Introdução

Equações Diferencial Estocásticas - SDE, em sua sigla em inglês, são modelos matemáticos que incorporam a aleatoriedade para descrever sistema influenciados por processos randômicos. Diferente das equações diferenciais ordinárias (EDOs), que preveem resultados determinísticos, as SDEs levam em conta as flutuações aleatórias que ocorrem em muitos sistemas do mundo real.

Estrutura de uma SDE

Uma SDE é típicamente expressa na notação diferencial da seguinte forma:

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t$$

Os componentes principais são:

- dX_t: A mudança no processo estocástico ao longo do tempo.
- dB_t (ou dW_t): Representa o diferencial do **Processo de Wiener** padrão (ou **Movimento Browniano**), a fonte de aleatoriedade no sistema. É um processo com incrementos estacionários e independentes.
- $\mu(t, X_t)dt$: O **função de drift**, (ou **coeficiente de deriva/arrasto**). Ela governa a tendência do processo, ou seja, o movimento determinístico da trajetória ao longo do tempo, muitas vezes ligada à taxa média de mudança do sistema.
- $\sigma(t, X_t)dB_t$: O **função de difusão**, (ou **coeficiente de volatilidade**). Ela governa a magnitude da aleatoriedade (o "tamanho"das flutuações), introduzida pelo termo db_t, é a que captura as flutuações aleatórias, com dB_t representando o processo de Wiener (movimento Browniado).

Aplicações das SDEs

As SDEs são ferramentas fundamentais em diversas áreas, incluindo:

- **Finanças**: Modelagem de preços de ativos, taxas de juros e riscos de mercado para precificação de derivativos. O modelo de Black-Scholes para precificação de opções se baseia em uma SDE.
- **Física**: Descrição do movimento de partículas sujeitas a forças aleatórias, como o movimento browniano, e de sistemas com flutuações térmicas.
- **Biologia**: Modelagem da dinâmica populacional, com flutuações ambientais aleatórias, e propagação de epidemias.

- **Intelegência Artifical**: Simulação de sistemas complexos, aprimorando algoritmos que requerem raciocínio probabilístico.

Resolução de SDEs

A resolução de SDEs é complexa e requer técnicas especializadas do cálculo estocástico, como o Lema de Itô. Quando soluções analíticas não são possíveis, são utilizados métodos numéricos para aproximar as soluções, como:

- **Método de Euler-Maruyama**: Uma extensão do método de Euler para equações diferenciais ordinárias.
- **Esquema de Milstein**: Uma versão mais precisa do método de Euler-Maruyama.

O Gerador Infinitesimal

O termo "Gerador"se refere ao gerador infinitesimal do processo estocástico. Se X_t é um processo de Markov (o que os processos definidos por SDEs são tipicamente), o gerador infinitesimal, geralmente denotado por $\mathcal{A}$, é um operador que descreve como a esperança de uma função de X_t muda infinitesimalmente no tempo. Para o processo X_t dado, o gerador infinitesimal $\mathcal{A}$ atuando sobre uma função $f(t,x)$ é dados por:

$$\mathcal{A}f(t,x) = \mu(t,x)\frac{\partial}{\partial x}f(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2(t,x)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}f(t,x)$$

- O termo com a primeira derivada $\frac{\partial f}{\partial x}$ vem do coeficiente de drift(μ).
- O termo com a segunda derivada $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ vem do coeficiente de difusão (σ). Note que ele é multiplicadao por $\frac{1}{2}\sigma^2$, o que reflete a variação quadrática do Processo de Wiener.

Relação Fundamental (Fórmula de Itô): O gerador infinitesimal é crucial porque está ligado à Fórmula de Itô. Para uma função $f(t,X_t)$ suave, a Fórmula de Itô afirma que:

$$df(t,X_t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mathcal{A}f\right)(t,X_t)dt + \sigma(t,X_t)\frac{\partial f}{\partial x}(t,X_t)dB_t$$

Estudo de dois exemplos

$\sigma \approx cte$:ruído simples

Vamos considerar a seguinte SDE linear com ruído aditivo:

$$dX_t = aX_tdt + \sigma B_t$$

onde $\mu(t, X_t) = aX_t$ (o coeficiente de drift é lineart) e $\sigma(t, X_t) = \sigma$ (o coeficiente de difusão é constante).

