Actividad 1 EL4106: Joaquín Zepeda

1. Álgebra lineal

Considere la matriz $\boldsymbol{X}$ y los vectores $\boldsymbol{y}$ e $\boldsymbol{z}$ definidos a continuación:

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(a) Calcule el producto interno $\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{z}$.

(b) Calcule el producto $\boldsymbol{X}\boldsymbol{y}$.

(c) ¿ Es posible encontrar una inversa para $\boldsymbol{X}$? Explique. Si lo es, calcúlela.

(d) ¿ Cuál es el rango de $\boldsymbol{X}$?

(a) $y^T \cdot z = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 11$ #

(b) $Xy = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 + 5 \cdot 3 \\ 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 10 \end{bmatrix}$

(c) ¿es posible encontrar X^{-1}? → veamos el valor de su determinante

$$\det(X) = 3 \cdot 3 - 5 = 9 - 5 = 4 > 0$$

Como el $\det(x) \neq 0$, la matriz X es invertible

Como $x \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, su inversa es de la forma:

$$X^{-1} = \frac{1}{\det(x)} \operatorname{adj} X \quad \Big| \quad X^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3/4 & -5/4 \\ -1/4 & 3/4 \end{bmatrix} \#$$

(d) El Rango es el nº de columnas l.i.

veamos que $\lambda_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$3\lambda_1 + 5\lambda_2 = 0$$
$$\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \rightarrow \lambda_1 = -3\lambda_2 \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = 0}$$
$$3\cdot(-3)\lambda_2 + 5\lambda_2 = 0$$
$$\Rightarrow -9\lambda_2 + 5\lambda_2 = 0$$
$$(-4)\lambda_2 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda_2 = 0}$$

$\therefore$ Son l.i

$\therefore$ Rango $(X) = 2$ (nº máx de columnas l.i)

2. Probabilidades y estadística

1. Considere un muestreo de datos S, resultante de lanzar 5 veces una moneda no cargada. Sea X_i, $i \in 1, ..., 5$ definida por :

$$X_i = \begin{cases} 0 & \text{si el lanzamiento } i \text{ es cara} \\ 1 & \text{si el lanzamiento } i \text{ es sello} \end{cases}$$

Asumiendo independencia entre los lanzamientos, si $S = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) = (1, 1, 0, 1, 0)$

(a) Calcule la media muestral para S.
(b) Calcule la varianza muestral, y su version insesgada.
(c) Calcule la probabilidad de observar S.
(d) Note que la probabilidad de observar S varía se se utiliza una moneda cargada. Calcule el valor de $P(X_i)$ que maximiza $P(S)$.

(a) $$\bar{S} = \frac{1}{5}(1 + 1 + 0 + 1 + 0) = \frac{3}{5} = 0.6$$

(b) $$\sigma^2 = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}(s_i - \bar{s})^2$$ varianza muestral sesgada

$$= \frac{1}{5}\left((1-0,6)^2 + (1-0,6)^2 + (0-0,6)^2 + (1-0,6)^2 + (0-0,6)^2\right)$$
$$= \frac{1}{5}(3\cdot 0.4^2 + 2\cdot 0.6^2) = 0.24 \ \#$$

insesgada $$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\cdot\sum_{i=1}^{n}(s_i - \bar{s})^2 = \frac{1}{4}(3\cdot 0.4^2 + 2\cdot 0.6^2)$$
$$= 0.30 \ \#$$

(c) la pbb de observar s es:

$$P(s) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^5$$ #

(pues es una moneda no cargada y los lanzamientos son independientes)

d) sea $P(x_i) = \begin{cases} 1-x & \text{lanzamiento } i \text{ es cara} \\ x & \sim \end{cases}$

$$P(s) = \underbrace{x^3}_{\text{3 veces sello}} \cdot \underbrace{(1-x)^2}_{\text{2 veces cara}}$$

Derivemos para encontrar $P(x_i)$ óptimo:

$$\frac{dP(s)}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow 3\cdot x^2\cdot(1-x)^2 + x^3\cdot 2(1-x)\cdot(-1) = 0$$

$$3x^2(1-x)^2 = 2x^3(1-x) \quad / \div (1-x)x^2$$

Supongo $x \neq 0$ pues no tiene sentido para el problema.

