Master CSMI
Méthode Galerkine Discontinu en 1D

Adama DIENG
Superviseur: Joubine Aghili

IRMA - Université de Strasbourg - 2 mois

August 21, 2024

Sommaire

1. Introduction
2. Méthode de Galerkine Discontinu en 1D
3. Résultats numériques en 1D
4. Application à l'équation de transport en 2D
5. Conclusion et Perspectives
6. Références

Introduction

$$u'(x) = f(x) \quad \text{sur} \quad (a, b) \quad \text{avec} \quad u(a) = u_a \quad \text{et} \quad u(b) = u_b$$

Méthode de Galerkine Continue Classique

- Approximation de $u(x)$ par des fonctions continues;
- Résolution:

$$-\int_a^b u_h(x)v'(x)dx + [u_h(x)v(x)]_a^b = \int_a^b f(x)v(x)dx$$

.

Méthode de Galerkine Discontinue

- Approximation de $u(x)$ par des fonctions **discontinues**;
- Résolution:

$$-\int_a^b u_h(x)v'(x)dx + \widehat{u}v|_a^b = \int_a^b f(x)v(x)dx$$

Introduction

Article de référence

.

Pour l'étude de la méthode de Galerkine Discontinue, on a utilisé l'article de Cockburn[1]

.

Objectif

- Implémenter une methode de type DG pour de type DG pour un problème 1D.
- Comprendre le rôle du flux numérique sur la stabilité d'un schéma DG.

Méthode de Galerkine Discontinu

Solution multi-valuée

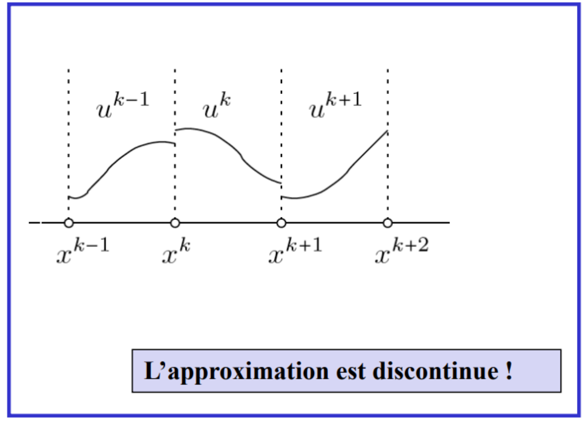

Figure: approximation discontinue en 1D [2]

Méthode de Galerkine Discontinu

Equation Différentielle Ordinaire(EDO)

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) = f(t)u(t) \quad t \in (0, T) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{1}$$

où $f(t)$ est une fonction donnée et u_0 est la condition initiale.

- Partitionner l'intervalle $(0, T)$ en $I^n = (t_n, t_{n+1}) \quad \forall n = 0, \cdots, N-2$.
- Trouver u_h de degré au plus k sur chaque intervalle I^n:

$$-\int_{I^n} u_h(s)\frac{d}{ds}v(s)ds + \widehat{u_h}v|_{t_n}^{t_{n+1}} = \int_{I^n} f(s)u_h(s)v(s)ds \tag{2}$$

$$u_h(t) = \sum_{i=0}^{k} u_i^n \phi_i^n(t) \tag{3}$$

important!!

- **Problème**: approximations discontinues entre les éléménts
- **Conséquence:** solutions instables, incohérentes etc.
- **Solution:** introduire la **trace numérique** $\widehat{u_h}$

Trace numérique

Définition:

$$\widehat{u}_h(t_n) = \begin{cases} u_0, & \text{si} \quad t_n = 0, \\ lim_{\epsilon \to 0} u_h(t_n - \epsilon), & \text{sinon.} \end{cases} \tag{4}$$

Détermination

- Calculée à partir des solutions aux interfaces;
- utilise les valeurs des éléments adjacents;

Stabilité DG

Posant $v = u_h$ dans (2), intégrant par parties et sommant sur n, on obtient:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \left(-\frac{1}{2} u_h^2 + \widehat{u}_h u_h \right) \Big|_{t_n}^{t_{n+1}} = \frac{1}{2} u_h^2(T^-) + \Theta_h(T) - \frac{1}{2} u_0^2 = \int_0^T f(s) u_h^2(s) d(s)$$

où

$$\Theta_h(T) = -\frac{1}{2} u_h^2(T^-) + \sum_{n=0}^{N-1} \left(-\frac{1}{2} u_h^2 + \widehat{u}_h u_h \right) \Big|_{t_n}^{t_{n+1}} + \frac{1}{2} u_0^2$$

