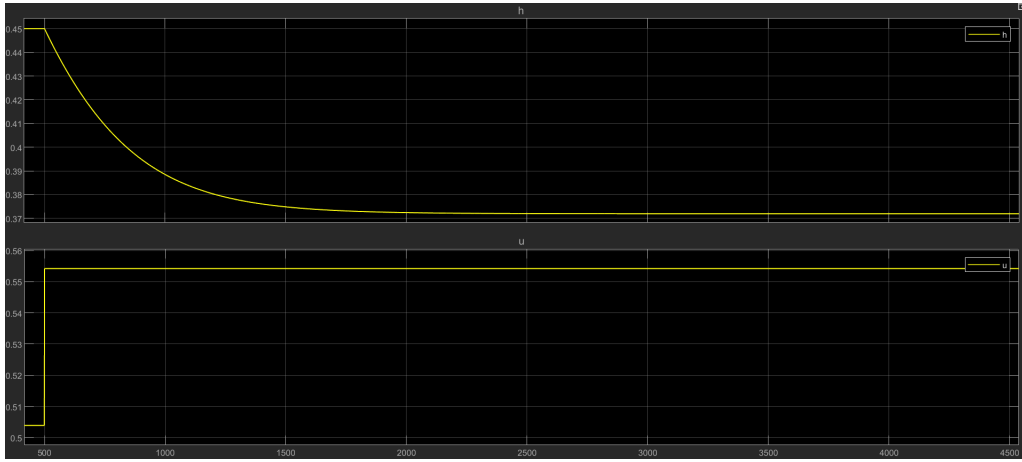


Figura 3.3: Respuesta al escalón de la planta no linealizada.

Se puede observar que en ambos casos el tiempo de establecimiento de la planta es de aproximadamente 20 a 25 minutos.

3.2. Diseño del controlador

En este apartado se realizara un diseño de un Controlador para esta planta. El mismo debe ser lo mas rápido posible, pero no debe saturar al actuador en ningún momento. Debe tener un tiempo de establecimiento menor a 8 minutos. Por otro lado, debe tener error nulo a una referencia tipo escalón (por lo cual debe tener un polo en cero).

La planta que se utilizara sera la que corresponde a la linealizada en torno a $h_0 = 0.45$

$$P = \frac{-0,004233}{s + 0,00237} \quad (3.1)$$

Teniendo en cuenta que la planta tiene ganancia negativa, esta nos provocaría un retraso de fase de 180° . Debido a ello, se opto por diseñar el controlador con ganancia negativa para contrarrestar este efecto.

Finalmente, como se debía cumplir el requisito del settling time, fue necesario mejorar el ancho de banda del sistema para mejorar la respuesta temporal. Para ello, la mejor opción encontrada, fue la de introducir un cero para la cancelación del polo de la planta, debido a que las demás producían la saturación del controlador.

Además, cabe destacar que el diseño fue optimizado su posterior discretización, utilizando un $T_s = 1s$.

El diseño obtenido para el controlador es:

$$C = \frac{-3,1623 \cdot (s + 0,00237)}{s} \quad (3.2)$$

3.3. Respuesta al escalón del sistema controlado

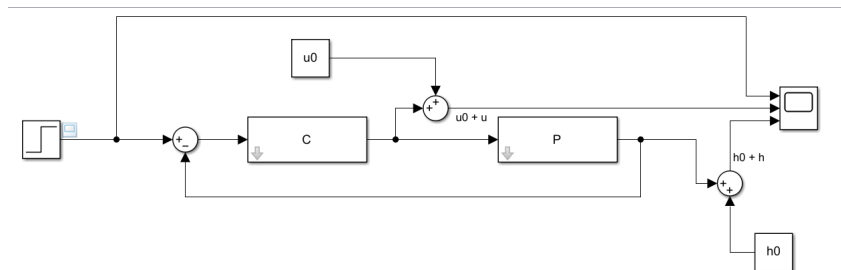


Figura 3.1: Modelo utilizado para el sistema lineal.