$$3\cdot(1-x) = 2\cdot x$$

$$3 - 3x - 2x = 0$$

$$-5x = -3$$

$$x = \frac{+3}{+5}$$ *

$\therefore$ $P(x_i)$ óptimo es igual a:

$$P(x_i) = \begin{cases} 1-\frac{3}{5} & \text{si el lanzamiento } i \text{ es cara.} \\ \frac{3}{5} & \text{si el lanzamiento } i \text{ es sello.} \end{cases}$$

$$P(s)_{max} = \left(\frac{3}{5}\right)^3\left(1-\frac{3}{5}\right)^2 = 0.35$$

2. Dada la distribución conjunta $P(X,Y)$ definida a continuación, calcule $P(X=T|Y=b)$

$P(X,Y)$		Y		
		a	b	c
X	T	0,2	0,1	0,2
	F	0,05	0,15	0,3

3. Demuestre que si X e Y son variables aleatorias independientes con valores en $\mathbb{R}$, $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$.

2) Valores posibles de X : T; F

Determinando las pbbs marginales:

$$\begin{cases} P_X(T) = \sum_{Y=\{a,b,c\}} P_{XY}(T,y) = P_{XY}(T,a) + P_{XY}(T,b) + P_{XY}(T,c) \\ \qquad = 0.2 + 0.1 + 0.2 = 0.5 \\ P_X(F) = \sum P_{XY}(F,y) = P_{XY}(F,a) + P_{XY}(F,b) + P_{XY}(F,c) \\ \qquad = 0.05 + 0.15 + 0.3 = 0.5 \end{cases}$$

$$P_Y(a) = P_{XY}(T,a) + P_{XY}(F,a) = 0{,}25$$
$$P_Y(b) = P_{XY}(T,b) + P_{XY}(F,b) = 0{,}25$$
$$P_Y(c) = P_{XY}(T,c) + P_{XY}(F,c) = 0.5$$

$$\therefore P_X(x) = \begin{cases} 0.5 & \text{si } x = T \\ 0.5 & \text{si } x = F \end{cases} \qquad P_Y(y) = \begin{cases} 0.25 & \text{si } y = a \vee y = b \\ 0.5 & \text{si } y = c \end{cases}$$

Luego: $$P(X=T|Y=b) = \frac{P_{XY}(T,b)}{P_Y(b)} = \frac{0.1}{0.25}$$

$$= 0.4$$ ※

3) Por Definición:

$$(i)\ E(XY) = \sum_{x}\sum_{y} xy \cdot P(x,y)$$

Si X e Y son independientes, entonces se cumple que:

$$(ii)\ P(x,y) = P(x)\cdot P(y)$$

Reemplazando (ii) en (i):

$$E(XY) = \sum_{x}\sum_{y} xy\, P(x)\cdot P(y)$$

Reordenando:

$$E(XY) = \sum_{x} x\, P(x) \sum_{y} y\, P(y)$$

Identificando las esperanzas:

$$\left.\begin{aligned} E(x) &= \sum_{x} x\, P(x) \\ E(y) &= \sum_{y} y\, P(y) \end{aligned}\right| \text{ Por Definición}$$

$$\therefore\ E(XY) = E(x)\cdot E(Y)$$

#

4. Si lanza un dado no cargado 60000 veces, la cantidad de veces que sale 2 debería ser cercana a 10000. Considerando el rango $[10000 - a, 10000 + a]$, ¿Qué valor debe tener a para que el intervalo contenga el número de ocurrencias del "2" con una probabilidad del 90 %? Utilice el teorema central del límite.

Veamos que el número de ocurrencias del "2" distribuye como Bernoulli,

pbb de exito (es decir que salga el "2") : $p = \frac{1}{6}$ → Dado no cargado.

$$P(X = x) = \begin{cases} 1-p & \text{si } x = 0 \text{ (fracaso)} \\ p & \text{si } x = 1 \text{ (exito)} \end{cases}$$

$$\bar{X} = p = 1/6$$
$$Var(X) = p(1-p) = 5/36$$

esto se debe a que distribuye como Bernoulli;

Recordando el TCL:

Como n es bastante grande →

el teorema central del límite nos dice que la distribución de las medias muestrales sigue una distribución normal.

