Diferencias Finitas y Opciones Exóticas

Joaquín Pulgar Ampuero

03/06/2025

Contents

Introducción

El objetivo de este informe es poder entender y aplicar las diferencias finitas para el cálculo de opciones exóticas. Para esto, utilizaremos la siguiente información de mercado:

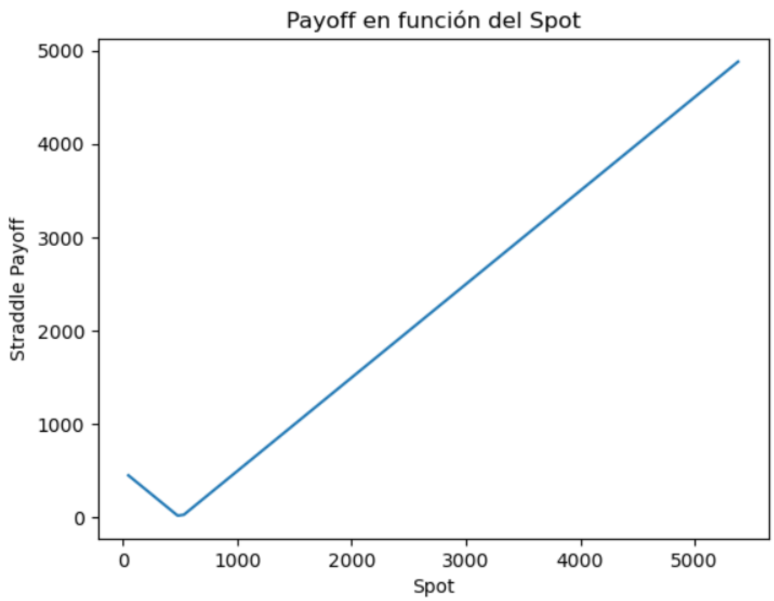
$$S_0 = 460, \quad r = 0.05, \quad q = 0.01, \quad \sigma = 0.25$$

1 Valor Teórico European Straddle

Se calcula el valor de una *European Straddle* con strike $K = 500$ y madurez $T = 10$ años de forma teórica usando Black-Scholes:

$$V_{\text{Straddle}} = V_{\text{Call}} + V_{\text{Put}} = 237.5859$$

También se crea un vector de precios spot entre 46.8532 y 5380 y se grafica el payoff del straddle.



2 Diferencias Finitas

En primer lugar, escribimos el operador espacial de la siguiente PDE:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (r-q)S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = 0 \tag{1}$$

En este caso, el operador es:

$$A(\tau)\bullet = (r-q)S\frac{\partial \bullet}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 \bullet}{\partial S^2} - r\bullet$$

Luego, se debe discretizar el operador espacial estableciendo límites para $S_{\min}$ y $S_{\max}$. Estos límites se fijan utilizando una distribución log-normal, tomando como referencia el rango de ± 3 desviaciones estándar, lo cual permite capturar el spot con un 99.7% de confianza. La fórmula para estos límites es la siguiente:

$$S_{\text{up/down}} = S_0 e^{\left[(r-q)-\frac{\sigma^2}{2}\right]T \pm 3\sigma\sqrt{T}}$$

Establecemos que el spacegrid será de N=100 puntos incluyendo a S_1 y S_N. Se calcula el valor de ΔS, luego se crea la matriz de discretización A de tamaño $N \times N$. Previo a mostrar los resultados obtenidos del *upper* y *lower boundary* es necesario entender la razón de su valor. Al calcular la matriz de discretización, uno se percata que no es posible obtener el valor de los límites *upper* y *lower*, a través del *centered scheme*. Es por esto que uno debe aplicar ciertas condiciones a estos límites.

Para el *lower boundary*, se utiliza la **zero-gamma condition** al igual que el **right gradient scheme**, para obtener los valores de $A_{1,1}$ y $A_{1,2}$:

$$A_{1,1} = -d_1 - r, \quad A_{1,2} = d_1$$

En este caso se ocupa el **right gradient scheme** puesto que no existe un valor previo en la matriz A.