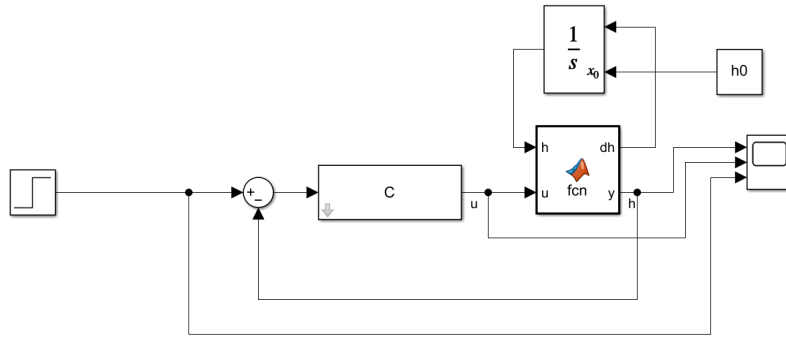


Figura 3.2: Modelo utilizado para el sistema no lineal.

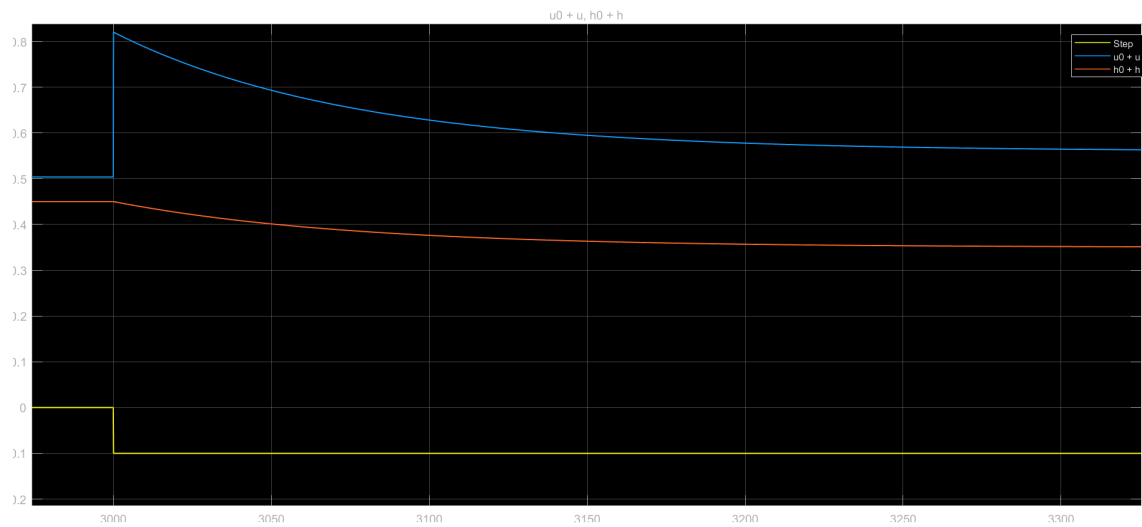


Figura 3.3: Respuesta al escalón del sistema lineal.

