Alterado o coeficiente de drift para um valor negativo $a < 0$

Com a alteração de drift para um valor de $a < 0$, esperamos que o processo tenda a regredir ao longo do tempo. Segundo a teoria este é o princípio de modelos importanttes como o **Processo de Ornstein-Uhlenbeck (POU)**, que é usado para modelar a regressão à média. Neste caso a única alteração necessária será alterar o parâmetro a em nosso código anterior.

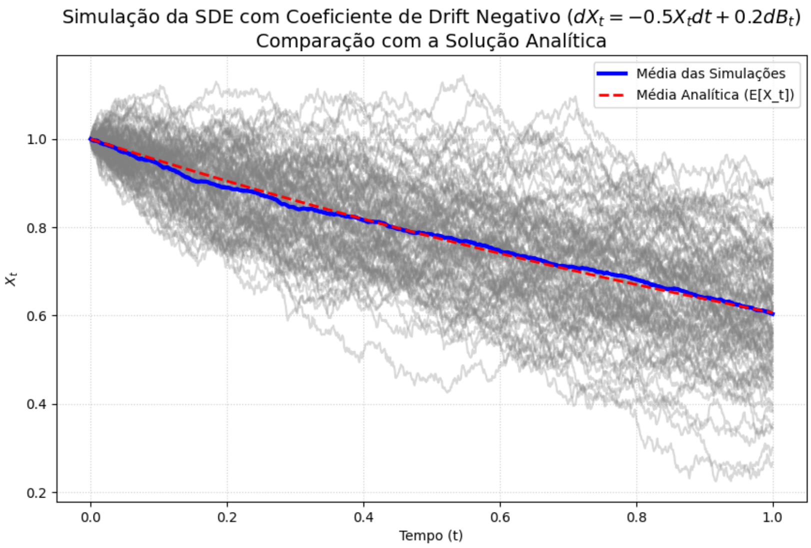

Figura 1 – Alterando drift para valores $a < 0$

Notamos que:

- **Decaimento:** Notamos que ao mudar o coeficiente de *drift* para $a = -0.5$, a componente determinística do processo (aX, dt) puxa o valor de X_t, em direção a zero.
- **Média exponencial decrescente:** A média teórica $(E(X_t) = X_0 e^{-0.5t})$ será uma curva exponencial decrescente, aproximando-se de zero conforte t aumenta.
- **Comportamento do ruído:** O ruído aditivo (σdB_t) mantém as trajetórias dispersas em torno dessa média decrescente.
-

Mantendo o coeficiente de *drift* negativo e variando os valores iniciais.

Realizaremos uma simulação onde estaremos variando tanto o valor do coeficiente a como os valores inicias X_0 para estudarmos seus comportamentos.

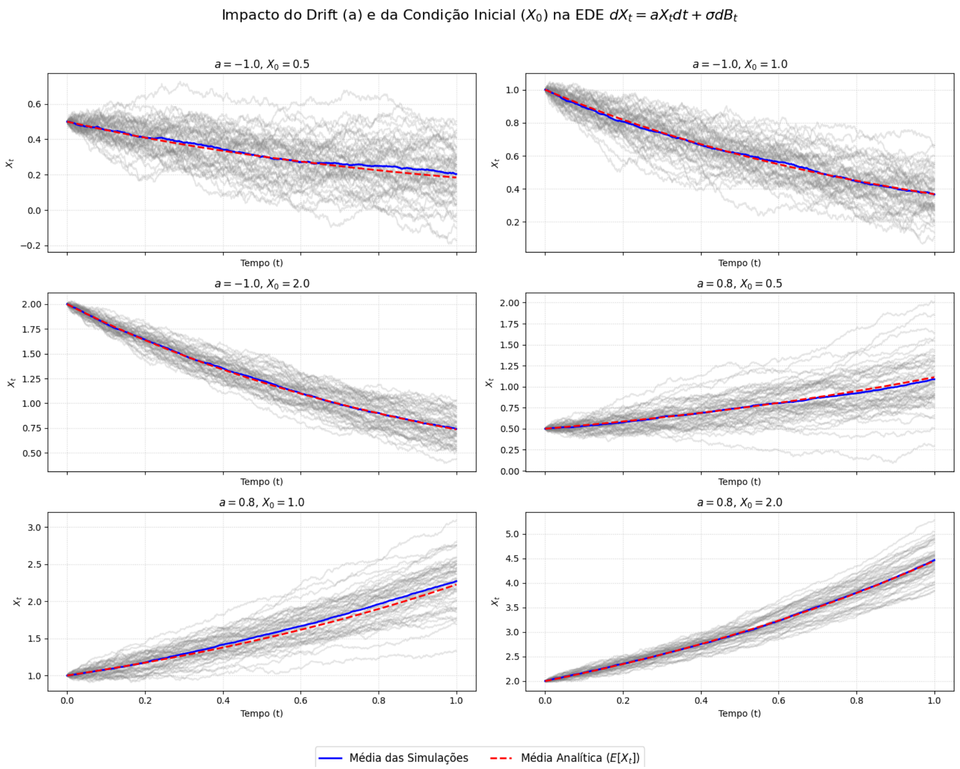

Figura 2 – Simulação com alterações de *drift* a e valor inicial X_0

Observações: Notamos que as alterações realizadas tanto no parâmetro de drift quanto no valor inicial X_0 verificamos os seguintes comportamentos:

