1. Matemáticas

(a) Valores y vectores propios

I) Defina el concepto de valores propios y vectores propios de una matriz cuadrada. ¿Qué significado tienen los valores y vectores propios asociados a una transformación lineal? Hint: Ver video de 3Blue1Brown.

II) Encuentre los valores y vectores propios de

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

III) Para cualquier $k \in \mathbb{N} - \{0\}$, demuestre que los valores propios de A^k son $\lambda_1^k, \lambda_2^k, ..., \lambda_n^k$, las potencias k-ésimas de los valores propios de A, y que cada vector propio de A es un vector propio de A^k

I) Una transformación lineal puede ser representada por una matriz, los vectores que se mantienen en la misma "linea" o dirección despues de la transformación lineal, se los llama vectores propios. De otra forma, los vectores propios son vectores con caracteristicas especiales, los cuales tienen la particularidad de que cuando se les hace una transformación lineal, estos se mantienen en el mismo "span", pero cada vector es multiplicado por un factor los cuales se denominan valores propios.
Matematicamente son los vectores y valores que cumplen con la siguiente ecuación:

A es la matriz $\longrightarrow A \cdot \vec{v} = \lambda \vec{v}$, en donde $\vec{v}$ es el vector propio de A
λ es el valor propio de A

Los valores y vectores propios caracterizan a la matriz y a la transformación lineal.

II) $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}\right) = (2-\lambda)^2 - 1 = 0 \qquad \Rightarrow \lambda_1 = 1 \; ; \; \lambda_2 = 3$$
$$(2-\lambda)^2 = 1$$

λ_1) $(A - \lambda_1 \cdot I) \cdot v_1 = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow v_x = -v_y \qquad v_x + v_y = 0 \qquad \therefore v_1 = \begin{pmatrix} v_x \\ -v_x \end{pmatrix} = v_x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

λ_2) $(A - \lambda_2 I) v_2 = 0$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = 0 \qquad -v_x + v_y = 0 \qquad v_x = v_y \Rightarrow \boxed{v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$\therefore$ Valores propios: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

vectores propios: $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

III)

III) Para cualquier $k \in \mathbb{N} - \{0\}$, demuestre que los valores propios de $\boldsymbol{A}^k$ son $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots, \lambda_n^k$, las potencias k-ésimas de los valores propios de $\boldsymbol{A}$, y que cada vector propio de $\boldsymbol{A}$ es un vector propio de $\boldsymbol{A}^k$

$\rightarrow$ Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ los valores propios de una matriz A y $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sus correspondientes vectores propios, por Definición se cumple que:

Siendo λ_i, v_i arbitrarios:

☆ 1 $A \cdot v_i = \lambda_i \cdot v_i$, en donde v_i es el vector propio correspondiente al valor propio λ_i.

(tambien se puede ver de la forma $(A - \lambda_i I) v_i = 0$)

¿Que se quiere demostrar? que se cumple la siguiente ecuación:

$\boxed{A^K \cdot v_i = \lambda_i^K \cdot v_i}$ con $i = 1, \ldots, n$ | A^K tiene un valor propio λ_i^K con vector propio v_i, para $i = 1, \ldots, n$.

Veamos que esto se cumple pues:

$$A \cdot v_i = \lambda_i \cdot v_i \quad / \cdot A^{K-1}$$
$$A^{K-1} \cdot A \cdot v_i = A^{K-1} \cdot \lambda_i \cdot v_i$$
$$A^K \cdot v_i = \lambda_i \cdot A^{K-1} \cdot v_i$$
$$A^K \cdot v_i = \lambda_i \cdot A^{K-2} \cdot A \cdot v_i \xrightarrow{} \lambda_i \cdot v_i$$
$$A^K \cdot v_i = \lambda_i \cdot A^{K-2} \cdot \lambda_i \cdot v_i$$
$$A^K \cdot v_i = \lambda_i^2 \cdot A^{K-2} \cdot v_i$$

$$A^K \cdot v_i = \lambda_i^2 \cdot A^{K-3} \cdot A \cdot v_i$$
$$A^K \cdot v_i = \lambda_i^2 \cdot A^{K-3} \cdot \lambda_i \cdot v_i$$
$$A^K \cdot v_i = \lambda_i^3 \cdot A^{K-3} \cdot v_i$$
$$\vdots$$
$$A^K \cdot v_i = \lambda_i^{K-1} \cdot A^{K-K+1} \cdot v_i$$
$$A^K \cdot v_i = \lambda_i^{K-1} \cdot A^0 \cdot A \cdot v_i$$
$$A^K \cdot v_i = \lambda_i^{K-1} \cdot \lambda_i \cdot v_i$$
$$\boxed{A^K \cdot v_i = \lambda_i^K \cdot v_i} \#$$

Demo más formal (usando Inducción):

- Primero demostremos que se cumple para $K=2$, es decir queremos demostrar que:

CB:

i) los valores propios de A^2 corresponden a $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_n^2$ y que cada vector propio de A es un vector propio de A^2, en efecto veamos que sea:

$$A \cdot v_i = \lambda_i \cdot v_i \;/\cdot A \qquad \text{para } i=1,\dots,n$$

$$A^2 \cdot v_i = A \cdot \lambda_i \cdot v_i$$

$$\Rightarrow A^2 \cdot v_i = \lambda_i \cdot A \cdot v_i$$

por la ecuación ① $A \cdot v_i = \lambda_i \cdot v_i$

$$\Rightarrow A^2 \cdot v_i = \lambda_i \cdot (\lambda_i \cdot v_i)$$

$$\boxed{A^2 \cdot v_i = \lambda_i^2 \cdot v_i} \qquad \text{para } i=1,\dots,n$$

por Definición, λ_i^2 es el valor propio de A^2 y v_i corresponden a los vectores propios de A^2, notemos que se cumple que los vectores propios de A^2 son los mismos que los de A y los valores propios son los de A elevado a K.

HI: Supongamos que se cumple para un K arbitrario, es decir que:

$$A^{K-1} \cdot v_i = \lambda_i^{K-1} \cdot v_i \qquad \text{para } i=1,\dots,n$$

PDQ: se cumple para K.

En efecto:

$$A^{K-1} \cdot v_i = \lambda_i^{K-1} \cdot v_i \;/\cdot A$$

$$A^K \cdot v_i = A \cdot \lambda_i^{K-1} \cdot v_i$$

$$A^K \cdot v_i = \lambda_i^{K-1} \cdot A \cdot v_i$$

por la def (ecuación 1)

$$A^K \cdot v_i = \lambda_i^{K-1} \cdot \lambda_i \cdot v_i$$

$$\boxed{A^K \cdot v_i = \lambda_i^K \cdot v_i}$$

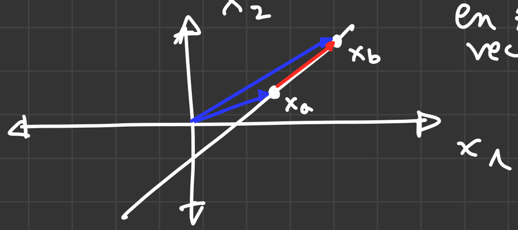
que era justamente a lo que queremos llegar.

(b) **Geometría**

I) Demuestre que el vector $\boldsymbol{w}$ es ortogonal a la recta $\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{x} + b = 0$

II) Argumente que la distancia desde el origen a la recta $\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{x} + b = 0$ es $\frac{|b|}{\|\boldsymbol{w}\|}$, donde $\|\boldsymbol{w}\|$ corresponde a la norma euclidiana.

I) Idea:



en rojo el vector director

Demo: sean x_a, x_b pertenecientes a la recta.

Director $= D = (x_b - x_a)$

en particular:
$$\begin{array}{r} w^T x_a + b = 0 \\ - \; w^T x_b + b = 0 \\ \hline \Rightarrow w^T(x_a - x_b) = 0 \end{array}$$
Restando las ecuaciones

Luego, como el producto punto entre w^T y $(x_a - x_b)$, el cual es un vector director de la recta $w^T x + b = 0$, es decir, vector que tiene la misma dirección que la recta, es igual a 0, $\therefore$ que son ortogonales, es decir:

$$w^T(x_a - x_b) = 0 \Rightarrow w^T \perp (x_a - x_b)$$

$$\Leftrightarrow w^T \perp w^T x + b = 0$$

$\therefore$ w es ortogonal a la recta $w^T x + b = 0$.

II) Por Definición tenemos que:

$$w^T x = \|w\| \cdot \|x\| \cdot \cos\theta = -b$$

Definición de producto punto

Distancia de un punto de la recta al origen

$$\|x - \vec{0}\| = \|x\| = \frac{-b}{\|w\| \cdot \cos\theta}$$

Como nosotros Buscamos la Distancia Desde el origen, esta corresponde a la menor Distancia De la recta al origen.

→ para encontrar la menor Distancia, Hay que máximizar $\cos(\theta)$, como

$\cos(\theta) \in \{-1, 1\}$

$$\therefore \|x\| = \frac{|b|}{\|w\|}$$

Corresponde a la Distancia normal del Origen a la recta :)

si b es positivo, se usa $|\cos(\theta)| = -1$ para obtener la menor Distancia.

→ si b es negativo, se utiliza $|\cos(\theta)| = 1$ para obtener la menor Distancia

2) Biología (Selección Natural):

La selección natural es un concepto que muestra que en el proceso de la evolución sobreviven/permanecen los que mejor se adaptan al medio. Por otro lado, nos dice que como sobreviven los que mejor se adaptan, estos se multiplicaran heredando sus rasgos que los hacen más capaces a adaptarse y sobrevivir en el medio.
Algo importante sobre la selección natural es que depende del ambiente, pues este "moldea" a los seres para que se adapten a estas condiciones.