1 Модель MA(1)

1.1 Исходные данные

- Обучающая выборка: $[2, 3]$
- Тестовая выборка: $[1]$

1.2 Постановка модели

Модель MA(1) имеет вид:

$$y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$$

где $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$.

1.3 Метод максимального правдоподобия

Функция правдоподобия:

$$L(c, \phi) = \prod_{t=1}^{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(\varepsilon_t)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Логарифмическая функция правдоподобия:

$$\ell(\mu, \theta) = -\frac{2}{2}\ln(2\pi) - \frac{2}{2}\ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=1}^{2}\varepsilon_t^2$$

Возмем $\varepsilon_0 = 0$:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= y_1 - \mu \\
\varepsilon_2 &= y_2 - \mu - \theta\varepsilon_1
\end{aligned}$$

Максимизация правдоподобия эквивалентна минимизации суммы квадратов:

$$S(\mu, \theta) = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 = (2 - \mu)^2 + [3 - \mu - \theta(2 - \mu)]^2$$

Минимизируем $S(\mu, \theta)$ по параметрам:

$$\frac{\partial S}{\partial \mu} = -2(2-\mu) - 2[3-\mu-\theta(2-\mu)](1-\theta) = 0$$
$$\frac{\partial S}{\partial \theta} = -2[3-\mu-\theta(2-\mu)](2-\mu) = 0$$

Решение системы уравнений:

$$\mu = 2$$
$$\theta = 1$$

1.3.1 Проверка через гессиан

Вычислим матрицу вторых производных:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \mu^2} = 2 + 2(1-\theta)^2$$
$$\frac{\partial^2 S}{\partial \mu \partial \theta} = 4(2-\mu)(1-\theta) + 2[3-\mu-\theta(2-\mu)]$$
$$\frac{\partial^2 S}{\partial \theta^2} = 2(2-\mu)^2$$

В точке $\mu = 2$, $\theta = 1$:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \mu^2} = 2$$
$$\frac{\partial^2 S}{\partial \mu \partial \theta} = 0$$
$$\frac{\partial^2 S}{\partial \theta^2} = 0$$

Матрица Гессе положительно полуопределена, что подтверждает найденное решение.

1.4 Прогноз

$$\varepsilon_1 = y_1 - \mu = 2 - 2 = 0$$
$$\varepsilon_2 = y_2 - \mu - \theta\varepsilon_1 = 3 - 2 - 1 \cdot 0 = 1$$
$$y_3 = \mu + \theta\varepsilon_2 = 2 + 0 + 1 \cdot 1 = 3$$

2 Модель AR(1)

2.1 Исходные данные

- Обучающая выборка: $[2, 3, 1]$
- Тестовая выборка: $[3]$

2.2 Постановка модели

Модель AR(1) имеет вид:

$$y_t = c + \phi y_{t-1} + \varepsilon_t$$

где $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$.

2.3 Метод максимального правдоподобия

Функция правдоподобия:

$$L(c, \phi) = \prod_{t=2}^{3} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y_t - c - \phi y_{t-1})^2}{2\sigma^2}\right)$$

Логарифмическая функция правдоподобия:

$$\ell(c, \phi) \propto -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=2}^{3} (y_t - c - \phi y_{t-1})^2$$

Максимизация правдоподобия эквивалентна минимизации суммы квадратов:

$$S(c, \phi) = (3 - c - 2\phi)^2 + (1 - c - 3\phi)^2$$

Система уравнений для нахождения минимума:

$$\frac{\partial S}{\partial c} = -2(3 - c - 2\phi) - 2(1 - c - 3\phi) = 0$$
$$\frac{\partial S}{\partial \phi} = -4(3 - c - 2\phi) - 6(1 - c - 3\phi) = 0$$

Решение системы уравнений:

$$c = 7$$
$$\phi = -2$$

2.4 Итоговые оценки

$$\hat{c} = 7$$
$$\hat{\phi} = -2$$

2.5 Прогноз

$$y_4 = c + \phi \cdot y_3 = 7 + (-2) \cdot 1 = 5$$