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \approx N\left(\sum_{i=1}^{n} \bar{x}, \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2}\right)$$

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \approx N(\underbrace{n \cdot p}_{\mu}, \underbrace{\sqrt{n \cdot p(1-p)}}_{\sigma})$$

$N(\mu, \sigma)$

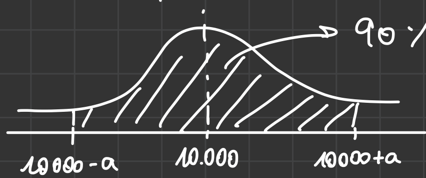
Reemplazando los valores:

$$\mu = n \cdot p = 60.000 \cdot \frac{1}{6} = 10.000$$

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p(1-p)} = \sqrt{60.000 \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{6}\right)} = 91.29$$

Queremos saber cual debe ser el valor de "a" tal que:

$$P(10.000 - a < Y < 10000 + a) = 90\%$$



Esto se puede descomponer como:

$$P(Y < 10000 + a) - P(Y < 10000 - a) = 90\%$$

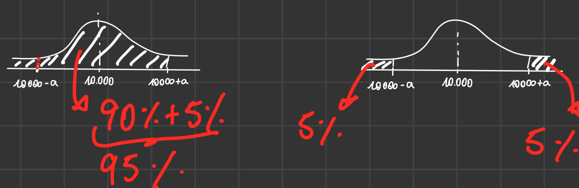
Para determinar los valores, normalizamos Y:

$$P\left(Z < \frac{10.000 + a - \mu}{\sigma}\right) - P\left(Z < \frac{10000 - a - \mu}{\sigma}\right) = 90\%$$

$$P\left(Z < \frac{a}{91.29}\right) - P\left(Z < \frac{-a}{91.29}\right) = 90\%$$

Debido a la simetria de la distribución normal, para que se cumpla la igualdad se debe cumplir:

$$\left.\begin{aligned} P\left(Z < \frac{a}{91,29}\right) &= 95\% \\ P\left(Z < -\frac{a}{91,29}\right) &= 5\% \end{aligned}\right\}$$



Luego, según la tabla de distribución normal, el Z_0 que corresponde al 95% es:

$$Z_0 = 1,65 \Rightarrow \frac{a}{91,29} = 1,65 \Rightarrow \boxed{a = 150,6285}$$

de 95%

3. Programación

Implemente los códigos pedidos a continuación utilizando el lenguaje Python 3.

(a) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \cos(x)\cos(y)\exp(-x^2/5)$

I) (**A mano**) Calcule ∇f

II) (**Programe**) Dibuje $\vec{F} = \nabla f$ en la región $(0, \pi) \times (0, \pi)$

(b) Escriba un programa que reproduzca el juego del "siete" mostrando los 100 primeros números. El juego consiste en recitar los números desde el 1 en adelante pero saltando aquellos que contienen el dígito 7 o son múltiplos de 7. Los números saltados se reemplazan por un aplauso. Su código debe imprimir en pantalla la secuencia:

1, 2, 3, 4, 5, 6, clap, 8, 9, . . . , 13, clap, 15, 16, clap, 18, . . .

(c) Implemente los métodos de la clase "ComplexNumber" contenida en el archivo "complex_number.py", la cual representa un número complejo y sus operaciones. El comportamiento esperado de "ComplexNumber" puede observarse en "test_complex_number.py". No está permitido importar ningún módulo ni librería. Para más información respecto a los métodos a implementar puede visitar en este link.

(a)

$$\underbrace{\nabla f(x,y)}_{\text{Gradiente de } f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\left[\operatorname{sen}(x) + \frac{2}{5}x\cos(x)\right]\cdot\cos(y)\cdot e^{-\frac{x^2}{5}} \\ -\operatorname{sen}(y)\cdot\cos(x)\cdot e^{-\frac{x^2}{5}} \end{pmatrix}$$

Desarrollo:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(y)\cdot\frac{\partial\left(\cos(x)e^{-\frac{x^2}{5}}\right)}{\partial x}$$

$$= \cos(y)\cdot\left[(-\operatorname{sen}(x))\cdot e^{-\frac{x^2}{5}} + \cos(x)\cdot e^{-\frac{x^2}{5}}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x^2}{5}\right)\right]$$

$$= \cos(y)\left[-\operatorname{sen}(x)\cdot e^{-\frac{x^2}{5}} + \cos(x)\cdot e^{-\frac{x^2}{5}}\cdot\left(-\frac{2}{5}x\right)\right]$$

$$= -\left[\operatorname{sen}(x) + \frac{2}{5}x\cos(x)\right]\cdot\cos(y)\cdot e^{-\frac{x^2}{5}} \quad \#$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial(\cos(y))}{\partial y}\cdot\cos(x)\cdot e^{-\frac{x^2}{5}}$$

$$= -\operatorname{sen}(y)\cdot\cos(x)\cdot e^{-\frac{x^2}{5}} \quad \#$$