Quelle propriété sur $\Theta_h(T)$ pour determiner explicitement $\widehat{u}_h$?

$$\frac{1}{2} ||u_h||^2_{L^2(0,T)} + \Theta_h(T) \leq \frac{1}{2} ||u_0||^2_{L^2(0,T)} \tag{5}$$

[3]

Stabilité DG

Notations:

$$\{u_h\} = \frac{1}{2}(u_h^+ + u_h^-), \quad [\![u_h]\!] = u_h^+ - u_h^-, \quad u_h^\pm = \lim_{\epsilon \to 0} u_h(t \pm \epsilon)$$

Définition explicite de $\widehat{u}_h$: Si on prenons:

$$\hat{u}_h(t_n) = \begin{cases} u_0, \quad \text{si} \quad t_n = 0, \\ (\{u_h\} + C^n[\![u_h]\!])(t_n), \quad \text{si } t_n \in (0, T), \\ u_h(T^-), \quad \text{si} \quad t_n = T, \end{cases} \tag{6}$$

où $C^n \geq 0$, on peut montrer que, avec $C^0 = \frac{1}{2}$:

$$\Theta_h(T) = \sum_{n=1}^{N-1} C^n[\![u_h]\!]^2(t_n) + \frac{1}{2}[\![u_h]\!]^2(0) = \sum_{n=0}^{N-1} C^n[\![u_h]\!]^2(t_n) \geq 0$$

Stabilité DG

Importance des coefficients C^n:

- Rôle des coéfficients de C^n:
  - Influence la convergence de la méthode DG;
  - Stabilité garantie pour $C^n \geq 0$;
- Impact sur la Précision:
  - $C^n = 0$: Ordre de précision $2k + 2$;
  - $C^n = \frac{1}{2}$: Ordre de précision $2k + 1$;

Assemblage des matrices

discretisation en 1D

- discrétisation de $(0, T)$ en $N-1$ intervalles I^n:

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} = T$$

$$(0, T) = \bigcup_{n=0}^{N-2} I^n \quad \text{avec } I^n = (t_n, t_{n+1}) \quad \text{pour } n = 0, 1, \dots, N-2$$

- Application de la formulation faible sur chaque élément I^n:

$$\int_{I^n} u_h(s) \frac{d}{ds} v(s) ds + \int_{I^n} f(s) u_h(s) v(s) ds - \widehat{u}_h v|_{t_n}^{t_{n+1}} = 0 \qquad (7)$$

- Substuer les expressions de $u_h = \sum_{i=0}^{p} u_i^n \phi_i^n(t)$, de $v = \phi_j^n$ pour $j = 0, 1, 3$ et de $\widehat{u}_h$ dans (6).

Matrices Locales

- Sur $I^0 = (t_0, t_1)$, on a:

$$\boxed{\sum_{i=0}^{p} \left\{ \int_{I^0} \left(f(s)\phi_i^0(s) + \frac{d}{ds}\phi_i^0(s) \right) \phi_j^0(s)ds + \left(-\frac{1}{2} - C^1 \right) \phi_i^0(t_1^-)\phi_j^0(t_1^-) \right\} \mathbf{u_i^0}}$$

$$+ \boxed{\left(C^1 - \frac{1}{2} \right) \sum_{i=0}^{p} \phi_i^1(t_1^+)\phi_j^0(t_1^-)\mathbf{u_i^1}} = \boxed{-u_0\phi_j^0(t_0^+)}$$

Sous forme matricielle, on obtient:

$$\begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U^0} \\ \mathbf{U^1} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Remarque: Il faudra noter que $Q1$ et $Q2$ sont des blocs de matrices $(p \times p)$, et $\mathbf{b}$ est un vecteur de taille p et que U^0 et U^1 sont aussides vecteurs de taille p.