Para el *upper boundary*, se utiliza la **zero-gamma condition** al igual que el **left gradient scheme**, para obtener los valores de $A_{N,N-1}$ y $A_{N,N}$:

$$A_{N,N-1} = -d_N, \quad A_{N,N} = d_N - r$$

En este caso se ocupa el **left gradient scheme** ya que no existe un valor superior a N en la matriz A.

Se utiliza además la siguiente fórmula:

$$d_j = \frac{(r-q)S_j}{\Delta S}$$

Se completa la matiz de discretización A a través de un ciclo *for* que recorre la matriz completa y realiza los siguientes cálculos:

$$A_{j,j-1} = -\frac{d_j}{2} + \frac{g_j}{2}, \quad A_{j,j} = -g_j - r, \quad A_{j,j+1} = \frac{d_j}{2} + \frac{g_j}{2}$$

Donde:

$$g_j = \frac{\sigma^2 S_j^2}{(\Delta S)^2}$$

A continuación, se discretiza el eje del tiempo tomando un $\Delta t = 0.5$ años. Se obtiene un vector T que va desde 0 a 10 años, con un total de 21 puntos. Luego, se presentan 3 sistemas de ecuaciones que permiten descontar los payoffs desde t_i hacia t_{i-1}:

Explícito:

$$\frac{\vec{V}_{i+1} - \vec{V}_i}{\Delta\tau} = A\vec{V}_i \Rightarrow \vec{V}_{i+1} = (I + A\Delta\tau)\vec{V}_i$$

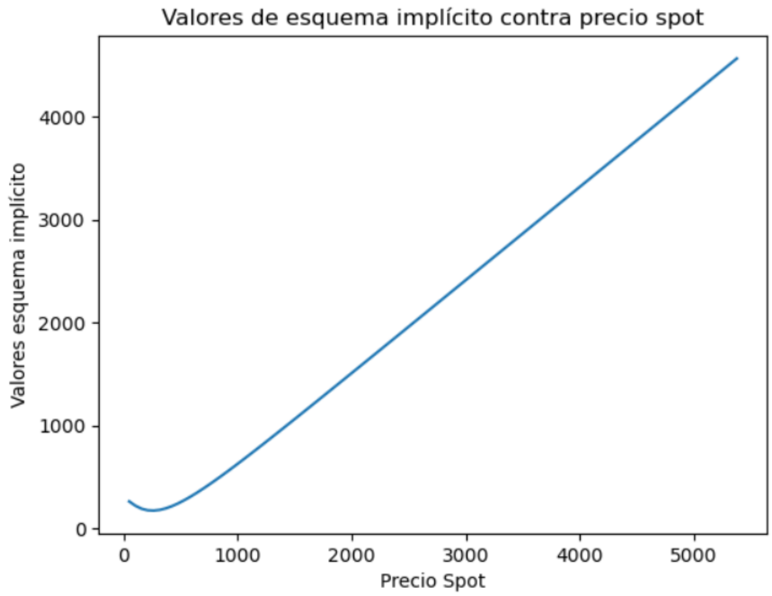
Implícito:

$$\frac{\vec{V}_{i+1} - \vec{V}_i}{\Delta\tau} = A\vec{V}_{i+1} \Rightarrow \vec{V}_{i+1} = (I - A\Delta\tau)^{-1}\vec{V}_i$$

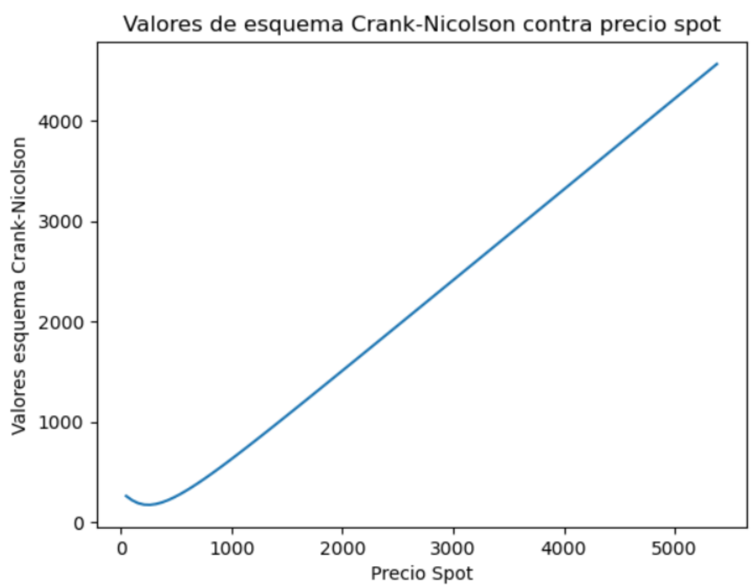
Crank-Nicolson:

$$\frac{\vec{V}_{i+1} - \vec{V}_i}{\Delta\tau} = \frac{1}{2}A(\vec{V}_{i+1} + \vec{V}_i) \Rightarrow \vec{V}_{i+1} = \left(I - \frac{A\Delta\tau}{2}\right)^{-1}\left(I + \frac{A\Delta\tau}{2}\right)\vec{V}_i$$

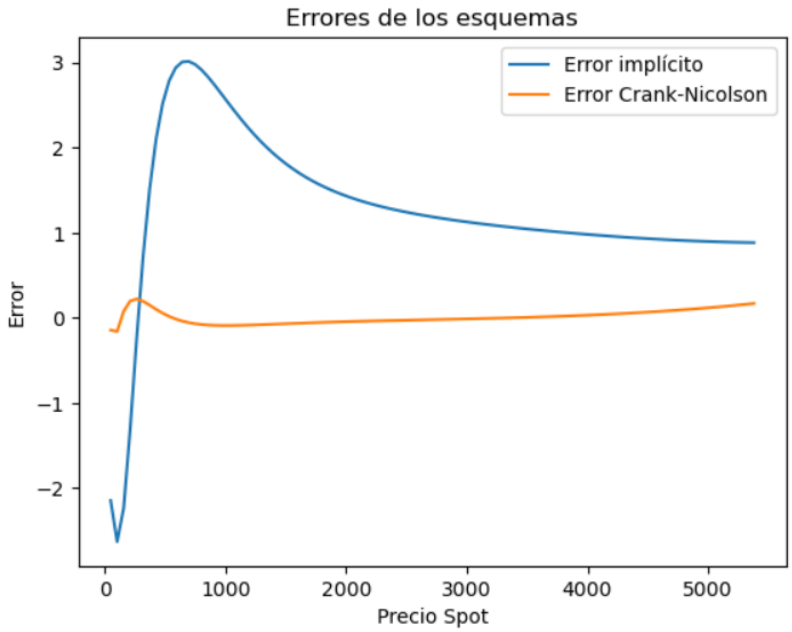
Se decide implementar tanto el esquema **ímplicito** como el de **Crank-Nicolson** para calcular la *European Straddle*. Se crea la función **implicit_scheme(N,A,TG,deltat,payoff)** para calcular el valor del straddle, luego se grafican los resultados con respecto al precio spot, obteniendo el siguiente gráfico:



Se crea la función **cn_scheme(N,A,TG,deltat,payoff)** y se grafican los resultados contra el precio spot:



Finalmente se calcula el **pricing error** de ambos métodos con respecto a la fórmula exacta de Black-Scholes:



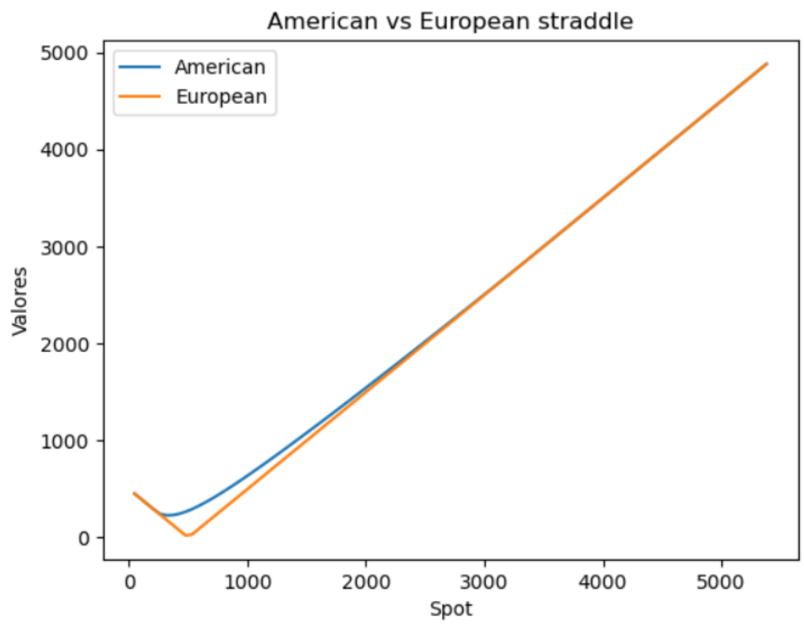
El esquema que más se ajusta al valor téorico es el de **Crank-Nicolson** puesto que es el que tiene un menor error absoluto. Junto con esto, se calcula el valor del straddle en relación al precio spot inicial utilizando la función **interp1** la cual realiza una interpolación. A partir de esto, se obtiene lo siguiente:

- Crank-Nicolson: $V = 237.9925$
- Implicit: $V = 235.6818$

Esto vuelve a confirmar que el esquema de Crank-Nicolson es más preciso ya que se acerca más al valor teórico.

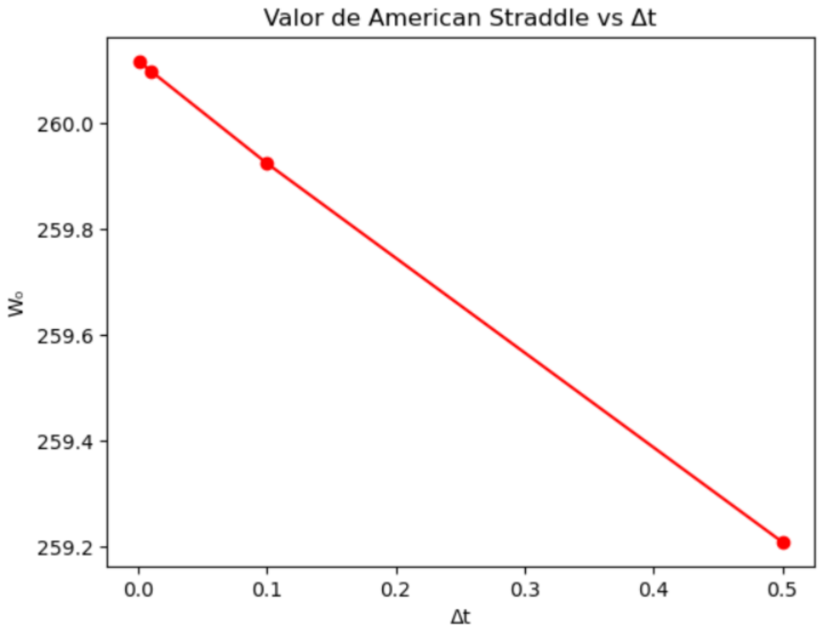
3 American Straddle

A continuación, se estima el valor de un *American Straddle* con el mismo K y T usando Crank-Nicolson. Se crea la función **getAmericanStraddle(N,K,A,SG,payoff,TG,deltat)** para luego obtener la matriz de valores. Se realiza una interpolación para obtener el valor del straddle con el precio spot inicial dando como resultado: $W = 259.2029$. Se grafican los precios del straddle americano y europeo:



La opción americana se encarece más con respecto de la europea cuando el precio spot del subyacente se encuentra en rangos no extremos.

Finalmente, se genera un ciclo *for* en donde se reduce gradualmente el valor de Δt desde 0.5 hasta 0.001 y se va calculando el valor del straddle para cada uno de los valores. En cada valor de Δt se interpola para obtener el valor considerando el spot $S = 460$ y se grafica.



A medida que Δt disminuye, el valor de la *American Straddle* aumenta. El salto en valores que ocurre entre 0.5 y 0.1 es mayor al salto entre 0.1 y 0.01. La velocidad de convergencia es logarítmica.