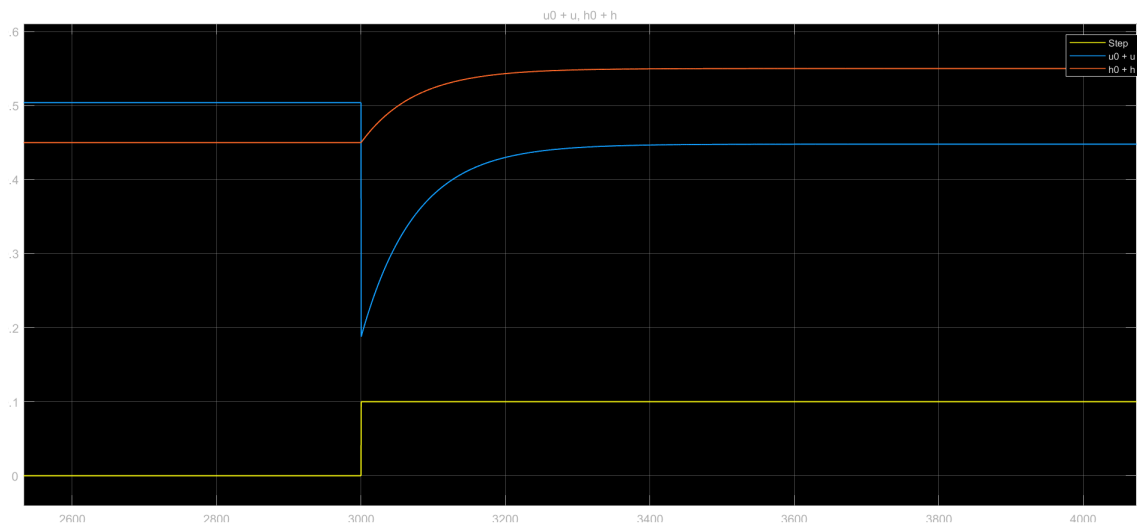


Figura 3.4: Respuesta al escalón del sistema lineal.

```

RiseTime: 164.1234
SettlingTime: 292.2190
SettlingMin: 0.9000
SettlingMax: 1.0000
Overshoot: 0
Undershoot: 0
Peak: 1.0000
PeakTime: 787.8555

```

Figura 3.5: Valores del `step(T)` realizado en Matlab.

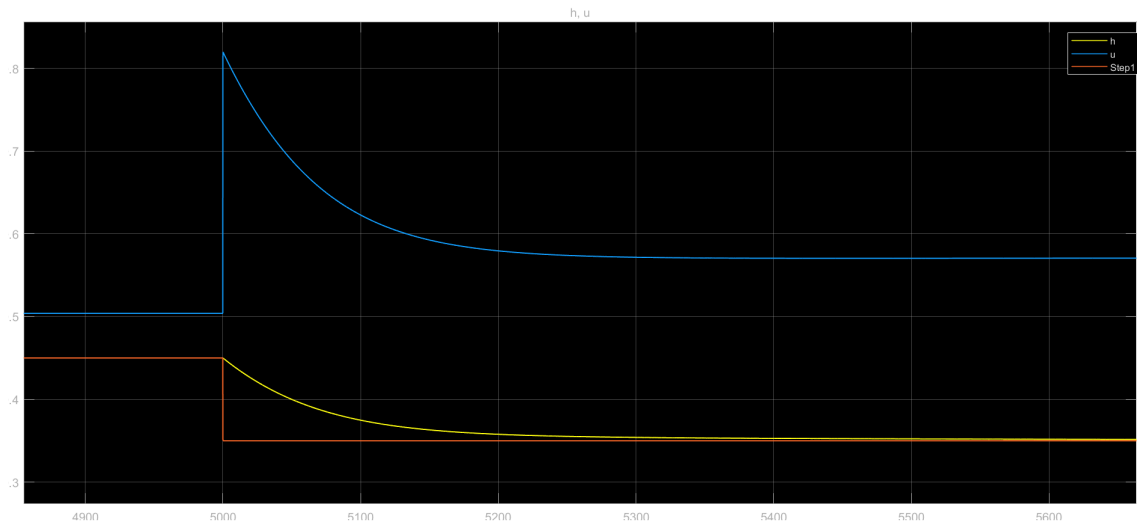


Figura 3.6: Respuesta al escalón del sistema no lineal.