Matrices Locales

- Sur $I^n = (t_n, t_{n+1})$ pour $n = 1, 2, \cdots, N-3$, on a:

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & Q1 & Q2 & Q3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{U^{n-1}} \\ \mathbf{U^{n}} \\ \mathbf{U^{n+1}} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$(Q_1)_{ij} = \left\{ \left(\frac{1}{2} + C^n \right) \phi_i^{n-1}(t_n^-) \phi_j^n(t_n^+) \right\}$$

$$(Q_2)_{ij} = \left\{ \int_{I^n} \phi_i^n(s) \left(f(s)\phi_j^n(s) + \frac{d}{ds}\phi_j^n(s) \right) ds \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{2} - C^n \right) \phi_i^n(t_n^+) \phi_j^n(t_n^+) - \left(\frac{1}{2} + C^{n+1} \right) \phi_i^n(t_{n+1}^-) \phi_j^{n+1}(t_{n+1}^+) \right\}$$

$$(Q_3)_{ij} = -\left(\frac{1}{2} - C^{n+1} \right) \phi_i^{n+1}(t_{n+1}^+) \phi_j^{n+1}(t_{n+1}^+)$$

Matrices Locales

- Sur le dernier intervalle $I^{N-2} = (t_{N-2}, t_{N-1})$, on a:

Sous forme matricielle, on obtient:

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & Q1 & Q2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{U^{N-3}} \\ \mathbf{U^{N-2}} \end{bmatrix}$$

$$(Q1)_{ij} = \left\{ \left(\frac{1}{2} + C^{N-2} \right) \phi_i^{N-3}(t_-^{N-2}) \phi_j^{N-2}(t_+^{N-2}) \right\}$$

$$\begin{aligned} (Q2)_{ij} = & \int_{I^{N-2}} \phi_i^{N-2}(s) \left(f(s)\phi_j^{N-2}(s) + \frac{d}{ds}\phi_j^{N-2}(s) \right) ds \\ & + \left(\frac{1}{2} - C^{N-2} \right) \phi_i^{N-2}(t_+^{N-2}) \phi_j^{N-2}(t_+^{N-2}) \\ & - \phi_i^{N-2}(T^-)\phi_j^{N-2}(T^-) \end{aligned}$$

Implémentation pratique

Voici les diffèrentes étapes de l'implémentation:

- **Etape 1:** Initialisation d'une classe, définition des paramètres du problème et des fonctions de base.
- **Etape 2:** Construction des matrices locales $Q1$, $Q2$ et $Q3$ selon chaque intervalle I^n.
- **Etape 3:** Assemblage des matrices locales pour obtenir une matrice globale A.
- **Etape 4:** Résolution du systeme lineaire $A\mathbf{u} = \mathbf{b}$ et estimation des erreurs.

Resultats numériques

Résultats

Dans le problème (1), on considère les données suivantes:

- $f(t) = -t^2$;
- $u_0 = 1$;
- $T = 5$;
- solution exacte: $u(t) = u_0 e^{\int_0^t f(s)ds}$.

Pour chaque valeur de C^n, on calcule l'erreur L^2 selon le degré k du polynome de base.