a	X_0	Comportamento	Análise
-1.0	0.5	Decaimento em direção a zero	O valor esperado ($E[X_t]$) decai rápidamente de 0.5 para um valor próximo de zero. A variabilidade e menor porque os valores de X_t são menores.
-1.0	1.0	Decaimento em direção a zero	O valor esperado decai rápidamente de 1.0. A variabilidade é maior do que no caso $X_0 = 0.5$
-1.0	2.0	Decaimento em direção a zero	O valor experado decai rápidamente de 2.0. É o caso com a maior dispersão inicial, mas todas as trajetórias são puxadas para baixo devido ao forte *drift* negativo.
0.8	0.5	Crescimento exponencial	O valor esperado cresce exponencialmente a partir de 0.5. A dispersão aumenta significativamente ao longo do tempo.
0.8	1.0	Crescimento exponencial	O valor cresce exponencialmente a partir de 1.0. A variabilidade aumenta mais discretamente ao longo do tempo.
0.8	2.0	Crescimento exponencial	O valor cresce exponencialmente a partir de 2.0. A variabilidade cresce ao longo do tempo, porém é menor do que nas simulações anteriores.

Conclusões: No caso onde o coeficiente de *drift* é negativo o processo exibe uma **regressão exponencial em direção à média zero** que é puxado para baixo. Já no caso onde o coeficiente de *drift* é positivo o processo mostra um **crescimento exponencial.**

Estudo do segundo momento da equação $dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t$

O **Segundo Momento** de um processo estocástico $X_t, E[X_t^2]$, está diretamente relacionado com a **Variância do processo:**

$$Var(X_t) = E[X_t^2] - (E[X_t])^2$$

Onde $E[X_t]$ é o **Primeiro Momento** (a média), que analisamos anteriormente.

Análise da Equação

Seja $dX_t = aX_t dt + \sigma dB_t$ tais que a e σ são constantes, então o segundo momento ($E[X_t^2]$), usando a **Fórmula de Itô**, considerando $f(X_t) = X_t^2$ será igual a:

$$df(X_t) = \left(\mu(t, X_t)f'(X_t) + \frac{1}{2}\sigma^2(t, X_t)f''(X_t)\right) dt + \sigma(t, X_t)f'(X_t)dB_t$$

Para $f(X_t) = X_t^2$:

- $f'(X_t) = 2X_t$
- $f''(X_t) = 2$
- $\mu(t, X_t) = aX_t$
- $\sigma(t, X_t) = \sigma$

Substituindo na Fórmula de Itô:

$$df(X_t^2) = \left((aX_t)(2X_t) + \frac{1}{2}(\sigma^2)(2)\right) dt + (\sigma)(2X_t)dB_t = (2aX_t^2 + \sigma^2)dt + 2\sigma X_t dB_t$$

Integrando no intervalo 0 a t teremos:

$$X_t^2 - X_0^2 = \int_0^t (2aX_s^2 + \sigma^2)ds + \int_0^t 2\sigma X_s dB_s$$

.

Tomando a Esperança $E[.]$ em ambos os lados e lembrando que o valor esperado da integral de Itô é zeo $E[\int_0^t g(s, X_s)dB_s] = 0$ temos:

$$E[X_t^2] - X_0^2 = E[\int_0^t (2aX_s^2 + \sigma^2)ds]$$

Assumindo que X_0 é constante (não estocástico), e trocando a ordem de Esperança e Integral (Teorema de Fubini):

$$E[X_t^2] = X_0^2 + E[\int_0^t (2aE[X_s^2] + \sigma^2)ds]$$

Solução da EDO para o segundo momento

Se definirmos $M(t) = E[X_t^2]$, a equação anterior se torna uma Equação Diferencial Ordinária de primeira ordem:

$$\frac{dM(t)}{dt} = 2aM(t) + \sigma^2$$

com a condição inicial $M(0) = X_0^2$.

A solução da EDO é igual a:

$$E[X_t^2] = X_0^2 e^{2at} + \sigma^2 \int_0^t e^{2a(t-s)} ds$$

cuja solução:

$$E[X_t^2] = X_0^2 e^{2at} + \sigma^2 \frac{e^{2at} - 1}{2a} \text{ (para a } \neg 0)$$

Cálculo da Variância $Var[X_t]$

$$Var(X_t) = E[X_t^2] - (E[X_t])^2$$

$$Var(X_t) = E[X_t^2] - (E[X_t])^2 Var[X_t] = \left(X_0^2 e^{2at} + \sigma^2 \frac{e^{2at} - 1}{2a} - X_0 eat^2 \right) Var[X_t] = \sigma^2 \frac{e^{2at} - 1}{2a} \text{ (para}$$

Conclusões

1. A variância **não depende** do valor inicial X_0. Isso ocorre porque a EDE é linear e o ruído é **aditivo**. O termo de *drift* aX_t afeta a média, mas para a variância, o efeito do ruído domina.

2. **Impacto do *drift (a)***

   – $a > 0$ **(Crescimento):** A variância $Var[X_t]$ cresce exponencialmente com o tempo. O processo se torna cada vez mais disperso.

   – $a = 0$ **(Movimento Browniado com Drift):** Se tomarmos o limite de $a \to 0$, a variância é $Var[X_t] = \sigma^2 t$.

   – $a < 0$ **(Regressão à Média):** O termo e^{2at} decai para zero, e a variância converge para um valor constante de estado estacionário:

$$\lim_{t \to \infty} Var[X_t] = \sigma^2 \frac{-1}{2a} = \frac{\sigma^2}{|2a|}$$

A análise do Segundo Momento (variância) revela a **estabilidade** do processo. Um $a < 0$ garante que o processo é **Estacionário no sentido Amplo** (em inglês *Weakly Stationary*), pois sua variância converge para um valor finito.

Impacto do Drift (a) no Segundo Momento (Variância) da EDE Linear