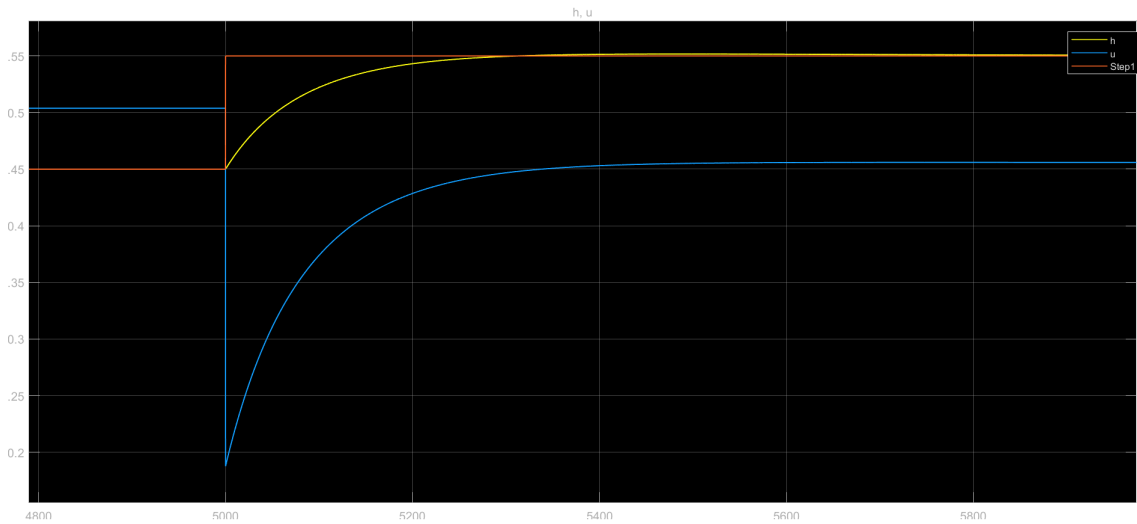


Figura 3.7: Respuesta al escalón del sistema no lineal.

3.4. Respuesta ante perturbaciones en la entrada

En las siguientes simulaciones puede apreciarse como es la respuesta del sistema ante un cambio en el caudal de entrada Q_i . Debido a que el controlador cuenta con un polo en el origen, este rechazara cualquier perturbación del tipo escalón con error estacionario nulo.