Résultats numériques

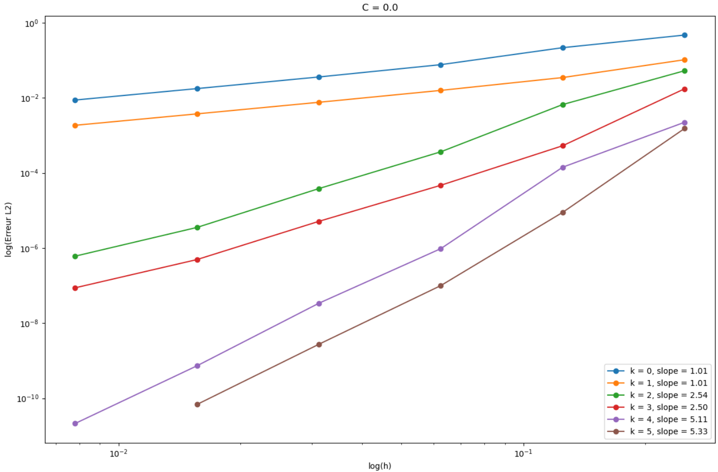

Figure: Erreurs et Pentes pour $C = 0$ pour chaque ordre polynomial k

Resultats numériques

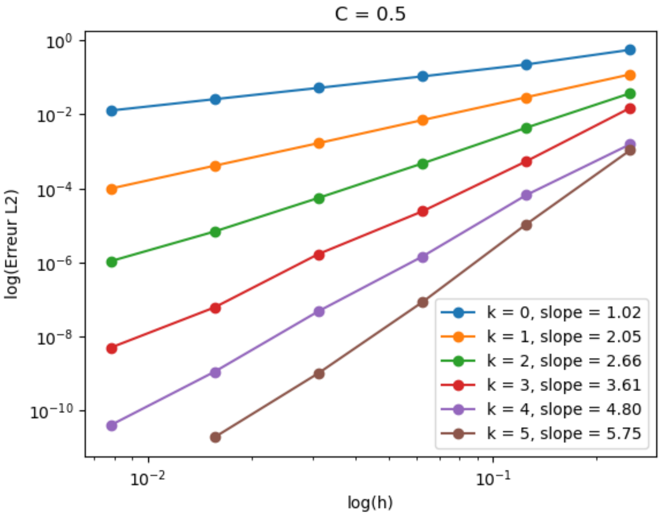

Figure: Erreurs et Pentes pour $C = 0.5$ pour chaque ordre polynomial k

Equation de transport en 2D

Présentation du problème

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{a}u) = 0, & \text{dans } \Omega \times (0, T) \\ u(t = 0) = u_0, & \text{dans } \Omega \end{cases} \tag{8}$$

où $\mathbf{a} = (a_x, a_y)$ est un vecteur fixé, $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$.

Formulation faible:

$$\int_K (u_h)_t v - \int_K \mathbf{a}u_h \cdot \nabla v + \int_{\partial K} \widehat{\mathbf{a}u_h} \cdot \hat{\mathbf{n}}^k v = 0 \tag{9}$$

où K est un élément du maillage, $\hat{\mathbf{n}}^k$ est la normale à un coté de K et et v est une fonction test.

Maillage du dommaine

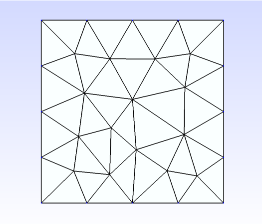

Figure: Maillage en 2D

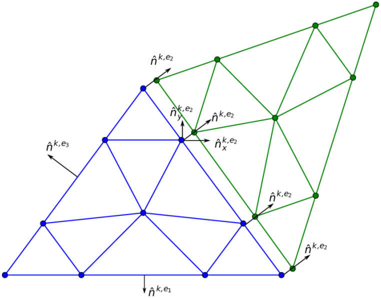

Figure: Normales aux cotés de l'élément [1]

Choix du flux et Stabilité

Choix du flux et Stabilité

$$\Theta_h(t) = \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\left(-\frac{1}{2}\int_K \nabla\cdot(\mathbf{a}u_h)(x,y,t)dxdy + \int_{\partial K}\widehat{\mathbf{a}u_h}\cdot\mathbf{n}u_h(x,y,t)ds\right) \tag{10}$$

$$\widehat{\mathbf{a}u_h^n} = \mathbf{a}\{u_h\} + C[\![u_h]\!]$$

$$avec \quad [\![u_h]\!] = u_h^-\mathbf{n}^- + u_h^+\mathbf{n}^+ \quad et \quad \{u_h\} = \frac{1}{2}(u_h^+ + u_h^-)$$

On obtient alors que:

$$\Theta_h(t) = \sum_{e\in\mathcal{E}_h}\int_e C[\![u_h]\!]^2 ds \geq 0$$

Ce qui assure la stabilité de la méthode pour le problème (7).

Assemblage des matrices élémentaires

Dans un element K, à un instant t^n, on considère:

$$u_h^n(x,y) = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i^{K,n} \phi_i^K(x,y) \quad \text{et} \quad v = \phi_j^K(x,y)$$

- **Matrice de masse:**

$$M = (M_{ij}) \quad \text{où} \quad M_{ij} = \int_K \phi_i^K(x,y)\phi_j^K(x,y)dxdy$$

- **Matrice de convection:**

$$S = (S_{ij}) \quad \text{où} \quad S_{ij} = \int_K \mathbf{a} \cdot \nabla \phi_i^K(x,y)\phi_j^K(x,y)dxdy$$

- **Matrice de flux:** Pour chaque bord $e_i \quad (i = 1, 2, 3)$, on a:

$$F = (F_{e_i}) \quad \text{où} \quad F_{e_i} = \int_{e_i} \left(\widehat{\mathbf{a}u_h^n} \cdot \hat{\mathbf{n}}^k \right) \cdot \phi_j^K(x,y)ds$$