O processo dado, $dX_t = aX_t dt + \sigma B_t$, é uma **Equação Diferencial Estocástica Linear** e sua solução analítica (exata) é encontrada usando a Fórmula de Itô.

$$X_t = X_o e^{at} + \int_0^t e^{as} dB_s$$

,

Onde:

- X_0 é a condição inicial.
- A integral $\int_0^t e^{as} dB_s$ é uma integral de Itô, que pode ser mostrada ser uma variável aleatória com distribuição normal. A solução X_t é, portanto, uma variável aleatória Gaussiana cuja média e variância são:
- **Média:** $E[X_t] = X_0 e^{at}$
- **Variância:** $Var[X_t] = \sigma^2 \frac{e^{2at}-1}{2a}$(se $a \neq 0$) ou $\sigma^2 t$ (se a = 0).

Simulação Numérica (Método de Euler-Maruyama)

Para simular numericamente a trajetória do processo estocástico, usaremos o método de Euler-Maruyama, ou seja, para um pequeno passo de tempo $h = \Delta t$, o esquema de EM é dado por:

$X_{i+1} = X_i + \mu(t_i, X_i)h + \sigma(t_i, X_i)\Delta B_i$ que no nosso caso fica$X_{i+1} = X_i + aX_i h + \sigma\sqrt{h} Z_i$

Onde:

- X_i é o valor do processo no tempo t_i.
- $h = \Delta t$ é o passo de tempo.
- $Z_i \approx N(0, 1)$ é uma variável aleatória Normal Gaussiana com média 0 e variância 1.
- $\Delta B_i = B_{t_{i+1}} = B_{t_i}$ é o incremento do Movimento Browniano, que é $\approx N(0, h)$.

$\sigma \approx \sigma(X_t)$:ruído multiplicativo

O caso de **ruído multiplicativo** onde $\sigma t, X_t = \sigma X_t$, ou seja, onde a volatilidade é proporcional ao valor atual do processo que é chamado de **Movimento Browniado Geométrico** que é dado pela SDE:

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t$$

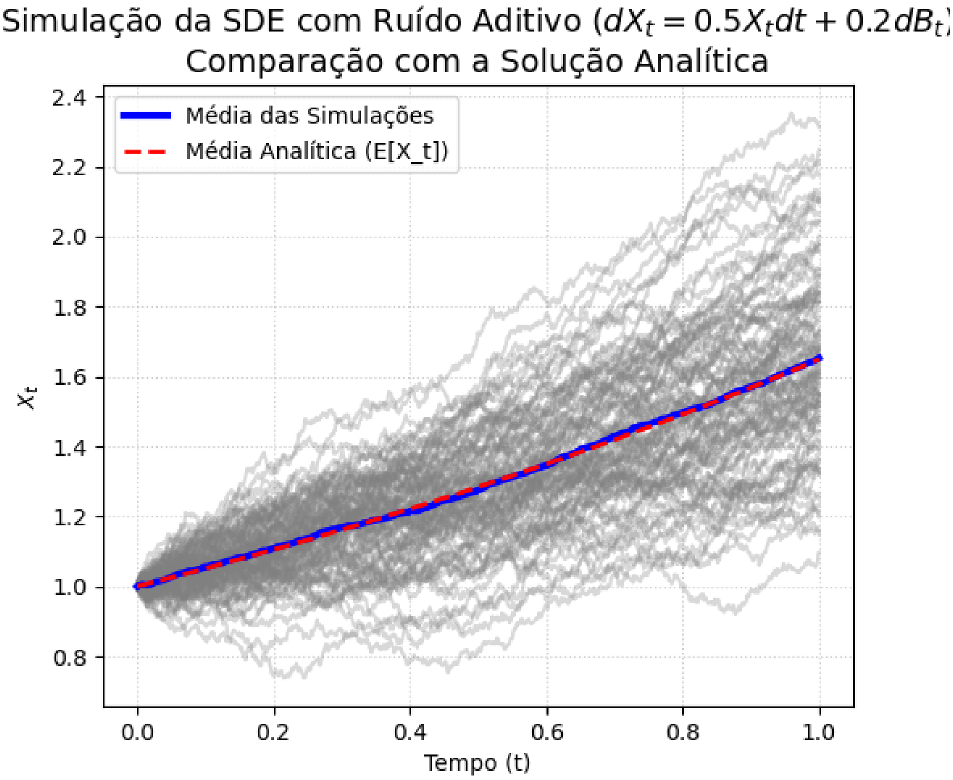

Figura 1 – Primeira simulação.

, Onde μ (drift) e o σ são constantes.

Aplicando a fórmula de Itô, temos:

$$X_i = X_0 exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma B_t\right\}$$

Onde:

- X_0 é a condição inicial.
- $B_i \approx N(0, t)$ é o Movimento Browniano no tempo t.

Como X_t é o exponencial de uma variável Gaussiana, X_t segue uma distribuição **Log-Normal**. Tais que:

- **Média:** $E[X_t] = X_0 e^{\mu t}$.
- **Variância:** $Var[X_t] = X_0^2 e^{2\mu t}(e^{\sigma^2 t} - 1)$

Usando simulação para a simulação numérica o método de Euler-Maruyama temos que:

$$X_{i+1} = X_i + \mu X_i h + \sigma X_i \sqrt{h} Z_i$$

Onde:

- X_i é o valor no tempo t_i
- $h = \Delta t$ é o passo de tempo.
- $Z_i \approx N(0, 1)$ é o ruido da normal padrão.

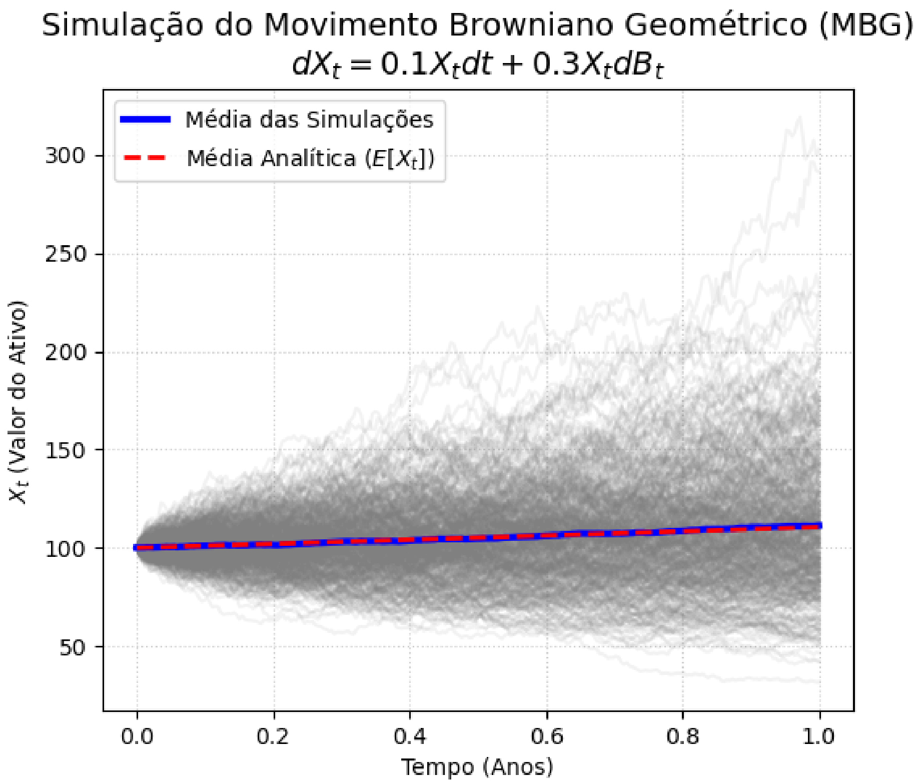

Figura 2 – Segunda simulação.