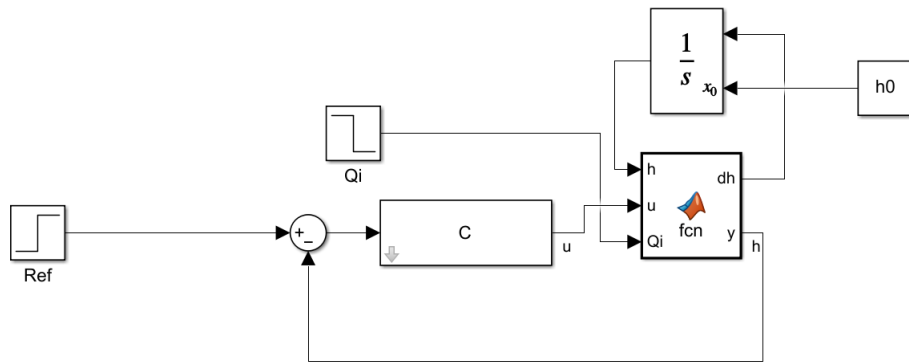


Figura 3.1

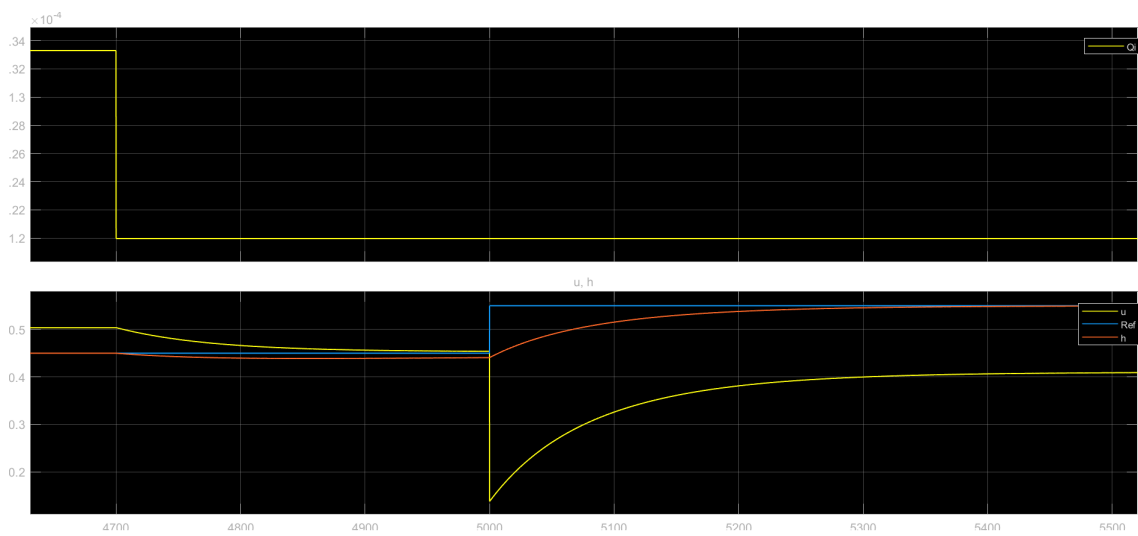


Figura 3.2: Respuesta ante una perturbación de entrada del tipo escalón

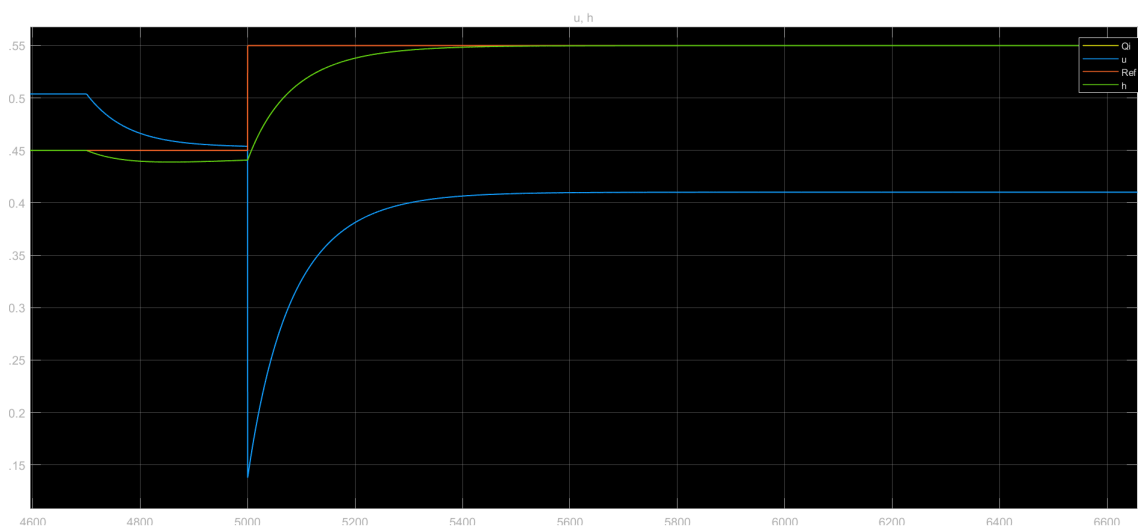


Figura 3.3: Respuesta ante una perturbación de entrada del tipo escalón

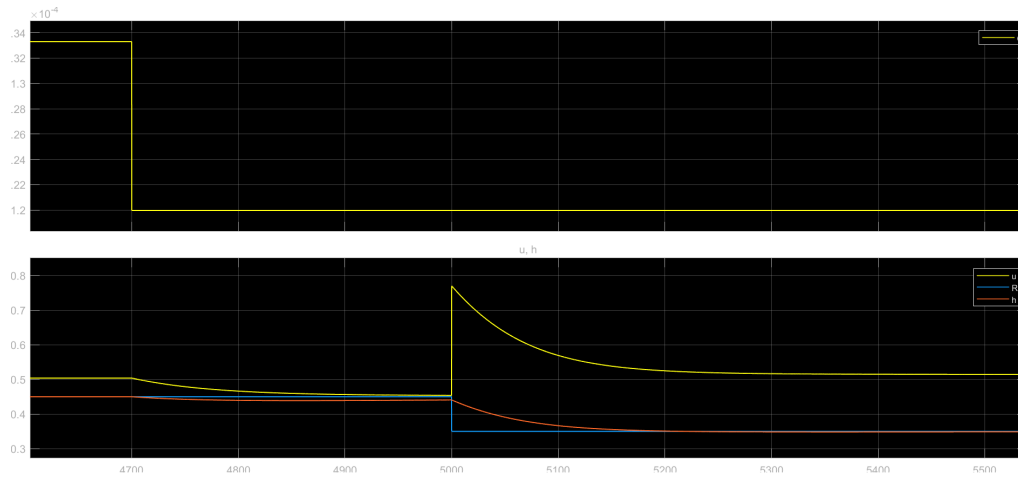


Figura 3.4: Respuesta ante una perturbación de entrada del tipo escalón

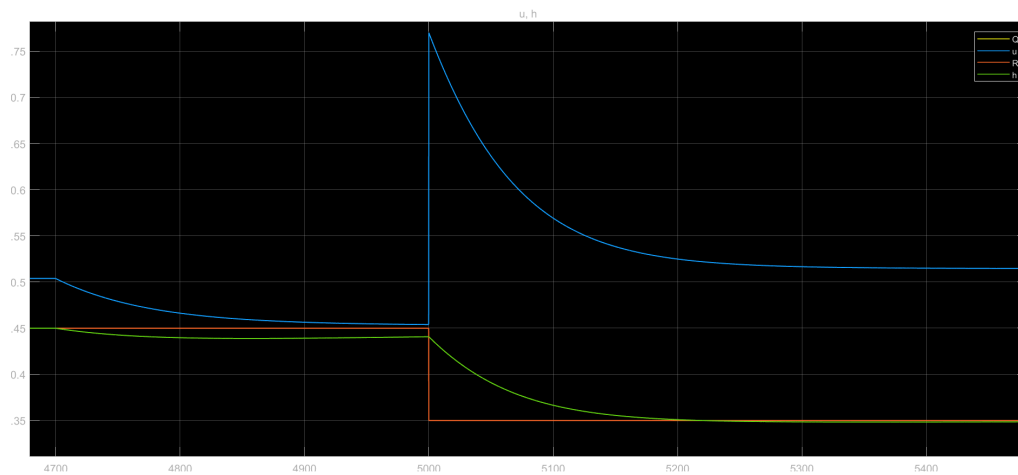


Figura 3.5: Respuesta ante una perturbación de entrada del tipo escalón

4. Conclusiones

A lo largo de este trabajo se han logrado afianzar muchos de los conocimientos adquiridos previamente, relacionados al modelado de plantas, linealización en torno a un punto de equilibrio, y diseño de controladores. Gracias a esto fue posible comprender los pasos necesarios para el estudio y control de una planta, así como también incorporar conocimientos y técnicas sobre estimación de parámetros desconocidos de la planta.

En cuanto al modelado y linealización se ha comprendido la utilidad de realizar el estudio dejando como variable el punto de equilibrio, así luego tener la posibilidad de tener un modelo linealizado para cualquier punto de equilibrio.

Sin embargo esto presenta la dificultad de elegir correctamente un punto de equilibrio para linealizar, ya que el modelo linealizado puede responder mejor o peor dependiendo del punto de linealización.

Por otro lado, fue posible realizar una estimación de parámetros desconocidos de la planta, obteniendo muy buenos resultados.

Del mismo modo, se logro diseñar un controlador abandonando las practicas mecánicas que incluían la cancelación de la parte inestable, para pasar a un diseño mas inteligente, estudiando requerimientos específicos y adecuando el controlador a ellos, y entendiendo la interacción y las limitaciones de cada variable (por ejemplo, la ubicación de los polos y el impacto de la ganancia en la saturación del actuador).

Por ultimo, se logro verificar las respuestas al escalón y a perturbaciones externas del sistema utilizando el software Simulink.