Triangle de référence

Triangle de référence et fonctions de base

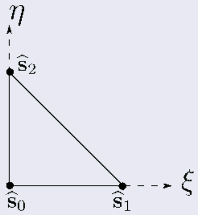

Figure: Triangle de référence [1]

$$\begin{cases} \hat{\phi}_1(\xi,\eta) = 1 - \xi - \eta \\ \hat{\phi}_2(\xi,\eta) = \xi \\ \hat{\phi}_3(\xi,\eta) = \eta \end{cases}$$

Transformation et matrice Jacobienne

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y_1 - y_0 & y_2 - y_0 \end{pmatrix}$$

Calculs sur le triangle de référence

Matrices élémentaires

- **Matrice de masse:**

$$\hat{M} = (\hat{M}_{ij}) \quad \text{où} \quad \hat{M}_{ij} = |J_K| \int_{\hat{K}} \hat{\phi}_i(\xi,\eta)\hat{\phi}_j(\xi,\eta) d\xi d\eta$$

- **Matrice de convection:**

$$\hat{S} = (\hat{S}_{ij}) \quad \text{où} \quad \hat{S}_{ij} = |J_K| \int_{\hat{K}} \mathbf{a} \cdot (T^{-1}\nabla_{\xi,\eta}\hat{\phi}_j(\xi,\eta))\hat{\phi}_i(\xi,\eta) d\xi d\eta$$

Système linéaire

On arrive au système linéaire suivant:

$$A\mathbf{U}^{n+1} = F$$

- $\mathbf{U}^{n+1} = [\alpha^{K,n+1}, \beta^{K,n+1}, \gamma^{K,n+1}]^T$: vecteur solution à l'instant t^{n+1},
- A est la matrice de taille $3N \times 3N$,
- F est le vecteur de taille $3N$ donné par:

$$F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} \qquad F_i = \begin{pmatrix} F_{e_1} \\ F_{e_2} \\ F_{e_3} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} M_1 + S_1 & -F_1 & 0 \\ -F_1 & M_2 + S_2 & -F_2 \\ 0 & -F_2 & M_3 + S_3 \end{pmatrix}$$

où M_i et S_i sont les matrices de masse et d'advection associées à l'élément i respectivement.

Implémentation 2D

Implémentation

- **Calculs sur le triangle de référence**
- **Assemblage des matrices**
- **Calculs des flux :** Difficultés à assembler les matrices de flux aux interfaces.

Codes sources

- `https://gitlab.math.unistra.fr/aghili/dg/-/blob/dieng-main-patch-68158/EquationTransport.py?ref_type=heads`

Conclusion et Perspectives

Résumé des Contributions :

- Théorie DG : Étude approfondie de la méthode DG, avec focus sur la stabilité L^2 et les flux aux interfaces.
- Implémentation 1D : Reproduction des ordres d'erreurs, résultats sous-optimaux dus au choix des fonctions de base.
- Extension 2D : Défis rencontrés lors de l'extension à l'équation de transport en 2D.

Perspectives :

- Optimisation 1D : Améliorer le choix des fonctions de base pour une meilleure précision.
- Finalisation 2D : Valider la méthode sur des cas simples comme l'advection scalaire constante.
- Applications Futures : Potentiel pour des simulations en mécanique des fluides et autres domaines complexes.

Références

Bharat Tripathi.
Discontinuous Galerkin Method for Propagation of Acoustical Shock Waves in Complex Geometry.
Acoustics [physics.class-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2015.
English. ffNNT : 2015PA066344ff. fftel-01297050f

Bernardo Cockburn.
Discontinuous Galerkin methods.
Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 2003, 83 (11), pp.731-754. 10.1002/zamm.200310088. hal-01352444

Delfour, M., W. Hager, and F. Trochu.
"Discontinuous Galerkin Methods for Ordinary Differential Equations. " Mathematics of Computation 36, no. 154 (1981): 455–73.
`https://doi.org/10.2307/2007652`

Références

- https://bthierry.pages.math.cnrs.fr/course-fem/_images/reference-triangle.svg
- https://perso.uclouvain.be/vincent.legat/documents/epl1110/annotated-2122-slides/epl1110-cours8-dg-2122.pdf
- Bernardo Cockburn.
  An Introduction to the Discontinuous Galerkin Method for Convection-Dominated Problems
  School of Mathematics, University of Minnesota,